1970 г. Сентябрь *Том 102, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

538.566

СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ *)

Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучению распространения волн в случайно-неоднородных средах уделяется за последние 10—15 лет все большее внимание. Повышенный интерес к этой проблеме вызван в первую очередь большим количеством актуальных прикладных задач, возникших в радиофизике, акустике, оптике, исследованиях плазмы и некоторых других областях физики. К классическим объектам теории — рассеянию света в атмосфере и прохождению излучения сквозь атмосферы звезд и планет — постепенно добавлялись новые явления, относящиеся к этой же проблеме. Диффузное отражение радиоволн от ионосферы; рассеяние звука и ультразвука в морской воде; так называемое сверхдальнее распространение ультракоротких радиоволн; некогерентное рассеяние радиоволн в ионосфере; мерцания внеземных источников радиоизлучения, обусловленные ионосферой и межпланетной плазмой; распространение в воздухе и в воде пучков лазерного излучения — таков примерный и, конечно, не исчерпывающий перечень возникавших задач, не говоря уже о чисто прикладных вопросах, касающихся точности измерения радиометодами координат объектов, движущихся в ионосфере или в космическом пространстве. Естественно, что обилие и разнообразие подобных задач стимулировало разработку и совершенствование статистических методов расчета волновых полей, распространяющихся в случайно-неоднородной среде или прошедших слой такой среды.

Данный обзор представляет собой попытку обрисовать существующие методы теории и границы их применимости, а также роль усиленно развиваемых в последнее время новых методов рассмотрения многократного

*) В сокращенном виде обзор был доложен на научной сессии Отделения общей физики и астрономии Академии наук СССР 30 октября 1969 г.

рассеяния волн таких, как марковское приближение в методе параболического уравнения, или как использование для суммирования рядов теории возмущений приемов, разработанных первоначально в квантовой электродинамике. Развитие теории происходит настолько интенсивно, что ряд новых результатов еще не отражен в имеющихся монографиях и обзорах *). Кроме того, оригинальные работы весьма многочисленны и разбросаны по журналам самых различных направлений, в силу чего даже частичная их систематизация с точки зрения используемых теоретических методов, вероятно, будет небесполезной.

Распространение волн в случайно-неоднородных средах — настолько обширная область, что авторы обзора сочли целесообразным ограничиться только вопросами *объемного* рассеяния в *сплошных* средах при *свободном* распространении. Таким образом, не затрагиваются ни отражение на случайно-неровных поверхностях, ни рассеяние на дискретных вкраплениях, таких как искусственные рассеиватели, аэрозоли, дождевые капли и снег в атмосфере, или пузырьки и рыбы в воде, ни распространение волн в случайно-неоднородных фидерах **).

Но и при этих ограничениях вопросы как самой теории, так и ее приложений остаются чрезвычайно разнообразными. Объектом приложений теории может быть, по сути дела, распространение волн в любой реальной среде — ионизированной или нейтральной,— поскольку любая такая среда, помимо возможной регулярной неоднородности (обычно весьма плавной в масштабе длины волны λ), обладает, как правило, и случайными вариациями параметров. В плазме, в частности, в межзвездной и межпланетной средах, а также в ионосферах планет, если выполнены условия феноменологического описания плазмы, речь идет о случайных неоднородностях электронной концентрации, температуры и магнитного поля. В нижней атмосфере и в морской воде — о пульсациях плотности, температуры, а также флуктуациях пассивных параметров, например, влажности в атмосфере, solености в морской воде и т. п. Все это приводит в конечном счете к флуктуациям скорости распространения волн. Среди причин возникновения таких случайных вариаций в первую очередь следует назвать турбулентность и тепловые флуктуации. Заметим, что, в сущности, только для этих флуктуаций показателя преломления среды известны реальные статистические характеристики (см., например, [2, 40–43]). Кое-что известно и относительно нетепловых флуктуаций в плазме [44–47].

При распространении волн, как электромагнитных, так и механических, флуктуации в среде обусловливают целый ряд явлений, внешне очень различных. По существу все сводится, конечно, к флуктуациям амплитуды, фазы и, возможно, поляризации волны, но при *наблюдении* приходится иметь дело и с мерцанием источников излучения, и с вариациями угла прихода, т. е. случайной рефракцией, которая проявляется, в частности, в размытии и дрожании изображений источников, и с флуктуациями поляризации в случае поперечных волн, и с рассеянием волн из ограниченного объема среды, и с пространственно-временно́й корреляцией флуктуаций волнового поля, его спектральным составом и когерентностью, и с поведением направленных волн, например, размыванием лазерных пучков или диаграмм направленности радиоантенн и т. п.

*) См. монографии Л. А. Чернова [1] и В. И. Татарского [2], отдельные разделы в книгах Е. Л. Фейнберга [3] и С. М. Рытова [4] и обзоры [5–15].

**) По рассеянию волн на шероховатых поверхностях имеется обширная литература. См., например, монографии [4, 16] и обзоры [17–20]. Большое количество работ посвящено и рассеянию на дискретных вкраплениях [21–34]. Относительно волн в случайно-неоднородных волноводах см. [35–39].

Как сказано, с теоретической точки зрения картина уже не столь пестра, но все же далеко не единообразна.

Если говорить о постановке задачи, то в принципе речь идет о *стохастическом волновом уравнении*. Конечно, в ряде случаев уравнения могут быть сложнее, чем уравнение Гельмгольца. Они могут содержать не только вторые, но и первые производные от волнового поля, могут быть векторными и образовывать систему связанных уравнений, как в случае электромагнитных волн или упругих волн в твердой среде. Однако основное, что характерно уже в простейшем случае скалярного волнового уравнения, заключается в том, что речь идет хотя и о линейном, но параметрическом уравнении: случайные функции точки и времени, описывающие флуктуации свойств среды, входят не аддитивно, не как «внешние силы», а как коэффициенты в самом уравнении. Если, например, временные вариации среды столь медленны, что их можно учитывать квазистационарным образом, то при монохроматическом источнике (первичной волне) волновое уравнение будет

$$\Delta u + k_0^2 \varepsilon (\mathbf{r},\ t) u = 0. \tag{1}$$

Случайная «проницаемость» $\varepsilon (\mathbf{r}, t)$ входит здесь множителем при искомой волновой функции u. В этом корень всех математических трудностей теории, так как находить точное решение такого волнового уравнения мы не умеем.

Отсюда возникает необходимость применения тех или иных приближенных методов, использующих всякую «малость», допускаемую условиями реальной задачи. Чаще всего это малость флуктуаций ε, ее отклонений от среднего значения. Это может быть также малость длины волны по сравнению с размерами неоднородностей и т. п. Именно на такие дополнительные ограничения опираются различные приближенные методы. Совершенно ясно, что одним из основных является при этом вопрос об области применимости результатов, даваемых тем или иным из таких методов. Зачастую этот вопрос оказывается далеко не простым, так как прямой путь сопоставления приближенного решения с точным закрыт. Следует заметить, что если бы он и был открыт, т. е. было бы известно точное решение, то это вовсе не означало бы ликвидации самого вопроса. Отнюдь не всегда целесообразно находить точное решение и затем упрощать его в соответствии с особенностями задачи, поскольку приближенный метод может дать то же самое, но быстрее и нагляднее.

Практически возникают задачи двух типов: прямая, в которой надо по известной статистике среды найти статистику волн, распространяющихся в этой среде, и обратная, состоящая в том, чтобы по измеренным моментам поля (корреляционным функциям, спектрам и т. п.) вынести суждение о свойствах случайных неоднородностей. Однако с точки зрения теории эти задачи равнозначны: нужна *связь* между обеими статистиками, установленная хотя бы для немногих первых моментов (среднее поле, средние билинейные величины и в том числе интенсивность, флуктуации самой интенсивности).

Переходя к описанию существующих приближенных методов, допустим для простоты, что среда в среднем однородна и стационарна, $\langle \varepsilon \rangle = \mathrm{const}$, а флуктуации квазистатичны, т. е. $\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle [1 + \tilde{\varepsilon} (\mathbf{r})]$. Отказ от обоих ограничений не встречает каких-либо принципиальных трудностей. Довольно просто можно распространить теорию и на среды, в среднем неоднородные и нестационарные, но, разумеется, при условии, когда и то, и другое достаточно плавно и медленно. Нетрудно также учесть и статистически стационарную зависимость флуктуаций от времени.

2. МЕТОД МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ. ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Если $\tilde{\varepsilon}$ достаточно мало, то естественно обратиться к методу возмущений — разложению u в ряд по степеням $\tilde{\varepsilon}$ или, точнее,— по степеням $\sqrt{\langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle}$. Записав (1) в виде

$$\Delta u + k^2 u = -k^2 \tilde{\varepsilon} u \qquad (k^2 = k_0^2 \langle\varepsilon\rangle) \tag{2}$$

и пользуясь функцией Грина однородной среды $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, можно представить (2) в виде интегрального уравнения

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) - k^2 \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\,\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}')\,u(\mathbf{r}')\,d^3\mathbf{r}'. \tag{3}$$

Здесь $u_0(\mathbf{r})$ — первичное поле, которое распространялось бы в среде в отсутствие флуктуаций. Решая (3) итерациями, получаем ряд теории возмущений

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) - k^2 \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\,\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1)\,u_0(\mathbf{r}_1)\,d^3\mathbf{r}_1 + \\ + k^4 \int\int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\,g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\,\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1)\,\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_2)\,u_0(\mathbf{r}_2)\,d^3\mathbf{r}_1\,d^3\mathbf{r}_2 + \ldots \tag{4}$$

n-й член ряда описывает n-кратное рассеяние и содержит под n-кратным интегралом произведение $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) \ldots \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_n)$. Таким образом, уже для вычисления $\langle u\rangle$ надо знать для $\tilde{\varepsilon}$ моменты $\langle\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) \ldots \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_n)\rangle$ любого порядка.

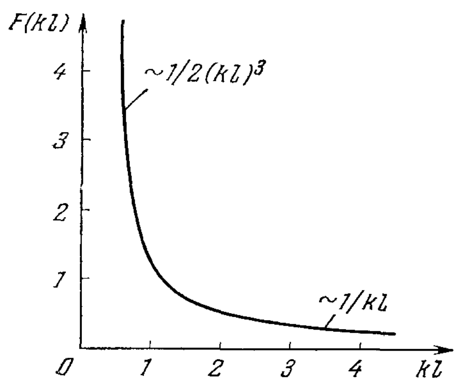

Рис. 1.

Но при определенных условиях, о которых речь пойдет ниже, можно ограничиться первым (после u_0) членом ряда. Это приближение *однократного* рассеяния, которое в оптических вопросах применял уже Релей и которое в квантовой механике часто называют борновским приближением. В этом приближении амплитуда первичного поля u_0 по мере углубления в среду не убывает (экстинкция не учитывается), а рассеянное поле линейно зависит от $\tilde{\varepsilon}$. Поэтому для вычисления функции корреляции рассеянного поля u_s и, в частности, его интенсивности $I_s \sim \langle|u_s|^2\rangle$ достаточно знать функцию корреляции $\tilde{\varepsilon}$, т. е. $B_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}) = \langle\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1)\,\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_2)\rangle$, где $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Все получается очень просто, и нетрудно дать оценку, когда это приближение допустимо.

Очевидно, энергия, рассеянная некоторым объемом среды L^3, должна быть гораздо меньше падающей на него энергии первичной волны [2, 4, 48]. Например, при гауссовой функции корреляции с радиусом корреляции l (это средний размер неоднородностей), т. е. при $B_\varepsilon(\rho) = \langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle e^{-\rho^2/l^2}$, получается условие

$$\langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle\,kL \ll \frac{1}{kl\,(1 - e^{-2k^2l^2})} \equiv F(kl). \tag{5}$$

Таким образом, ограничены сверху как интенсивность флуктуаций $\tilde{\varepsilon}$, так и путь L волны в среде: последний должен быть мал по сравнению с так называемой длиной экстинкции $d = F(kl)/k\langle\varepsilon^2\rangle$. Ход $F(kl)$ изображен на рис. 1.

Ограничение (5) тем жестче, чем больше $kl = 2\pi l/\lambda$, т. е. чем крупнее неоднородности по сравнению с λ. Это и понятно, так как с ростом kl диаграмма направленности (индикатриса) рассеяния на каждой неоднородности все более вытягивается вперед, в направлении распространения падающей на неоднородность волны, и, следовательно, все большее значение приобретает переизлучение на многих неоднородностях, многократное рассеяние.

Борновское приближение оказывается вполне достаточным в очень многих задачах, причем не только для скалярного, но и для электромагнитного поля. В особенности это относится к флуктуациям $\tilde{\varepsilon}$ теплового происхождения, которые обычно достаточно слабы. На основе борновского приближения всегда строилась теория релеевского рассеяния света [49-51]. Оно хорошо описывает и так называемое «некогерентное» рассеяние радиоволн в ионосферной и лабораторной плазме [42, 52-82]. В обоих указанных направлениях детальная теория однократного рассеяния помогает решать обратную задачу, т. е. находить параметры среды по наблюдаемым характеристикам рассеянного поля. При наличии же независимых методов измерения параметров среды можно проверять выводы самой теории рассеяния.

Так, например, измерения электронной концентрации в ионосфере методом некогерентного рассеяния были сопоставлены в работе [83] с результатами импульсного зондирования ионосферы и с данными, полученными при помощи дисперсионного интерферометра. При этом выявилось довольно хорошее количественное согласие.

В борновском приближении хорошо описывается и рассеяние УКВ на мелкомасштабных турбулентных неоднородностях тропосферы и нижней ионосферы — одна из возможных причин тропосферного рассеяния и так называемого сверхдальнего распространения УКВ, открытого в 1952 г. [85-105, 2, 5]. В этой задаче приходится принимать во внимание также регулярную рефракцию радиоволн, которая в отсутствие отражения от ионосферы может быть учтена в приближении геометрической оптики. Рефракция приводит к тому, что в определенных областях пространства напряженность первичного поля повышается и соответственно возрастает вклад этих областей в рассеянное поле [98, 106-111]. Наиболее сильно это явление выражено при рассеянии из области каустики (области отражения радиоволн) [112-115], где, кстати сказать, уже нельзя описывать первичное поле в лучевом приближении. Расчеты показывают, что слой, расположенный вблизи области отражения и составляющий 10—15% полной толщины неоднородного слоя, дает примерно такой же вклад в рассеянное поле, как и остальная часть ионосферы.

В литературе рассматривалось однократное рассеяние электромагнитных волн в изотропных [2, 3] и в анизотропных (гиротропных) средах [116-118], рассеяние звуковых волн [119-130, 2], рассеяние в неоднородной среде при наличии границы раздела [131-135], рассеяние импульсных и модулированных сигналов [136-139], влияние диаграмм направленности антенн [140-143], рассеяние на анизомерных неоднородностях [144, 2], временные и частотные корреляционные функции [2, 116, 136, 147, 148], рассеяние стоячей волны [149] и т. д. Можно указать еще на одну задачу, которая хотя и не содержит каких-либо принципиальных затруднений при расчете в борновском приближении, но представляет в настоящее время большой практический интерес. Мы имеем в виду рассеяние радиоволн на неоднородностях электронной концентрации в полярной ионосфере — так называемые «авроральные радиоотражения».

Количественная теория этого явления (в приближении однократного рассеяния) была развита в работах [150-153], причем в работе [152] были учтены практически все осложняющие факторы: анизотропия среды, регулярная рефракция, вытянутость неоднородностей по геомагнитному полю и др. Вытянутость неоднородностей (анизомерия) приводит к тому, что рассеяние назад обусловлено в основном теми из них, которые ортогональны к волновому вектору падающей волны (условие «ракурсной чувствительности», рис. 2). Именно поэтому «авроральные радиоотражения» наблюдаются в северном полушарии преимущественно с северного направления.

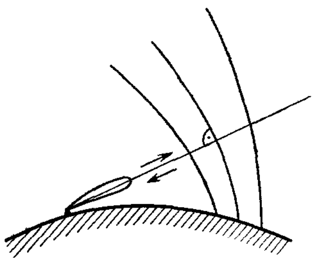

Рис. 2.

Возвращаясь к вопросам теории, следует отметить, что для описания *турбулентных* флуктуаций ε функция корреляции B_ε оказывается неудобной. Турбулентные флуктуации характеризуются непрерывным набором масштабов l, причем с укрупнением неоднородностей их удельный вес растет очень быстро. Однако в широком диапазоне l — от l_0 (внутренний масштаб турбулентности) до L_0 (внешний масштаб) — можно считать турбулентное поле *локально* однородным и изотропным и описывать его так называемой структурной функцией

$$D_\varepsilon(\rho) = \langle [\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) - \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_2)]^2 \rangle, \quad \rho = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|,$$

которая автоматически отсекает влияние слишком больших неоднородностей.

Если флуктуации ε вызваны турбулентными пульсациями температуры, то для $\tilde{\varepsilon}$ справедлив, как и для самой температуры, колмогоровский «закон 2/3»:

$$D_\varepsilon(\rho) = C_\varepsilon^2 \rho^{2/3} \qquad (l_0 \ll \rho \ll L_0).$$

Ему отвечает степенной пространственный спектр с плотностью

$$\Phi_\varepsilon(\varkappa) = A C_\varepsilon^2 \varkappa^{-11/3} \qquad \left(\frac{2\pi}{L_0} \ll \varkappa \ll \frac{2\pi}{l_0}\right).$$

Переход от B_ε к D_ε не затрагивает процедуры решения волнового уравнения, но, конечно, дает свои особенности [2]. В ряде задач, для которых масштабы наиболее существенных неоднородностей лежат в интервале (l_0, L_0), описание статистической структуры поля ε при помощи структурной функции оказывается более удобным, чем при помощи B_ε, так как при этом не вводятся «лишние» параметры. В то же время для других задач, для которых наиболее существенные масштабы выходят за пределы интервала (l_0, L_0), такое описание оказывается недостаточным. Например, в пределах «закона 2/3» уже нельзя найти экстинкцию, так как эффективный поперечник рассеяния расходится при $\varkappa \to 0$. Это означает, что экстинкция определяется столь большими неоднородностями ($l > L_0$), для которых уже нет изотропности.

3. РАССЕЯНИЕ НА КРУПНОМАСШТАБНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

По мере роста kl надо либо учитывать дальнейшие члены ряда теории возмущений (о чем речь пойдет в разделе 4), либо переходить к другим приближенным методам, в какой-то мере охватывающим многократное рассеяние и использующим малость параметра $1/kl \sim \lambda/l \ll 1$, т. е. примыкающим к геометрической оптике. Геометрооптическое приближение в задачах о распространении волн в случайно-неоднородных средах впервые использовал В. А. Красильников [154-157]. В дальнейшем к различным задачам (о некоторых из них будет сказано ниже) это применяли

Бергман [158], Эллисон [159], В. Я. Харанен [160], Мачмор и Уиллон [5], Л. А. Чернов [1], Бреммер [161], В. И. Татарский [2] и многие другие авторы.

К таким методам, приспособленным к случаю крупномасштабных неоднородностей, относятся *метод плавных возмущений*, предложенный С. М. Рытовым [162] для нестатистической задачи о дифракции света на ультразвуке, и *метод параболического уравнения*, впервые примененный М. А. Леонтовичем [163] для решения тоже нестатистической задачи о распространении радиоволн над земной поверхностью. К распространению волн в случайно-неоднородных средах первый метод (МПВ) был применен А. М. Обуховым в 1953 г. [164]. Что касается метода параболического уравнения (МПУ), то в *объемных* статистических задачах о распространении волн он впервые был использован лишь в 1964 г. Л. А. Черновым [165] и Л. С. Долиным [166].

Полагая в уравнении (1) $u = U(\mathbf{r})\, e^{-ikx}$, где координата x выделена направлением распространения первичной волны, мы получаем для комплексной амплитуды U уравнение

$$-2ik\frac{\partial U}{\partial x} + \Delta U = -k^2\tilde{\varepsilon}U.$$

Если $x \gg l \gg \lambda$, то $\left|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right| \ll 2k\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|$ (в порядке l/x), и тогда можно заменить полный лапласиан Δ на поперечный лапласиан $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, что и приводит к параболическому уравнению

$$-2ik\frac{\partial U}{\partial x} + \Delta_\perp U = -k^2\tilde{\varepsilon}U. \tag{6}$$

При использовании уравнения (6) часто говорят о диффузионном приближении. Происхождение такой терминологии ясно из вида левой части (хотя коэффициент диффузии мнимый, как в уравнении Шрёдингера), а физический смысл заключается в медленной поперечной диффузии энергии волнового поля при возрастании x.

