

РАСПАД РЕЗОНАНСНЫХ СОСТОЯНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИХ КВАНТОВЫХ ЧИСЕЛ

М. С. Дубовиков, Ю. А. Симонов

1. ВВЕДЕНИЕ

Главным событием в физике элементарных частиц за последнее десятилетие было открытие большого числа резонансов в системах адронов.

Если не считать резонансов в системе πN (изобар), интенсивное изучение резонансов началось с 1960 г., когда был открыт ρ -мезон, а вслед за этим ω -мезон. В настоящее время насчитывается около 25 мезонных и около 40 барионных ⁷⁰ резонансов (если каждый изомультиплет считать за один резонанс). Эти открытия были неожиданными для теоретиков, но по мере роста числа открываемых резонансов росло (гораздо быстрее) число теоретических моделей и схем классификации резонансов. Среди них прежде всего следует назвать схемы, опирающиеся на модель $SU(3)$ -симметрии, и теорию Редже — Грибова. Подробный теоретический анализ резонансов с точки зрения этих и других моделей не входит в нашу задачу и мы отсылаем интересующегося читателя к обзорам ^{61, 71, 72}, где он может найти и другие ссылки на более ранние работы. Следует подчеркнуть, что как $SU(3)$ -симметрия, так и теория Редже — Грибова не были изобретены специально для объяснения резонансов, однако оказалось, что многие характеристики резонансов прекрасно ими объясняются. Однако для окончательного вывода об успехе той или иной модели все еще не хватает экспериментальных данных о квантовых числах резонансов, в особенности об их спинах и четностях. Приведем всего лишь два примера. Согласно модели $SU(3)$ -симметрии Σ -барионные резонансы со спином и четностью $1/2^+$ образуют октет, членом которого должен быть, в частности, резонанс $\Sigma(1610)$. Однако спин и четность этого резонанса пока не установлены. То же самое относится к предполагаемому члену октета $\Sigma(5/2^+)$ -резонансу $\Sigma(1915)$.

Для модели траекторий Редже очень важным было бы подтверждение того факта, что мезонный резонанс $A_{2H}(1315)$ действительно имеет спин и четность 2^+ , что позволило бы этому резонансу лечь на так называемую R -траекторию ⁶¹, которая определяет, например, асимптотическое поведение сечения процесса $\pi^- p \rightarrow \eta^0 n$ ⁶¹ и т. д.

В последнее время появилось большое число работ, связанных с моделью дуальности Венециано (см. обзор ⁷³). В этой модели существенно используется тот факт, что число резонансов со все увеличивающейся массой может быть бесконечным, а траектории Редже прямолинейны. Если читатель взглянет на таблицы Розенфельда ⁷⁰, он увидит, что эти предположения не противоречат существующим данным; масса последнего наиболее тяжелого барионного резонанса равна 3230 Мэв , однако спин и четность ее известны.

Таким образом, возникает насущная необходимость в методах определения квантовых чисел резонансов, годных при сколь угодно больших массах резонансов. Такие методы были развиты и неоднократно использовались за последние годы; о них и пойдет речь в настоящем обзоре.

2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Настоящий обзор посвящен методам определения спина и четности резонансов. Методы определения других квантовых чисел (массы, ширины, изотопического спина) изложены, например, в книге ⁵², в обзорах ²⁴⁻²⁶.

Пусть интересующий нас резонанс x рождается в реакции

$$b_1 + b_2 \rightarrow x + c_1 + c_2 + \dots + c_n, \quad (2,1)$$

а затем распадается либо по одному из каналов

$$x \rightarrow a_1 + a_2, \quad (2,2)$$

$$x \rightarrow a_1 + a_2 + a_3, \quad (2,3)$$

либо по нескольким каналам типа (2,2) и (2,3) (четырёхчастичный распад x будем рассматривать лишь при условии, что он имеет каскадный характер, т. е. одна из частиц в реакции (2,2), (2,3) в свою очередь распадается на две или три частицы).

Введем некоторые определения, касающиеся реакции (2,1), которые будут использоваться на протяжении всего обзора:

1) плоскость рождения x — это плоскость, содержащая импульсы налетающей частицы и резонанса x в ЛС реакции (2,1);

2) Z -система (Y -система) — это система координат, в которой в качестве оси Z (Y) выбрано направление нормали к плоскости рождения x ;

3) условием Каппса будем называть ситуацию, когда в реакции (2,1) сохраняется четность и когда частицы b_1, b_2 не поляризованы, а импульсы и спинные состояния частиц $c_1, c_2, \dots, c_n$ не измеряются.

Нас интересует проблема определения спина и четности резонанса x . Для этого можно использовать следующую информацию, полученную при экспериментальном изучении реакции (2,1) и распада (2,2), (2,3) (заметим, однако, что практически в конкретных экспериментах можно получать лишь часть перечисленной ниже информации):

1) угловое распределение x в СЦИ реакции (2,1);

2) угловое распределение продуктов распада x и угловое распределение поляризации продуктов распада x в системе покоя x ;

3) энергетическое распределение (распределение на Далицц-плоте) продуктов распада (2,3) в системе покоя x .

При изучении многих резонансов успешно применялись методы определения j и η_x , основанные на предположении о малости импульсов продуктов распада x . К этим методам относится прежде всего анализ распределения продуктов распада (2,3) на Далицц-плоте. Эти методы можно применять в случае, когда энергосвечение в распаде x

$$\Delta E \ll \mu, \quad (2,4)$$

где μ — масса π -мезона. Подробное изложение этих методов см. в ⁵⁰⁻⁵⁴.

Также успешно использовался на практике метод Адэра, для применения которого нужно отбирать случаи, когда x летит вперед или назад относительно падающего пучка в пределах малых углов

$$\vartheta \leq \mu/k_x, \quad (2,5)$$

где k_x — импульс x в СЦИ реакции рождения. Метод Адэра излагается в ^{24, 25, 50, 52}.

Ясно, что с увеличением энергии в реакции (2,1) и с увеличением массы x нарушаются условия применимости упомянутых выше методов (2,4), (2,5). Поэтому при высоких энергиях для определения квантовых чисел резонансов можно использовать лишь методы, основанные на общих законах сохранения квантовой механики — законе сохранения момента и четности в реакции (2,1) и в распадах (2,2), (2,3).

Разработке таких методов посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ, где используются соотношения между наблюдаемыми величинами, вытекающие из законов сохранения. Хотя соотношений такого сорта получено большое количество, однако из-за отсутствия единого теоретического подхода к проблеме экспериментатору трудно ориентироваться при их применении. Дело в том, что многие из этих соотношений содержат одинаковую информацию о квантовых числах резонанса и являются, по существу, эквивалентными, но для их применения необходимы различные методы обработки экспериментальных данных. К тому же в некоторых соотношениях экспериментальная информация используется не полностью.

В настоящем обзоре изложен универсальный метод исследования квантовых чисел резонансов, основанный на законах сохранения, — метод поляризационных моментов. Помимо единого теоретического подхода к проблеме, этот метод обладает еще и тем достоинством, что позволяет использовать всю экспериментальную информацию, а также унифицировать и максимально упростить машинную обработку экспериментальных данных (об этом подробно рассказано в обзоре и в приложении III). Этот метод можно применять для любого распада типа (2,2), (2,3).

Сущность метода поляризационных моментов состоит в следующем. Распределение продуктов распада (2,2), (2,3) зависит от спинового состояния x , которое будем задавать с помощью поляризационных моментов (ПМ). Заметим, что резонансы с большими массами распадаются, как правило, каскадно, т. е. частицы a_k , образовавшиеся в реакциях (2,2), (2,3), в свою очередь являются нестабильными. Распределение продуктов распада a_k (которое является функцией направления вылета a_k в системе покоя x , а также направления вылета продуктов распада a_k в системе покоя a_k), удобно характеризовать величинами, которые будем называть каскадными поляризационными моментами (КПМ) и которые являются естественным обобщением ПМ. Подчеркнем, что набор КПМ содержит полную информацию о рассматриваемом распределении (так же как коэффициенты Фурье полностью определяют периодическую функцию).

КПМ просто определяются на опыте, и между ними существуют соотношения, вытекающие из законов сохранения. Коэффициенты в этих соотношениях зависят от j и η_x — спина и четности x . Подставляя экспериментально найденные КПМ в указанные соотношения, можно найти значение j и η_x , при которых соотношения выполняются — в этом и состоит процедура определения j и η_x .

Метод поляризационных моментов в применении к физике резонансов обсуждался в ряде работ ^{1, 14, 16, 28, 33, 35, 38-40, 56}, в обзоре ²¹⁻²⁶ и в обзоре Байерс ⁵⁷ (в ⁵⁷ рассматриваются распады фермионов с несохранением четности). Учитывая, что оба обзора были изданы только в виде препринтов и в настоящее время труднодоступны, авторы поставили перед собой задачу последовательно и компактно изложить метод поляризационных моментов. Вместе с тем значительное место в обзоре уделено и конкретным распадам, а также экспериментальным работам, на которых проиллюстрировано применение метода.

В настоящем обзоре не рассматривается один из важнейших методов определения квантовых чисел барионных резонансов — фазовый анализ.

Этот метод давно используется экспериментаторами и хорошо им известен. Последним достижениям в области обработки экспериментальных данных о πN -рассеянии методом фазового анализа посвящен обзор Щегельского ⁷⁴.

Содержание обзора имеет следующую структуру.

В главе 3 мы рассматриваем спиновое состояние одной частицы и приводим два способа его описания — с помощью матрицы плотности и с помощью ПМ. Здесь же обсуждаются весьма важные в дальнейшем свойства ПМ и способ определения ПМ из экспериментальных данных. В конце этой главы говорится о спиновом состоянии двух частиц.

В главе 4 рассмотрена общая теория двухчастичного распада резонансного состояния. Прежде всего надо записать амплитуду распада через наиболее удобные параметры — такими параметрами являются спиральные амплитуды распада A_λ , свойства которых подробно обсуждаются. Зная A_λ и ПМ резонанса x , можно определить спиновое состояние продукта распада x — ПМ частицы a_1 . Если a_1 сама распадается, то угловое распределение продуктов ее распада зависит от ПМ частицы a_1 . Здесь удобно ввести КПМ — t_{μ}^{LM} . Далее устанавливается соотношение между КПМ, которое можно использовать для определения спина и четности резонанса x , и рассматривается вопрос об экспериментальном определении КПМ.

Глава 5 посвящена конкретным распадам: $j \rightarrow 0 + 0$, $j \rightarrow 1 + 0$, $j \rightarrow 1/2 + 0$, $j \rightarrow 3/2 + 0$.

В главе 6 исследуется трехчастичный распад резонансов. Как и для двухчастичного распада, сначала мы вводим удобные параметры, через которые выражается амплитуда распада $f_{m\lambda}(\omega_1, \omega_2)$. Далее снова вводятся КПМ, и из общих свойств инвариантности относительно вращений и отражения получены соотношения между КПМ, позволяющие определить спин и четность резонанса x . Для экспериментального определения КПМ необходимо иметь угловое распределение распада (2,3), а также угловое распределение распада a_1 (если спин a_1 не равен нулю). Общие формулы применяются для конкретных распадов: а) распад на три бесспиновые частицы, б) распад на фермион и две бесспиновые частицы.

В главе 7 показано, как можно использовать законы сохранения в реакции рождения резонанса для определения его квантовых чисел. В частности, исследован вопрос о применении поляризованной протонной мишени для определения квантовых чисел изобары, распадающейся на нестранный барион и бесспиновые частицы.

3. СПИНОВАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ МОМЕНТЫ

а) Матрица плотности и ее свойства

Пусть система, содержащая исследуемый резонанс x , описывается волновой функцией $\psi(m, \alpha)$, где m равняется проекции спина x на ось Z в заданной системе координат XYZ , α — совокупность всех остальных переменных, описывающих систему.

Предположим для определенности, что x распадается на две бесспиновые частицы. Волновая функция продуктов распада x зависит только от m (не зависит от α !) и равна, как известно, $Y_{jm}(\vartheta, \varphi)$, где Y_{jm} — шаровая функция; углы ϑ и φ задают направление импульса одного из продуктов распада x относительно осей XYZ . Плотность вероятности

распада x в направлении, определяемом углами ϑ , φ , очевидно, равна

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\Omega} &= \sum_{m, m'=-j}^j \sum_{\alpha} \psi^*(m', \alpha) \psi(m, \alpha) Y_{jm'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = \\ &= \sum_{m, m'=-j}^j \rho_{mm'} Y_{jm'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{jm}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (3,1)$$

где

$$\rho_{mm'} = \sum_{\alpha} \psi(m, \alpha) \psi^*(m', \alpha), \quad -j \leq m', m \leq j. \quad (3,2)$$

Мы видим, что для нахождения плотности вероятности распада x в данном направлении необходимо и достаточно знать матрицу $\rho_{mm'}$ (3,2), которая называется спиновой матрицей плотности или просто ρ -матрицей.

Свойства ρ -матрицы подробно обсуждались в статьях и книгах (см., например, 5, 62). Эти свойства легко получаются из определения (3,2) и мы их лишь перечислим:

$$\rho_{mm'} = \rho_{m'm}^* \quad (\text{условие эрмитовости}), \quad (3,3)$$

$$\sum_{m=-j}^j \rho_{mm} = \text{Sp } \hat{\rho} = 1 \quad (\text{условие нормировки}), \quad (3,4)$$

$$0 \leq \rho_{mm} \leq 1, \quad (3,5)$$

$$\sum_{m, m'=-j}^j \rho_{mm'} \rho_{m'm} = \text{Sp } \hat{\rho}^2 \leq 1. \quad (3,6)$$

Знак равенства в (3,6) имеет место только для чистого состояния x , которое характерно тем, что спиновое состояние x не зависит от остальных переменных *). Это означает, что резонанс и остальная часть системы описываются в отдельности функциями $\varphi(m)$, $\chi(\alpha)$ (т. е. $\psi(m, \alpha) = \varphi(m) \chi(\alpha)$). В таком случае согласно (3,2)

$$\rho_{mm'} = \varphi(m) \varphi^*(m'). \quad (3,7)$$

В общем случае частично поляризованного состояния число действительных параметров, определяющих ρ -матрицу, равно

$$r = (2j + 1)^2 - 1; \quad (3,8)$$

(3,8) легко получается из (3,3), (3,4).

В большинстве практических случаев число независимых параметров меньше, чем (3,8). Например, если в реакции (2,1) выполнено условие Каппса, то в Z -системе

$$\rho_{mm'} = 0 \quad \text{для нечетных } m - m'. \quad (3,9)$$

Эта теорема доказана Каппсом¹. Она отражает тот факт, что при выполнении условия Каппса ρ -матрица является функцией векторов, лежащих в плоскости рождения x . Значит, при отражении в плоскости рождения x матричные элементы $\rho_{mm'}$ не изменяются. С другой стороны, известно (см., например, 37), что при отражении в плоскости XY $\rho_{mm'} \rightarrow (-1)^{m-m'} \rho_{mm'}$. Если в качестве XY выбрать плоскость рождения x , то из последних двух утверждений и следует (3,9).

*) Чистое состояние называют еще полностью поляризованным состоянием. В противном случае говорят, что резонанс (частица) частично поляризован.

б) Поляризационные моменты и их свойства

При анализе углового распределения продуктов распада резонанса удобнее задавать его поляризационное состояние не ρ -матрицей, а поляризационными моментами (ПМ) T_{LM} , которые связаны с $\rho_{mm'}$ по формуле

$$T_{LM} = \sum_{m, m'=-j}^j \rho_{mm'} C_{jm'}^{jm}{}_{LM}, \quad (3,10)$$

где $C_{jm'}^{jm}{}_{LM}$ — коэффициенты Клебша — Гордана (ККГ).

Свойства ККГ, которые используются в обзоре, приведены в приложении I; более подробно о ККГ можно прочесть в книгах ⁵⁻⁹.

ПМ неоднократно использовались для характеристики поляризационного состояния ядер и элементарных частиц (см., например, ⁶⁴⁻⁶⁷).

Продemonстрируем преимущество параметризации поляризационного состояния x с помощью ПМ на примере распада x на две бесспиновые частицы. Если в (3,1) произведения шаровых функций представить в виде (II, 7') (формула из приложения II), то с учетом (3,10) получаем

$$\frac{d\omega}{d\Omega} = \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^L \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} C_{j0, L0}^{j0} T_{LM} Y_{LM}(\vartheta, \varphi). \quad (3,11)$$

Умножим (3,11) на $Y_{LM}^*(\vartheta, \varphi)$ и проинтегрируем по телесному углу, учитывая свойство ортонормальности шаровых функций. Получим

$$T_{LM} = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} (C_{j0, L0}^{j0})^{-1} \langle Y_{LM}^*(\vartheta, \varphi) \rangle, \quad (3,12)$$

где введено обозначение

$$\langle Y_{LM}^*(\vartheta, \varphi) \rangle = \int Y_{LM}^*(\vartheta, \varphi) d\omega(\vartheta, \varphi). \quad (3,13)$$

Из экспериментальных данных $\langle Y_{LM}^*(\vartheta, \varphi) \rangle$ находится по формуле

$$\langle Y_{LM}^*(\vartheta, \varphi) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{LM}^*(\vartheta_i, \varphi_i), \quad (3,14)$$

где суммирование производится по всем случаям распада x на две бесспиновые частицы, n — полное число случаев. Очевидно, что (3,14) является пределом (3,13), когда n стремится к бесконечности.

Формулы (3,14), (3,12), позволяют весьма просто найти из экспериментальных данных ПМ *), в то время как ρ -матрицу найти из (3,1) гораздо труднее (особенно при высоком спине). Во всяком случае, для восстановления ρ -матрицы в случае произвольного спина не существует столь простого алгоритма, как (3,12), (3,14).

В дальнейшем мы убедимся, что и для других типов распада x использовать ПМ удобнее, чем ρ -матрицу.

ПМ можно интерпретировать следующим образом: ρ -матрица частицы со спином j (так же как и произведение волновых функций двух частиц со спином j) представляет собой суперпозицию спиновых функций со значениями спина от 0 до $2j$. Согласно правилу сложения моментов условие (3,10) выбирает из этой суперпозиции функцию со спином L и проекцией M . Такая интерпретация ПМ хорошо иллюстрирует формулу (3,12).

*) Заметим, что в силу (I,6) в угловое распределение (3,11) дают вклад T_{LM} и Y_{LM} лишь с четным L . Следовательно, определить T_{LM} с нечетным L по распаду на две бесспиновые частицы нельзя, т. е. распределение (3,11) содержит неполную информацию о поляризации x .

Подчеркнем, что задания поляризационного состояния x с помощью ρ -матрицы и ПМ совершенно эквивалентны: зная ρ -матрицу, можно найти ПМ по формуле (3,10), и наоборот, зная ПМ, можно восстановить ρ -матрицу по формуле *)

$$\rho_{mm'} = \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^L \frac{2L+1}{2j+1} C_{jm', L}^{jm} T_{LM}. \quad (3,15)$$

Свойствам ρ -матрицы (1,3) — (1,6) соответствуют следующие свойства ПМ:

$$T_{LM} = (-1)^M T_{L-M}^*, \quad (3,16)$$

$$T_{00} = 1, \quad (3,17)$$

$$\min C_{jm, L}^{jm} \leq T_{L0} \leq \max C_{jm, L}^{jm} **), \quad (3,18)$$

$$\sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^L (2L+1) |T_{LM}|^2 \leq 2j+1. \quad (3,19)$$

В (3,18) максимальное и минимальное значения $C_{jm, L}^{jm}$ берутся при фиксированных j и L .

Формулы (3,16) — (3,19) получаются из (3,3) — (3,6) с учетом (3,10), (I,4d) — (I,4e), (I,5).

Из определения (3,10) и (I,4) следует

$$T_{LM} = 0, \text{ если } |M| > L, \text{ либо } L > 2j. \quad (3,20)$$

Поэтому, с учетом (3,16), (3,17), заключаем, что число независимых действительных параметров, задающих все ПМ, равно

$$\sum_{L=0}^{2j} (2L+1) - 1 = (2j+1)^2 - 1,$$

что, естественно, совпадает с (3,8) — числом параметров ρ -матрицы.

Приведем еще одну полезную формулу,

$$\langle m^2 \rangle \equiv \sum_{m=-j}^j m^2 \rho_{mm} = \frac{1}{3} [j(j+1)(2j-1)(2j+3)]^{1/2} T_{20} + \frac{1}{3} j(j+1), \quad (3,21)$$

которую легко получить с помощью (I,8), (3,4).

Как и ρ -матрица, ПМ задаются относительно определенной системы координат. При вращении системы координат на углы Эйлера α, β, γ ПМ преобразуются следующим образом:

$$T'_{LM} = \sum_{M=-L}^L D_{MM'}^L(\alpha, \beta, \gamma) T_{LM}, \quad (3,22)$$

где T'_{LM} — ПМ в новой системе, $D_{MM'}^L(\alpha, \beta, \gamma)$ — D -функции Вигнера ***).

*) Формула (3,15) получается, если умножить (3,10) на $[(2L+1)/(2j+1)] \times \times C_{jm', L}^{jm}$ и просуммировать по L, M , используя (I,3), (I,4b) и (I,4e).

**) Ограничения типа (3,18) имеются и для T_{LM} при $M \neq 0$. Подробнее об ограничениях такого типа см. ⁵⁷.

***). Подробно о D -функциях см. в книгах ^{6, 12, 13}. В этих книгах приняты несколько различные определения D -функций. Мы следуем определению Роуза ¹². Ряд полезных формул для D -функций содержится в статьях ^{10, 11}. В приложении II приведены лишь те формулы для D -функций, которые используются в настоящем обзоре.

Теорема Каппса (3,9) в терминах ПМ гласит: если выполнено условие Каппса, то в Z -системе

$$T_{LM} = 0 \quad \text{для } M \text{ нечетных,} \quad (3,23)$$

а в Y -системе

$$T_{LM} = (-1)^L T_{LM}^*. \quad (3,24)$$

Формула (3,23) следует из (3,9), (3,10), а (3,24) получается из (3,23), если использовать (3,22), (II,1), (II,4') и учесть, что Y -система получается вращением Z -системы на углы Эйлера $(0, \pi/2, \pi/2)$.

Пусть родиншаяся в распаде (2,2) или (2,3) частица a_1 обладает спином s . Ее поляризационное состояние можно описывать как матрицей плотности $\rho_{\lambda\lambda'}$, так и ПМ $t_{l\mu}$ (это обозначение ПМ для a_1 принято для того, чтобы отличать от ПМ резонанса T_{LM}). Ясно, что $\rho_{\lambda\lambda'}$, $t_{l\mu}$ обладают теми же свойствами, что и $\rho_{mm'}$, T_{LM} . Например,

$$\rho_{\lambda\lambda'} = \sum_{l=0}^{2s} \sum_{\mu=-l}^l [(2l+1)/(2s+1)] C_{s\lambda'}^{s\lambda, l\mu} t_{l\mu}, \quad (3,15')$$

$$t_{l\mu} = (-1)^\mu t_{l-\mu}^*, \quad (3,16')$$

$$t_{00} = 1, \quad (3,17')$$

$$t_{l\mu} = 0, \quad \text{если } |\mu| > l, \quad \text{либо } l > 2s. \quad (3,20')$$

Наконец, в качестве примера рассмотрим ПМ частицы со спином $1/2$. Ее ρ -матрица обычно записывается в виде

$$\rho = (1 + \mathbf{p}\sigma)/2,$$

где $\mathbf{p}$ — вектор поляризации. Из (3,10) получаем

$$T_{00} = 1, \quad T_{10} = p_z / \sqrt{3}, \quad T_{1\pm 1} = -(p_x \mp ip_y) / \sqrt{6}. \quad (3,25)$$

Остальные T_{LM} согласно (3,20) равны нулю.

в) ρ -матрица и ПМ двух частиц

Поляризационное состояние двух частиц со спином j_1, j_2 характеризуется их общей поляризационной матрицей $\rho_{m_1 m_1', m_2 m_2'}$, которая, вообще говоря, не сводится к произведению ρ -матриц двух частиц (имеет место корреляция поляризаций двух частиц). Проекция спина первой частицы m_1, m_1' и второй m_2, m_2' задаются в системах покоя соответствующих частиц относительно определенных систем координат.

Так же как и в случае одной частицы, для характеристики поляризационного состояния двух частиц можно вместо ρ -матрицы использовать ПМ $T_{L_1 M_1, L_2 M_2}$, которые связаны с $\rho_{m_1 m_1', m_2 m_2'}$ по формуле, аналогичной (3,10):

$$T_{L_1 M_1, L_2 M_2} = \sum_{m_1, m_1'} \sum_{m_2, m_2'} C_{j_1 m_1, L_1 M_1}^{j_1 m_1'} C_{j_2 m_2, L_2 M_2}^{j_2 m_2'} \rho_{m_1 m_1', m_2 m_2'}, \quad (3,26)$$

$$-j_1 \leq m_1, \quad m_1' \leq j_1, \quad -j_2 \leq m_2, \quad m_2' \leq j_2, \quad 0 \leq L_1 \leq 2j_1, \quad 0 \leq L_2 \leq 2j_2.$$

Формула обращения получается аналогично (3,15) и имеет вид

$$\rho_{m_1 m_1', m_2 m_2'} = \sum_{L_1=0}^{2j_1} \sum_{L_2=0}^{2j_2} \frac{(2L_1+1)(2L_2+1)}{(2j_1+1)(2j_2+1)} C_{j_1 m_1, L_1 M_1}^{j_1 m_1'} C_{j_2 m_2, L_2 M_2}^{j_2 m_2'} T_{L_1 M_1, L_2 M_2}. \quad (3,27)$$

4. ДВУХЧАСТИЧНЫЙ РАСПАД РЕЗОНАНСНОГО СОСТОЯНИЯ. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

а) Амплитуда распада

Рассмотрим распад исследуемого резонанса

$$x \rightarrow a_1 + a_2, \quad (4,1)$$

где a_1 и a_2 — частицы или резонансы с известными квантовыми числами. Обозначим через k_x , k_1 , k_2 импульсы соответствующих частиц, через η_x , η_1 , η_2 их четности, а через j и s — спины x и a_1 . Спин частицы a_2 будем считать равным нулю — это практически наиболее интересный случай. В конце параграфа обобщим полученные результаты на случай, когда и a_2 имеет спин.