Метод плавных возмущений (МПВ) отличается тем, что вместо U вводится комплексная фаза $\psi = S + i\chi$, где S — собственно фаза, а χ — логарифм амплитуды или так называемый *уровень*. Подстановка $U = e^{-i\psi}$ в (6) дает основное уравнение МПВ:

$$2k\frac{\partial \psi}{\partial x} + i\Delta_\perp\psi + (\nabla_\perp\psi)^2 = k^2\tilde{\varepsilon}, \tag{7}$$

которое, в отличие от (6), уже не пара~~метрическое~~болическое, но зато нелинейное.

Функции Грина левых частей параболического уравнения (6) и *линеаризованного* уравнения (7) (т. е. уравнения (6) при $\tilde{\varepsilon} = 0$ и уравнения (7) при $(\nabla_\perp\psi)^2 - k^2\tilde{\varepsilon} = 0$) отвечают так называемому параболическому или френелевскому приближению: вместо точной функции $-\frac{1}{4\pi R}e^{-ik(l-x)}$ берется $-\frac{1}{4\pi x}e^{-ik(y^2+z^2)/2x}$. Эта «укороченная» функция Грина пригодна для таких длин пути x волны в среде, для которых отношение площади зоны Френеля ($x\lambda$) к площади неоднородностей (l^2) мало по сравнению с l^2/λ^2:

$$\frac{\lambda x}{l^2} \ll \frac{l^2}{\lambda^2}.$$

Таким образом, при крупномасштабных неоднородностях ($l/\lambda \gg 1$) оба уравнения позволяют охватить области и фраунгоферовой дифракции $\left(1 \ll \frac{\lambda x}{l^2} \ll \frac{l^2}{\lambda^2}\right)$, и френелевской дифракции $\left(\frac{\lambda x}{l^2} \sim 1\right)$, и геометрической оптики $\left(\frac{\lambda x}{l^2} \ll 1\right)$ *). При этом даже в геометрическом приближении, поскольку $\frac{\lambda}{l} \ll 1$, вполне допустимо $\frac{x}{l} \gg 1$, т. е. на пути луча может находиться весьма большое число отдельных неоднородностей. Однако решать надо *полные* уравнения (6) и (7), а тогда, несмотря на первый их порядок по x, точное решение все равно не достижимо — из-за параметричности (6) и нелинейности (7). В результате и здесь приходится прибегать к процедуре возмущений, опирающейся на малость флуктуаций ε.

Прежде чем переходить к описанию этой процедуры, заметим, что, несмотря на принципиальную эквивалентность уравнений МПУ (6) и МПВ (7), результаты их решения методом возмущений отнюдь не всегда совпадают и имеют различные области применимости. В частности, «сфера действия» первого приближения МПВ ограничена условием малости флуктуаций уровня ($\langle\chi^2\rangle \lesssim 1$), тогда как МПУ пригоден и в области сильных флуктуаций амплитуды (подробнее об этом см. в пп. а) — в) данного раздела). Поэтому вопрос о том, какому из двух этих методов отдать предпочтение, в значительной мере связан с постановкой задачи. Например, если интерес представляет поведение фазы S, а не напряженности поля, то в этом случае удобней МПВ: если же нужно вычислить моменты самого поля, то лучше использовать МПУ.

Остановимся сначала на МПВ [1, 2, 4, 164].

а. Метод плавных возмущений

Разложение комплексной фазы в ряд $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots$, где ψ_n порядка $\langle\widetilde{\varepsilon}^2\rangle^{n/2}$, приводит к системе линейных уравнений последовательных приближений

$$\left.\begin{aligned} &2k\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + i\Delta_\perp\psi_1 = k^2\widetilde{\varepsilon}, \\ &2k\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + i\Delta_\perp\psi_2 = -(\nabla_\perp\psi_1)^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

правые части которых быстро усложняются с возрастанием n. Естественно, как и для борновского приближения, прежде всего остановиться на вопросе об условиях, при которых можно ограничиться первым приближением ψ_1. Вопрос этот не простой и им довольно много занимались, как у нас — в начале 60-х годов [2, 3, 170–173], так и за рубежом, где в 1964—1969 гг. возникла довольно оживленная дискуссия [174–185, 13, 528].

Дело в том, что исчерпывающего решения этого вопроса можно ожидать только от развернутой теории многократного рассеяния. В пределах же метода возмущений остается только одно: без большой уверенности в необходимости предъявляемых требований сравнивать второе приближение с первым.

Из такого сравнения вытекают очень жесткие ограничения для $\langle\chi_1^2\rangle$ и $\langle S_1^2\rangle$. Действительно, для уровня χ надо требовать выполнения условий $|\langle\chi_2\rangle| \ll 1$ и $\langle\chi_2^2\rangle - \langle\chi_2\rangle^2 \ll \langle\chi_1^2\rangle$. Но можно показать, что для плоской или сферической первичной волны $\langle\chi_2\rangle = -\langle\chi_1^2\rangle$ и

*) В турбулентной среде, т. е. при многомасштабных неоднородностях, надо, конечно, брать в этих неравенствах крайние значения l. Например, фраунгоферова зона лежит на таких дистанциях x, для которых $L_0^2 \ll \lambda x \ll l_0^4/\lambda^2$, что возможно лишь при $\lambda L_0 \ll l_0^2$. Область геометрической оптики отвечает $\lambda x \ll l_0^2$ [167, 1, 2], но, как показал Тэйлор [168, 169], для набега фазы область применимости геометрооптического приближения шире, а именно $\lambda x \ll 21 l_0^{7/6} L_0^{5/6}$.

$\langle\chi_2^2\rangle \sim a\langle\chi_1^2\rangle^2$ (a — коэффициент порядка единицы). Поэтому для среды с одномасштабными флуктуациями приведенные неравенства для χ_2 (и аналогичные неравенства для фазы S_2) приводят к условиям $\langle\chi_1^2\rangle \ll 1$ и $\langle S_1^2\rangle \ll 1$, которые эквивалентны, как легко видеть, условиям применимости борновского приближения. Как сказано, необходимость этих чрезвычайно жестких условий далеко не очевидна, и поэтому вывод об эквивалентности первого приближения МПВ и борновского приближения, т. е. теории однократного рассеяния (см., например, [186]), тоже нельзя считать обоснованным.

Действительно, еще в 1962 г. В. И. Татарский [173] обратил внимание на то, что условия малости поправок второго приближения должны ставиться для флуктуаций фазы иначе, чем для флуктуаций уровня, если нас, как обычно, интересует не полный набег фазы S, а лишь *разности* фаз — либо ∇S (случайная рефракция), либо $S(\mathbf{r}_1) - S(\mathbf{r}_2)$ при не слишком большой фазе $\rho = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ (интерференция, изображение источника в фокальной плоскости линзы). В таких случаях достаточно требовать, чтобы для базы выполнялось неравенство $D_{S2}(\rho) \ll D_{S1}(\rho)$. Оказывается, что для локально однородной и изотропной турбулентности $\langle\chi_2^2\rangle = a\langle\chi_1^2\rangle^2$ и $D_{S2}(\rho) = b[D_{S1}(\rho)]^2$, где a и b — числа порядка единицы, зависящие от показателя степени в пространственном спектре. Следовательно, поставленные условия принимают вид

$$\langle\chi_1^2\rangle \ll 1, \quad D_{S1}(\rho) \ll 1.$$

В турбулентной среде при «законе 2/3» первое из этих условий дает

$$\langle\chi_1^2\rangle \sim C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6} \ll 1.$$

Условие же малости структурной функции фазы ($D_{S1} \ll 1$) приводит (в «инерционном» интервале $l_0 \ll \rho \ll L_0$) к совсем другому неравенству, а именно

$$C_\varepsilon^2 k^2 x \rho^{5/3} \ll 1,$$

т. е. при достаточно малой базе ($k\rho \ll \sqrt{kx}$) ограничение флуктуаций разности фаз $S(\mathbf{r}_1) - S(\mathbf{r}_2)$ оказывается значительно слабее, чем ограничение дисперсии уровня *).

Был предпринят ряд попыток более точной оценки $\langle\chi^2\rangle$ на основании нелинейного уравнения (7), что требует суммирования ряда теории возмущений, построенного по величине $(\nabla_\perp\psi)^2$. Основная трудность состоит здесь в том, что для турбулентных флуктуаций оказывается $\langle\chi_n^2\rangle = c_n\langle\chi_1^2\rangle^n$, где числовые константы c_n представляют собой многократные интегралы. Поэтому в ряде для $\langle\chi^2\rangle$ не удается выделить главную подпоследовательность, дающую основной член разложения по новому малому параметру. Единственное, к чему приводит этот подход,— это заключение, что при «законе 2/3» (или другом автомодельном законе)

$$\langle\chi^2\rangle = f(\langle\chi_1^2\rangle).$$

Попытки установить явный вид функции f являются слишком грубыми [187–190, 2], и мы не будем на них останавливаться.

Поскольку теория пока не может надежно указать границы применимости первого приближения МПВ, естественно посмотреть, какие заключения можно сделать на основе экспериментальных данных.

*) Ограничение дисперсии фазы $\langle S_1^2\rangle$ зависит теперь от величины базы ρ. При $\rho \gg L_0$ (L_0 — внешний масштаб турбулентности) имеет место соотношение $D_{S1} \cong 2\langle S_1^2\rangle$, в силу которого неравенство $D_{S1} \ll 1$ означает $\langle S_1^2\rangle \ll 1$. Если же $\rho \ll 1$ и одновременно $\sqrt{\lambda x} \ll L_0$, то условие $D_{S1} \ll 1$ допускает значения $\langle S_1^2\rangle \gg 1$ при соблюдении неравенства $\langle\chi_1^2\rangle \ll 1$, т. е. ограничение $\langle S_1^2\rangle$ получается менее жестким, чем в борновском приближении.

Экспериментальная проверка хода $\langle\chi^2\rangle$ в функции от параметра $\langle\chi_1^2\rangle$, т. е. от интенсивности флуктуаций уровня, вычисленной в первом приближении, была выполнена в Институте физики атмосферы АН СССР, сначала М. Е. Грачевой и А. С. Гурвичем [191], М. Е. Грачевой [192] и А. С. Гурвичем и М. А. Каллистратовой [193] с некогерентным источником света, а затем при помощи лазера сотрудниками ИФА [194, 195] и американскими исследователями [196, 197]. Проведенные на приземной трассе измерения мерцаний источника света привели к результату [195], показанному

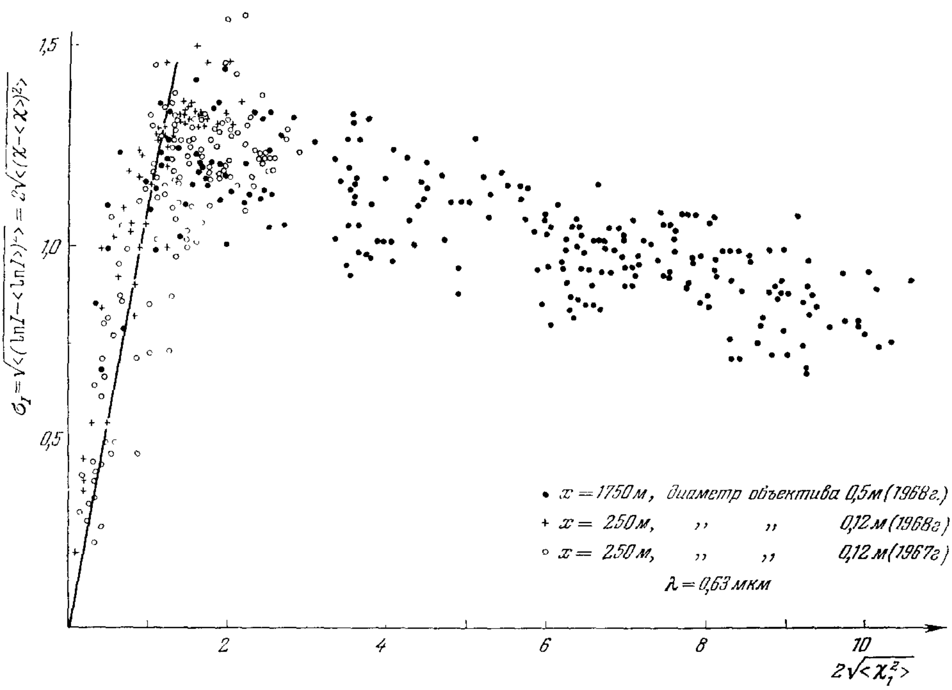

Рис. 3.

на рис. 3. Первое приближение работает до $\langle\chi_1^2\rangle \sim 1$, т. е. дальше, чем по поставленному выше условию. Затем $\langle\chi^2\rangle$ отходит от биссектрисы и, пройдя через максимум, начинает медленно убывать.

Экспериментально подтверждается и другое следствие первого приближения МПВ — о логарифмически нормальном законе распределения амплитуды поля, по крайней мере, при $\langle\chi_1^2\rangle \leqslant 1$ [191–195, 198–201] (см. также п. г) этого раздела).

Таким образом, опыт говорит, что первое приближение МПВ для уровня χ становится непригодным лишь при $\langle\chi_1^2\rangle \gg 1$. Для этой области (так называемой области сильных флуктуаций амплитуды) теория флуктуации уровня, основанная на МПВ, еще не может считаться завершенной.

В отношении флуктуаций фазы ситуация совершенно иная. Как показывает эксперимент [193], расчет флуктуаций фазы (случайной рефракции), выполненный в первом приближении МПВ, оказывается пригодным и в области весьма сильных флуктуаций уровня. Этот вывод подкрепляется и теоретическими оценками, полученными В. И. Кляцкиным [202].

Но результаты расчета флуктуаций фазы и углов прихода волны при помощи МПВ практически те же, что даваемые методом геометрической оптики (отличаются не более чем вдвое [1, 2]). Поэтому сказанное означает, что в области сильных флуктуаций уровня можно ожидать применимости и соответствующих геометрооптических расчетов фазы. Как показано в работе [203], область сильных флуктуаций амплитуды — это на языке геометрической оптики область сильно развитых каустик (см. рис. 4, где схематически представлена картина каустик в среде с неоднородностями при распространении в ней плоской волны). Естественно, что в этой области ни МПВ, ни тем более геометрическая оптика не могут дать (в первом приближении теории возмущений) правильных результатов для амплитуды. Но на величину флуктуаций фазы каустики практически не влияют (скачки фазы на $\frac{\pi}{2}$ при каждом касании каустики, очевидно, при $\langle S_1^2\rangle \gg 1$ несущественны). Можно думать, что и дифракционные эффекты слабее влияют на поведение фазы, чем амплитуды. Именно в силу этих причин первое приближение МПВ, несмотря на ограничение $\langle \chi_1^2\rangle \lesssim 1$, во многих случаях оказывается достаточным, и на его основе было сделано очень много работ.

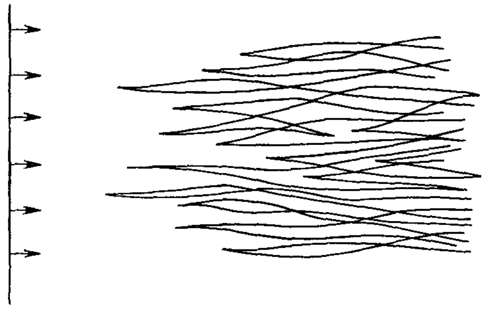

Рис. 4.

Заметим прежде всего, что первое из уравнений (8), если в нем восстановить полный лапласиан, допускает для ψ_1 *точное* решение

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \frac{k^2}{4\pi} \int \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}') \frac{U_0(\mathbf{r}')}{U_0(\mathbf{r})} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}',$$

где $U_0(\mathbf{r})$ — комплексная амплитуда первичного поля в среде без флуктуаций ε. Таким образом, ψ_1 можно находить при самых разнообразных формах первичной волны — не только для плоской волны [164, 1, 2, 4, 204], но и для сферической [2, 205–213], а также для пространственно-ограниченных пучков [214–229, 529–532]. Располагая $\psi_1(\mathbf{r}, \omega)$, можно вычислять различные корреляционные функции фазы и уровня, как пространственные, так и временные и частотные [1, 2, 4, 6, 13, 230–243], и применять их к решению различных задач, возникающих, например, при интерпретации наблюдений мерцания звезд [2, 244–251], при изучении распространения радиосигналов в межпланетной среде [252], распространения импульсных или модулированных сигналов [253–257] и т. д.

Указанные корреляционные функции используются также при нахождении эффективных параметров радиотехнических и радиоастрономических антенных систем (средняя диаграмма направленности, коэффициент направленного действия, предельная разрешающая способность в турбулентной среде и т. д.) [258–266, 533], параметров оптических приемных систем (предельное разрешение, качество передачи изображений через среду с неоднородностями, отношение сигнал/шум в системах с гетеродинированием и др.) *) [174, 208, 267–284, 511, 534–537], при исследовании флуктуаций

*) В число цитируемых здесь работ, посвященных антеннам и оптическим системам, включены работы, в которых вычисления параметров волны проводились при помощи не только МПВ, но и геометрической оптики и МПУ, а также работы, в которых использованы готовые статистические результаты из других публикаций. Объединение ссылок на все эти статьи в одном месте направлено к тому, чтобы подчеркнуть здесь *антенную* и *оптическую* специфику задач, а не особенности метода расчета статистических параметров. К тому же, в рамках предположений, сделанных в цитируемых работах, МПУ и геометрическая оптика дают практически те же результаты, что и МПВ.

в фокусе линзы [1, 2, 285–292], при учете влияния конечных размеров приемника и источника на флуктуации принятого сигнала [2, 212, 247, 294–298], при изучении рассеяния на проводящих телах, помещенных в среду со случайными неоднородностями [299] и т. д.

Не вызывает принципиальных затруднений распространение МПВ на случай анизотропных флуктуаций в среднем изотропной среды [206, 257, 300–303], а также на анизотропные случайно-неоднородные среды [161, 304], на среды с поглощением [305–309], на среды с медленным пространственным изменением среднего значения $\langle\varepsilon\rangle$, дисперсии $\langle\widetilde{\varepsilon}^2\rangle$ или структурной постоянной C_ε^2 [2, 6, 204, 208, 209, 212, 278, 284, 310–313]. При помощи МПВ рассматривались также вопросы о деполяризации световой волны [314–316] и о рассеянии радиоволн при их отражении от ионосферы [317]. Отметим еще предпринятую в [189] попытку осуществить частичное суммирование рядов теории возмущений для комплексной фазы $\psi = S + i\chi$, используя интегрирование по случайным траекториям. Иными словами, МПВ позволяет, как и борновское приближение, учитывать целый ряд всевозможных усложняющих факторов.

Разумеется, те же усложняющие факторы можно учесть и в приближении геометрической оптики. В этом приближении изучались флуктуации амплитуды и фазы плоских и сферических волн [1, 2, 318–328], волн в гиротропной среде [329–331], волн, вышедших из ионосферы [332] или прошедших через межпланетную среду [333], флуктуации в лазерных пучках [334–337] и изменения поляризации волны [335, 338]. Ряд работ посвящен изучению траекторий лучей в различных условиях: в изотропных средах [1, 2, 158, 160, 161, 203, 325, 339–343, 538], в гиротропных средах [344, 331], при наличии рефракции [325, 345, 346] и т. д. При надлежащем обобщении метод геометрической оптики позволяет описывать флуктуации параметров волны и в окрестности каустик [331, 346–349].

Можно отметить двоякую роль метода геометрической оптики в теории распространения волн в средах с крупномасштабными неоднородностями. С одной стороны, он служит эвристической основой для асимптотических методов, учитывающих дифракционные эффекты (МПВ, МПУ и их модификаций), причем эти методы зачастую непосредственно используют лучевые представления [2, 187–189, 202, 342, 350, 351]. С другой стороны, приближение геометрической оптики дает удовлетворительное *количественное* описание некоторых статистических характеристик волны, в первую очередь — ее фазы и угла прихода, о чем уже было сказано выше. Это особенно существенно для сред, в среднем неоднородных, для которых вычисления на основе МПВ затруднительны.