В системе покоя x выберем оси координат XYZ . Состояние продуктов распада x задается следующими величинами: ϑ , φ — полярным и азимутальным углами $\mathbf{k}_1$ (относительно осей XYZ), а также λ — проекцией спина a_1 на направление $\mathbf{k}_1$ (λ называется спиральностью частицы a_1). Если проекция спина x на ось Z равна m , то волновая функция продуктов распада x равна

$$\Psi_{m\lambda}^j(\vartheta, \varphi) = [(2j+1)/4\pi]^{1/2} A_\lambda D_{m\lambda}^{j*}(\varphi, \vartheta, 0). \quad (4,2)$$

Переменными этой функции являются направление $\mathbf{k}_1$ (углы ϑ , φ) и λ — спиральность частицы a_1 .

Ясно, что распад x должен характеризоваться инвариантными величинами, которые определяются динамикой распада и не зависят от выбора осей XYZ . Такими величинами являются A_λ ; они называются спиральными амплитудами распада *).

Покажем, как получается (4,2) и выясним физический смысл A_λ .

Пусть проекция спина x на некоторое направление Z' равна λ . В силу закона сохранения момента в распаде (4,1) вылет частицы a_1 в направлении Z' возможен лишь в случае, если спиральность a_1 равна λ . Обозначим амплитуду такого распада через $[(2j+1)/4\pi]^{1/2} A_\lambda$ ($[(2j+1)/4\pi]^{1/2}$ — нормировочный множитель). Очевидно, что A_λ не зависит от выбора системы координат XYZ .

Рассмотрим такое спиновое состояние x , когда в системе XYZ проекция спина на ось Z равна m . В этом случае спиновая функция x , обладающая проекцией λ на направление $\mathbf{k}_1$, равна $D_{m\lambda}^{j*}(\varphi, \vartheta, 0)$. (Как известно¹⁰⁻¹³, матрицей преобразования спиновых функций при вращении являются D -функции. Следовательно, $\langle jm | \hat{R}(\varphi, \vartheta, 0) | j\lambda \rangle = D_{m\lambda}^j(\varphi, \vartheta, 0)$, где $\hat{R}$ — оператор вращения.)

Таким образом, если x обладает проекцией спина на ось Z равной m , то произведение $[(2j+1)/4\pi]^{1/2} A_\lambda$ на $D_{m\lambda}^{j*}(\varphi, \vartheta, 0)$ есть не что иное, как волновая функция продуктов распада x , т. е. мы приходим к (4,2).

В приложении IV дан строгий вывод (4,2), а также доказано свойство спиральных амплитуд распада (4,4), приведенное в следующем пункте.

б) Свойства A_λ

Если $j \geq s$, то в общем случае количество спиральных амплитуд распада A_λ равно числу спиновых состояний частицы a_1 , т. е. $(2s+1)$.

*) Спиральные амплитуды в различных процессах впервые рассматривались в работах Заставенко⁶³.

Если же $j < s$, то в силу (II,8) количество A_λ не превышает $(2j + 1)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} -s \leq \lambda \leq s, & \text{ если } j \geq s, \\ -j \leq \lambda \leq j, & \text{ если } j < s. \end{aligned} \quad (4,3)$$

Однако не все амплитуды независимы. Если в распаде (4,1) четность сохраняется, то имеют место соотношения

$$A_\lambda = \sigma A_{-\lambda}, \quad (4,4)$$

где

$$\sigma = (\eta_1 \eta_2 / \eta_x) (-1)^{j-s}. \quad (4,5)$$

Соотношения (4,4) являются исходными соотношениями для определения j и η_x . Они означают, что независимыми являются A_λ с неотрицательными λ . Это — следствие того факта, что в сохраняющих четность распадах (4,1) из всех возможных орбитальных моментов (которые принимают значения от $|j - s|$ до $j + s$ и число которых равно $2s + 1$ либо $2j + 1$) допустимы лишь те, которые имеют одинаковую четность такую, что $(-1)^l = (\eta_x / \eta_1 \eta_2)$.

A_λ выражаются через орбитальные амплитуды распада $A^{(l)}$ по формуле (см., например, ¹⁰)

$$A_\lambda = \sum_{l=|j-s|}^{j+s} [(2l+1)/(2j+1)]^{1/2} C_{l0, s\lambda}^{j\lambda} A^{(l)}. \quad (4,6)$$

Для того чтобы функция (4,2) была нормирована, т. е.

$$\sum_{\lambda} \int |\Psi_{m\lambda}^j|^2 d \cos \vartheta d\varphi = 1, \quad (4,7)$$

нужно, чтобы A_λ удовлетворяли условию нормировки:

$$\sum_{\lambda} |A_\lambda|^2 = 1. \quad (4,8)$$

В (4,7), (4,8) суммирование производится по значениям λ , задаваемым (4,3).

в) Связь амплитуд распада x с поляризационным состоянием продуктов его распада.

Каскадные поляризационные моменты

В предыдущем пункте мы отметили, что соотношения между спиральными амплитудами распада A_λ (4,4) являются исходными для определения j и η_x . Ясно, что амплитуды A_λ влияют прежде всего на поляризационное состояние частицы a_1 , которое можно определить экспериментально.

Поляризационное состояние частицы a_1 будем характеризовать матрицей плотности $\rho_{\lambda\lambda'}^{(a_1)}$ либо ПМ $t_{l\mu}$. Причем, $\rho_{\lambda\lambda'}^{(a_1)}$ и $t_{l\mu}$ определяются в системе покоя a_1 относительно осей $X'Y'Z'$, показанных на рис. 1.

Если система, содержащая резонанс x , описывается функцией $\psi(m, \alpha)$ (m — проекция спина x на ось Z , α — остальные переменные системы), то угловое распределение продуктов распада x находится по формуле

$$I(\vartheta, \varphi) = \frac{d\omega}{d\Omega} = \sum_{m, m'=-j}^j \sum_{\lambda} \sum_{\alpha} \psi^*(m', \alpha) \psi(m, \alpha) \Psi_{m'\lambda}^{j*}(\vartheta, \varphi) \Psi_{m\lambda}^j(\vartheta, \varphi). \quad (4,9)$$

С учетом определения ρ -матрицы резонанса (3,2) перепишем (4,9) в виде

$$I(\vartheta, \varphi) = \sum_{m, m'=-j}^j \sum_{\lambda} \rho_{mm'} \Psi_{m'\lambda}^{j*}(\vartheta, \varphi) \Psi_{m\lambda}^j(\vartheta, \varphi). \quad (4,10)$$

Матрица плотности частицы a_1 получается аналогично (4,10):

$$\rho_{\lambda\lambda'}^{(a_1)} = \frac{1}{I(\vartheta, \varphi)} \sum_{m, m'=-j}^j \rho_{mm'} \Psi_{m\lambda}^j(\vartheta, \varphi) \Psi_{m'\lambda'}^{j*}(\vartheta, \varphi). \quad (4,11)$$

ρ -матрица (4,11) нормирована согласно (3,4) и, конечно, является функцией ϑ, φ .

Проведем в (4,11) следующие преобразования: ρ -матрицу x выразим через ПМ T_{LM} по формуле (3,15), вместо $\Psi_{m\lambda}^j$ и $\Psi_{m'\lambda'}^{j*}$ подставим их значения (4,2). После несложных алгебраических вычислений, в которых используются формулы (II,4), (II,7), (I,2), (I,4), получаем результат

$$I(\vartheta, \varphi) \rho_{\lambda\lambda'}^{(a_1)} = (A_{\lambda} A_{\lambda'}^* / 4\pi) \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^L (2L+1) C_{j\lambda', L\lambda-\lambda'}^{j\lambda} D_{M, \lambda-\lambda'}^{L*}(\varphi, \vartheta, 0) T_{LM}. \quad (4,12)$$

Соотношение (4,12) связывает поляризационное состояние частицы a_1 с амплитудами распада A_{λ} и T_{LM} — ПМ x . Из (4,12) можно получить более удобное для практических применений соотношение. Для этого умножим (4,12) на $D_{M, \lambda-\lambda'}^L(\varphi, \vartheta, 0)$ и проинтегрируем по телесному углу с учетом свойства ортогональности D -функций (II,6). Получаем

$$\begin{aligned} \int \rho_{\lambda\lambda'}^{(a_1)} D_{M, \lambda-\lambda'}^L(\varphi, \vartheta, 0) \times \\ \times I(\vartheta, \varphi) d \cos \vartheta d\varphi = \\ = C_{j\lambda', L\lambda-\lambda'}^{j\lambda} A_{\lambda} A_{\lambda'}^* T_{LM}. \end{aligned} \quad (4,13)$$

Мы уже отмечали, что поляризационное состояние частицы удобнее характеризовать с помощью ПМ, так как ПМ проще, чем ρ -матрица, определяются на эксперименте. Поэтому в (4,13) выразим ρ -матрицу частицы a_1 через ее ПМ $t_{l\mu}$ по формуле (3,15'). Приходим к результату

$$\sum_{l=0}^{2s} [(2l+1)/(2s+1)] C_{s\lambda', l\mu}^{s\lambda} t_{l\mu}^{LM} = C_{j\lambda', L\mu}^{j\lambda} A_{\lambda} A_{\lambda'}^* T_{LM}, \quad (4,14)$$

где мы ввели следующее обозначение:

$$t_{l\mu}^{LM} = \int t_{l\mu} D_{LM}^L(\varphi, \vartheta, 0) I(\vartheta, \varphi) d \cos \vartheta d\varphi. \quad (4,15)$$

Величины $t_{l\mu}^{LM}$ будем называть каскадными поляризационными моментами (КПМ) частицы a_1 . Это название наиболее удачно по следующей причине.

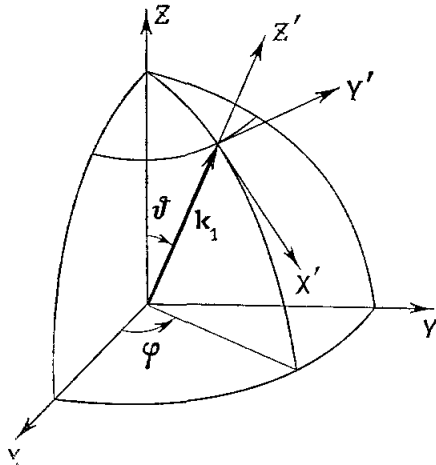


Рис. 1.

Как видно из (4,15), для нахождения КИМ необходимо иметь угловое распределение $t_{l\mu}$ в реакции рождения частицы a_1 *) (в данном случае — в распаде резонанса x). В гл. 3 мы отмечали, что $t_{l\mu}$ можно определить по угловому распределению продуктов распада a_1 (если a_1 стабильна, то для нахождения $t_{l\mu}$ необходимо рассеивать a_1 на мишени-анализаторе). Таким образом, для нахождения КИМ необходимо иметь функцию распределения в каскаде реакций рождения и распада (либо рассеяния) частицы a_1 , причем эта функция зависит как от направления импульса a_1 , так и от направления импульсов продуктов распада a_1 .

г) Экспериментальное определение КИМ

Наиболее просто определяется на эксперименте t_{00}^{LM} . Действительно, из (3,17'), (4,15) получаем

$$t_{00}^{LM} = \langle D_{M0}^L(\varphi, \vartheta, 0) \rangle. \quad (4,16)$$

В (4,16) принято следующее обозначение (которое будет использоваться на протяжении всего обзора):

$$\langle t_\alpha \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{\alpha_i}, \quad (4,17)$$

где суммирование производится по всем случаям изучаемого распада (который может носить и каскадный характер), t_{α_i} — величина t_α в i -м случае. В (4,16) $t_\alpha = D_{M0}^L(\varphi, \vartheta, 0)$.

(4,16) является пределом (4,15) (при $l = \mu = 0$), когда n стремится к бесконечности.

Среднеквадратичная ошибка величины $a \langle t_\alpha \rangle$ вычисляется по формуле

$$\delta(a \langle t_\alpha \rangle) = \frac{a}{n} \left[\sum_{i=1}^n t_{\alpha_i}^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n t_{\alpha_i} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4,18)$$

В отличие от t_{00}^{LM} , другие КИМ частицы a_1 можно определить на эксперименте лишь в том случае, если измеряются импульсы продуктов распада a_1 .

Пусть a_1 распадается на две частицы. Направление импульса одного из продуктов распада будем задавать углами ϑ' , φ' в системе покоя a_1 относительно осей X' , Y' , Z' , которые следует выбирать так, как показано на рис. 1.

В дальнейшем покажем, что КИМ a_1 определяются из экспериментальных данных по формуле

$$t_{l\mu} = \gamma_l \langle D_{\mu 0}^l(\varphi', \vartheta', 0) \rangle, \quad (4,19)$$

где коэффициент γ_l зависит от конкретного распада. Так, например, если a_1 распадается на две бесспиновые частицы, то из (3,12), (II,2), (4,19) следует

$$\gamma_l(s \rightarrow 20) = (C_{s0, l0}^{s0})^{-1}. \quad (4,20)$$

*) Определение КИМ (4,15) не требует, чтобы a_1 обязательно рождалось в распаде (4,1). Если, например, a_1 рождается в четырехчастичной реакции, то также можно ввести КИМ по формуле (4,15), причем ϑ , φ задают направление импульса a_1 в СЦИ этой реакции.

Из (4,19), (4,15) получаем следующую формулу для экспериментального определения КПМ*):

$$t_{l\mu}^{LM} = \gamma_l \langle D_{M\mu}^L(\varphi, \vartheta, 0) D_{\mu 0}^l(\varphi', \vartheta', 0) \rangle. \quad (4,21)$$

Напомним еще раз, что в (4,21) принято обозначение (4,17).

Ошибки КПМ вычисляются по формуле (4,18).

д) С в о й с т в а К П М

Отметим некоторые свойства КПМ.

Из (4,15), (II, 8), (3,20') следует

$$t_{l\mu}^{LM} \equiv 0, \text{ если } |\mu| > L, \text{ либо } |M| > L, \text{ либо } |\mu| > l, \text{ либо } l > 2s. \quad (4,22)$$

Из (4,14), (3,20) заключаем, что

$$t_{l\mu}^{LM} \equiv 0, \text{ если } L > 2j. \quad (4,23)$$

Из (4,15), (3,16') и (II,4) получаем соотношение

$$t_{l-\mu}^{L-M} = (-1)^M t_{l\mu}^{LM*}, \quad (4,24)$$

которое выполняется всегда, независимо от того, в каком процессе родилась частица a_1 . Поэтому независимыми являются КПМ с неотрицательными M (или μ).

Из (4,14) с помощью (I,2) можно выразить КПМ по формуле

$$t_{l\mu}^{LM} = T_{LM} \left(\sum_{\lambda, \lambda'=-s}^s C_{s\lambda'}^{s\lambda}, l_{\mu} C_{j\lambda'}^{j\lambda}, L_{\mu} A_{\lambda} A_{\lambda'}^* \right). \quad (4,25)$$

Если в распаде (4,1) четность сохраняется, то из (4,25), (4,4), (I,4e) получаем

$$t_{l-\mu}^{L\mu} = (-1)^L t_{l\mu}^{LM}. \quad (4,26)$$

Из (4,24), (4,26) следует: если частица a_1 родилась в сохраняющем четность распаде (4,1), то независимыми являются $t_{l\mu}^{LM}$ с неотрицательными M и μ .

Из (4,15) ясно, что КПМ задаются относительно определенных осей XYZ (в системе покоя x) и $X'Y'Z'$ (в системе покоя a_1). Если направление осей $X'Y'Z'$ следует выбирать, как показано на рис. 1, то направление XYZ , вообще говоря, произвольно. Однако если в реакции рождения x (2,1) выполняется условие Канпса, то оси XZ целесообразно выбрать в плоскости этой реакции (т. е. КПМ задавать в Y -системе). При таком выборе XYZ имеет место соотношение

$$t_{l\mu}^{LM} = (-1)^l t_{l\mu}^{LM}. \quad (4,27)$$

Это соотношение нетрудно получить из (3,24), (4,25), (4,24), (4,26).

е) К П М и о п р е д е л е н и е к в а н т о в ы х ч и с л р е з о н а н с а x

Это главный вопрос в гл. 4. Пусть в распаде (4,1) четность сохраняется. Тогда из (4,4) имеем

$$A_{\lambda} A_{\lambda'}^* - \sigma A_{\lambda} A_{\lambda'}^* = 0. \quad (4,28)$$

*) Из (4,20) видно, что в распаде $a_1 \rightarrow 20$ при l нечетных $\gamma_l \rightarrow \infty$. Такая же ситуация имеет место и в сохраняющем четность распаде $a_1 \rightarrow 1/2 + 0$. Ясно, что в этих случаях нельзя применять формулу (4,21) для нахождения $t_{l\mu}^{LM}$ с нечетным l . В дальнейшем этот вопрос обсудим подробно.

Подставляя (4,14) в эту формулу, получаем соотношения для определения j и η_x :

$$C_{j-\lambda', L\mu'}^{j\lambda} \sum_{l=0}^{2s} (2l+1) C_{s\lambda', l\mu}^{s\lambda} t_{l\mu}^{LM} - \sigma C_{j\lambda', L\mu}^{j\lambda} \sum_{l'=0}^{2s} (2l'+1) C_{s-\lambda', l'\mu'}^{s\lambda} t_{l'\mu'}^{LM} = 0. \quad (4,29)$$

Штрих у знака суммы означает, что суммирование следует производить только по четным l, l' либо только по нечетным *).

Использование (4,29) для определения j и η_x основано на том, что коэффициенты этих соотношений зависят от j (через $C_{j\lambda', L\mu}^{j\lambda}$) и σ .¹

Процедура определения j и η_x состоит в следующем: в (4,29) нужно подставить найденные на эксперименте КПМ и подобрать такие j и σ , чтобы соотношения (4,29) выполнялись. После определения j и σ четность находится по формуле (4,5).

Столь простая процедура осуществима в том случае, если ошибки и фон весьма малы. Если же ошибки не малы, то можно найти лишь наиболее вероятные значения j и η_x . Для этого следует вычислить по методу χ^2 вероятность выполнения (4,29) для различных значений j и σ (подробно о методе χ^2 см. приложение III). Заметим, что (4,29), как правило, более чувствительны к σ , чем j . Поэтому в экспериментальных работах вопрос о четности резонанса решается более определенно, чем о спине.

Соотношения (4,29) (как и (4,14), из которых они получены) справедливы при усреднении $t_{l\mu}^{LM}$ по любой области углов рождения x . Поэтому можно использовать всю полученную на эксперименте статистику.

При различных значениях L, M соотношения (4,29) независимы. Кроме того, при фиксированных L, M независимыми являются соотношения, для которых

$$0 \leq \lambda' \leq \lambda \leq s. \quad (4,30)$$

Это следует из (4,24), (4,26).

ж) Определение поляризационного состояния резонанса и амплитуд его распада

После того как определили j и η_x , найденные на опыте значения КПМ можно использовать для вычисления T_{LM} — ПМ x :

$$T_{LM} = \sum_{l=0}^{2s} \sum_{\lambda=-s}^s \frac{2l+1}{2s+1} (C_{s\lambda, l0}^{s\lambda} / C_{j\lambda, L0}^{j\lambda}) t_{l0}^{LM}. \quad (4,31)$$

Эта формула получается из (4,14) с учетом (4,8).

Штрих в (4,31) означает, что следует суммировать t_{l0}^{LM} , у которых L и l имеют одинаковую четность (в силу (I,4e) t_{l0}^{LM} с различной четностью L и l в сумме (4,31) сокращаются). Ясно, что формула (4,31) справедлива лишь в случае, если для всех λ $C_{j\lambda, L0}^{j\lambda} \neq 0$.

Для вычисления амплитуд распада можно использовать формулу (4,14). Заметим, что с помощью (4,14) можно найти A_λ лишь с точностью до общей фазы.

*) В том, что (4,29) выполняются отдельно для четных и для нечетных l, l' , можно убедиться с помощью (4,26), (I,4e). Но особенно легко к этому выводу можно прийти, если в реакции (2,1) выполняются условия Каппса. В этом случае имеет место соотношение (4,27), из которого следует, что при четных l, l' КПМ действительны, а при нечетных — мнимы.

Приведем еще одну полезную формулу

$$T_{LM} = \gamma_L \langle D_{M0}^L(\varphi, \vartheta, 0) \rangle, \quad (4,32)$$

где

$$\gamma_L = \left(\sum_{\lambda=-s}^s C_{j\lambda, L0}^{j\lambda} |A_\lambda|^2 \right)^{-1}. \quad (4,33)$$

Эти формулы получаются из (4,25), (4,16).

Если при исследовании данного резонанса определены амплитуды его распада, то по формуле (4,33) можно найти γ_L . Тогда (4,32) можно использовать для экспериментального определения ПМ этого резонанса, если он рождается при распаде другого резонанса (т. е. уже сам играет роль частицы a_1 в распаде (4,1)). В этом случае (4,32) записывается в виде (4,19) с найденными значениями γ_L .

Общая теория двухчастичных распадов развита в работе ¹⁴.

В следующей главе применим общую теорию к конкретным распадам.

з) Распад резонанса на две частицы с ненулевыми спинами

Обобщим главные результаты настоящего раздела на случай, когда обе частицы, a_1 и a_2 , образовавшиеся в распаде (4,1), обладают отличными от нуля спинами s_1 и s_2 .

Поляризационное состояние a_1 и a_2 будем характеризовать ПМ $t_{l_1\mu_1, l_2\mu_2}$, аналогичными (3,26). Индексы l_1, μ_1 и l_2, μ_2 определяются в системе покоя соответствующих частиц; оси $X'_1Y'_1Z'_1$ и $X'_2Y'_2Z'_2$ имеют противоположные направления, причем X'_1, Y'_1, Z'_1 направлены так же, как и $X'Y'Z'$ на рис. 1.

КПМ определяются аналогично (4,15):

$$t_{l_1\mu_1, l_2\mu_2}^{LM} = \int t_{l_1\mu_1, l_2\mu_2} D_{M, \mu_1-\mu_2}^L(\varphi, \vartheta, 0) I(\vartheta, \varphi) d \cos \vartheta d\varphi. \quad (4,34)$$

Свойства КПМ аналогичны (4,22) — (4,24):

$$t_{l_1-\mu_1, l_2-\mu_2}^{LM} = (-1)^{M} t_{l_1\mu_1, l_2\mu_2}^{LM*}. \quad (4,35)$$

Если в распаде (4,1) четность сохраняется, то аналогично (4,26) имеем

$$t_{l_1-\mu_1, l_2-\mu_2}^{LM} = (-1)^{L+l_1+l_2} t_{l_1\mu_1, l_2\mu_2}^{LM}. \quad (4,36)$$

При обобщении (4,27) нужно $(-1)^l$ заменить на $(-1)^{l_1+l_2}$.

Обобщение соотношений (4,29) для определения j и η_x , а также их применение к распадам $j \rightarrow 1/2 + 1/2$, $j \rightarrow 1 + 1/2$, смотри в ¹⁴.

5. ДВУХЧАСТИЧНЫЙ РАСПАД РЕЗОНАНСНОГО СОСТОЯНИЯ. КОНКРЕТНЫЕ РАСПАДЫ

а) Распад бозона на две бесспиновые частицы

Ранее мы показали (см. гл. 3, б), что при распаде бозонного резонанса на две бесспиновые частицы в угловом распределении продуктов распада отсутствует асимметрия относительно отражения импульсов родившихся частиц, и T_{LM} с нечетными L в распаде x не проявляются. Для четных L ПМ x определяются в эксперименте по формуле

$$T_{LM} = (C_{j0, L0}^{j0})^{-1} \langle D_{M0}^L(\varphi, \vartheta, 0) \rangle, \quad (5,1)$$

которую легко получить из (3,12), (II,2).

Какое заключение относительно j и η_x можно сделать на основании анализа углового распределения продуктов распада x ? Если в распаде четность сохраняется, то

$$\eta_x = \eta_1 \eta_2 (-1)^j. \quad (5,2)$$

Что касается j , то для него можно лишь установить нижнюю границу. В силу (4,23)

$$j \geq L_{\max}/2, \quad (5,3)$$

где $L_{\max}$ — наибольшее значение L , для которого $\langle D_{M0}^L(\varphi, \vartheta, 0) \rangle$ превышает уровень ошибок. Большую информацию, чем (5,3), о значении j можно получить лишь в отдельных случаях. Остановимся на этом подробнее.

Пусть при анализе распада x оказалось $L_{\max} = 2$. Тогда из (3,15), (I,7), (I,8), (5,1), (II,1), (II,3) получаем

$$\frac{1}{2}(\rho_{mm} + \rho_{-m-m}) = \frac{1}{(2j+1)} \left[1 - 5 \frac{3m^2 - j(j+1)}{j(j+1)} \langle P_2(\cos \vartheta) \rangle \right]. \quad (5,4)$$

Из (3,5), (5,4) получаем неравенство

$$-1/5 \leq \langle P_2(\cos \vartheta) \rangle \leq (j+1)/5(2j-1), \quad (5,5)$$

которое может помочь установить спин x *). Подобный анализ можно провести в случае $L_{\max} = 4$.

Рассмотрим для примера эксперимент Кармони и Ван-де-Валя¹⁵. Авторы изучали процесс $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \pi^0$ при импульсе налетающего пиона 1,25 Гэв/с. Было отобрано 1684 события для массы дипиона в районе ρ -мезона: $27m_\pi^2 \leq M^2 \leq 33m_\pi^2$ и для импульса протона отдачи 100—400 Мэв/с. Авторы получили сечение

$$d\sigma/d\cos\vartheta = [(26,4 \pm 2,4) \cos^2 \vartheta - (1,0 \pm 1,4) \cos \vartheta + (6,9 \pm 0,7)] \text{ мбарн}, \quad (5,6)$$

где ϑ — угол между налетающим π^+ и вылетающим π^+ в системе покоя дипиона.