б. Метод параболического уравнения

Напомним, что в однородной среде ($\widetilde{\varepsilon} = 0$) уравнение (6) допускает при заданном значении поля на границе $x = 0$ точное решение

$$U(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i x} \int\limits_S U_0(\eta, \zeta)\, e^{-\frac{ik}{2x}[(y-\eta)^2-(z-\zeta)^2]}\, d\eta\, d\zeta, \qquad (9)$$

где $U_0(y, z) = U(x, y, z)|_{x=0}$. Это решение параболического уравнения часто используется и в статистических задачах, когда поле на границе случайно, а масштабы неоднородностей этого поля велики по сравнению с длиной волны. Иллюстрацией такого применения формулы (9) могут служить результаты, относящиеся к дифракции случайного (частично когерентного) волнового поля на отверстиях, размеры которых много больше λ [352–360], исследования характеристик больших антенн со случайными вариациями токов в раскрыве [361–368], а также упомянутые в предыдущем разделе исследования дифракционной картины в фокусе линзы [2, 285–292] (в последнем случае под знаком интеграла в (9) вводится фактор фокусировки $\exp(ik(\eta^2+\zeta^2)/2F)$, где F — фокусное расстояние).

К такого же типа задачам со случайными граничными условиями относится и часто применяемая модель тонкого фазового (или амплитудно-фазового) экрана, которым заменяют слой среды, содержащей объемные неоднородности. Именно в виду широкого использования такой замены, обусловленного в первую очередь существенным упрощением расчета статистических характеристик поля за экраном, эта модель не может быть обойдена, хотя задачи со случайными граничными условиями выходят за рамки данного обзора, посвященного вопросам теории объемного рассеяния.

Наиболее подробно разработана теория чисто фазового экрана [369–397]. При помощи этой модели были рассмотрены разнообразные задачи о распространении волн через ионосферу [96, 398–405], через межпланетную плазму [406–416], а в самое последнее время (после открытия пульсаров) — и через межзвездную плазму [417–419]. Модель фазового экрана позволяет исследовать распространение импульсных сигналов [420], усредняющее действие приемной апертуры [421, 422, 539], влияние горизонтальных градиентов [423] и возможное появление каустик [424].

Однако уязвимой стороной этой модели является вопрос об *эквивалентности* экрана.

Если под экраном понимается поверхность выхода волн из слоя среды с объемными неоднородностями и флуктуации фазы на этой поверхности вычисляются путем решения (скажем, при помощи МПВ или геометрической оптики) задачи об объемном рассеянии в слое, то поле за экраном будет найдено по формуле (9) вполне корректно, однако утрачивается основное преимущество модели — даваемое ею упрощение расчета. Если же свойства экрана *задаются*, то ясно, что результаты далеко не всегда смогут претендовать на хорошее количественное описание флуктуаций в волне, прошедшей фактически через объемную случайно-неоднородную среду. Сказанное относится, в частности, к интерпретации наблюдений мерцаний радиоисточников (квазаров) в межпланетной плазме. При больших угловых расстояниях источника от Солнца под вопросом находятся не только статистические характеристики эквивалентного экрана, но даже дистанция, на которой его следует располагать. Таким образом, необходимость применения МПУ к *объемному* рассеянию со всеми возникающими здесь трудностями — отнюдь не отпадает из-за упрощений, даваемых моделью тонкого экрана.

При применении МПУ к толстым слоям случайно-неоднородной среды естественно напрашивается мысль об использовании набора тонких фазовых экранов. Разбивая слой на ряд тонких «пластин» (толщина которых, однако, гораздо больше радиуса корреляции неоднородностей), можно попытаться применить к каждой такой «пластине» формулы тонкого экрана, подсчитывая набег фазы по методу геометрической оптики и используя «френелевскую» функцию Грина. Именно такой путь был избран в ряде работ [190, 372, 425–431] (машинный обсчет многослойной модели был предпринят в [432]).

Более последовательным является непосредственное применение уравнения (6), хотя бы и с разбиением среды на физически бесконечно тонкие «пластины». Используя этот прием и считая, что в пределах каждой «пластины» можно ограничиться первым приближением метода малых возмущений, а кроме того, учитывая коррелированность $U(\mathbf{r})$ только с теми неоднородностями, которые уже пройдены волной, Л. А. Чернов получил из уравнения (6) приближенные замкнутые уравнения для среднего значения $\langle U(\mathbf{r})\rangle$ и для моментов $\langle U(\mathbf{r}_1)\,U(\mathbf{r}_2)\rangle$ и $\langle U(\mathbf{r}_1)\,U^*(\mathbf{r}_2)\rangle$ [165, 433]. Такие же уравнения получил и Л. С. Долин [166, 434, 435], но иным способом (по существу при помощи суммирования рядов теории возмущений с точностью до членов порядка $\langle\widetilde{\varepsilon^2}\rangle$ *). Таким образом, в этих работах развивается подход, при котором на основе стохастического уравнения устанавливаются уравнения для усредненных билинейных величин. В дальнейшем были получены уравнения и для моментов $U(\mathbf{r})$ более высокого порядка [437-439] **). Аналогичная постановка задачи с использованием разбиения среды на «пластины» содержится также в [441, 442] в предположении, что флуктуационная компонента поля распределена по гауссовскому закону.

Более совершенный в методическом отношении подход (в частности, без разбиения среды на вспомогательные тонкие «пластины») был недавно развит применительно к тому же параболическому уравнению В. И. Татарским [443]. Остановимся на этой работе и последовавших за ней публикациях [444-448] несколько подробнее.

в. Марковское приближение

По сути дела, в [443] делаются те же физические допущения, что и у Л. А. Чернова [165, 433, 438], но формулировка их математически более прозрачна и допускает поэтому более четкую постановку задачи. Допущения, о которых идет речь, основаны на том, что флуктуации какого-либо параметра волны обычно связаны с неоднородностями определенного масштаба. Например, флуктуации интенсивности обусловлены в основном неоднородностями, поперечные размеры которых порядка радиуса зоны Френеля $\sqrt{\lambda x}$, флуктуации разности фаз на базе ρ—неоднородностями с поперечным масштабом $\sim\rho$ и т. п. Но если среда статистически изотропна, то это означает, что и *продольный* радиус корреляции наиболее существенных неоднородностей имеет тот же порядок величины.

Если длина трассы x намного превышает размеры существенных неоднородностей, то в задаче появляются малые параметры типа ρ/x или $\sqrt{\lambda x}/x$, и можно искать решение в виде разложения по этим малым параметрам. Первый член таких разложений можно получить, формально заменяя продольный радиус корреляции $\widetilde{\varepsilon}$ нулем, т. е. заменяя истинную корреляционную функцию $B_\varepsilon(x-x',\ \boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')$ на эффективную:

$$B_\varepsilon^{\text{эфф}}(x-x',\ \boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')=\delta(x-x')\,A(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'),\tag{10}$$

причем A определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_\varepsilon\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} B_\varepsilon^{\text{эфф}}\,dx=A(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}').$$

Как показал В. И. Татарский [443], для корреляционной функции вида (10) распространение волны в приближении параболического уравнения можно рассматривать как марковский случайный процесс и можно получить для моментов U *замкнутые* уравнения. Покажем это на примере уравнения для $\langle U\rangle$, следуя работе В. И. Кляцкина [444].

*) Из зарубежных публикаций ближе всего к МПУ примыкает работа Хафнагеля и Стэнли [174], хотя параболическое уравнение (6) в явном виде в ней не фигурирует. В работе [436] это уравнение было выведено, но решалось оно по существу в борновском приближении.

**) Результаты, эквивалентные решению методом возмущений выведенных в [439] уравнений, содержатся в [540].

Нетрудно преобразовать (6) к интегро-дифференциальному уравнению

$$U(x, \rho) = U(0, \rho)\, e^{-\frac{ik}{2}\int\limits_0^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho)\, d\xi} - \frac{i}{2k}\int\limits_0^x e^{-\frac{ik}{2}\int\limits_\eta^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho)\, d\xi} \Delta_\perp U(\eta, \rho)\, d\eta. \quad (11)$$

Усредняя теперь это уравнение, надо учесть, что в показателе экспоненты под интегралом по η значения $\tilde{\varepsilon}(\xi, \rho)$ берутся для $\xi > \eta$. Так как граничное условие для U в уравнении (6) ставится при $x = 0$, $U(\eta, \rho)$ функционально зависит лишь от значений $\tilde{\varepsilon}(\xi, \rho)$ при $\xi < \eta$ и не содержит последующих $\tilde{\varepsilon}(\xi, \rho)$ с $\xi > \eta$. Поэтому, в силу дельта-коррелированности $\tilde{\varepsilon}(\xi, \rho)$, величины $\Delta_\perp U(\eta, \rho)$ и экспонента под интегралом по η в (11) статистически независимы и усреднение (11) приводит к уравнению

$$\langle U(x, \rho)\rangle = U(0, \rho)\left\langle e^{-\frac{ik}{2}\int\limits_0^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho)\, d\xi}\right\rangle - \frac{i}{2k}\int\limits_0^x \left\langle e^{-\frac{ik}{2}\int\limits_\eta^x \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho)\, d\xi}\right\rangle \cdot \Delta_\perp \langle U(\eta, \rho)\rangle\, d\eta.$$

Если распределение $\tilde{\varepsilon}$ гауссово, то это уравнение сводится к дифференциальному:

$$-2ik\frac{\partial\langle U\rangle}{\partial x} + \Delta_\perp\langle U\rangle - \frac{ik^3 A(0)}{4}\langle U\rangle = 0, \quad (12)$$

которое имеет решение вида

$$\langle U(x, \rho)\rangle = U_0(x, \rho)\, e^{-x/2d_Б}, \quad (13)$$

где $U_0(x, \rho)$ — решение этого же уравнения при том же граничном условии в среде без флуктуаций (см. формулу (9)), а $d_Б$ — длина экстинкции, вычисленная в борновском приближении. Результат (13) получается и во втором приближении МПВ [2, 385] (либо из нормировки энергии поля к энергии первичной волны, как это сделано, например, в [1]), а также из приближения Бурре, о котором речь пойдет далее. Конечно, это не означает полной эквивалентности названных подходов. Например, результаты марковского приближения в отношении $\langle U\rangle$ и B_U (см. уравнение (14)) совпадают с тем, что дает второе приближение МПВ, но для четвертого момента (уравнение (16)) они уже расходятся.

Аналогичным путем можно получить и уравнения для любых моментов $\langle U(x, \rho_1) \ldots U^*(x, \rho_k)\rangle$, а также уравнения типа Эйнштейна—Фоккера для распределения вероятностей поля U. В частности, для второго момента (функции когерентности второго порядка) $B_U(x, \rho_1, \rho_2) = \langle U(x, \rho_1)\, U^*(x, \rho_2)\rangle$ получается уравнение

$$-2ik\frac{\partial B_U}{\partial x} + (\Delta_1 - \Delta_2) B_U - \frac{ik^3}{2}[A(0) - A(\rho_1 - \rho_2)]\, B_U = 0, \quad (14)$$

которое другим путем было ранее получено Л. С. Долиным и Л. А. Черновым [165, 166, 433—435] и эквивалентно уравнению переноса в малоугловом приближении (см. ниже).

Момент $(n+m)$-го порядка

$$M_{n,m}(x;\, \rho_1, \ldots, \rho_n;\, \rho_1', \ldots, \rho_m') \equiv$$
$$\equiv \langle U(x, \rho_1) \ldots U(x, \rho_n)\, U^*(x, \rho_1') \ldots U^*(x, \rho_m')\rangle$$

удовлетворяет уравнению [445]

$$\frac{\partial M_{n,m}}{\partial x}=\frac{1}{2k}(\Delta_1+\ldots+\Delta_n-\Delta_1'-\ldots-\Delta_m')M_{n,m}-\\ -\frac{k^2}{8}Q_{n,m}(\rho_1,\ldots,\rho_n;\ \rho_1',\ldots,\rho_m')M_{n,m}, \qquad (15)$$

где

$$Q_{n,m}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A(\rho_i-\rho_j)-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}A(\rho_k'-\rho_j)-\\ -\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}A(\rho_i-\rho_l')+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}A(\rho_k'-\rho_l').$$

В частности, для момента четвертого порядка $\Gamma_4=M_{2,2}$, определяющего флуктуации интенсивности:

$$\Gamma_4(x;\ \mathbf{R},\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2,\ \rho)=\left\langle U\left(x,\ \mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}+\frac{\rho}{4}\right)U\left(x,\ \mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}+\frac{\rho}{4}\right)\times\right.\\ \left.\times U^*\left(x,\ \mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{2}-\frac{\rho}{4}\right)U^*\left(x,\ \mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{2}-\frac{\rho}{4}\right)\right\rangle,$$

можно получить из (15) уравнение [443]

$$\frac{\partial\Gamma_4}{\partial x}=\frac{i}{k}(\nabla_R\nabla_\rho+\nabla_{r_1}\nabla_{r_2})\Gamma_4-\frac{\pi k^2}{4}F(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2,\ \rho)\Gamma_4, \qquad (16)$$

где

$$F(\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2,\ \rho)=H\left(\mathbf{r}_1+\frac{\rho}{2}\right)+H\left(\mathbf{r}_1-\frac{\rho}{2}\right)+H\left(\mathbf{r}_2+\frac{\rho}{2}\right)+\\ +H\left(\mathbf{r}_2-\frac{\rho}{2}\right)-H(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)-H(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$$

и

$$H(\rho)=\frac{1}{\pi}[A(0)-A(\rho)]=2\int\int_{-\infty}^{\infty}[1-\cos\varkappa\rho]\,\Phi_\varepsilon(0,\ \varkappa)\,d^2\varkappa.$$

Частный случай уравнения (16) был получен В. И. Шишовым [437] путем выборочного суммирования ряда теории возмущений и в [439] путем разбиения среды на слои *). Общее решение уравнения (14) было получено Л. С. Долиным [449] (см. также [450] и [435]) при помощи преобразования Фурье по переменной $\mathbf{R}=\frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)$. Оно имеет следующий вид:

$$B_U(x,\ \mathbf{R},\ \rho)\equiv\left\langle U\left(x,\ \mathbf{R}+\frac{1}{2}\rho\right)U^*\left(x,\ \mathbf{R}-\frac{1}{2}\rho\right)\right\rangle=\\ =\frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{+\infty}d^2\mathbf{R}'\int\int_{-\infty}^{+\infty}d^2\varkappa\exp\left\{i\varkappa(\mathbf{R}-\mathbf{R}')-\right.\\ \left.-\frac{\pi k^2}{4}\int_0^x H\left(\rho-\frac{\varkappa(x-\xi)}{k}\right)d\xi\right\}U_0\left(\mathbf{R}'+\frac{\rho}{2}-\frac{\varkappa x}{2k}\right)U_0^*\left(\mathbf{R}-\frac{\rho}{2}+\frac{\varkappa x}{2k}\right). \qquad (17)$$

---

*) Де-Вольфом [190] также была предпринята попытка просуммировать ряд теории возмущений для Γ_4, однако в этой работе необоснованно отброшены сильно связанные диаграммы, что, согласно [189], приводит к нормальному распределению вероятностей для поля и к релеевскому распределению амплитуды. Численное решение уравнений, выведенных в [437], дано в [540].

Здесь $U_0(\rho) = U(0, \rho)$ — заданное начальное распределение комплексной амплитуды поля *). Если, например,

$$U_0(\rho) = U_0 \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2a^2} + \frac{ik\rho^2}{2F}\right\}$$

(начальный пучок с гауссовским распределением амплитуды и с квадратичным распределением фазы) и флуктуации показателя преломления

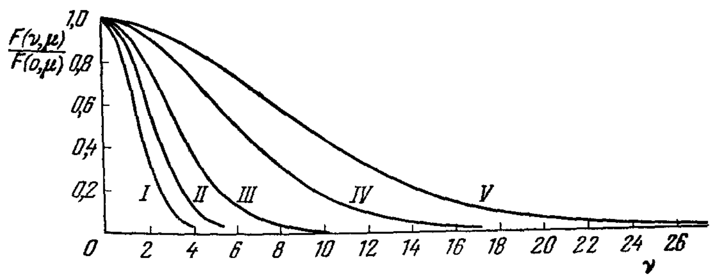

Рис. 5.

описываются «законом 2/3», то на основании (17) можно получить следующее выражение для средней интенсивности в пучке $\langle I(x, \mathbf{R})\rangle = \langle |U(x, \mathbf{R})|^2\rangle = B_U(x, \mathbf{R}, 0)$[446]:

$$\langle I(x, \mathbf{R})\rangle = I_0(x)\, F(\nu, \mu),$$

где

$$I_0(x) = \frac{k^2a^4U_0^2}{x^2g^2(x)}, \quad g(x) = \sqrt{1 + k^2a^4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{F}\right)^2},$$

$$\nu = \frac{2kaR}{xg(x)}, \quad \mu = 0{,}27C_\varepsilon^2k^2x\left(\frac{2a}{g(x)}\right)^{5/3},$$

$$F(\nu, \mu) = 2\int_0^\infty J_0(\nu t) \exp\left\{-t^2 - \frac{1}{2}\mu t^{5/3}\right\} t\, dt.$$

Графики функции $F(\nu, \mu)/F(0, \mu)$, представляющие собой профиль средней интенсивности в пучке, нормированный на интенсивность в центре пучка $\langle I(x, 0)\rangle$, приведены на рис. 5 в зависимости от безразмерного аргумента $\nu = \frac{R}{R_0}$, $R_0 = \frac{xg(x)}{2ka}$ для нескольких значений параметра μ, характеризующего интенсивность флуктуаций $\tilde{\varepsilon}$. На рис. 6 приводится значение интенсивности на оси пучка, нормированное на величину $I_0(x)$, представляющую собой интенсивность на оси пучка при отсутствии флуктуаций: $F(0, \mu) = \frac{\langle I(x, 0)\rangle}{I_0(x)}$.

*) Если начальное распределение поля является случайным, то под знаком интеграла в (17) вместо произведения $U_0U_0^*$ нужно писать начальное значение второго момента

$$B_{U_0} \equiv B_U\left(0;\ \mathbf{R}',\ \rho - \frac{x\varkappa}{k}\right),$$

и тогда формула (17) будет описывать распространение частично когерентной волны в среде с неоднородностями. Отметим, что состояние теории частично когерентных полей в вакууме, т. е. в отсутствие случайных неоднородностей, отражено в работах [451–453]. Для описания волн в случайно-неоднородных средах элементы этой теории первоначально были введены в работах [454, 455], где использовалось борновское приближение, и в [174], где применен подход, близкий к МПУ.

Что касается уравнения (16) для Γ_4, то в общем случае его решить не удается. Заметим, что уравнению (16) не удовлетворяет выражение Γ_4 в виде суммы произведений B_U, т. е. в том виде, какой Γ_4 имело бы при гауссовом распределении поля. Это непосредственно указывает на то, что

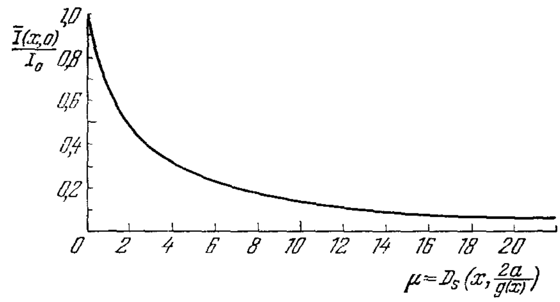

Рис. 6.

распределение U, вообще говоря, на гауссово. Легко получить, однако, один из интегралов этого уравнения. Для случая бесконечной плоской падающей волны имеет место соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int [\Gamma_4(x;\ \mathbf{R},\ \mathbf{r},\ 0,\ \boldsymbol{\rho}) - |B_U(x,\ \mathbf{R},\ 0)|^2\, d^2\mathbf{r} = 0. \tag{18a}$$

Для ограниченных пучков выполняется формула

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int d^2\mathbf{R} \int_{-\infty}^{\infty}\int d^2\mathbf{r}\,[\Gamma_4(x;\ \mathbf{R},\ \mathbf{r},\ 0,\ \boldsymbol{\rho}) - |B_U(x,\ \mathbf{R},\ 0)|^2] = 0. \tag{18б}$$

Соотношения (18a) и (18б) имеют простой физический смысл: они вытекают из закона сохранения энергии, в силу которого флуктуации интенсивности связаны лишь с перераспределением энергии внутри пучка.