Из (5,6) получаем

$$\begin{aligned} \langle P_2(\cos \vartheta) \rangle &= \left(\int \frac{d\sigma}{d\cos \vartheta} P_2(\cos \vartheta) d\cos \vartheta \right) / \left(\int \frac{d\sigma}{d\cos \vartheta} d\cos \vartheta \right) = \\ &= 0,224 \pm 0,019. \end{aligned} \quad (5,7)$$

Значение $\langle P_2(\cos \vartheta) \rangle$ (5,7) удовлетворяет неравенству (5,5) лишь в случае, если $j = 1$.

Заметим, что $\langle P_2(\cos \vartheta) \rangle$ и ошибки следует вычислять прямо из экспериментальных данных по формулам типа (4,17), (4,18), тогда как мы вычислили $\langle P_2(\cos \vartheta) \rangle$, используя результат (5,6), приведенный авторами¹⁵.

б) Распад бозона на γ -квант и бесспиновую частицу

Фотон не может обладать нулевой спиральностью. Поэтому в распаде $x \rightarrow \gamma + 0$ отличны от нуля только амплитуды распада A_1 и A_{-1} . С учетом этого обстоятельства из (4,32), (4,33), (4,8), (I,4e) получаем

*) Заметим, что если в реакции рождения x летит вперед (ситуация Адэра), то угловое распределение продуктов распада x содержит дополнительную информацию о спине x . Однако этот вопрос выходит за рамки настоящего обзора (анализ Адэра для бозонного резонанса, распадающегося на две бесспиновые частицы, см., например, в обзоре²⁴, книге⁵²).

для L четных

$$\langle D_{M0}^L(\varphi, \vartheta, 0) \rangle = C_{j1, L0}^{j1} T_{LM}. \quad (5,8)$$

Пусть x имеет два канала распада: $x \rightarrow \gamma + 0$ и $x \rightarrow 0 + 0$. Изучая угловое распределение распада x по обоим каналам, можно установить j (четность x определяется по формуле (5,2)). Действительно, сравнивая (5,1), (5,8) и учитывая (I,16), получаем

$$\langle D_{M0}^L(\varphi, \vartheta, 0) \rangle_{(x \rightarrow \gamma + 0)} - \left[1 - \frac{L(L+1)}{2j(j+1)} \right] \langle D_{M0}^L(\varphi, \vartheta, 0) \rangle_{(x \rightarrow 0 + 0)} = 0. \quad (5,9)$$

При выводе этого соотношения мы учли, что ПМ x (T_{LM}) не зависят от того, по какому каналу распадается x .

При определении j с помощью (5,9) обработку экспериментальных данных следует проводить по методу χ^2 .

в) Распад бозона на частицы со спином 0 и 1

Рассмотрим случай, когда частица a_1 , родившаяся в распаде резонанса (4,1), обладает спином 1 (спин частицы a_2 равен нулю). Согласно (4,3) имеется три амплитуды распада A_1, A_0, A_{-1} (если $j \geq 1$). В силу сохранения четности в распаде x из (4,4), (4,5) имеем

$$A_1 = \sigma A_{-1}, \quad (5,10)$$

$$A_0 = \sigma A_0, \quad (5,11)$$

$$\sigma = (\eta_1 \eta_2 / \eta_x) (-1)^{j-1}. \quad (5,12)$$

Чтобы определить спин и четность x с помощью соотношений (4,29), необходимо определить на опыте КПМ частицы a_1 . Согласно (4,22) при $s = 1$ имеются только $t_{00}^{LM}, t_{1\mu}^{LM}, t_{2\mu}^{LM}$.

Пусть a_1 в свою очередь распадается на две бесспиновые частицы. В разделе а) этой главы мы отмечали, что в таком распаде не проявляются ПМ с нечетным l . Поэтому $t_{1\mu}^{LM}$ определить на эксперименте нельзя. Зато можно определить на опыте t_{00}^{LM} и $t_{2\mu}^{LM}$. t_{00}^{LM} определяется по формуле (4,16). Формула для определения $t_{2\mu}^{LM}$ получается из (4,21), (4,20), если подставить $s = 1$ *):

$$t_{2\mu}^{LM} = -\sqrt{5/2} \langle D_{M\mu}^L(\varphi, \vartheta, 0) D_{\mu 0}^2(\varphi', \vartheta', 0) \rangle. \quad (5,13)$$

Таким образом, чтобы определить j и η_x в распаде $x \rightarrow 1 + 0$ (с последующим распадом $1 \rightarrow 0 + 0$), можно использовать соотношение (4,29) только для четных l, l' .

Запишем (4,29) для четных l, l' при $s = 1$.

Если $\sigma = 1$, то при подстановке в (4,29) $\lambda = \lambda' = 0$, а также $\lambda = 1, \lambda' = 0$, получаются тождества. Если же $\sigma = -1$, то при указанных значениях λ, λ' получаем соответственно следующие соотношения:

$$t_{00}^{LM} - \sqrt{10} t_{20}^{LM} = 0, \quad L \text{ четные}, \quad (5,14)$$

$$t_{21}^{LM} = 0. \quad (5,15)$$

*) Напомним, что углы ϑ, φ определяют направление импульса частицы a_1 в системе покоя x относительно произвольно выбранных осей XYZ , а ϑ', φ' — направление импульса одного из продуктов распада a_1 относительно осей $X'Y'Z'$ (которые следует выбирать, как показано на рис. 1) в системе покоя a_1 . Если a_1 есть векторный мезон, распадающийся на три псевдоскалярных мезона, то формулы (4,16), (5,13) по-прежнему справедливы, только углами ϑ', φ' следует задавать направление нормали к плоскости распада векторного мезона в системе его покоя.

Подставляя в (4,29) $\lambda = \lambda' = 1$ и суммируя по четным L, L' с помощью (I,16), (I,17), приходим к результату

$$\left[\frac{L(L+1)}{(L-1)(L+2)} \right]^{1/2} \left(t_{00}^{LM} + \sqrt{\frac{5}{2}} t_{20}^{LM} \right) - \sigma \sqrt{15} \left[\frac{L(L+1)}{2j(j+1)} - 1 \right] t_{22}^{LM} = 0, \quad (5,16)$$

где L — четные *).

При определении j и η_π по методу χ^2 сначала нужно найти вероятность выполнения гипотез (5,14), (5,15) (см. приложение III). Если эта вероятность окажется малой, то можно утверждать, что $\sigma = 1$. В этом случае нужно найти вероятность выполнения гипотезы (5,16) для различных значений j только при $\sigma = 1$, а затем выбрать наиболее вероятное j . Если же вероятность выполнения гипотез (5,14), (5,15) окажется большой, то никакого заключения о σ сделать нельзя, так как (5,14), (5,15) могут выполняться и при $\sigma = 1$ (соотношения (5,14), (5,15) являются следствием того факта, что при $\sigma = -1$ всегда $A_0 = 0$, но по «случайной» причине может оказаться $A_0 = 0$ и при $\sigma = 1$). В этом случае нужно находить вероятность выполнения (5,16) для различных j при обоих значениях $\sigma = \pm 1$ и выбрать наиболее вероятные значения j и σ .

Формулы (5,14) — (5,16) получены Чангом¹⁶.

Описанную процедуру определения j и η_π проиллюстрируем на конкретном эксперименте несколько ниже, после того как рассмотрим еще несколько общих вопросов.

Может оказаться, что в распаде (4,1) бесспиновая частица тождественна одному из продуктов распада частицы a_1 . Тогда из-за интерференции тождественных частиц полученные в этом пункте формулы нуждаются в коррекции. Ясно, что коррекцию имеет смысл производить, когда ширина резонанса a_1 значительно превосходит экспериментальное разрешение (как, например, в случае ρ -мезона).

Рассмотрим, например, распад

$$x \rightarrow \rho^0 \pi^- \rightarrow \pi_1^- \pi^+ \pi_2^-. \quad (5,17)$$

Интерференция π^- -мезонов имеет место лишь в случае, когда инвариантные массы $\pi_1^- \pi^+$ и $\pi_1^- \pi_2^-$ лежат в ρ -полосе (т. е. в случае пересечения ρ -полос на графике Далицца).

Так как при отсутствии интерференции распределение продуктов распада ρ -мезона симметрично относительно замены их импульсов (т. е. относительно отражения импульсов π -мезонов в системе покоя ρ), то для определения j и η_π можно использовать соотношения (5,14) — (5,16). Только при вычислении $t_{l\mu}^{LM}$ по формулам (4,16), (5,13) нужно отбросить случаи пересечения ρ -полос, а случаи, когда инвариантная масса π^- -мезонов лежит в ρ -полосе, следует брать с весом 2. Если в распаде (5,17) имеются случаи пересечения ρ -полос, когда инвариантная масса π^- -мезонов тоже лежит в ρ -полосе (т. е. случаи, когда инвариантная масса каждой пары π -мезонов лежит в ρ -полосе, как это имеет место при распаде A_2 -мезона), то их вклад в $t_{l\mu}^{LM}$ учитывается более сложным образом (подробно об этом см.¹⁷).

В работе¹⁸ проводилась коррекция $t_{l\mu}^{LM}$ для распада A_2 -мезона. Поправки оказались не превышающими 5%.

*) Отметим, что при нечетных L все КПМ, входящие в (5,16), (5,14), равны нулю. В этом легко убедиться с помощью (I,4), (5,11), (4,25).

Остановимся на вопросе об определении T_{LM} — ПМ x . Из (4,31), (4,16), (5,13), (1,16) получаем

$$T_{LM} = (3C_{j1, L0}^{j1})^{-1} \left\langle D_{M0}^L(\varphi, \vartheta, 0) \left[3 - \frac{L(L-1)}{2j(j+1)} - \frac{5L(L+1)}{2j(2j+1)} D_{00}^2(\varphi', \vartheta', 0) \right] \right\rangle, \quad (5.18)$$

где L — четные.

Если $\eta_x = \eta_1\eta_2(-1)^j$, то согласно (5,11), (5,12) $A_0 = 0$ и из (4,32), (4,33), (4,8), (1,4e) получаем

$$T_{LM} = (C_{j1, L0}^{j1})^{-1} \langle D_{M0}^L(\varphi, \vartheta, 0) \rangle, \quad (5.19)$$

где L — четные. Ошибки δT_{LM} вычисляются по формуле, аналогичной (4,18).

Если x распадается на два псевдоскалярных мезона, а также на псевдоскалярный и векторный мезон, то согласно (5,2) $\eta_x = (-1)^j$, а из сравнения (5,1), (5,19) получаем с помощью (1,16) дополнительные соотношения для определения j :

$$\langle D_{M0}^L(\varphi, \vartheta, 0) \rangle_{x \rightarrow 1-1+0-} = \left[1 - \frac{L(L+1)}{2j(j+1)} \right] \langle D_{M0}^L(\varphi, \vartheta, 0) \rangle_{x \rightarrow 0-1+0-} = 0 \quad (L \text{ — четные}). \quad (5.20)$$

Из (5,13), (4,16) ясно, что КПМ зависят от выбора осей XYZ , относительно которых определяются углы ϑ, φ . (5,14) — (5,16) справедливы при любом выборе XYZ . Однако наиболее удобно ось Y направить вдоль нормали к плоскости рождения x . В этом случае согласно (4,27) все t_{00}^{LM} , $t_{2\mu}^{LM}$ при отсутствии фона должны быть чисто действительными. Если реакция рождения x имеет периферический характер, то ось Z удобно направить вдоль импульса налетающей частицы в системе покоя x , а ось Y — вдоль нормали к плоскости реакции. Такую систему координат будем называть системой Треймана — Янга⁵⁹.

В качестве примера рассмотрим экспериментальную работу Асколи и др.⁶⁰, в которой исследовались квантовые числа B -мезона в реакции

$$\pi^- + p \rightarrow B^- + p \quad (5.21)$$

при импульсе налетающего π^- -мезона 5 Гэв/с . Родившийся B -мезон распадается по схеме

$$B^- \rightarrow \pi^- + \omega \quad (5.22)$$

$$\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0.$$

Описанный выше метод можно применить к распаду (5,22), причем углами ϑ', φ' в (5,13) следует задавать направление нормали к плоскости распада векторного мезона ω в системе его покоя относительно осей $X'Y'Z'$ (см. рис. 1).

Таблица 1

КПМ	t_{20}^{00}	t_{00}^{20}	$\tau_{20}^{20} = \left\langle \left(\frac{5}{2} \sin^2 \vartheta' - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times D_{00}^2(\varphi, \vartheta, \varphi') \right\rangle$	$\text{Re } \tau_{22}^{20} = \\ = \text{Re } \langle D_{02}^2(\varphi, \vartheta, \varphi') \rangle$
Численное значение и ошибка	$0,222 \pm 0,079$	$-0,136 \pm \pm 0,056$	$-0,166 \pm 0,056$	$0,076 \pm 0,038$

В работе ⁶⁰ КПМ вычислялись в системе Треймана — Янга, причем авторы произвели вычитание фона (мы не будем обсуждать примененную в ⁶⁰ процедуру вычитания фона, так как этот вопрос выходит за рамки настоящего обзора). В табл. I приводятся взятые из ⁶⁰ значения КПМ, выходящие за пределы ошибок.

Нетрудно показать, что приведенные в табл. I КПМ $\tilde{t}_{20}^{20}$, $\tilde{t}_{22}^{20}$ связаны с КПМ t_{20}^{20} , t_{22}^{20} (см. (5,13)) по формулам *)

$$\frac{3}{2} \tilde{t}_{20}^{20} = t_{00}^{20} + \sqrt{\frac{5}{2}} t_{20}^{20}, \quad (5,23)$$

$$\tilde{t}_{22}^{20} = -\sqrt{\frac{5}{3}} t_{22}^{20}. \quad (5,24)$$

Для определения спина и четности B -мезона сначала нужно вычислить вероятность гипотез (4,14), (5,15). Как сообщают авторы ⁶⁰, все t_{21}^{LM} меньше ошибок; поэтому гипотезы (5,15) правдоподобны. С помощью табл. I и (5,23) нетрудно убедиться, что при $L = 2$, $M = 0$ для гипотезы (5,14) $\chi^2 < 1$ (т. е. гипотеза правдоподобна). При $L = 0$ (5,14) записывается в виде

$$1 - \sqrt{10} t_{20}^{00} = 0. \quad (5,14')$$

Из приведенного в табл. I значения t_{20}^{00} (и ошибки) нетрудно подсчитать, что для гипотезы (5,14') $\chi^2 = 1,5$; соответствующая вероятность равна 22%, т. е. гипотеза (5,14') правдоподобна.

Как мы пояснили, при выполнении гипотез (5,14), (5,15) нельзя сделать определенного заключения о значении σ . Поэтому гипотезу (5,16) нужно исследовать по χ^2 при различных значениях j и при обоих значениях $\sigma = \pm 1$. В терминах $\tilde{t}_{20}^{20}$, $\tilde{t}_{22}^{20}$ (5,16) записывается в виде

$$\left[\frac{L(L+1)}{(L-1)(L+2)} \right]^{1/2} \tilde{t}_{20}^{20} + \sigma \left[\frac{L(L+1)}{j(j+1)} - 2 \right] \tilde{t}_{22}^{20} = 0. \quad (5,16')$$

В табл. II приведены результаты исследования гипотезы (5,16') по χ^2 для различных значений спина и четности B -мезона. В этой же

Таблица II

j^{η_B}	χ^2	Вероятность, %	Вывод	T_{20}	$\langle m^2 \rangle^{1/2}$
1^+	2,7	10	Гипотеза (5,16) совместна с экспериментальными данными	$-0,45 \pm 0,18$	$\rho_{00} = 0,81 \pm 0,19$
2^-	11,7	0,07	Гипотеза (5,16) несовместна с экспериментальными данными	—	—
3^+	11,5	0,07	То же	—	—
1^-	11,7	0,07	» »	—	—
2^+	2,7	10	Гипотеза (5,16) совместна с экспериментальными данными	$0,51 \pm 0,21$	$1,96 \pm 0,2$
3^-	1,1	29	То же	$0,35 \pm 0,145$	$2,6 \pm 0,22$

таблице приведены ПМ B -мезона T_{20} , вычисленные для тех значений j и η_B , которые совместны с экспериментальными данными. Для 1^+ T_{20}

*) Заметим, что (5,24) справедливо, если при распаде векторного мезона отсутствует фон. Если фон у векторного мезона не очень мал, то использовать КПМ t_{22}^{20} выгоднее, чем $\tilde{t}_{22}^{20}$, так как при вычислении $\tilde{t}_{22}^{20}$ влияние фона меньше.

вычислен по формуле (5,18), а для 2^+ , 3^- по формуле (5,19). В последней колонке табл. II приводятся вычисленные по формуле (3,24) среднеквадратичные значения проекции спина B -мезона на ось Z (в качестве которой выбрано направление импульса падающего пиона в системе покоя B), а для 1^+ приводится элемент матрицы плотности ρ_{00} .

Из табл. II видим, что в работе ⁶⁰ метод поляризационных моментов позволил отвергнуть квантовые числа 1^- , 2^- , 3^+ и т. д., но не позволил сделать строгий выбор между 1^+ , 2^+ , 3^- и т. д.

Однако из той же табл. II видно, что в случае 1^+ в ρ -матрице B -мезона преобладает матричный элемент ρ_{00} , а в случае 2^+ , 3^- преобладают ρ_{mm} с $m \neq 0$. Поэтому если квантовые числа B -мезона 2^+ , 3^- и т. д., то в распределении по t должен быть спад при малых t ($t = -(k_B - k_\pi)^2$ есть квадрат переданного импульса B -мезону в реакции (5,21)). Если же спада нет, то может быть только 1^+ *).

В работе ⁶⁰ распределение по t оказалось пропорциональным $\exp(At)$, где $A = 4 \text{ Гэв}^{-2}$. Поэтому, скорее всего, квантовые числа B -мезона есть 1^+ .

В работе ⁷⁷, выполненной в ИТЭФ, исследовалась реакция (5,21) при импульсе налетающего типа $3,25 \text{ Бэв/с}$. Заключения о квантовых числах и амплитудах распада B -мезона в работах ⁶⁰ и ⁷⁷ хорошо согласуются. Однако поляризация B -мезона в ⁶⁰ и ⁷⁷ совершенно различная, что указывает на различный механизм реакции (5,21) при импульсах налетающего пиона, равных 5 и $3,25 \text{ Бэв/с}$.

г) Распад изобары на барион и бесспиновую частицу

Рассмотрим распад (2,4) в случае, если x — изобара, a_1 — барион (спин которого равен $1/2$), a_2 — бесспиновая частица. Согласно (4,3) имеются две спиральные амплитуды распада $A_{1/2}$, $A_{-1/2}$. В силу сохранения четности они связаны соотношением, аналогичным (4,4), (4,5):

$$A_{1/2} = \sigma A_{-1/2}, \quad (5,25)$$

$$\sigma = (\eta_x / \eta_1 \eta_2) (-1)^{j-1/2}. \quad (5,26)$$

Остановимся на двух задачах: 1) определение j и η_x ; 2) определение поляризационного состояния изобары x .

Рассмотрим первую задачу. Соотношения для определения j и η_x получаются из (4,29), если подставить (I,12) и явные значения $C_{1/2\lambda', 1\mu}^{1/2\lambda}$ (а также учесть, что у частицы со спином $1/2$ имеются только КПМ t_{00}^{LM} и $t_{1\mu}^{LM}$):

$$(2j+1) t_{10}^{LM} - \sigma \sqrt{2L(L-1)} t_{11}^{LM} = 0. \quad (5,27)$$

Из (4,25), (5,25), (I,4e), (I,12) следует, что

$$t_{1\mu}^{LM} = 0, \text{ если } L \text{ четно.} \quad (5,28)$$

Поэтому (5,27) можно использовать для определения j и η_x только при нечетных L . Для этого необходимо определить на эксперименте КПМ бариона t_{10}^{LM} и t_{11}^{LM} .

*) Можно думать, что при энергии налетающего пиона 5 Гэв реакция (5,21), хотя бы в грубом приближении, описывается моделью полюсов Редже (см. обзор ⁶¹). Тогда матричный элемент реакции пропорционален $(-t)^{m/2}$. Но и в любой другой периферической модели сечение реакции (5,21) должно спадать при малых t , если B -мезон рождается с проекцией спина $m \neq 0$.

Если барион a_1 в свою очередь распадается с несохранением четности по схеме

$$a_1 \rightarrow N + \Pi \quad (5,29)$$

(N — барион, Π — псевдоскалярный мезон), то его поляризационное состояние (и КПМ) можно определить по этому распаду.

Как известно, при несохранении четности в реакции (5,29) угловое распределение N (в системе покоя a_1) имеет вид

$$d\omega/d\Omega = (1 + \alpha \mathbf{p}\mathbf{v})/4\pi, \quad (5,30)$$

где Ω — телесный угол в системе покоя a_1 , $\mathbf{p}$ — вектор поляризации a_1 , $\mathbf{v}$ — единичный вектор в направлении импульса N (в системе покоя a_1).

Коэффициент асимметрии α различен для конкретных распадов (5,29). В табл. III приведены значения α для ряда распадов. Данные заимствованы из обзора Розенфельда и сотр.⁷⁰ Из (5,30) легко получается формула для экспериментального определения $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} = (3/\alpha) \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (5,31)$$

Из (5,31), (3,25) получаем формулу для экспериментального определения ПМ a_1

$$t_{10} = \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \langle \cos \vartheta' \rangle \equiv \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \langle D_{00}^1(\varphi', \vartheta', 0) \rangle, \quad (5,32)$$

$$t_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\alpha} \langle \sin \vartheta' e^{\mp i\varphi'} \rangle \equiv \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \langle D_{\pm 10}^1(\varphi', \vartheta', 0) \rangle.$$

В (5,32) мы учли, что ПМ a_1 обозначаются через $t_{1\mu}$ (а не T_{LM}) и что они задаются относительно осей $X'Y'Z'$ (см. рис. 1).

Из (5,32), (4,15) получаем формулу для экспериментального определения КПМ a_1

$$t_{1\mu}^{LM} = \frac{\sqrt{3}}{\alpha} \langle D_{M\mu}^L(\varphi, \vartheta, 0) D_{\mu 0}^1(\varphi', \vartheta', 0) \rangle. \quad (5,33)$$

Ошибки КПМ вычисляются по формуле (4,18). В (5,34) — (5,33) используется обозначение (4,17).

Итак, подставляя в соотношение (5,27) найденные на опыте значения КПМ (5,33), можно определить j и η_π . Обработку экспериментальных данных следует производить по методу χ^2 (см. приложение III).

Описанным методом определялись j и η_π изобар $\Sigma^*(1385)$ (см., например, ^{29, 75}), $\Xi^*(1530)$ (см., например, ^{30, 76}). Результаты работы ³⁰ мы использовали в приложении III для иллюстрации метода χ^2 .

Соотношения (5,27) получили Байерс и Фенстер²⁸.

Подчеркнем, что метод поляризационных моментов использует всю информацию о спине и четности изобары и поэтому с успехом мог бы быть применен в работах, в которых использовались другие методы (например, в работе Шефера с сотр.³¹, в которой изучалось угловое распределение продольной и «магической» поляризации Λ -гиперона, образовавшегося в распаде $\Sigma^*(1385) \rightarrow \Lambda + \pi$).

В заключение приведем формулы для экспериментального определения ПМ x (эти формулы легко получаются из (4,25), (5,25), (5,33)):

$$T_{LM} = (C_{j+1/2, L0}^{j+1/2})^{-1} t_{00}^{LM} = (C_{j+1/2, L0}^{j+1/2})^{-1} \langle D_{M0}^L(\varphi, \vartheta, 0) \rangle, \quad (5,34)$$

Таблица III

Коэффициент асимметрии в распадах странных барионов

Распад	Коэффициент асимметрии α
$\Lambda \rightarrow p + \pi^-$	$0,6455 \pm 0,0159$
$\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$	$-0,9547 \pm 0,0696$
$\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$	$-0,0175 \pm 0,0390$
$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$	$-0,0604 \pm 0,0469$
$\Xi^- \rightarrow \Lambda + \pi^-$	$-0,4070 \pm 0,0370$

где L четные;

$$T_{LM} = \frac{1}{3} (C_{j+1/2, L0}^{j+1/2})^{-1} t_{10}^{LM} - \frac{1}{3} (\alpha C_{j+1/2, L0}^{j+1/2})^{-1} \langle \cos \theta' D_{M0}^L(\varphi, \theta, 0) \rangle, \quad (5,35)$$

где L нечетные.

Напомним, что в (5,32) — (5,35) углы θ, φ (θ', φ') задают направление импульса a_1 (N) в системе покоя x (a_1) относительно осей XYZ ($X'Y'Z'$). Если направление XYZ произвольно (однако часто удобно XZ выбирать в плоскости рождения x), то $X'Y'Z'$ направлены так, как показано на рис. 1.

Из (5,34), (5,35) видим, что для определения T_{LM} с четным L нужно иметь лишь угловое распределение распада x , а для определения T_{LM} с нечетным L нужно иметь угловое распределение поляризации a_1 (т. е. наряду с распадом x нужно изучать еще распад a_1 (5,29), α — коэффициент асимметрии в этом распаде). Таким образом, если a_1 — стабильный барион, то можно определить ПМ лишь с четным L .

Кстати, если барион a_1 стабилен, но нельзя определить j и η_x с помощью (5,27); для этой цели нужно использовать поляризованную протонную мишень (см. гл. 7).

В настоящем обзоре мы не рассматриваем распад фермиона с несохранением четности, так как гипероны Λ, Σ, Ξ уже хорошо изучены, а для изучения Ω -гиперона статистика пока явно недостаточна. О распаде фермиона с несохранением четности можно прочесть в обзорах ^{57, 58, 24} и в оригинальных работах ^{23, 27, 45-47}.