Как и для B_U, уравнение для четвертого момента может быть записано в виде уравнения переноса излучения в малоугловом приближении [446]. Если искать Γ_4 в виде

$$\Gamma_4(x;\ \mathbf{R},\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2,\ \boldsymbol{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int e^{i\mathbf{p}\mathbf{R}}\, d^2\mathbf{p} \int_{-\infty}^{\infty}\int e^{i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}_2} d^2\boldsymbol{\varkappa}\,\varphi\left(x;\ \mathbf{p},\ \mathbf{r}_1,\ \boldsymbol{\varkappa},\ \boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{p}x}{k}\right),$$

то для функции $\varphi(x;\ \mathbf{p},\ \mathbf{r}_1,\ \boldsymbol{\varkappa},\ \boldsymbol{\rho})$ можно получить из (16) уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\boldsymbol{\varkappa}}{k}\nabla_{r_1}\varphi + \frac{\pi k^2}{4}\left[H\left(\mathbf{r}_1 + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) + H\left(\mathbf{r}_1 - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right)\right]\varphi =$$

$$= \pi k^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int \Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa}')\left[\cos\frac{\boldsymbol{\varkappa}'\boldsymbol{\rho}}{2} - \cos\boldsymbol{\varkappa}'\mathbf{r}_1\right]\varphi(x;\ \mathbf{p},\ \mathbf{r}_1,\ \boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}',\ \boldsymbol{\rho})\, d^2\boldsymbol{\varkappa}'. \tag{16a}$$

Величина φ является формальным аналогом потока энергии в уравнении переноса излучения. Как видно из (16a), «индикатриса рассеяния» и «коэффициент экстинкции» здесь являются функциями координат.

Уравнение (16a) можно решить приближенно, заменяя значение φ под знаком интеграла на известное начальное значение $\varphi_0 = \varphi(0;\ \mathbf{p},\ \mathbf{r},\ \boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}',\ \boldsymbol{\rho})$ («приближение однократного рассеяния» в том смысле, в каком этот термин употребляется в теории переноса излучения).

Если флуктуации диэлектрической проницаемости среды описываются «законом 2/3», то в этом приближении средний квадрат относительных флуктуаций интенсивности плоской волны $\beta^2(x) = \frac{\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle}{\langle I \rangle^2}$ является функцией от величины $\beta_0^2 = 0{,}3C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}$, найденной в первом приближении МПВ. Зависимость $\beta = f(\beta_0)$ приведена на рис. 7 [445]. В области сильных флуктуаций ($\beta_0 \gg 1$) корреляционная функция флуктуаций интенсивности, рассчитанная в «приближении однократного рассеяния», характеризуется двумя масштабами: $l_1 = \sqrt{\lambda x}\beta_0^{6/5}$ и $l_2 = (C_\varepsilon^2 k^3)^{-3/11} = \sqrt{\lambda x}/\beta_0^{6/11}$, $l_1 \gg l_2$. С масштабом l_2 связан размер неоднородностей интенсивности, а масштаб l_1 можно интерпретировать как среднее расстояние (в плоскости $x = \mathrm{const}$) между положительными и отрицательными флуктуациями I.

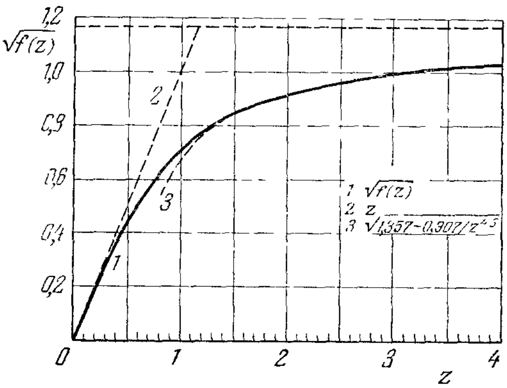

Рис. 7.

Кратко остановимся на вопросе о пределах применимости марковского приближения в МПУ. Когда делаются оценки границ применимости приближенной теории по оценке следующего члена разложения, то обычно нет уверенности в том, что дальнейшие (не учтенные члены разложения) не изменят результат.

В случае марковского приближения дело обстоит не так, ибо точное решение задачи, соответствующее случаю $l = 0$, получается независимым способом и совпадает с главным членом разложения по l.

Поправки к решениям марковского типа, обусловленные конечностью продольного радиуса корреляции диэлектрической проницаемости, рассмотрены в работах [444, 445], а в работах [445, 447] изучены условия, при которых можно использовать само параболическое уравнение в среде со случайными неоднородностями. Оказалось, что ограничения, связанные как с использованием параболического уравнения, так и марковского приближения, практически одинаковы и имеют вид

а) $\langle \tilde{\varepsilon}^2 \rangle kl \ll 1$; б) $\sigma_\alpha^2 \ll 1$; в) $\langle \tilde{\varepsilon}^2 \rangle kx \ll 1$.

Здесь $\sigma_\alpha^2 \sim \langle \tilde{\varepsilon}^2 \rangle \frac{x}{l}$ — средний квадрат флуктуаций направления распространения. Условие а) можно записать также в виде $\lambda\alpha \ll 1$, где $\alpha \sim \langle \tilde{\varepsilon}^2 \rangle k^2 l$ — коэффициент экстинкции и $\lambda\alpha$ — ослабление на длине волны. Условие в) можно записать в виде $\alpha x \ll \frac{l}{\lambda}$. Его смысл заключается в малости отраженных назад волн, и оно может выполняться и при больших значениях αx, так как $l \gg \lambda$. Помимо этих условий, естественно, должны выполняться чисто «геометрические» условия применимости параболического уравнения, указанные в начале раздела 3 $\left(\lambda \ll l,\ \frac{\lambda x}{l^2} \ll \frac{l^2}{\lambda^2}\right)$. Кроме того, марковское приближение становится справедливым лишь при $x \gg l$, т. е. в области $x \sim l$ происходит «процесс установления» марковского режима. В рамках этих условий на величину флуктуаций амплитуды поля никаких дополнительных ограничений не налагается. Укажем еще, что продольные корреляции поля в марковском приближении рассмотрены в работе В. И. Кляцкина [448].

г. Законы распределения флуктуаций в рассеянном поле

Остановимся на довольно сложном вопросе о законах распределения вероятностей флуктуаций. Не представляет труда написать уравнения для характеристического функционала поля u или логарифма поля $\ln u$, но эти уравнения содержат вариационные производные и разрешить их не удается. Однако подстановка в эти уравнения характеристических функционалов гауссовского типа показывает, что нормальное распределение для u или для $\ln u$ не является их решением.

В случае, когда пригодны первые приближения теории возмущений или МПВ, т. е. при достаточно малых флуктуациях u или $\ln u$, решение является *линейным* функционалом от $\tilde{\varepsilon}$. В силу центральной предельной теоремы, можно тогда утверждать, что закон распределения u (в области применимости борновского приближения) или $\ln u$ (в области применимости первого приближения МПВ) должен быть нормальным. В этом пункте проявляется существенное различие обоих названных приближений. Формально они ограничены условием малости флуктуаций u или $\ln u$, что на первый взгляд представляется равносильным. Однако из сравнения законов распределения вероятностей можно сделать вывод, что нормальное распределение для u можно считать частным случаем логарифмически нормального закона, когда малыми становятся флуктуации не только $\ln n$, но и самого u, т. е. борновское приближение можно рассматривать как частный случай первого приближения МПВ при рассеянии на малые углы (разумеется, возможны такие условия, когда борновское приближение применимо, а первое приближение МПВ — нет, например, когда $kl \ll 1$).

Сделать более определенные заключения о законах распределения флуктуаций можно было бы путем сравнения приближенных решений с точными. За неимением последних приходится аппелировать к экспериментальным данным.

Сравнение с такими данными было произведено в работах [191–195, 198–201, 541], в которых исследовались флуктуации света. Оказалось, что закон распределения для $\ln u$ в области относительно слабых флуктуаций амплитуды ($\sigma\chi = \sqrt{\langle x^2 \rangle} < 1$) очень близок к нормальному. Здесь следует отметить, что наблюдавшиеся значения флуктуаций, при которых еще хорошо оправдывалось логарифмически нормальное распределение амплитуды, не могут быть объяснены в рамках борновского приближения, в котором амплитуда распределена по закону Райса (смещенное релеевское распределение) и средний квадрат ее флуктуаций ограничен сверху *).

Закон распределения для разности фаз экспериментально исследован И. Г. Колчинским [251] при наблюдениях «дрожания» изображений звезд и тоже оказался очень близким к нормальному.

Возможно сравнение законов распределения вероятностей с результатами, основанными на точном решении задачи в описанном выше марковском приближении. Здесь оказывается, что вторые моменты поля

---

*) Вопрос о законе распределения амплитуды обсуждался недавно де-Вольфом [351], который обратил внимание на интересный результат Митчелла [456], заключающийся в том, что сумма умеренного числа величин, распределенных по логарифмически нормальному закону, распределена скорее по логарифмически нормальному, чем по гауссовскому закону. Возможно, это объясняет, почему в области сильных флуктуаций, где имеет место многолучевость, закон распределения амплитуды ближе к логарифмически нормальному, чем к райсовскому (или, на большей оптической глубине, к релеевскому).

$\langle U_1 U_2^* \rangle$, получаемые из решения уравнения (14), в точности совпадают с результатом, основанным на МПВ (с учетом *второго* приближения для $\langle \chi \rangle$) и на предположении о логарифмической нормальности поля. Но для четвертых моментов поля $\langle U_1 U_2 U_3^* U_4^* \rangle$, описывающих флуктуации интенсивности, такого совпадения уже нет. Отсюда можно сделать качественный вывод, что логарифмически нормальный закон распределения u хорошо выполняется в области малых значений поля и нарушается в области больших его значений (так как вклад в $\langle uu^* \rangle$ обусловлен более близкой к $|u| = 0$, областью кривой плотности распределения, чем вклад в $\langle (uu^*)^2 \rangle$). Другими словами, можно ожидать, что нормальный закон для флуктуаций уровня χ хорошо выполняется при $\chi < 0$ и нарушается в области больших положительных χ.

Из сравнения поведения вторых и четвертых моментов поля при увеличении дистанции x можно сделать еще один качественный вывод. Для тех моделей флуктуаций ε, которые не обладают конечным внешним масштабом (например, «закон 2/3»), четвертые моменты поля стремятся при $x \to \infty$ к пределу, *зависящему от вида спектра* ε). Это означает, что закон распределения поля в этом случае не является универсальным. Если же флуктуации ε имеют фиксированный радиус корреляции l. то при $x \to \infty$ ($\sqrt{\lambda x} \gg l$) предельное распределение поля будет, по-видимому, нормальным, как в задаче об эквивалентном экране.

4. ТЕОРИЯ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Общая теория многократного рассеяния получила развитие за последние семь лет, когда к рассматриваемым макроскопическим задачам был применен метод функций Грина, разработанный значительно ранее в квантовой электродинамике. Говоря более конкретно, были использованы полученные при помощи диаграммной техники Фейнмана [457, 458] уравнение Дайсона для среднего поля $\langle u(\mathbf{r}) \rangle$ [459] и уравнение Бете — Солпитера для ковариации $B_U = \langle u_1 u_2^* \rangle$ (или функции корреляции $\Psi_u = B_u - \langle u_1 \rangle \langle u_2^* \rangle$) [460]. Речь опять идет, таким образом, о выводе уравнений для усредненных величин. Но получить замкнутые уравнения такого рода путем усреднения исходных дифференциальных уравнений для поля u не удается из-за их параметричности: моменты разных порядков зацепляются. Поэтому приходится обращаться к решению (4), хотя оно и записано в виде ряда теории возмущений. Диаграммная техника позволяет осуществить формальное суммирование этого ряда, а также произведения двух таких рядов, что и приводит к уравнению Дайсона (Д.) и к уравнению Бете — Солпитера (Б.— С.).

Проблемы многократного рассеяния различных волновых полей на случайных ансамблях рассеивателей возникли в физике, конечно, значительно раньше аналогичных задач квантовой электродинамики, в которой речь идет, например, о распространении электронных волн при учете их взаимодействия с вакуумными флуктуациями электромагнитного поля (испускание и поглощение виртуальных фотонов) или, наоборот, о распространении электромагнитных волн при их взаимодействии с электронно-позитронным вакуумом (рождение и аннигиляция виртуальных электронно-позитронных пар). С многократным рассеянием уже давно столкнулись и в вопросе о прохождении излучения через атмосферы звезд и планет [461–466], и в задачах о рассеянии тепловых нейтронов [467, 468], заряженных частиц [469] и т. д. Обычно здесь применялось линеаризованное интегро-дифференциальное уравнение Больцмана, которое — в виду классического описания движения частиц или излучения по траекториям-лучам (т. е. описания в геометрооптическом приближении) —

представляет собой так называемое *уравнение переноса* (частиц или энергии). Типично волновые интерференционные эффекты при этом, конечно, не учитываются.

Первым, кто поставил задачу о многократном рассеянии *волн* и решил ее для модели точечных изотропных и некоррелировано разбросанных рассеивателей, был Фолди [470]. Эта работа на четыре года предшествует работе Дайсона и на шесть лет — работе Солпитера и Бете, но в ней в результате некоторых упрощений (пренебрежение различием между условными и безусловными средними) были получены уравнения типа Д. для среднего поля $\langle u\rangle$ и Б.— С. для средней интенсивности $\langle |u|^2\rangle$. Не касаясь дальнейшего развития результатов этой работы (анизотропные рассеиватели, положения которых коррелированы, см. [471–473]), отметим, что в теории рассеяния на *дискретных* рассеивателях диаграммная техника Фейнмана была впервые использована Ю. Н. Гнединым и А. З. Долгиновым [474] в задаче о рассеянии потока частиц на мишени, представляющей собой ансамбль некоррелированных рассеивателей с произвольной амплитудой рассеяния, а затем — уже при произвольной корреляции между положениями рассеивателей — Фришем [475]. Результатом и этих работ явились уравнения типа Д. и Б.— С.

Применение диаграммой техники к рассеянию волн в *сплошной* флуктуирующей среде берет свое начало с работ Бурре [476, 477] *). Он предположил, что параметры среды флуктуируют по нормальному закону и статистически независимы (локально) от искомого поля. Это привело к интегральным уравнениям Д. и Б.— С. с приближенными выражениями для ядер, пропорциональными корреляционной функции среды (B_ε). Указанные выражения называют приближением Бурре для ядра уравнения Д. и лестничным приближением для ядра уравнения Б.— С. (последнее название заимствовано из квантовой электродинамики). Кроме того, вместо средних функций Грина у Бурре вошли в уравнение Б.— С. функции Грина свободного пространства ($\tilde{\varepsilon} = 0$).

Более общий вывод обоих уравнений при нормальном законе для флуктуаций среды принадлежит В. И. Татарскому и М. Е. Герценштейну [482] и В. И. Татарскому [483, 2] (см. также [484, 542]), а при допущении отклонений от нормального закона — Фришу [475, 11].

Как же выглядят уравнения Д. и Б.— С.?

Пусть $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — искомая функция Грина, т. е. удовлетворяющее условию излучения на бесконечности решение уравнения

$$\Delta G + k^2(1+\tilde{\varepsilon})G = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \tag{19}$$

а $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — по-прежнему функция Грина в однородной среде ($\tilde{\varepsilon} = 0$). Уравнение Д. для $\langle G\rangle$ есть

$$\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\rangle = g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int\int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) M(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\langle G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0)\rangle\, d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2, \tag{20}$$

или в символической (операторной) форме

$$\langle G\rangle = g + \hat{g}\hat{M}\langle G\rangle, \tag{21}$$

где «ядро» M, называемое *массовым оператором* **), представляет собой бесконечный ряд — сумму так называемых сильно связанных диаграмм без внешних линий распространения.

*) Независимо от Бурре на применимость диаграммой техники при нормальных флуктуациях ε указал Фурутцу [478–481].

**) В теории многократного рассеяния волн этот оператор более уместно называть поляризационным, особенно если иметь в виду электромагнитные волны [15].

Аналогичный вид имеет и уравнение Б. — С. Для смешанного момента $B_G = \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0')\rangle$ оно записывается следующим образом:

$$B_G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \mathbf{r}', \mathbf{r}_0') = \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0')\rangle + \int\int\int \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_3)\rangle K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \times B_G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0; \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_0')\, d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{r}_3 d^3\mathbf{r}_4, \quad (22)$$

или в операторной форме

$$B_G = \langle G\rangle \langle G^*\rangle + \langle \hat{G}\rangle \langle \hat{G}^*\rangle \hat{K} B_G. \quad (23)$$

В качестве «ядра» оно содержит *оператор интенсивности* K (название введено Фришем [475]), зависящий от четырех аргументов и тоже представляющий собой сумму сильно связанных, но двухрядных диаграмм без внешних линий распространения.

Внешне оба уравнения выглядят как линейные интегральные уравнения, но фактически это не так. «Ядра» M и K — это бесконечные ряды, суммирование которых реально неосуществимо и о сходимости которых при сильных флуктуациях ε ничего не известно. Более того, если бы даже удалось просуммировать эти ряды, то M и K получились бы в виде функционалов от искомых функций $\langle G\rangle$ в B_G, т. е. уравнения оказались бы нелинейными.

В чем же тогда ценность этих уравнений?

Во-первых, они помогают исследовать ряд общих вопросов теории многократного рассеяния — объединить задачи о сплошных случайно-неоднородных средах и о совокупностях дискретных рассеивателей (которых мы здесь не рассматриваем), выявить различные приближенные подходы и уяснить связь между ними и, в частности, дать обоснование уравнения переноса (см. ниже).

Во-вторых, они становятся реальным средством решения конкретных задач, если возможна замена «ядер» M и K приближенными (укороченными) выражениями, т. е. известными функциями координат. Уравнения Д. и Б. — С. становятся тогда линейными интегральными уравнениями, которые при тех или иных дополнительных допущениях могут быть решены. Существенно подчеркнуть, что получаемые на этом пути приближенные решения уже суммируют некоторую подпоследовательность ряда теории возмущений и тем самым уже описывают в какой-то мере многократное рассеяние. Остановимся сначала именно на этой второй стороне вопроса.

При *нормальных* флуктуациях ε, если ограничиться для ядер M и K первыми членами рядов (обозначим эти члены, пропорциональные корреляционной функции B_ε, через M_1 и K_1), мы получаем приближение Бурре для уравнения Д. и лестничное приближение для уравнения Б. — С. Если к тому же случайное поле $\tilde{\varepsilon}$ статистически однородно и изотропно (все величины зависят только от модулей разностей векторов $\mathbf{r}$), то уравнение Д. решается до конца, т. е. получается выражение для средней функции Грина $\langle G\rangle$ в случайно-неоднородной среде *). В области $R \gg l$ в случае мелкомасштабных неоднородностей ($kl \ll 1$) это выражение таково:

$$\langle G\rangle_1 = -\frac{e^{-ik_{\text{эфф}}R}}{4\pi R}, \quad (24)$$

*) Для статистически и регулярно-неоднородной среды с плавным изменением параметров $\langle G\rangle$ может быть найдено в приближении геометрической оптики [485].

где эффективное волновое число *) $k_{эфф}$ есть

$$k_{эфф} = k\,(1 + 2k^2l^2\langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle - i4k^3l^3\langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle). \tag{25}$$

Таким образом, $k_{эфф}$ описывает уменьшение фазовой скорости и экстинкцию. Анализ следующих членов разложения массового оператора показывает, что приведенный результат справедлив при условии относительной малости обеих поправок к k, т. е. при $k^2l^2\langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle \ll 1$ (это означает, в частности, малость экстинкции на длине волны). Поскольку $kl \ll 1$, это условие допускает и большие значения $\langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle$. Вместе с тем, в отличие от условия (5) справедливости борновского приближения, здесь нет столь же жесткого ограничения пути волны в среде L (оставшееся ограничение на L требует, чтобы произведение L на поправку к k *второго* порядка по $\langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle$ было малым по сравнению с единицей).

Представление (24) оказывается пригодным и в случае крупномасштабных неоднородностей ($kl \gg 1$), но тогда экстинкция должна быть мала не на длине волны λ, а на протяжении одной неоднородности l [483, 498-500].