д) Распад $j \rightarrow 3/2 + 0$

Пусть в распаде изобары x (4,1) рождается изобара a_1 со спином $3/2$ (и известной четностью) и бесспиновая частица a_2 . Согласно (4,3) имеются четыре спиральные амплитуды распада (если $j = 3/2$) $A_{\pm 1/2}, A_{\pm 3/2}$. В силу сохранения четности между ними имеют место соотношения, аналогичные (4,4), (4,5):

$$A_{-1/2} = \sigma A_{3/2}, \quad A_{-3/2} = \sigma A_{1/2}, \\ \sigma = (\eta_a \eta_b) (-1)^{j-3/2}. \quad (5,36)$$

Соотношения для определения j и η_x получаются, если в (4,29) подставить (I,41) — (I,45) и явные значения $C_{3/2, L, \mu}^{3/2}$:

$$\sqrt{(L-1)(L+2)} t_{22}^{LM} - \sigma (j+1/2) t_{21}^{LM} = 0, \quad (5,37)$$

$$\sqrt{70(L-1)(L+2)} t_{42}^{LM} - \sigma (j+1/2) (3\sqrt{2} t_{41}^{LM} - 2\sqrt{7} t_{31}^{LM}) = 0; \quad (5,38)$$

в (5,37), (5,38) L четные;

$$(j+1/2) \sqrt{(L-1)(L+2)} t_{21}^{LM} - \sigma [L(L-1) - 2(j+1/2)^2] t_{22}^{LM} = 0, \quad (5,39)$$

$$(j+1/2) \sqrt{(L-1)(L+2)} (3\sqrt{2} t_{41}^{LM} - 2\sqrt{7} t_{31}^{LM}) - \\ - \sigma [L(L-1) - 2(j+1/2)^2] \sqrt{70} t_{42}^{LM} = 0, \quad (5,40)$$

$$\left[\frac{(2j+1)}{(L-2)L(L+1)(L+3)} \right]^{1/2} (3\sqrt{3} t_{10}^{LM} + \sqrt{7} t_{30}^{LM}) - \\ - \sigma \left[-\frac{\sqrt{(L-1)(L+2)}}{(j+1/2)(j+3/2)} - \frac{3}{\sqrt{(L-1)(L+2)}} \right] 2\sqrt{35} t_{33}^{LM} = 0, \quad (5,41)$$

$$(2j+1) (t_{10}^{LM} - \sqrt{21} t_{30}^{LM}) - \sigma \sqrt{L(L+1)} (2\sqrt{7} t_{31}^{LM} - 2\sqrt{2} t_{41}^{LM}) = 0; \quad (5,42)$$

в (5,39) — (5,42) L нечетные.

Формулы (5,37) — (5,42) получены Шефером ³³; там соотношение (5,41) приведено с ошибкой и имеет номер (37)). В работе ³³ приводятся также соотношения, полученные в предположении, что в распаде $j \rightarrow 3/2 + 0$ доминирует амплитуда с наименьшим орбитальным моментом.

Для определения j и η_x с помощью соотношений (5,37) — (5,42) необходимо определить на опыте КПМ $a_1 - t_{1\mu}^{LM}$.

Пусть изобара a_1 распадается с сохранением четности на барион и бесспиновую частицу по схеме

$$a_1 \rightarrow N' + \Pi'. \quad (5,43)$$

Тогда ПМ $a_1 - t_{2\mu}$ определяются из этого распада по формуле (5,34) (только в (5,34) нужно заменить T_{LM} на $t_{1\mu}$, а ϑ, φ на ϑ', φ' , так как в распаде (5,43) a_1 играет роль x , а N' играет роль a_1). Таким образом, из (5,34), (4,15) получаем формулу для экспериментального определения $t_{2\mu}^{LM}$:

$$t_{2\mu}^{LM} = -\sqrt{5} \langle D_{M\mu}^L(\varphi, \vartheta, 0) D_{\mu 0}^L(\varphi', \vartheta', 0) \rangle. \quad (5,44)$$

Итак, изучая угловое распределение в распадах (2,1), (5,43), можно определить по формулам (4,16), (5,44) КПМ $a_1 - t_{00}^{LM}, t_{2\mu}^{LM}$. В этом случае для определения j и η_x можно использовать лишь соотношения (5,37), (5,39).

Чтобы использовать остальные соотношения (5,38), (5,40) — (5,42), необходимо определить на опыте $t_{1\mu}^{LM}$ и $t_{3\mu}^{LM}$. Это возможно лишь в том случае, если барион N' , образовавшийся в распаде (5,43), в свою очередь является нестабильным и распадается с несохранением четности по схеме

$$N' \rightarrow N'' + \Pi''. \quad (5,45)$$

Тогда $t_{1\mu}, t_{3\mu}$ определяются по формуле, аналогичной (5,35) (с заменой T_{LM} на $t_{1\mu}$ и ϑ, φ на ϑ', φ' , как разъяснялось выше):

$$t_{1\mu} = 3(\alpha' C_{3/2, 1/2, 10}^{3/2, 1/2})^{-1} \langle \cos \vartheta'' D_{\mu 0}^1(\varphi', \vartheta', 0) \rangle, \quad (5,46)$$

где α' — коэффициент асимметрии в распаде (5,45), ϑ'' — угол между направлением импульса N' (в системе покоя a_1) и направлением импульса N'' (в системе покоя N').

Из (5,46), (4,15) получаем формулы для экспериментального определения $t_{1\mu}^{LM}, t_{3\mu}^{LM}$:

$$t_{1\mu}^{LM} = (3\sqrt{15}/\alpha') \langle D_{M\mu}^L(\varphi, \vartheta, 0) D_{\mu 0}^1(\varphi', \vartheta', 0) \cos \vartheta'' \rangle, \quad (5,47)$$

$$t_{3\mu}^{LM} = -(\sqrt{35}/\alpha') \langle D_{M\mu}^L(\varphi, \vartheta, 0) D_{\mu 0}^3(\varphi', \vartheta', 0) \cos \vartheta'' \rangle. \quad (5,48)$$

Напомним, что в (5,44), (5,46) — (5,48) углы ϑ, φ (ϑ', φ') задают направление импульса a_1 (N') в системе покоя x (a_1) относительно осей XYZ ($X'Y'Z'$). Направление XYZ произвольно (однако часто удобно XZ выбирать в плоскости рождения x), а $X'Y'Z'$ следует выбирать так, как показано на рис. 1.

6. ТРЕХЧАСТИЧНЫЙ РАСПАД РЕЗОНАНСНОГО СОСТОЯНИЯ

а) Амплитуды трехчастичного распада и их свойства

Пусть в распаде

$$x \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 \quad (6,1)$$

частицы a_2 и a_3 бесспиновые, спин x равен j ; спин a_1 равен s . Это практически наиболее интересный случай. Импульсы и четности частиц равны соответственно $k_x, k_1, k_2, k_3; \eta_x, \eta_1, \eta_2, \eta_3$.

В системе покоя x выберем оси координат XYZ . Состояние продуктов распада x задается следующими величинами: углами ϑ, φ , определяющими направление импульса одной из частиц (например, $\mathbf{k}_2$) относительно осей XYZ , углом Φ , задающим положение плоскости распада x (рис. 2), энергиями ω_1, ω_2 (ω_3 определяется законом сохранения энергии) и, наконец, λ — спиральностью частицы a_1 .

Если проекция спина x на ось Z равна m , то волновая функция продуктов распада x имеет вид (см. приложение IV)

$$\Psi_{m\lambda}(\varphi, \vartheta, \Phi; \omega_1, \omega_2) = \frac{V^{j+(1/2)}}{2\pi} \times \\ \times \sum_{\tilde{m}=-j}^j f_{\tilde{m}\lambda}(\omega_1, \omega_2) D_{m, \tilde{m}}^{j*}(\varphi, \vartheta, \Phi). \quad (6,2)$$

Амплитуды распада $f_{\tilde{m}\lambda}(\omega_1, \omega_2)$ не зависят от выбора осей XYZ ; они могут быть отличными от нуля, если только

$$-j \leq \tilde{m} \leq j, \quad -s \leq \lambda \leq s. \quad (6,3)$$

$f_{\tilde{m}\lambda}(\omega_1, \omega_2)$ имеет физический смысл, аналогичный A_λ для двухчастичного распада (см. гл. 4): $(V^{j+1/2}/2\pi) f_{\tilde{m}\lambda}$ есть амплитуда распада x с проекцией спина на ось Z , равной $\tilde{m}$, когда импульс $\mathbf{k}_2$ направлен вдоль оси Z , плоскость распада (6,1) совпадает с XZ , а спиральность частицы a_1 равна λ .

Если функция (6,2) нормирована, то с учетом (II,5) получаем

$$\sum_{\tilde{m}=-j}^j \sum_{\lambda=-s}^s \int |f_{\tilde{m}\lambda}(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 = 1. \quad (6,4)$$

Условие (6,4) аналогично условию нормировки (4,8) для амплитуд двухчастичного распада.

В силу сохранения четности в распаде (6,1) имеет место соотношение между амплитудами распада

$$f_{\tilde{m}\lambda}(\omega_1, \omega_2) = I(-1)^{\lambda-\tilde{m}} f_{-\tilde{m}-\lambda}(\omega_1, \omega_2), \quad (6,5)$$

$$I = (\eta_x/\eta_1\eta_2\eta_3)(-1)^{j-s}. \quad (6,6)$$

Доказательство см. в приложении IV.

Заметим, что возможны и другие способы параметризации волновой функции трех частиц (см., например, статью Бермана и Жакоба¹¹, обзор²⁶), однако в настоящем обзоре мы их использовать не будем.

б) Каскадные поляризационные моменты для трехчастичного распада

Поляризационное состояние x и a_1 будем характеризовать ПМ T_{LM} и t_{μ} в системах их покоя относительно осей XYZ и $X'Y'Z'$ соответственно. Если выбор осей XYZ произволен (однако часто удобно XZ выбрать в плоскости рождения x), то оси $X'Y'Z'$ следует выбирать так, как показано на рис. 2.

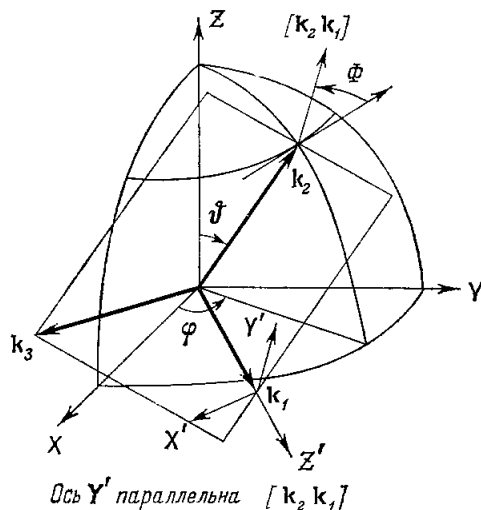


Рис. 2.

В дальнейшем удобно использовать каскадные поляризационные моменты (КПМ) частицы a_1 в трехчастичном распаде (6,4) — $t_{l\mu}^{LM\tilde{M}}$, которые определяются по формуле

$$t_{l\mu}^{LM\tilde{M}} = \int t_{l\mu} D_{M\tilde{M}}^L(\varphi, \vartheta, \Phi) I(\varphi, \vartheta, \Phi; \omega_1, \omega_2) d\cos\vartheta d\varphi d\Phi d\omega_1 d\omega_2, \quad (6,7)$$

где $I(\varphi, \vartheta, \Phi; \omega_1, \omega_2)$ есть распределение продуктов распада (6,4) по углам и энергиям. Заметим, что (6,7) аналогично определению КПМ (4,15) для двухчастичного распада.

КПМ a_1 можно определить на опыте. Так, например, в силу (3,17') из (6,7) получаем формулу для экспериментального определения $t_{00}^{LM\tilde{M}}$:

$$t_{00}^{LM\tilde{M}} = \langle D_{M\tilde{M}}^L(\varphi, \vartheta, \Phi) \rangle. \quad (6,8)$$

Другие $t_{l\mu}^{LM\tilde{M}}$ определяются на опыте в зависимости от способа определения $t_{l\mu}$. Например, если a_1 есть барион, который распадается с несохранением четности по схеме (5,29), то из (5,32), (6,7) получаем формулу для экспериментального определения $t_{1\mu}^{LM\tilde{M}}$:

$$t_{1\mu}^{LM\tilde{M}} = \frac{V\sqrt{3}}{\alpha} \langle D_{\mu 0}^1(\varphi', \vartheta', 0) D_{M\tilde{M}}^L(\varphi, \vartheta, \Phi) \rangle, \quad (6,9)$$

где α — коэффициент асимметрии в распаде (5,29); ϑ' , φ' — углы, определяющие направление импульса N , который родился в распаде (5,29) в системе покоя a_1 относительно осей $X'Y'Z'$ (см. рис. 2).