Если поле $\tilde{\varepsilon}$ не является гауссовым, то для ядер M и K оказывается естественным введенное В. М. Финкельбергом [29, 501] так называемое одногрупповое приближение, при котором M и K являются линейными функционалами от B_ε. При гауссовом распределении ε одногрупповое приближение совпадает с приближением Бурре для M и лестничным приближением для K. С уравнением Б.— С. дело обстоит сложнее. Даже при нормальном однородном и изотропном поле $\tilde{\varepsilon}$ замкнутое выражение для B_{G1} (индекс 1 снова указывает на первое, в данном случае — лестничное приближение) удается получить только ценой ряда дополнительных предположений.

Одна из основных трудностей при оперировании уравнениями Д. и Б.— С. в случае бесконечно протяженных рассеивающих сред связана с тем, что каждый член ряда теории возмущений оказывается расходящимся **). Эту расходимость устраняют обычно известным приемом — введением малого реального поглощения [2]. В. Н. Алексееву и В. М. Комиссарову [503-505] удалось получить вместо обычной интегральной формы (3) исходного уравнения (2) для поля

$$u = u_0 - k^2\hat{g}\tilde{\varepsilon}u \tag{3а}$$

видоизмененную форму, которая, видимо, лучше отвечает физической картине распространения в случайно-неоднородной среде и автоматически снимает указанное затруднение. Речь идет о следующей модификации (3а).

Уравнение Д. справедливо, конечно, не только для функции Грина (точечный источник), но и для поля u ($\mathbf{r}$), обусловленного любым первичным полем u_0 ($\mathbf{r}$). В операторной форме его можно тогда записать в виде

$$\langle u\rangle = u_0 + \hat{g}\hat{M}\langle u\rangle. \tag{26}$$

---

*) Выводу дисперсионных соотношений для среднего поля (как точных, так и в приближении Бурре, а также с использованием эффективного тензора диэлектрической проницаемости для электромагнитных волн и эффективного тензора упругости для упругих волн в твердых телах) посвящено довольно много работ (в дополнение к цитированным см., например, [486-497, 484]). Мы не будем на них останавливаться, отсылая читателя к обзорной статье Ю. А. Рыжова и В. В. Тамойкина [15], в которой рассмотрен также важный вопрос об излучении антенн и движущихся зарядов в случайно-неоднородных средах.

**) В случае рассеяния в ограниченном объеме таких затруднений, очевидно, не возникает. Учет экстинкции для среднего поля без введения реального поглощения осуществил, например, Остин [502].

Пользуясь этим уравнением, исходными волновыми уравнениями для u и G и теоремой взаимности, названные авторы получили для u уравнение

$$u = \langle u\rangle + k^2 \langle \hat{G}\rangle \hat{e} u, \tag{27}$$

где оператор $\hat{e}$ выражается через массовый и единичный операторы:

$$\hat{e} = -\left(\frac{\hat{M}}{k^2} + \tilde{\varepsilon}\hat{I}\right).$$

В (27), в отличие от (3а), первичное поле u_0 и функция Грина g, отвечающие свободному пространству ($\tilde{\varepsilon} = 0$), заменены соответственно на среднее поле $\langle u\rangle$ и среднюю функцию Грина $\langle G\rangle$ в среде с неоднородностями, благодаря чему с самого начала учтена экстинкция. Тем самым решение уравнения (27) методом возмущений (с использованием для M приближения Бурре) свободно от трудностей, связанных с расходимостью членов обычного ряда теории возмущений *).

Остановимся теперь на некоторых общих результатах, касающихся уравнения Д. и Б.— С. Для их ядер существует несколько соотношений, которые вытекают из самых общих физических принципов и которые могут быть использованы как при построении приближенных выражений для ядер, так и при решении самих уравнений. Сюда относятся соотношение взаимности [32] **), дисперсионное соотношение, вытекающее из принципа причинности [478, 15], постоянство знака мнимой части фурье-образа оператора $\hat{M}$ и оптическая теорема [508]. Последняя следует из сохранения энергии и показывает, в частности, что если оператор интенсивности $\hat{K}$ взят в лестничном приближении, то для массового оператора $\hat{M}$ следует брать приближение Бурре.

Как уже было сказано, ядра M и K — это бесконечные ряды. Члены этих рядов распадаются на два класса.

К первому классу относятся быстро убывающие члены, т. е. убывающие при раздвигании аргументов столь же быстро, как и корреляционные функции поля $\tilde{\varepsilon}$. Радиус их нелокальности l определяет масштаб эффективных неоднородностей среды и имеет порядок радиуса корреляции флуктуаций $\tilde{\varepsilon}$. Если поле $\tilde{\varepsilon}$ гауссово, то быстро убывающими являются приближение Бурре и лестничное приближение. Для негауссова поля $\tilde{\varepsilon}$ быстро убывающим является одногрупповое приближение В. М. Финкельберга [29, 501]. В этом приближении ядра M и K имеют смысл операторов рассеяния рассматриваемого объема (малого в масштабе длины экстинкции). Иначе говоря, они определяют среднее значение и ковариацию поля, рассеянного малым объемом, и связаны между собой обычной оптической теоремой [509], согласно которой мнимая часть амплитуды рассеяния вперед пропорциональна полному эффективному поперечнику рассеяния.

Ко второму классу относятся медленно убывающие члены рядов, т. е. убывающие при раздвигании аргументов как некоторая целая положительная степень функции Грина свободного пространства g. К ним относятся двух-, трехгрупповые и т. д. приближения.

При решении уравнений Д. и Б.— С., а также при выводе из них уравнения переноса в выражениях для ядер M и K обычно ограничиваются только убывающими членами, хотя в некоторых случаях могут оказаться существенными и медленно убывающие. Об этом свидетельствуют точные решения некоторых задач о распространении волн в *одномерной* модели

*) По существу, такой же прием, но только для уравнения Б.— С. в спектральной форме, применил Браун [506], избежав введения малого реального поглощения.

**) Соотношение взаимности для частично когерентных полей выведено другим способом в [507].

рассеивающей среды [510, 511]. Эти решения ставят под вопрос применимость уравнения переноса (или, по крайней мере, возможность ограничиваться приближениями Бурре и лестничным) в одномерных задачах, когда функция Грина вообще не убывает с расстоянием. В связи с этим особенно существенным является вопрос об условиях, при которых допустимо отбрасывание в ядрах M и K медленно убывающих членов.

Если масштаб l достаточно мал, то его можно взять за малый параметр и соответствующим образом строить решение уравнений Д. и Б. — С. — это так называемое приближение слабой нелокальности ядер M и K *). При этом возможны различные способы решения с использованием либо 1) медленно меняющихся лучевых амплитуд $U(\mathbf{r})$, фигурирующих при переходе к параболическому уравнению (6), либо 2) пространственной спектральной плотности поля $u(\mathbf{r})$. Кроме того, разновидностью приближения слабой нелокальности является также фраунгоферово приближение. Поясним вкратце, в чем состоят эти способы.

Пусть на плоскость $x = 0$ — границу неоднородной среды ($x > 0$) — нормально падает поле $u_0(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r})\, e^{-ikx}$. Выражая искомое поле в таком же виде, т. е. полагая $u(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\, e^{-ikx}$ и считая, что $\langle U\rangle$ и $B_U = \langle U_1 U_2^*\rangle$ мало меняются на протяжении радиуса нелокальности l, можно приближенно свести уравнения Д. и Б. — С. к чисто дифференциальным уравнениям [512]. В случае $U_0 = \mathrm{const}$ (плоская первичная волна) и крупномасштабных неоднородностей ($kl \gg 1$) условия применимости этих дифференциальных уравнений имеют вид

$$\frac{l}{d} \ll 1, \quad \frac{1}{kl}\cdot\frac{x}{d} \ll 1, \tag{28}$$

где d — длина экстинкции. Можно далее решать упрощенное уравнение Б. — С. и методом возмущений для показателя экспоненты φ в выражении для $B_U = e^{\varphi}$, т. е., по сути дела, при помощи МПВ [512] **). Первое приближение МПВ применимо здесь при

$$\frac{x}{d} \ll \sqrt{\frac{kl^2}{d}\cdot kl}, \tag{29}$$

причем параметр $\frac{kl^2}{d}$ (kl^2 — порядок величины продольного радиуса корреляции поля) надо считать малым, так как обратное рассеяние отбрасывается. Если

$$\frac{1}{kl} < \frac{kl^2}{d} \ll 1 \qquad \left(\text{иначе}\ \frac{1}{(kl)^4} < \langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle \ll \frac{1}{kl^3}\right),$$

то условие (29) допускает для дистанции x, пройденной волной в среде, значения, превышающие длину экстинкции d.

Существенно подчеркнуть, что уже первое приближение для получаемой таким путем ковариации поля $B_U = \langle U(\mathbf{r}_1)\, U^*(\mathbf{r}_2)\rangle$ удовлетворяет требованию сохранения энергии, т. е. $\langle |U|^2\rangle = 1$, и переходит в результат, который получается из обычного первого приближения МПВ для стохастического уравнения (7), только если пренебречь экстинкцией.

В случае дискретной среды, если взять ядра M и K в первом приближении по плотности рассеивателей, то первое приближение для ковариации B_U совпадает с результатом усреднения билинейной комбинации $u(\mathbf{r}_1)\, u^*(\mathbf{r}_2)$, где поле $u(\mathbf{r})$ получено применением к стохастическому волновому уравнению (1) специального варианта МПВ, разработанного

*) Следует заметить, что это приближение не налагает ограничений на величину параметра kl.

**) Близкие к [512] результаты получены также Брауном [506].

Н. П. Калашниковым и М. И. Рязановым [513, 514]. Поперечный спектр поля u удовлетворяет уравнению переноса в малоугловом приближении [166, 434, 435, 449, 450].

Пренебрежение пространственной дисперсией в уравнении Д. приводит к приближению слабой нелокальности [29], которое эквивалентно преобразованию итерационного ряда для уравнения Д. в приближении Фраунгофера [32]. Преобразование заключается в следующем. Если точка наблюдения $\mathbf{r}$ (рис. 8) лежит во фраунгоферовой зоне по отношению к эффективной неоднородности, содержащей точки $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, то функция Грина для свободного пространства $g(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)$ может быть приближенно записана в виде

$$g(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) \cong g(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)^{-ik\mathbf{s}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)},$$

допускающем интегрирование по $\mathbf{r}_2$ (орт $\mathbf{s}$ направлен от $\mathbf{r}_1$ к $\mathbf{r}$).

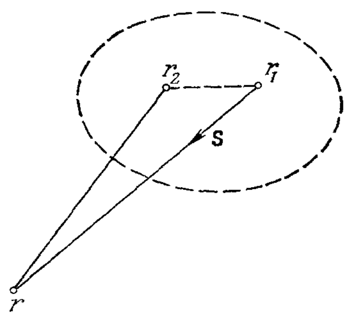

Рис. 8.

Аналогичное преобразование возможно и в членах итерационного ряда для уравнения Б.— С., с тем отличием, что здесь с каждой эффективной неоднородностью связаны уже не две точки, а четыре, и речь идет не о вакуумных функциях Грина g, а о средних функциях $\langle G\rangle$. В результате уравнение Б.— С. сводится к уравнению переноса [30, 32].

Второй из названных выше способов использует спектральную плотность поля, т. е. преобразование Фурье $B_U(\mathbf{R}, \varkappa)$ от ковариации $B_U(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})$ по $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ (зависимость от $\mathbf{R}=\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)$ обусловлена возможным наличием плавной регулярной и статистической неоднородности среды и ограниченности волнового пучка). Уравнение Б.— С., записанное для $B_U(\mathbf{R}, \varkappa)$, называется обобщенным уравнением переноса [515]. На возможность и целесообразность составления этого уравнения указал Лэкс [471].

Обобщенное уравнение переноса имеет следующий вид:

$$B_u(\mathbf{R}, \varkappa) = B_u^0(\mathbf{R}, \varkappa) + \\ + \int\int\int\int F(\mathbf{R}, \varkappa; \mathbf{R}'', \varkappa'')\, Q(\mathbf{R}'', \varkappa''; \mathbf{R}', \varkappa')\, B_u(\mathbf{R}', \varkappa')\, d^3\mathbf{R}''d^3\mathbf{R}'d^3\varkappa''d^3\varkappa', \quad (30)$$

где через $\boldsymbol{B}_u^0(\mathbf{R}, \varkappa)$ и $F(\mathbf{R}, \varkappa; \mathbf{R}', \varkappa')$ обозначены пространственные спектральные плотности среднего поля и средней функции Грина, т. е. преобразования Фурье соответственно от $\langle u(\mathbf{r}_1)\, u^*(\mathbf{r}_2)\rangle$ по $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ и от $\langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)\, G^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2')\rangle$ по $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ и по $\boldsymbol{\rho}'=\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'$. Ядро Q уравнения (27) — это трансформанта Фурье от оператора интенсивности $K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2')$ по $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ и по $\boldsymbol{\rho}'=\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2'$.

Обычное уравнение переноса записывается как уравнение для лучевой интенсивности $I(\mathbf{R}, \mathbf{s})$, где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки пространства, а $\mathbf{s}$ — орт в направлении луча. В интегро-дифференциальной форме это уравнение имеет вид

$$(\mathbf{s}, \nabla_R)\, I(\mathbf{R}, \mathbf{s}) = -\alpha I(\mathbf{R}, \mathbf{s}) + \oint f(\mathbf{s}, \mathbf{s}')\, I(\mathbf{R}, \mathbf{s}')\, d^2\mathbf{s}', \quad (31)$$

где интеграл по $\mathbf{s}'$ берется по полному телесному углу 4π. Величины α и $f(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ называются коэффициентами экстинкции и рассеяния соответственно. Для непоглощающей среды они связаны соотношением

$$\alpha = \oint f(\mathbf{s}, \mathbf{s}')\, d^2\mathbf{s}', \quad (32)$$

которое выражает закон сохранения энергии.

Если излучение распространяется вдоль оси x в среде с крупномасштабными неоднородностями ($kl \gg 1$), так что коэффициент рассеяния $f(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ велик в направлении вперед, то уравнение (31) можно упростить, распространив интегрирование по поперечной к оси x, составляющей $\mathbf{s}'_\perp$ орта $\mathbf{s}'$ до бесконечности. Уравнение принимает тогда вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{s}_\perp\nabla_{\mathbf{R}_\perp}\right) I(\mathbf{R}, \mathbf{s}_\perp)=$$
$$=-\alpha I(\mathbf{R}, \mathbf{s}_\perp)+\int_{-\infty}^{\infty} f(|\mathbf{s}_\perp-\mathbf{s}'_\perp|)\, I(\mathbf{R}, \mathbf{s}'_\perp)\, d^2\mathbf{s}'_\perp \quad (33)$$

и носит название уравнения переноса в *малоугловом приближении* [449, 450]. Уравнение (33) значительно проще, чем (31), и, будучи преобразовано по Фурье, допускает интегрирование в квадратурах, о чем уже было сказано выше.

Первоначально уравнение переноса (31) было сформулировано О. Д. Хвольсоном, а затем Шварцшильдом. В современной форме (см. монографии [463-465]) оно было получено независимо Чандрасекаром [516], Г. В. Розенбергом [517] и несколько ранее В. В. Соболевым [518], рассмотревшим частный случай релеевского рассеяния. Вывод уравнения переноса основан у названных авторов на соображениях баланса энергии, причем коэффициентам экстинкции и рассеяния, входящим в уравнение, не дается явного микроскопического истолкования.

По методам решения уравнения переноса имеется обширная литература, причем круг явлений, для описания которых оно используется, непрерывно расширяется. Так, помимо классической задачи о падении плоской монохроматической (или квазимонохроматической) волны на полупространство, заполненное статистически и регулярно-однородной средой, в литературе рассматривались задачи о поведении узкого пучка света [519], о диаграмме направленности приемника в рассеивающей среде [520], о распространении коротких импульсов [521], об особенностях переноса излучения в магнитоактивной плазме [522] и т. д.

За последние 10—15 лет появился ряд работ, посвященных выводу уравнения переноса в рамках теории многократного рассеяния и выяснению пределов его применимости [28, 30, 32, 474, 515, 523-527]. Касаясь этих вопросов, целесообразно выделить случай крупномасштабных неоднородностей, когда речь идет об уравнении переноса в малоугловом приближении (33). Вывод уравнения (33) гораздо проще, чем уравнения (31), пригодного в случае неоднородностей произвольного масштаба. В частности, как мы уже отмечали, уравнение переноса в малоугловом приближении получается непосредственно при решении упрощенного уравнения Б.— С. при помощи МПВ. При этом лучевая интенсивность $I(\mathbf{R}, \mathbf{s}_\perp)$ совпадает с поперечным к направлению распространения излучения спектром поля $B_u(\mathbf{R}, \varkappa_\perp)$.

Последовательный вывод уравнения переноса (31), конечно, должен включать в себя и выяснение тех условий, при которых (31) получается из обобщенного и соответственно более сложного уравнения переноса (30). В частности, спектральная плотность $B_u(\mathbf{R}, \boldsymbol{\varkappa})$ зависит как от направления, так и от модуля волнового вектора $\boldsymbol{\varkappa}$, тогда как лучевая интенсивность $I(\mathbf{R}, \mathbf{s})$ фактически является функцией лишь направления луча $\mathbf{s} = \boldsymbol{\varkappa}/\varkappa$, а модуль $\varkappa$ фиксирован и равен k-волновому числу в однородной среде. Обобщенное уравнение переноса (30) описывает более широкий круг явлений, в том числе пространственную дисперсию волн, пространственное изменение спектральной плотности на протяжении l эффективной неоднородности, явления, связанные со взаимным расположением неоднородностей в зоне дифракции Френеля, а кроме того, если имеется граница раздела, учитывает флуктуации этой границы и наличие отражения и преломления среднего поля $\langle u \rangle$ на ней.

Обычное уравнение переноса получается из обобщенного лишь при пренебрежении перечисленными явлениями. При этом получаются два следующих важных результата.

Во-первых, спектральная плотность $B_u(\mathbf{R}, \varkappa)$ оказывается связанной с лучевой интенсивностью $I(\mathbf{R}, \mathbf{s})$ соотношением

$$B_u(\mathbf{R}, \varkappa) \cong k^{-2}\delta(\varkappa - \mathbf{k})\, I(\mathbf{R}, \mathbf{s}), \tag{34}$$

где $\mathbf{s} = \varkappa/\varkappa$. Отсюда посредством обратного преобразования Фурье получается формула

$$\langle u(\mathbf{r}_1)\, u^*(\mathbf{r}_2)\rangle = \oint e^{ik\mathbf{s}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} I(\mathbf{R}, \mathbf{s})\, d^2\mathbf{s}, \tag{35}$$

связывающая лучевую интенсивность с ковариацией поля.

Во-вторых, коэффициенты экстинкции и рассеяния α и $f(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ уравнения переноса выражаются через трансформанты Фурье $\widetilde{M}$ и $\widetilde{K}$ ядер M и K:

$$\widetilde{M}(\varkappa, \varkappa') = (2\pi)^3\, \delta(\varkappa - \varkappa')\, \widetilde{M}_0(\varkappa),$$

$$\widetilde{K}(\varkappa_1, \varkappa_1'; \varkappa_2, \varkappa_2') = (2\pi)^3\, \delta(\varkappa_1 - \varkappa_1' - \varkappa_2 + \varkappa_2')\, \widetilde{K}_0(\varkappa_1, \varkappa_1'; \varkappa_2, \varkappa_2'),$$

а именно,

$$\alpha = -\operatorname{Im} \frac{\widetilde{M}_0(k)}{k},$$

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \frac{1}{(4\pi)^2}\, \widetilde{K}_0(k\mathbf{s}, k\mathbf{s}'; k\mathbf{s}, k\mathbf{s}'). \tag{36}$$

Эти соотношения выявляют микроскопический смысл коэффициентов экстинкции и рассеяния. Условия применимости уравнения переноса ограничивают параметры как среды, так и волнового поля.

Ограничения параметров среды возникают уже при пренебрежении пространственной дисперсией и заключаются в требовании, чтобы длина экстинкции d была велика по сравнению как с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ в однородной среде, так и с масштабом l эффективных неоднородностей:

$$d \gg \lambda, \quad d \gg l.$$

Ограничения волнового поля появляются вследствие пренебрежения пространственной нелокальностью ядра Q в обобщенном уравнении переноса и вследствие пренебрежения конечной шириной пространственного спектра поля. Если L_R — масштаб неоднородности спектральной плотности $B_U(\mathbf{R}, \varkappa)$ по $\mathbf{R}$, то L_R должно быть велико по сравнению, во-первых, с размером l эффективной рассеивающей неоднородности; во-вторых, с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ в однородной среде и, в-третьих, если нас интересует корреляционная функция поля, с расстоянием $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ между точками наблюдения. Таким образом,

$$L_R \gg l, \quad L_R \gg \lambda, \quad L_R \gg r,$$

т. е. волновое поле должно быть слабо неоднородным в масштабе всех трех названных величин.

* * *

Оценивая нынешнее состояние теории объемного рассеяния в целом, можно констатировать, что, несмотря на существенное развитие общей теории многократного рассеяния, наиболее продуктивными с точки зрения конкретных результатов пока остаются первоначальные методы — метод малых возмущений, МПВ и МПУ. В актив общей теории многократного рассеяния можно отнести обоснование уравнения переноса. Однако аналогичное обоснование МПВ и МПУ, примыкающих к приближению геометрической оптики и в какой-то мере учитывающих как многократное рассеяние, так и дифракционные эффекты, еще не достигнуто. Вероятно, дальнейшая разработка общей теории многократного рассеяния позволит решить этот вопрос, важность которого обусловлена в первую очередь тем, что названные асимптотические методы скорей всего останутся и в дальнейшем рабочим аппаратом при решении конкретных задач.

Авторы пользуются возможностью принести свою благодарность Ф. Г. Бассу, Н. Г. Денисову, Л. С. Долину, Л. М. Ерухимову, В. В. Тамойкину и Л. А. Чернову за ценные советы и замечания, а также сотрудникам библиотеки Радиотехнического института АН СССР и М. Н. Лизякиной за большую помощь в библиографической работе.

Радиотехнический институт АН СССР,
Институт физики атмосферы АН СССР,
Всесоюзный научно-исследовательский институт
оптико-физических измерений

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, М., Изд-во АН СССР, 1958.
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, М., «Наука», 1967.
3. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, М., Изд-во АН СССР, 1961.
4. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, М., «Наука», 1966.
5. R. B. Muchmore, A. D. Wheelon, Proc. IRE **43**, № 10, 1437, 1450 (1955).
6. Н. Г. Денисов, В. А. Зверев, Изв. вузов (Радиофизика) **2**, № 4, 521 (1959).
7. H. Bremmer, Electromagnetic Theory and Antennas, Oxford, Pergamon Press, 1963, pt. 2, p. 665.
8. W. C. Hoffman, Stoch. Proc., Math. Phys. and Engng, Providence, R.I., Amer. Math. Soc., 1964, p. 117.
9. W. C. Hoffman, J. Res. NBS **D-68**, № 4, 455 (1964).
10. H. Bremmer, Progress in Radio Sci., 1960—1963, Amst.—Lond.—N.Y., 1966, pt. 6, p. 246.
11. U. Frisch, Ann. astrophys. **29**, № 6, 645 (1966).
12. В. И. Татарский, в сб. «Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн», М., «Наука», 1967, стр. 314.
13. J. W. Strohbehn, Proc. IEEE **56**, № 8, 1301 (1968).
14. H. Hodara, Proc. IEEE **56**, № 12, 2130 (1968).
15. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. вузов (Радиофизика) **13**, № 3, 356 (1970).
16. P. Beckmann, A. Spizzichino, The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces, Pergamon Press, 1963.
17. А. И. Калмыков, И. Е. Островский, А. Д. Розенберг, И. М. Фукс, Изв. вузов (Радиофизика) **9**, 1095 (1966).
18. F. G. Bass, I. M. Fuks, A. I. Kalmykov, I. E. Ostrovsky, A. D. Rosenberg, IEEE Trans. **AP-16**, № 5, 554, 560 (1968).
19. М. А. Исакович, Тр. Акустич. ин-та, № 5, 152 (1969).
20. А. Д. Лапин, Тр. Акустич. ин-та, № 5, 5 (1969).
21. Г. С. Горелик, Радиотехника и электроника **1**, № 6, 695 (1956).
22. М. И. Родак, Радиотехника и электроника **5**, № 9, 1370 (1960).
23. V. Twersky, Electromagnetic Theory and Antennas, Ed. E. C. Jordan, Pergamon Press, 1963, **6**, pt. 2, p. 819.
24. V. Twersky, Stoch. Proc., Math. Phys. and Engng, Providence, R.I., Amer. Math. Soc., 1964, p. 84.
25. N. C. Mathur, K. C. Yeh, J. Math. Phys. **5**, № 11, 1619 (1964).
26. V. Twersky, Progress in Radio Sci., 1960—1963, Amst.—Lond.—N.Y., 1966, pt. 6, p. 222.
27. Н. П. Калашников, в сб. «Взаимодействие излучения с веществом», М., Атомиздат, 1966, 129.
28. А. Г. Боровой, Изв. вузов (Физика), № 6, 50 (1966).
29. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ **53**, № 1, 401 (1967).

30. Ю. Н. Барабаненков. ДАН СССР **174**, № 1, 53 (1967).
31. C. I. Beard, T. H. Kays, V. Twersky, IEEE Trans. **AP-15**, № 1, 99 (1967).
32. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, ЖЭТФ **53**, № 3 (9), 978 (1967).
33. K. M. Watson, J. Math. Phys. **10**, № 4, 668 (1969).
34. Ю. Н. Гнедин, А. З. Долгинов, Н. А. Силантьев, ЖЭТФ **57**, № 3 (9), 988 (1969).
35. М. А. Исакович, Акустич. ж. **3**, № 1, 37 (1957).
36. А. Д. Лапин, Акустич. ж. **4**, № 3, 267 (1958).
37. S. L. Richter, IEEE Trans. **AP-15**, № 1, 70 (1967).
38. Л. С. Цыбакова, Тр. Акустич. ин-та, № 5, 272 (1969).
39. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Изв. вузов (Радиофизика) **12**, № 10, 1521 (1969).
40. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 1—2, М., «Наука», 1965—1967.
41 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
42 А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, Харьков, Изд. ХГУ, 1965.
43. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, М., «Наука», 1967.
44. А. А. Веденов, в сб. «Вопросы теории плазмы», М., Госатомиздат, 1963, т. 3, стр. 203.
45. Б. Б. Кадомцев, Турбулентность плазмы, в сб. «Вопросы теории плазмы», М., Атомиздат, 1964, т. 4, стр. 188.
46. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, М., «Наука», 1967.
47. S. Ichimaru, Phys. Rev. **174**, № 1, 289, 300 (1968).
48. D. S. Bugnolo, J. Geophys. Res. **65**, № 3, 879 (1960).
49. Rayleigh, Scient Papers **15**, p. 547, Cambridge, Univ. Press, 1912.
50. Л. И. Мандельштам, Сб. соч., т. **1**, М., Изд-во АН СССР, 1948, стр. 280.
51. С. М. Рытов, ЖЭТФ **33**, № 2, 314, 669 (1957).
52. А. И. Ахиезер, И. Г. Прохода, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ **33**, № 3, 750 (1957).
53. W. E. Gordon, Proc. IRE **46**, № 11, 1824 (1958).
54. K. L. Bowles, Phys. Rev. Lett. **1**, № 12, 454 (1958).
55. J. Renau, J. Geophys. Res. **65**, № 11, 3631 (1960).
56. E. E. Salpeter, Phys. Rev. **120**, № 5, 1528 (1960).
57. J. P. Daugherty, D. T. Farley, Proc. Roy. Soc. **A259**, № 1296, 79 (1960).
58. J. A. Fejer, Canad. Journ. Phys. **38**, № 8, 1114 (1960); **39**, № 5, 716 (1961).
59. D. T. Farley, J. P. Daugherty, D. W. Barron, Proc. Roy. Soc. **A263**, № 1313, 238 (1961).
60. E. E. Salpeter, Phys. Rev. **122**, № 6, 1663 (1961).
61. T. Hagfors, J. Geophys. Res. **66**, № 6, 1699 (1961).
62. M. Rosenbluth, N. Rostoker, Nuclear Fusion **1**, № 7, 101 (1961).
63. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ **41**, № 2 (8), 644 (1961).
64. S. Ichimaru, Ann. Phys. **20**, № 1, 78 (1962).
65. O. Buneman, J. Geophys. Res. **67**, № 5, 2050 (1962).
66. M. Rosenbluth, N. Rostoker, Phys. Fluids **5**, № 7, 776 (1962).
67. A. Ron, J. Dawson, C. Oberman, Phys. Rev. **132**, № 2, 497 (1963).
68. А. Г. Ситенко, Ю. А. Кирочкин, Изв. вузов (Радиофизика) **6**, № 3, 469 (1963).
69. E. E. Salpeter, J. Geophys. Res. **68**, № 5, 1321 (1963).
70. E. C. Taylor, Y. Y. Comisar, Phys. Rev. **132**, № 6, 2379 (1963).
71. J. P. Daugherty, D. T. Farley, Journ. Geophys. Res. **68**, № 19, 5473 (1963).
72. M. S. Yrewal, Phys. Rev. **134**, № 1A, A86 (1964).
73. О. П. Погуце, Изв. вузов (Радиофизика) **7**, № 2, 280 (1964).
74. Н. В. Шолохов, Изв. вузов (Радиофизика) **7**, № 3, 452 (1964).
75. E. E. Salpeter, S. B. Treiman, J. Geophys. Res. **69**, № 5, 869 (1964).
76. W. E. Gordon, Trans. IEEE **AP-12**, № 7, 872 (1964).
77. D. R. Moorcroft, J. Geophys. Res. **69**, № 7, 955 (1964).
78. Некогерентное рассеяние радиоволн, сб. статей, перевод с англ., М., «Мир», 1965.
79. F. W. Perkins, E. E. Salpeter, K. P. Yngvesson, Electron Density Profiles Ionosphere and Exosphere, Amsterdam, N.-Holland Publ. Co., New York, J. Wiley and Sons, Inc., 1966, p. 522 (перевод: «Электронная концентрация в ионосфере и экзосфере», М., «Мир», 1966).
80. D. T. Farley, J. Geophys. Res. **71**, № 17, 4091 (1966).
81. J. Weinstock, Phys. Fluids **10**, № 9, 2065 (1967).
82. P. M. Platzman, P. A. Wolff, N. Tzoar, Phys. Rev. **174**, № 2, 498 (1968).

83. S. J. Bauer, L. J. Blumle, J. L. Donley, R. J. Fitzenveiter, J. E. Jackson, J. Geophys. Res. 69, № 1, 186 (1964).
84. H. G. Booker, W. E. Gordon, Proc. IRE 38, № 4, 401 (1950).
85. D. K. Bailey, R. Bateman, L. V. Berkner, H. G. Booker, G. F. Montgomery, E. M. Purcell, W. W. Salisbury, J. B. Weisner, Phys. Rev. 86, № 2, 141 (1952).
86. A. H. La Grone, Proc. IRE 40, № 1, 54 (1952).
87. H. Staras, J. Appl. Phys. 23, № 10, 1152 (1952).
88. J. W. Herbstreit, K. A. Norton, P. L. Rice, G. E. Schafer, IRE Conv. Rec. 1, pt. 2, 85 (1953).
89. R. A. Silverman, M. Balser, Phys. Rev. 96, № 3, 560 (1954).
90. F. Villars, V. F. Weisskopf, Phys. Rev. 94, № 2, 232 (1954).
91. F. Villars, V. F. Weisskopf, Proc. IRE 43, № 10, 1232 (1955).
92. W. E. Gordon, Proc. IRE 43, № 1, 23 (1955).
93. H. G. Booker, J. T. de Bettencourt, Proc. IRE 43, № 3, 281 (1955).
94. A. D. Wheelon, Proc. IRE 43, № 10, 1459 (1955).
95. B. M. Fannin, IRE Trans. AP-4, № 4, 661 (1956).
96. J. A. Ratcliffe, Rep. Progr. Phys. 19, 188 (1956) (перевод: «Проблемы соврем. физики», № 10, 3 (1957)).
97. Я. Л. Альперт, УФН 61, № 3, 423 (1957).
98. Д. М. Высоковский, Некоторые вопросы дальнего тропосферного распространения ультракоротких волн, М., Изд-во АН СССР, 1958.
99. D. I. Paul, Trans. IRE AP-6, № 1, 61 (1958).
100. R. A. Silverman, Trans. IRE AP-6, № 4, 378 (1958).
101. A. D. Wheelon, J. Res. NBS D-63, № 2, 205 (1959).
102. H. G. Booker, J. Geophys. Res. 64, № 12, 2164 (1959).
103. A. D. Wheelon, J. Atm. Terr. Phys. 15, № 3-4, 185 (1959).
104. A. D. Wheelon, J. Res. NBS D-64, № 4, 301 (1960).
105. Sugai Iwao, Proc. IEEE 53, № 11, 1795 (1965).
106. H. G. Booker, J. Atm. Terr. Phys. 7, № 6, 343 (1955).
107. A. D. Wheelon, J. Geophys. Res. 62, № 3, 343 (1957).
108. Н. Г. Денисов, Изв. вузов (Радиофизика) 1, № 5/6, 41 (1958).
109. Е. А. Бенедиктов, Н. А. Митяков, Изв. вузов (Радиофизика) 2, № 3, 344 (1959).
110. Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина, Изв. вузов (Радиофизика) 3, № 2, 216 (1960).
111. C. H. Lin, Radio Sci. 2, № 9, 961 (1967).
112. M. L. V. Pitteway, Proc. Roy. Soc. A246, № 1247, 556 (1958); A254, № 1276, 86 (1960).
113. Н. Г. Денисов, Изв. вузов (Радиофизика) 3, № 2, 208 (1960).
114. Ф. Г. Басс, Укр. физ. журн. 7, № 4, 409 (1962).
115. В. В. Борисов, В. Н. Красильников, в сб. «Проблемы дифракции и распространение волн», Л., Изд-во ЛГУ, 1962, т. 2, стр. 102.
116. Ф. Г. Басс, Изв. вузов (Радиофизика) 4, № 3, 465 (1961).
117. Н. Г. Денисов, Изв. вузов (Радиофизика) 3, № 3, 393 (1960).
118. Н. Г. Денисов, Изв. вузов (Радиофизика) 3, № 4, 619 (1960).
119. А. М. Обухов, ДАН СССР 30, № 7, 611 (1941).
120. V. O. Knudsen, J. Acoust. Soc. Amer. 18, № 1, 90 (1946).
121. Д. И. Блохинцев, Акустика неоднородной движущейся среды, М., Гостехиздат, 1946.
122. C. L. Pekeris, Phys. Rev. 71, № 4, 268 (1947).
123. R. H. Kraichnan, J. Acoust. Soc. Amer. 25, № 4, 822 (1953); № 6, 1096 (1953).
124. M. J. Lighthill, Proc. Cambr. Phil. Soc. 49, 531 (1953).
125. В. И. Татарский, ЖЭТФ 25, № 1, 74 (1953).
126. Б. А. Сучков, Акустич. ж. 4, № 1, 85 (1958).
127. М. А. Каллистратова, ДАН СССР 125, № 1, 69 (1959).
128. А. С. Монин, Акустич. ж. 7, № 4, 457 (1961).
129. F. Pollock, J. Acoust. Soc. Amer. 37, № 4, 596 (1965).
130. R. G. Stone, D. Mintzer, J. Acoust. Soc. Amer. 38, № 5, 843 (1965).
131. Э. А. Канер, Ф. Г. Басс, ДАН СССР 127, № 4, 792 (1959).
132. Э. А. Канер, Ф. Г. Басс, Изв. вузов (Радиофизика) 2, № 4, 553 (1959).
133. Э. А. Канер, Ф. Г. Басс, Изв. вузов (Радиофизика) 2, № 4, 565 (1959).
134. А. В. Мень, В. И. Горбач, С. Я. Брауде, Изв. вузов (Радиофизика) 2, № 3, 388 (1959).
135. Ф. Г. Басс, С. Я. Брауде, Э. А. Канер, А. В. Мень, УФН 73, № 1, 89 (1961).
136. D. Mintzer, J. Acoust. Soc. Amer. 25, № 5, 922 (1953); 25, № 6, 1107 (1953); 26, № 2, 186 (1954).
137. В. А. Зверев, Изв. вузов (Радиофизика) 3, № 5, 903 (1960).
138. А. В. Просин, Радиотехника 15, № 8, 3 (1960).

139. Ю. А. Рыжов, Изв. вузов (Радиофизика) **5**, № 5, 917 (1962).
140. В. А. Зверев, Акустич. ж. **3**, № 4, 329 (1957).
141. А. А. Семенов, Г. А. Карпеев, Изв. вузов (Радиофизика) **1**, № 6, 118 (1958).
142. A. B. Growford, D. C. Hogg, W. H. Kummer, Bell Syst. Techn. J. **38**, № 5, 1067 (1959).
143. Ю. А. Ковари, Радиотехника и электроника **7**, № 2, 195 (1962).
144. H. Staras, Proc. IRE **43**, № 10, 1374 (1955).
145. R. A. Silverman, Proc. Cambr. Phil. Soc. **54**, № 4, 530 (1958).
146. R. S. Ruffine, D. A. de Wolf, J. Geophys. Res. **70**, № 17, 4313 (1965).
147. R. A. Silverman, J. Appl. Phys. **28**, № 4, 506 (1957).
148. E. N. Bramley, Proc. IEE **115**, № 10, 1439 (1968).
149. Н. Г. Денисов, Изв. вузов (Радиофизика) **7**, № 2, 378 (1964).
150. H. G. Booker, J. Atm. Terr. Phys. **8**, № 4—5, 204 (1956).
151. D. R. Moorcroft, Canad. J. Phys. **39**, № 5, 677 (1961).
152. Л. Л. Горышник, Ю. А. Кравцов, Геомагнетизм и аэрономия **9**, № 2, 272 (1969).
153. Л. Л. Горышник, Ю. А. Кравцов, Л. Я. Томашук, Б. В. Фомин, Геомагнетизм и аэрономия **9**, № 5, 873 (1969).
154. В. А. Красильников, ДАН СССР **47**, № 7, 482 (1945).
155. В. А. Красильников, ДАН СССР **58**, № 7, 1953 (1947).
156. В. А. Красильников, Изв. АН СССР (сер. геофиз. и географ.) **13**, № 1, 33 (1949).
157. В. А. Красильников, ДАН СССР **88**, № 4, 657 (1953).
158. P. G. Bergman, Phys. Rev. **70**, № 7/8, 486 (1946).
159. T. H. Ellison, J. Atm. Terr. Phys. **2**, № 1, 14 (1951).
160. В. Я. Харанен, ДАН **88**, № 2, 253 (1953).
161. H. Bremmer, Propagation of Electromagnetic Waves, Handbuch der Physic **16**, 1958, Springer-Verlag, Berlin, 1958, S. 423.
162. С. М. Рытов, Изв. АН СССР (сер. физ.), № 2, 223 (1937).
163. М. А. Леонтович, Изв. АН СССР (сер. физ.), № 8, 16 (1944).
164. А. М. Обухов, Изв. АН СССР (сер. геофиз.), № 2, 155 (1953).
165. Л. А. Чернов, Метод параболического уравнения в теории распространения волн в среде со случайными неоднородностями, III Всесоюзный симпозиум по дифракции волн, Тбилиси, сентябрь 1964 г., Рефераты докладов, М., «Наука», 1964, стр. 224.
166. Л. С. Долин, Изв. вузов (Радиофизика) **7**, № 3, 559 (1964).
167. В. И. Татарский, ЖЭТФ **25**, № 1, 84 (1953).
168. L. S. Taylor, J. Opt. Soc. Amer. **58**, № 1, 57 (1968).
169. L. S. Taylor, J. Opt. Soc. Amer. **58**, № 5, 705 (1968).
170. Т. А. Широкова, Акустич. ж. **5**, № 4, 485 (1959).
171. В. В. Писарева, Акустич. ж. **6**, № 1, 87 (1960).
172. В. В. Писарева, Изв. вузов (Радиофизика) **4**, № 2, 376 (1961).
173. В. И. Татарский, Изв. вузов (Радиофизика) **5**, № 3, 490 (1962).
174. R. E. Hufnagel, N. R. Stanley, J. Opt. Soc. Amer. **54**, № 1, 52 (1964).
175. D. A. de Wolf, J. Opt. Soc. Amer. **55**, № 7, 812 (1965).
176. C. E. Coulman, J. Opt. Soc. Amer. **56**, № 9, 1232 (1966).
177. W. P. Brown, J. Opt. Soc. Amer. **56**, № 8, 1045 (1966).
178. G. R. Heidbreder, J. Opt. Soc. Amer. **57**, № 12, 1477 (1967).
179. D. L. Fried, J. Opt. Soc. Amer. **57**, № 2, 268 (1967).
180. L. S. Taylor, Radio Sci. **2**, № 4, 437 (1967).
181. D. A. de Wolf, J. Opt. Soc. Amer. **57**, № 8, 1057 (1967).
182. W. P. Brown, J. Opt. Soc. Amer. **57**, № 12, 1539 (1967).
183. J. W. Strohbehn, J. Opt. Soc. Amer. **58**, № 1, 139 (1968).
184. H. T. Yura, J. Opt. Soc. Amer. **59**, № 1, 111 (1969).
185. J. B. Keller, J. Opt. Soc. Amer. **59**, № 8, pt. 1, 1003 (1969).
186. Х. Бреммер, в сб. «Квазиоптика», под ред. Б. З. Каценеленбаума и В. В. Шевченко, М., «Мир», 1966, стр. 119.
187. В. И. Татарский, ЖЭТФ **49**, № 5, 1581 (1965).
188. В. И. Татарский, Изв. вузов (Радиофизика) **10**, № 1, 48 (1967).
189. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ **55**, № 2, 662 (1968).
190. D. A. de Wolf, J. Opt. Soc. Amer. **58**, № 4, 461 (1968).
191. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, Изв. вузов (Радиофизика) **8**, № 4, 717 (1965).
192. М. Е. Грачева, Изв. вузов (Радиофизика) **10**, № 6, 775 (1967).
193. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, № 1, 166 (1968).
194. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Н. С. Симе, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, № 9, 1360 (1968).

195. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. вузов (Радиофизика), 13, № 1, 50, 56 (1970).
196. G. R. Ochs, R. S. Lawrence, J. Opt. Soc. Amer. 59, № 2, 226 (1969).
197. P. H. Deitz, N. J. Wright, J. Opt. Soc. Amer. 59, № 5, 527 (1969).
198. D. L. Fried, G. E. Mevers, M. P. Keister, Jr., J. Opt. Soc. Amer. 57, № 6, 787 (1967); 58, № 9, 1164E (1968).
199. G. R. Ochs, C. G. Little, Conf. Troposph. Wave Propagat., 1968, London, 1968, p. 199.
200. G. R. Ochs, R. R. Bergman, J. R. Snyder, J. Opt. Soc. Amer. 59, № 2, 231 (1969).
201. M. W. Fitzmaurice, J. L. Bufton, J. Opt. Soc. Amer. 59, № 4, 462 (1962).
202. В. И. Кляцкин, Изв. вузов (Радиофизика) 12, № 5, 723 (1969).
203. Ю. А. Кравцов, ЖЭТФ 55, № 3, 798 (1968).
204. D. L. Fried, J. D. Cloud, J. Opt. Soc. Amer. 56, № 12, 1667 (1966); 57, № 9, 1166E (1967).
205. В. Н. Каравайников, Акустич. ж. 3, № 2, 165 (1957).
206. K. Yeh, J. Res. NBS 66D, № 5, 621 (1962).
207. D. A. de Wolf, IEEE Trans. AP-13, № 1, 48 (1965).
208. D. L. Fried, J. Opt. Soc. Amer. 56, № 10, 1380 (1966).
209. D. L. Fried, J. Opt. Soc. Amer. 57, № 2, 175 (1967).
210. D. A. de Wolf, Radio Sci. 2, № 12, 1513 (1967).
211. R. T. Aiken, Bell Syst. Techn. J. 48, № 5, 1129 (1969).
212. F. P. Carlson, A. Ishimary, J. Opt. Soc. Amer. 59, № 3, 319 (1969).
213. А. И. Кон, З. И. Фейзулин, Изв. вузов (Радиофизика) 13, № 1, 71 (1970).
214. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. вузов (Радиофизика) 8, № 5, 870 (1965).
215. З. И. Фейзулин, Ю. А. Кравцов, Изв. вузов (Радиофизика) 10, № 1, 68 (1967).
216. R. A. Schmeltzer, Quart. Appl. Math. 24, № 4, 339 (1967).
217. D. L. Fried, J. B. Siedman, J. Opt. Soc. Amer. 57, № 2, 181 (1967).
218. Y. Kinoshita, M. Suzuki, T. Matsumoto, Radio Sci. 3, № 3, 287 (1968).
219. Y. Kinoshita, T. Asakura, M. Suzuki, J. Opt. Soc. Amer. 58, № 6, 798; № 8, 1040 (1968).
220. Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, Изв. вузов (Радиофизика) 11, № 12, 1864 (1968).
221. З. И. Фейзулин, Распространение ограниченных волновых пучков в средах с флуктуирующей диэлектрической проницаемостью, Канд. дисс., Институт физики атмосферы АН СССР, М., 1969.
222. А. И. Кон, Влияние геометрических факторов на статистические характеристики волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере, Канд. дисс., Институт физики атмосферы АН СССР, М., 1969.
223. А. С. Гурвич, Изв. вузов (Радиофизика) 12, № 1, 147 (1960).
224. T. Asakura, Y. Kinoshita, J. Appl. Phys. Japan 8, № 2, 260 (1969).
225. Von. Rolf Gruss, Nachrichtentechn. Z. 22, № 3, 184 (1969).
226. A. Ishimary, Proc. IEEE 57, № 4, 407 (1969).
227. Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, Изв. вузов (Радиофизика) 12, № 6, 875 (1969).
228. Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, Размытие светового пучка в турбулентной среде, ФИАН, Препринт № 164, 1969.
229. З. И. Фейзулин, Радиотехника и электроника 15, № 7, (1970).
230. М. Ф. Бахарева, Радиотехника и электроника 4, № 1, 88 (1959).
231. Г. С. Голицын, А. С. Гурвич, В. И. Татарский, Акустич. ж. 6, № 2, 187 (1960).
232. М. Ф. Бахарева, Радиотехника и электроника 6, № 1, 9 (1961).
233. М. Ф. Бахарева, Радиотехника и электроника 6, № 10, 1636 (1961).
234. С. Я. Брауде, Э. А. Канер, Изв. вузов (Радиофизика) 5, № 2, 246 (1962).
235. Ю. А. Рыжов, Радиотехника и электроника 7, № 10, 1824 (1962).
236. Ф. Г. Басс, А. В. Мень, Акустич. ж. 9, № 3, 283 (1963).
237. Г. А. Андреев, Изв. вузов (Радиофизика) 7, № 6, 1198 (1964).
238. М. Ф. Бахарева, Вопросы корреляционной теории распространения волн в средах со случайными неоднородностями, Канд. дисс., Харьковский государственный университет, 1964.
239. Г. И. Скрыпник, Изв. вузов (Радиофизика) 9, № 6, 1085 (1966).
240. М. Ф. Бахарева, Радиотехника и электроника 13, № 3, 445 (1968).
241. М. Ф. Бахарева, Радиотехника и электроника 13, № 6, 983 (1968).
242. B. Chytil, J. Atm. Terr. Phys. 30, № 9, 1687 (1968).
243. В. А. Елисеевнин, Вестник МГУ (физ., астрон.), № 4, 3 (1969).

244. В. И. Татарский, Интерпретация наблюдений мерцания звезд и удаленных наземных источников света, Труды совещания по исследованию мерцания звезд, М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 314.
245. В. И. Татарский, Л. Н. Жукова, ДАН СССР **124**, № 3, 567 (1959).
246. И. Г. Колчинский, Изв. ГАО АН УССР **4**, № 1, 13 (1961).
247. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. вузов (Радиофизика) **7**, № 2, 306 (1964).
248. А. С. Гурвич, А. И. Кон, Изв. вузов (Радиофизика) **7**, № 4, 790 (1964).
249. М. А. Каллистратова, Изв. вузов (Радиофизика) **9**, № 1, 50 (1966).
250. М. А. Каллистратова, А. И. Кон, Изв. вузов (Радиофизика) **9**, № 6, 1100 (1966).
251. И. Г. Колчинский, Оптическая нестабильность атмосферы, «Наукова думка», Киев, 1968.
252. О. И. Яковлев, А. И. Ефимов, Радиотехника и электроника **11**, № 11, 2064 (1966).
253. Ю. А. Рыжов, Э. П. Лаптева, Изв. вузов (Радиофизика) **3**, № 6, 976 (1960).
254. В. А. Зверев, Изв. вузов (Радиофизика) **3**, № 4, 723 (1960).
255. Т. А. Широкова, Акустич. ж. **9**, № 1, 101 (1963).
256. П. В. Блиох, Изв. вузов (Радиофизика) **7**, № 3, 460 (1964).
257. G. C. Knollman, J. Appl. Phys. **36**, № 12, 3704 (1965).
258. Н. Л. Кайдановский, В. А. Смирнова, Радиотехника и электроника **10**, № 9, 1574 (1965).
259. J. P. Ruina, C. M. Angulo, IEEE Trans. **AP-11**, № 2, 153 (1963) (перевод: Зарубежная радиоэлектроника, 1963, № 11, стр. 55).
260. Н. А. Есепкина, Б. Г. Кузнецов, С. Э. Хайкин, Изв. ГАО АН СССР **23**, № 3, 172 (1964).
261. Н. Г. Денисов, Ю. А. Рыжов, Радиотехника и электроника **9**, № 11, 1944 (1964).
262. Ю. А. Кравцов, З. И. Фейзулин, Изв. вузов (Радиофизика) **9**, № 5, 888 (1966).
263. Н. А. Есепкина, Н. Л. Кайдановский, Д. В. Корольков, Б. Г. Кузнецов, С. Э. Хайкин, Радиотехника и электроника **11**, № 8, 1405 (1966).
264. А. Н. Ломакин, Электросвязь, № 8, 29 (1966).
265. G. R. Heidbreder, J. Opt. Soc. Amer. **56**, № 11, 1634 (1966).
266. Я. С. Шифрин, Л. Г. Корниенко, Радиотехника и электроника **12**, № 2, 237 (1967).
267. S. Gardner, IEEE Internat. Conv. Rec., 1964, pt. 6, p. 337.
268. I. Goldstein, P. A. Miles, A. Chabot, Proc. IEEE **53**, № 9, 1172 (1965).
269. D. L. Fried, J. Opt. Soc. Amer. 55, № 11, 1427 (1965).
270. D. M. Chase, J. Opt. Soc. Amer. **56**, № 1, 33 (1966).
271. D. L. Fried, J. Opt. Soc. Amer. **56**, № 10, 1372 (1966).
272. G. R. Heidbreder, R. L. Mitchell, J. Opt. Soc. Amer. **56**, № 12, 1677 (1966).
273. D. L. Fried, Proc. IEEE 55, № 1, 57 (1967).
274. G. R. Heidbreder, IEEE Trans. **AP-15**, № 1, 90 (1967).
275. G. R. Heidbreder, R. L. Mitchell, IEEE Trans. **AP-15**, № 1, 191 (1967).
276. J. D. Gaskill, J. Opt. Soc. Amer. 58, № 5, 600 (1968).
277. J. P. Moreland, S. A. Collins, J. Opt. Soc. Amer. 59, № 1, 10 (1969).
278. G. W. Sutton, J. Opt. Soc. Amer. 59, № 1, 115 (1969).
279. C. W. Helstrom, J. Opt. Soc. Amer. 59, № 2, 164 (1969).
280. А. В. Артемьев, Радиотехника и электроника **14**, № 3, 544 (1969).
281. J. D. Gaskill, J. Opt. Soc. Amer. 59, № 3, 308 (1969).
282. C. W. Helstrom, J. Opt. Soc. Amer. 59, № 3. 331 (1969).
283. R. F. Lutomirsky, H. T. Yura, J. Opt. Soc. 59, № 9, 1247 (1969).
284. N. H. Farhat, A. B. DeCou, J. Opt. Soc. Amer. 59, № 11, 1489 (1969).
285. Л. А. Чернов, Акустич. ж. **3**, № 4, 360 (1957).
286. Э. А. Бляхман, Акустич. ж. **4**, № 2, 128 (1958).
287. М. Н. Кром, Л. А. Чернов, Акустич. ж. 4. № 4, 341 (1958).
288. Э. А. Бляхман, Л. А. Чернов, Акустич. ж. 5, № 1, 21 (1959).
289. М. Н. Кром, Акустич. ж. 5, № 1, 45 (1959).
290. Л. А. Чернов, М. Н. Кром, Зависимость дифракционного изображения в линзе от величины флуктуаций в падающей волне, Тр. совещания по исследованию мерцания звезд, М., Изд-во АН СССР, 1959.
291. Н. Г. Денисов, В. И. Татарский, Изв. вузов (Радиофизика) **6**, № 3, 488 (1963).
292. Н. Г. Денисов, Ю. А. Рыжов, Радиотехника и электроника 9, № 1, 33 (1964).
293. Н. Г. Денисов, Изв. вузов (Радиофизика) **4**, № 6. 1045 (1961).
294. Ю. А. Рыжов, Изв. вузов (Радиофизика) **6**, № 5, 952 (1963).

295. D. L. F r i e d, J. Opt. Soc. Amer. 57, № 2, 169 (1967).
296. А. И. К о н, Изв. вузов (Радиофизика) 12, № 1, 149 (1969).
297. М. Е. Г р а ч е в а, А. С. Г у р в и ч Изв. вузов (Радиофизика) 12, № 2, 253 (1969).
298. А. И. К о н, Изв. вузов (Радиофизика) 12, № 5, 687 (1969).
299. В. В. Т а м о й к и н, Изв. вузов (Радиофизика) 9, № 6, 1124 (1966).
300. В. М. К о м и с с а р о в, Акустич. ж. 10, № 2, 174 (1964).
301. G. C. K n o l m a n, J. Acoust. Soc. Amer. 36, № 4, 681 (1964).
302. G. C. K n o l m a n, J. Acoust. Soc. Amer. 36, № 12, 2306 (1964).
303. T. Y o n e j a m a, Y. M u s h i a k e, IEEE Trans. AP-13, № 3, 476 (1965).
304. K. C. Y e h, C. H. L i n, IEEE Trans. AP-15, № 4, 539 (1967).
305. Н. Г. Д е н и с о в, Л. Н. П о л я н и н, Изв. вузов (Радиофизика) 2, № 6, 1010 (1959).
306. А. С. Г у р в и ч, Радиотехника и электроника 13, № 11, 1923 (1962).
307. А. О. И з ю м о в, Радиотехника и электроника 13, № 7, 1155 (1962).
308. А. О. И з ю м о в, Радиотехника и электроника 14, № 7, 1312 (1969).
309. А. О. И з ю м о в, Радиотехника и электроника 14, № 10, 1865 (1969).
310. В. И. Т а т а р с к и й, ДАН СССР 120, № 2, 289 (1958).
311. Н. Г. Д е н и с о в, Изв. вузов (Радиофизика) 2, № 2, 316 (1959).
312. D. L. F r i e d, J. Opt. Soc. Amer. 57, № 8, 980 (1967).
313. C. H. L i n, Radio Sci. 3, № 6, 551 (1968).
314. J. W. S t r o h b e h n, S. F. C l i f f o r d, IEEE Trans. AP-15, № 3, 416 (1967)
315. В. И. Т а т а р с к и й, Изв. вузов (Радиофизика) 10, № 12, 1762 (1967).
316. R. W. L e e, L. C. H a r p, Proc. IEEE 57, № 4, 375 (1969).
317. Ю. А. К р а в ц о в, Изв. вузов (Радиофизика) 8, № 5, 876 (1965).
318. Г И. П р и й м а к, Изв. вузов (Радиофизика) 3, № 5, 778 (1960).
319. А. В. М е н ь, Изв. вузов (Радиофизика) 2, № 3, 395 (1959).
320. А. В. М е н ь, Изв. вузов (Радиофизика) 5, № 1, 70 (1962).
321. А. В. М е н ь, Радиотехника 18, № 7, 25 (1963).
322. А. В. М е н ь, Радиотехника 18, № 2, 27 (1963).
323. C. H. L i u, J. Atm. Terr. Phys. 28, № 4, 385 (1966).
324. J. W. S t r o h b e h n, J. Geophys. Res. 71, № 24, 5793 (1966).
325. В. М. К о м и с с а р о в, Некоторые вопросы статистической теории распространения волн в неоднородных средах, Канд. дисс., Акустич. ин-т АН СССР, М., 1966.
326. В. М. К о м и с с а р о в, Изв. вузов (Радиофизика) 10, № 4, 498 (1967).
327. V. F r i s c h, Rev. CETHEDEC 5, № 15, 75 (1968).
328. A. C o n s o r t i n i, L. R o n c h i, Lett. Nuovo Cimento 2, № 15, 683 (1969).
329. Ф. Г. Б а с с, С. И. Х а н к и н, Изв. вузов (Радиофизика) 3, № 3, 384 (1960).
330. Ю. А. К р а в ц о в, Ю. Я. Я ш и н, Изв. вузов (Радиофизика) 12, № 8, 1175 (1969).
331. Ю. А. К р а в ц о в, Метод геометрической оптики и его обобщения, Докт. дисс., Горьковский государственный университет, 1969.
332. В. Д. Г у с е в, Радиотехника и электроника 5, № 2, 179 (1960).
333. J. V. H o l l w e g, J. V. H a r r i n g t o n, J. Geophys. Res. 73, № 23, 7221 (1969).
334. A. C o n s o r t i n i, L. R o n c h i, A. M. S c h e g g i, G. T o r a l d o d i F r a n c i a, Alta Frequenza 32, № 11, 790 (1963).
335. H. H o d a r a, Proc. IEEE 54, № 3, 368 (1966).
336. В. М. К о м и с с а р о в, ЖЭТФ 52, № 3, 711 (1967).
337. P. B e c k m a n, Radio Sci. 69D, № 4, 629 (1965).
338. Ю. А. К р а в ц о в, Изв. вузов (Радиофизика) 13, № 2, 281 (1970).
339. D. J. H. W o r t, Plasma Phys. 8, № 1, 79 (1966).
340. В. И. Т а т а р с к и й, Изв. вузов (Радиофизика) 10, № 2, 231 (1967).
341. V. F r i s c h, Rev. CETHEDEC 5, № 15, 119 (1968).
342. А. И. К о н, В. И. Т а т а р с к и й, Изв. вузов (Радиофизика) 12, № 2, 173 (1969).
343. K. C. Y e h, C. H. L i n, IEEE Trans. AP-16, № 6, 678 (1969).
344. В. Д. Г у с е в, О. К. В л а с о в а, Геомагнетизм и аэрономия 9, № 5, 828 (1969).
345. В. М. К о м и с с а р о в, Изв. вузов (Радиофизика) 9, № 2, 292 (1966).
346. В. А. Б а р а н о в, Ю. А. К р а в ц о в, Изв. вузов (Радиофизика) 12, № 10, 1500 (1969).
347. Ю. А. К р а в ц о в, в сб. «Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн», М., «Наука», 1966, стр. 302.
348. Л. М. Е р у х и м о в, Н. Г. Д е н и с о в, Геомагнетизм и аэрономия 6, № 4, 695 (1966).
349. Г. В. П е р м и т и н, А. А. Ф р а й м а н, Изв. вузов (Радиофизика) 12, № 12, 1836 (1969).
350. В. И. К л я ц к и н, Изв. вузов (Радиофизика) 12, № 10, 1506 (1969).
351. D. A. d e W o l f, J. Opt. Soc. Amer. 59, № 11, 1455 (1969).
352. D. S o l i m i n i, G. d'A u r i a, IEEE Trans. AP-17, № 1, 9 (1960).
353. G. B. P a r r e n t, Jr., T. J. S k i n n e r, Opt. Acta 8, № 1, 93 (1961).

354. R. A. Shore, Electromagnetic Theory and Antennas, Ed. E. C. Jordan, Pergamon Press, 1963, **6**, pt. 2, p. 787.
355. R. V. Waterhouse, J. Acoust. Soc. Amer. **35**, № 10, 1610 (1963).
356. J. G. Meadors, Opt. Acta **12**, № 4, 379 (1965).
357. A. C. Schell, IEEE Trans. **AP-15**, № 1, 187 (1967).
358. G. d'Auria, D. Solimini, IEEE Trans. **AP-15**, № 5, 480 (1967).
359. R. A. Shore, J. Opt. Soc. Amer, **58**, № 11, 1484 (1968).
360. K. Singh, H. S. Dhillon, J. Opt. Soc. Amer. **59**, № 4, 395 (1969).
361. В. И. Таланов, Н. М. Шеронова, Изв. вузов (Радиофизика) **2**, № 3, 424 (1959).
362. Я. С. Шифрин, Радиотехника и электроника **6**, № 11, 1846 (1961).
363. W. M. Brown, C. J. Palermo, IEEE Trans. **MIL-9**, № 1, 4 (1965).
364. W. M. Brown, C. J. Palermo, IEEE Trans. **MIL-9**, № 3-4, 299 (1965).
365. R. L. Mitchell, IEEE Trans. **AP-14**, № 3, 324 (1966).
366. G d'Auria, C. Colavito, Alta Frequenza **35**, № 11, 866 (1966).
367. Ю. А. Кравцов, З. И. Фейзулин, Изв. вузов (Радиофизика) **10**, № 8, 1131 (1967).
368. E. Schanda, IEEE Trans. **AP-15**, № 3, 471 (1967).
369. H. G. Booker, J. A. Ratcliffe, D. H. Schinn, Phil. Trans. Roy. Soc. **A242**, № 856, 579 (1950).
370. B. H. Briggs, G. J. Phillips, Proc. Roy. Soc. **63B**, № 11, 907 (1950).
371. A. Hewish, Proc. Roy. Soc. **A209**, № 1096, 81 (1951).
372. J. A. Fejer, Proc. Roy. Soc. **A220**, № 1143, 455 (1953).
373. E. N. Bramley, Proc. Roy. Soc. **A225**, № 1163, 515 (1954).
374. В. В. Писарева, Астрон. ж. **35**, № 1, 112 (1958).
375. R. P. Mercier, Phil. Mag. **4**, № 42, 763 (1959).
376. В. Д. Гусев, Радиотехника и электроника **4**, № 1, 12 (1959).
377. Н. Г. Денисов, Изв. вузов (Радиофизика) **4**, № 4, 630 (1961).
378. R. P. Mercier, Proc. Phys. Soc. **77**, № 2, 318 (1961).
379. R. P. Mercier, Proc. Cambr. Phil. Soc. **58**, № 2, 382 (1962).
380. B. H. Briggs, I. A. Parkin, J. Atm. Terr. Phys. **25**, № 6, 339 (1963).
381. N. G. Denisov, L. S. Dolin, Electromagnetic Theory and Antennas, Ed. E. C. Jordan, Pergamon Press, 1963, **6**, pt. 2, p. 819.
382. Г. А. Гайлит, В. Д. Гусев, Геомагнетизм и аэрономия **4**, № 5, 832 (1964).
383. Б. Ф. Курьянов, Акустич. ж. **9**, № 4, 441 (1964).
384. Н. Г. Денисов, Геомагнетизм и аэрономия **4**, № 4, 675 (1964).
385. Г. Н. Денисов, Вопросы статистической теории распространения и дифракции волн, Докт. дисс. Горьковский госуд. университет, 1964.
386. М. Б. Виноградова, Геомагнетизм и аэрономия **5**, № 1, 90 (1965).
387. Л. М. Ерухимов, Исследование неоднородностей электронной концентрации в ионосфере радиоастрономическим методом и с помощью искусственных спутников Земли, Диссертация, Горьковский государственный университет, 1965.
388. K. G. Budden, J. Atm. Terr. Phys. **27**, № 2, 155 (1965).
389. В. И. Погорелов, Геомагнетизм и аэрономия **7**, № 4, 637 (1967).
390. K. G. Budden, J. Atm. Terr. Phys. **27**, № 8, 883 (1965).
391. E. N. Bramley, J. Atm. Terr. Phys. **29**, № 1, 1 (1967).
392. E. E. Salpeter, Astrophys. J. **147**, № 2, 433 (1967).
393. E. N. Bramley, M. Young, Proc. IEE **114**, № 5, 553 (1967).
394. Я. М. Альбер, Л. М. Ерухимов, Ю. А. Рыжов, В. П. Урядов, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, № 9, 1371 (1968).
395. М. Б. Виноградова, Геомагнетизм и аэрономия **8**, № 6, 1021 (1968).
396. В. И. Погорелов, Геомагнетизм и аэрономия **9**, № 2, 248 (1969).
397. В. И. Шишов, Изв. вузов (Радиофизика) **14**, № 1, (1971).
398. A. Hewish, Proc. Roy. Soc. **A214**, № 1119, 494 (1952).
399. J. D. Whitehead, J. Arm. Terr. Phys. **9**, № 5/6, 269 (1956).
400. J. E. Drummond, J. Atm. Terr. Phys. **9**, № 5/6, 282 (1956).
401. S. A. Bowhill, J. Atm. Terr. Phys. **20**, № 1, 9 (1961).
402. Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия **2**, № 4, 688 (1962).
403. Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия **4**, № 1, 75 (1964).
404. Л. М. Ерухимов, Ю. А. Рыжов, Геомагнетизм и аэрономия **5**, № 4, 693 (1965).
405. Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия **8**, № 4, 657 (1968).
406. В. В. Виткевич, ДАН СССР **77**, № 4, 585 (1951).
407. В. В. Виткевич, Н. А. Лотова, Изв. вузов (Радиофизика) **4**, № 3, 413 (1961).
408. В. В. Виткевич, Н. А. Лотова, Геомагнетизм и аэрономия **6**, № 4, 650 (1966).
409. Н. А. Лотова, В. М. Финкельберг, УФН **88**, № 2, 399 (1966).

410. L. T. Little, A. Hewish, P. A. Dennison, Plan. Space Sci. **14**, № 11, 1221 (1966).
411. Т. Д. Антонова, В. В. Виткевич, В. И. Власов, Тр. ФИАН **38**, № 88, 1967.
412. В. В. Виткевич, Тр. ФИАН **38**, № 1, 80 (1967).
413. Н. А. Лотова, УФН **95**, № 2, 293 (1968).
414. В. В. Виткевич, Радиотехника и электроника **13**, № 2, 243 (1968).
415. В. В. Виткевич, Н. А. Лотова, О вариациях интенсивности пульсаров как результате мерцаний на неоднородной плазме, Препринт ФИАН СССР, № 198, 1969.
416. A. Hewish, M. D. Symonds, Planet. Space. Sci. **17**, № 3, 313 (1969).
417. В. В. Виткевич, Н. А. Лотова, Ю. Н. Щитов, В. И. Шишов, УФН **99**, № 3, 523 (1969).
418. Л. М. Ерухимов, УФН **99**, № 3, 523 (1969).
419. Л. М. Ерухимов, В. В. Писарева, Изв. вузов (Радиофизика) **12**, № 6, 900 (1969).
420. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, № 2, 269 (1968).
421. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Изв. вузов (Радиофизика) **10**, № 5, 620 (1967).
422. E. N. Bramley, Proc. IEE **114**, № 5, 550 (1968).
423. Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия **6**, № 2, 400 (1966).
424. П. В. Блиох, В. Г. Синицын, И. М. Фукс, Астрон. ж. **46**, № 2, 348 (1969).
425. M. J. Beran, J. Opt. Soc. Amer. **56**, № 11, 1475 (1966).
426. D. A. de Wolf, Radio Sci. **2**, № 11, 1379 (1967); **3**, № 3, 308E (1968).
427. M. J. Beran, IEEE Trans. **AP-15**, № 1, 66 (1967).
428. В. И. Шишов, Тр. ФИАН **38**, 171 (1967).
429. M. J. Beran, J. Opt. Soc. Amer. **58**, 3, 431 (1968).
430. D. L. Fried, J. Opt. Soc. Amer. **58**, № 7, 961 (1968).
431. K. Mano, J. Opt. Soc. Amer. **59**, № 4, 381 (1969).
432. Л. М. Ерухимов, В. П. Урядов, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, № 12, 1852 (1968).
433. Л. А. Чернов, Локальный метод расчета сильных флуктуаций поля в задаче о распространении волн в среде со случайными неоднородностями, VI Всесоюзная акустич. конференция, М., 1968.
434. Л. С. Долин, Изв. вузов (Радиофизика) **9**, № 1, 61 (1966).
435. Л. С. Долин, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, № 6, 840 (1968).
436. P. M. Livingston, J. Opt. Soc. Amer. **56**, № 12, 1660 (1966).
437. В. И. Шишов, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, № 6, 866 (1968).
438. Л. А. Чернов, Акустич. ж. **15**, № 4, 594 (1969).
439. M. J. Beran, T. L. Ho, J. Opt. Soc. Amer. **59**, № 9, 1134 (1969).
440. T. L. Ho, M. J. Beran, J. Opt. Soc. Amer. **58**, № 10, 1335 (1968).
441. B. J. Uscinski, Phil. Trans. **A262**, № 1133, 609 (1968).
442. B. J. Uscinski, Proc. Roy. Soc. **A307**, № 1491, 471 (1968).
443. В. И. Татарский, ЖЭТФ **56**, № 6, 2106 (1969).
444. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ **57**, № 3 (9), 952 (1969).
445. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт № 1 Отделения океанологии, физики атмосферы и географии АН СССР, 1970.
446. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов (Радиофизика) **13**, № 7 (1970).
447. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ **58**, № 2, 621 (1970).
448. В. И. Кляцкин, Изв. вузов (Радиофизика) **13**, № 7 (1970).
449. Л. С. Долин, Изв. вузов (Радиофизика) **7**, 2, 380 (1967).
450. H. Bremmer, J. Res. NBS **68D**, № 9, 967 (1964).
451. M. Born, E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, Lond., 1959.
452. M. Beran, G. Parrent, Jr., Theory of Partial Coherence Englewood Cliffs, N.J., Prentice—Hold, 1964.
453. E. Wolf, L. Mandel, Rev. Mod. Phys. **37**, № 2, 231 (1965). (перевод: УФН **87**, № 3, 491 (1965); **88**, № 2, 347 (1966); **88**, № 4, 619 (1966)).
454. G. B. Parrent, Jr., R. A. Shore, T. J. Skinner, J. Math. Phys. **3**, № 4, 678 (1962).
455. G. O. Reynolds, T. J. Skinner, J. Opt. Soc. Amer. **54**, № 11, 1302 (1964).
456. R. J. Mitchell, J. Opt. Soc. Amer. **58**, № 9, 1267 (1968).
457. R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, № 6, 749 (1949) (перевод: Новейшее развитие квантовой электродинамики, М., ИЛ, 1954, стр. 138).
458. R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, № 6, 769 (1949) (перевод: Новейшее развитие квантовой электродинамики, М., ИЛ, 1954, стр. 161).

459. F. D y s o n, Phys. Rev. 75, № 11, 1736 (1949) (перевод: Новейшее развитие квантовой электродинамики, М., ИЛ, 1954, стр. 205).
460. E. E. S a l p e t e r, H. A. B e t h e, Phys. Rev. 84, № 6, 1232 (1951).
461. E. A. M i l n e, Thermodynamics of Stars, Handbuch der Astrophys., vol. III/I, Julius Springer, Berlin, 1930.
462. E. H o p f, Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge Tract., № 31, 1934.
463. С. Ч а н д р а с е к а р, Перенос лучистой энергии, М., ИЛ, 1953.
464. В. В. С о б о л е в, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., Гостехиздат, 1956.
465. В. В. Ж е л е з н я к о в, Радиоизлучение Солнца и планет, М., «Наука», 1964.
466. А. П. И в а н о в, Оптика рассеивающих сред, Минск, «Наука и техника», 1969.
467. R. E. M a r s h a k, Rev. Mod. Phys. 19, № 3, 185 (1947).
468. Б. Д э в и с о н, Теория переноса нейтронов, М., Атомиздат, 1960.
469. H. S. S n y d e r, W. T. S c o t t, Phys. Rev. 76, № 2, 220 (1949).
470. L. L. F o l d y, Phys. Rev. 67, № 3—4, 107 (1945).
471. M. L a x, Rev. Mod. Phys. 23, № 4, 287 (1951).
472. M. L a x, Phys. Rev. 85, № 4, 621 (1952).
473. J. G. F i k i o r i s, P. D. W a t e r m a n, J. Math. Phys. 5, № 10, 1413 (1964).
474. Ю. Н. Г н е д и н, А. З. Д о л г и н о в, ЖЭТФ 45, № 4 (10), 1136 (1963); 48, № 2, 548 (1965).
475. U. F r i s c h, Wave propagation in Random Media. I—A Theory of Multiple Scattering; II—Multiple scattering by N Bodies (Provisional version), Institute d'Astophysique, Paris, 1965.
476. R. C. B o u r r e t, Nuovo Cimento 26, № 1, 1 (1962).
477. R. C. B o u r r e t, Canad. J. Phys. 40, № 6, 782 (1962).
478. K. F u r u t s u, J. Res. NBS D67, № 3, 303 (1963).
479. K. F u r u t s u, Mathematical Basis of the Analogies to Quantum Field Theory, NBS Monograph 79, 1964.
480. K. F u r u t s u, J. Radio Res. Labs 14, № 72, 99 (1964).
481. K. F u r u t s u, J. Res. NBS 69D, № 11, 1503 (1965).
482. В. И. Т а т а р с к и й, М. Е. Г е р ц е н ш т е й н, ЖЭТФ 44, № 2, 676 (1963).
483. В. И. Т а т а р с к и й, ЖЭТФ 46, № 4, 1399 (1964).
484. J. E. M o l y n e a u x, J. Opt. Soc. Amer. 58, № 7, 951 (1968).
485. Ю. А. К р а в ц о в, Изв. вузов (Радиофизика) 11, № 10, 1582 (1968).
486. И. М. Л и ф ш и ц, М. И. К а г а н о в, В. М. Ц у к е р н и к, Учен. зап. Харьковского ун-та 2, № 1, 41 (1950).
487. Э. А. К а н е р, Изв. вузов (Радиофизика) 2, № 5, 827 (1959).
488. Ф. Г. Б а с с, Изв. вузов (Радиофизика) 2, № 6, 1015 (1959).
489. J. B. K e l l e r, Proc. of Symp. in Appl. Math. 13, Hydrodynamic Instability, 1962 (см. перевод: Дж. Б. К е л л е р, в книге «Гидродинамическая неустойчивость», «Мир», М., 1964, стр. 265).
490. J. B. K e l l e r, Stoch. Proc., Math. Phys. and Engng., Providence, R. I., Amer. Math. Soc., 1964, p. 145.
491. F. C. K a r a l, Jr., J. B. K e l l e r, J. Math. Phys. 5, № 4, 537 (1964).
492. В. М. Ф и н к е л ь б е р г, ЖТФ 34, № 3, 509 (1964).
493. Ю. А. Р ы ж о в, В. В. Т а м о й к и н, Изв. вузов (Радиофизика) 7, № 4, 605 (1964).
494. Ю. А. Р ы ж о в, В. В. Т а м о й к и н, В. И. Т а т а р с к и й, ЖЭТФ 48, № 4, 656 (1965).
495. Ю. А. Р ы ж о в, Изв. вузов (Радиофизика) 9, № 1, 39 (1966).
496. Ю. А. Р ы ж о в, В. В. Т а м о й к и н, Изв. вузов (Радиофизика) 9, № 1, 205 (1966).
497. J. B. K e l l e r, F. C. K a r a l, Jr., J. Math. Phys. 7, № 4, 661 (1966).
498. В. М. Ф и н к е л ь б е р г, ЖЭТФ 46, № 2, 725 (1964).
499. И. В. А н д р е е в, Изв. вузов (Радиофизика) 8, № 6, 1069 (1965).
500. И. В. А н д р е е в, ЖЭТФ 48, № 5, 1437 (1965).
501. В. М. Ф и н к е л ь б е р г, К теории распространения волн в среде со случайными неоднородностями, Канд. дисс., ИТЭФ АН СССР, М., 1967.
502. M. E. A u s t i n, IEEE Trans. AP-13, № 5, 737 (1965).
503. В. Н. А л е к с е е в, В. М. К о м и с с а р о в, Флуктуации звукового поля в случайно неоднородной среде, VI Всесоюзная акустич. конференция, М., 1968.
504. В. Н. А л е к с е е в, В. М. К о м и с с а р о в, Тр. Акустич. ин-та, № 4, 27 (1968).
505. В. Н. А л е к с е е в, В. М. К о м и с с а р о в, Распространение волн в среде с мелкомасштабными флуктуациями, VI Всесоюзная акустич. конференция, М., 1968.
506. W. P. B r o w n, IEEE Trans. AP-15, № 1, 81—89 (1967).
507. Л. С. Д о л и н, Изв. вузов (Радиофизика) 7, № 3, 471 (1964).
508. Ю. Н. Б а р а б а н е н к о в, В. М. Ф и н к е л ь б е р г, Изв. вузов (Радиофизика) 11, № 5, 717 (1968).

509. Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, М., «Мир», 1964.
510. Ю. Л. Газарян, ЖЭТФ **56**, № 6, 1856 (1969).
511. Дж. Клаудер, Э. Сударшан, Основы квантовой оптики, «Мир», 1970.
512. Ю. Н. Барабаненков, ЖЭТФ **54**, № 6, 1775 (1968).
513. Н. П. Калашников, М. И. Рязанов, ЖЭТФ **50**, № 2, 459 (1966).
514. N. P. Kalaschnikov, Nuovo Cimento **45a**, № 2, 510 (1966).
515. Ю. Н. Барабаненков, ЖЭТФ **56**, № 4, 1262 (1969).
516. S. Chandrasekhar, Astrophys. J. **103**, № 3, 351 (1946); **104**, № 1, 110 (1946).
517. Г. В. Розенберг, Особенности поляризации света, рассеянного атмосферой в условиях сумеречного освещения, Канд. дисс., Институт теоретической геофизики. М., 1946.
518. В. В. Соболев, Изв. АН СССР (сер. геогр. и геофиз.) **8**, № 5, 273 (1944).
519. Д. М. Браво-Животовский, Л. С. Долин, А. Г. Лучинин, Физика атмосферы и океана **5**, № 2, 160 (1969).
520. Б. В. Ермаков, Ю. А. Ильинский, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, № 4, 624 (1968).
521. А. М. Белянцев, Л. С. Долин, В. А. Савельев, Изв. вузов (Радиофизика) **10**, № 4, 489 (1967).
522. V. V. Zheleznyakov, Astrophys. J. **155**, № 3, pt. 1, 1129 (1969).
523. Г. В. Розенберг, Некоторые вопросы распространения электромагнитных волн в мутных средах, Докт. дисс., Институт физики атмосферы, М., 1954.
524. Г. В. Розенберг, УФН **69**, № 1, 57 (1959).
525. R. B. Kieburtz, IEEE Trans. **AP-15**, № 1, 76 (1967).
526. P. E. Stott, J. Phys. **A1**, № 6, 675 (1968).
527. Ю. Н. Барабаненков, Изв. вузов (Радиофизика) **13**, № 1, 106 (1970).
528. M. I. Sancer, A. D. Varvatsis, Proc. IEEE **58**, № 1, 140 (1970).
529. T. L. Ho, J. Opt. Soc. Amer. **59**, № 4, 385 (1969).
530. T. Asakura, Y. Kinoshita, M. Suzuki, J. Opt. Soc. Amer. **59**, № 8, 913 (1969).
531. F. G. Gebhardt, S. A. Collins, Jr., J. Opt. Soc. Amer. **59**, № 9, 1139 (1969).
532. А. И. Кон, Изв. вузов (Радиофизика) **13**, № 1, 61 (1970).
533. Я. С. Шифрин, Вопросы статистической теории антенн, Изд-во «Сов. радио», 1970.
534. D. M. Chase, J. Opt. Soc. Amer. **55**, № 11, 1559 (1965).
535. A. E. Siegman, Proc. IEEE **54**, № 10, 1350 (1966).
536. A. E. Siegman, IEEE Trans. **AP-15** № 1, 192 (1967).
537. R. O. Harger, Proc. IEEE **55**, № 10, 1746 (1967).
538. C. H. Liu, K. C. Yeh, Alta Frequenza **38** (spec. number), 137 (1969).
539. E. N. Bramley, Proc. IEE **114**, № 5, 550 (1967).
540. И. М. Дагесманская, В. И. Шишов, Изв. вузов (Радиофизика) **13**, № 1, 16 (1970).
541. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, М. Ф. Небольсин, Изв. вузов (Радиофизика) **13**, № 1, 44 (1970).
542. M. S. Macrakis, J. Geophys. Res. **70**, № 19, 4987 (1965).