В (6,8), (6,9) принято обозначение (4,17). Ошибки вычисляются по формуле (4,18). Из (6,2) следует

$$t_{l\mu}^{LM\tilde{M}} = T_{LM} \left(\sum_{\lambda, \lambda' = -l}^l \sum_{\tilde{m}, \tilde{m}' = -j}^j C_{\lambda', l\mu}^{*\lambda} C_{\tilde{m}', L\tilde{M}}^{\tilde{m}} \tilde{f}_{\tilde{m}\lambda, \tilde{m}'\lambda'} \right), \quad (6,10)$$

где

$$\tilde{f}_{\tilde{m}\lambda, \tilde{m}'\lambda'} = \int \tilde{f}_{\tilde{m}\lambda}(\omega_1, \omega_2) \tilde{f}_{\tilde{m}'\lambda'}^*(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (6,11)$$

Вывод (6,10), (6,11) аналогичен выводу формулы (4,25) из (4,2).

Из (6,11), (6,4), (6,5) следует

$$\tilde{f}_{\tilde{m}\lambda, \tilde{m}'\lambda'} = \tilde{f}_{\tilde{m}'\lambda', \tilde{m}\lambda}^*, \quad (6,12)$$

$$\tilde{f}_{\tilde{m}\lambda, \tilde{m}'\lambda'} = (-1)^{\lambda-\lambda' + \tilde{m}-\tilde{m}'} \tilde{f}_{-\tilde{m}-\lambda, -\tilde{m}'-\lambda'}, \quad (6,13)$$

$$\tilde{f}_{\tilde{m}\lambda, \tilde{m}'\lambda'} = I(-1)^{\lambda'-\tilde{m}'} \tilde{f}_{\tilde{m}\lambda, -\tilde{m}'-\lambda'}, \quad (6,14)$$

$$0 \leq \tilde{f}_{\tilde{m}\lambda, \tilde{m}\lambda} \leq 1, \quad \sum_{\tilde{m}, \lambda} \tilde{f}_{\tilde{m}\lambda, \tilde{m}\lambda} = 1, \quad |\tilde{f}_{\tilde{m}\lambda, \tilde{m}'\lambda'}|^2 \leq \tilde{f}_{\tilde{m}\lambda, \tilde{m}\lambda} \tilde{f}_{\tilde{m}'\lambda', \tilde{m}'\lambda'}. \quad (6,15)$$

Отметим некоторые свойства КПМ.

Из (6,7), (3,16), (3,16'), (II,4) следует

$$t_{l\mu}^{LM\tilde{M}*} = (-1)^{M+\tilde{M}+\mu} t_{l-\mu}^{L-M-\tilde{M}}. \quad (6,16)$$

Из (6,10), (6,13), (I,4e) вытекает

$$t_{l\mu}^{LM\tilde{M}} = (-1)^{L+l+\tilde{M}+\mu} t_{l-\mu}^{L-M-\tilde{M}}. \quad (6,17)$$

Если в реакции рождения ι выполнено условие Каппса и если XZ выбраны в плоскости этой реакции, то из (6,10), (6,12), (6,13), (3,24),

(I,4д) следует

$$t_{l\mu}^{LM\tilde{M}*} = (-1)^l t_{l\mu}^{LM\tilde{M}}. \quad (6,18)$$

Свойства (6,16) — (6,18) соответствуют свойствам КИМ (4,24), (4,26), (4,27) для двухчастичного распада.

в) Определение спина и четности резонанса, распадающегося на три частицы

Из соотношения (6,10) с помощью (I,2), (I,4) выразим $\tilde{f}_{\tilde{m}\tilde{\lambda}, \tilde{m}'\tilde{\lambda}'}$:

$$\tilde{f}_{\tilde{m}\tilde{\lambda}, \tilde{m}'\tilde{\lambda}'} = \sum_{L=0}^{2j} \sum_{l=0}^{2s} \frac{(2L+1)(2l+1)}{(2j+1)(2s+1)} C_{j\tilde{m}', L\tilde{M}}^{\tilde{m}} C_{\tilde{\lambda}', l\mu}^{\tilde{\lambda}} (t_{l\mu}^{LM\tilde{M}} T_{LM}). \quad (6,19)$$

Из (6,14), (6,19) получаем соотношение для определения j и η_x :

$$\begin{aligned} \sum_{L=0}^{2j} \sum_{l=0}^{2s} (2L-1)(2l-1) C_{j\tilde{m}', L\tilde{M}}^{\tilde{m}} C_{\tilde{\lambda}', l\mu}^{\tilde{\lambda}} (t_{l\mu}^{LM\tilde{M}} T_{LM}) - \\ - I(-1)^{\tilde{\lambda}' - \tilde{m}'} \sum_{L'=0}^{2j} \sum_{l'=0}^{2s} (2L'-1)(2l'-1) C_{j\tilde{m}', L'\tilde{M}'}^{\tilde{m}} C_{\tilde{\lambda}', l'\mu'}^{\tilde{\lambda}} \times \\ \times (t_{l'\mu'}^{L'M'\tilde{M}'} T_{L'M'}) = 0. \end{aligned} \quad (6,20)$$

Штрих у знака суммы означает, что суммирование следует производить только по четным $L = l$, $L' = l'$ либо только по нечетным *).

Так как КИМ $t_{l\mu}^{LM\tilde{M}}$ определяются на опыте, то (6,20) представляет собой систему линейных уравнений относительно $(1/T_{LM})$, причем коэффициенты этих уравнений зависят от j (через $C_{j\tilde{m}', L\tilde{M}}^{\tilde{m}}$) и I . Как правило, число уравнений превышает число неизвестных (в этом мы убедимся на конкретных примерах). Поэтому наиболее вероятные значения j и η_x можно определить по методу χ^2 , подбирая значение j и η_x , которые наилучшим образом удовлетворяют системе (6,20).

Из (6,10) следует, что соотношения (6,20) останутся справедливыми при усреднении $t_{l\mu}^{LM\tilde{M}}$ и T_{LM} по любой области углов рождения x , поэтому при определении j и η_x можно использовать всю полученную на эксперименте статистику. В силу (6,17) независимыми являются соотношения (6,20) с неотрицательными $\tilde{M}$, $\tilde{M}'$, т. е.

$$0 \leq \tilde{m}' \leq \tilde{m} \leq j. \quad (6,21)$$

В (6,20) при каждом L можно брать любое значение $\tilde{M} \geq 0$ и при каждом $\tilde{M}$ получается независимое уравнение.

Если в реакции рождения x выполняются условия Каппса, то $t_{l\mu}^{LM\tilde{M}}$ и T_{LM} чисто действительны либо чисто мнимы в соответствии с (6,18), (3,16), поэтому (6,20) есть система уравнений с действительными коэффициентами относительно действительных неизвестных.

Углами θ , φ в (6,2), (6,7) можно задавать направление любого вектора, лежащего в плоскости распада (6,1). Значения КИМ, получающиеся в каждом случае, кинематически независимы, следовательно, в каждом случае получаются независимые системы (6,20) (кроме случая $j = 1$, $I = -1$). Таким образом, задавая углами θ , φ направление различных векторов, можно увеличить число независимых уравнений (6,20), число же неизвестных T_{LM} остается прежним.

*) В том, что (6,20) выполняются отдельно для четных и для нечетных $l \perp L$, $l' \perp L'$, можно убедиться с помощью (6,17), (I,4e).

Может оказаться, что для некоторых L все $T_{LM} = 0$. Тогда неизвестными в (6,20) следует считать величины $\tau_{lm}^{\tilde{M}} = (t_{lm}^{LM\tilde{M}}/T_{LM})$. Число неизвестных в (6,20) увеличится, но если оно все же будет меньше числа уравнений, то определить j и η_x можно.

При определении j и η_x из (6,20) попутно находятся T_{LM} . Следует проверить, удовлетворяют ли T_{LM} условию неотрицательности ρ -матрицы x^2 . Кроме того, по формуле (6,19) можно вычислить $\tilde{f}_{\tilde{m}\lambda, \tilde{m}'\lambda'}$ и проверить, выполняются ли условия (6,15).

Общая теория трехчастичных распадов разработана в ^{11, 34, 35}. Применим общие формулы к конкретным распадам.

г) Распад бозона на три бесспиновые частицы

В распаде $j \rightarrow 30$ частица a_1 имеет только КПМ $t_{00}^{LM\tilde{M}}$, которые определяются на эксперименте по формуле (6,8). С учетом этого обстоятельства запишем систему (6,20) для определения спина и четности x :

$$\sum_{L=0}^{2j} (2L+1) C_{j\tilde{m}', L\tilde{M}}^{j\tilde{m}} \left(\frac{\langle D_{M\tilde{M}}^L \rangle}{T_{LM}} \right) - I \sum_{L'=0}^{2j} (2L'+1) C_{j-\tilde{m}', L'\tilde{M}'}^{j\tilde{m}} \left(\frac{\langle D_{M'\tilde{M}'}^{L'} \rangle}{T_{L'M'}} \right) = 0, \quad (6,22)$$

$$0 \leq \tilde{m}' \leq \tilde{m} \leq j, \quad I = \eta_x \eta_1 \eta_2 \eta_3 (-1)^j.$$

Штрих у знака суммы означает, что суммирование нужно проводить по четным L, L' либо по нечетным. В (6,22) и некоторых последующих формулах опущены аргументы D -функций, φ, ϑ, Φ , но они, конечно, подразумеваются. Согласно общим свойствам КПМ (6,17) должны выполняться соотношения

$$\langle D_{M-\tilde{M}}^L(\varphi, \vartheta, \Phi) \rangle = (-1)^{L+\tilde{M}} \langle D_{M\tilde{M}}^L(\varphi, \vartheta, \Phi) \rangle. \quad (6,23)$$

Если в реакции рождения x выполняются условия Каппса и если XZ выбраны в плоскости этой реакции, то согласно (6,18) $\langle D_{M\tilde{M}}^L(\varphi, \vartheta, \Phi) \rangle$ должны быть чисто действительными.

В качестве иллюстрации рассмотрим систему (6,22) для распада $2 \rightarrow 30$, $I = +1$. При $\tilde{m} = \tilde{m}' = 0$, $I = 1$ (6,22) обращается в тождество. При остальных $\tilde{m}, \tilde{m}'$, удовлетворяющих (6,21), получаем из (6,22) следующие уравнения:

а) для четных L :

$$5(\langle D_{M0}^2 \rangle - \sqrt{6} \langle D_{M2}^2 \rangle) / T_{2M} + 12 \left(\langle D_{M'0}^4 \rangle + \sqrt{\frac{5}{2}} \langle D_{M'2}^4 \rangle \right) / T_{4M'} = 0, \quad (6,24)$$

$$10 \langle D_{M0}^2 \rangle / T_{2M} + 3(\langle D_{M'0}^4 \rangle - \sqrt{70} \langle D_{M'4}^4 \rangle) / T_{4M'} = 0, \quad (6,25)$$

$$\sqrt{10} \langle D_{M1}^2 \rangle / T_{2M} + \sqrt{3}(\langle D_{M'1}^4 \rangle + \sqrt{7} \langle D_{M'3}^4 \rangle) / T_{4M'} = 0; \quad (6,26)$$

б) для нечетных L :

$$\langle D_{M1}^4 \rangle / T_{4M} + \sqrt{\frac{7}{2}} \left(\langle D_{M'1}^3 \rangle + \sqrt{\frac{5}{3}} \langle D_{M'3}^3 \rangle \right) / T_{3M'} = 0. \quad (6,27)$$

Для того чтобы подтвердить или отвергнуть гипотезу $j = 2$, $I = 1$, нужно найти χ^2 для системы уравнений (6,24) — (6,26), подбирая оптимальное отношение $T_{2M}/T_{4M'}$. Число независимых уравнений можно увеличить, если задавать углами ϑ, φ направление различных векторов, лежащих в плоскости распада x . Таким же путем можно получить несколь-

ко независимых уравнений (6,27) (с одними и теми же неизвестными T_{1M} , T_{3M}) и их также исследовать по методу χ^2 .

В работе ³⁵ приведена система (6,22) для случаев $j = 1, 2$, $I = \pm 1$.

Эквивалентный метод определения j и η_π в распаде $j \rightarrow 30$ развит в работе ³⁶.

д) Распад изобары на барион
и две бесспиновые частицы

В данном распаде поляризацию родившегося бариона удобно характеризовать вектором поляризации $\mathbf{p}$. В соответствии с этим будем рассматривать следующие КПМ бариона: $p_{X', Y', Z'}^{LM\tilde{M}}$, $p_{Y'}^{LM\tilde{M}}$, $p_{Z'}^{LM\tilde{M}}$, которые определяются по формуле

$$p_{X', Y', Z'}^{LM\tilde{M}} = \int p_{X', Y', Z'} D_{M\tilde{M}}^L(\psi, \vartheta, \Phi) \times \\ \times I(\psi, \vartheta, \Phi; \omega_1, \omega_2) d \cos \vartheta d\varphi d\Phi d\omega_1 d\omega_2. \quad (6,28)$$

$p_{X', Y', Z'}^{LM\tilde{M}}$ связаны с $t_{1\mu}^{LM\tilde{M}}$ по формулам, аналогичным (3,25):

$$t_{10}^{LM\tilde{M}} = \frac{1}{\sqrt{3}} p_{Z'}^{LM\tilde{M}}, \quad t_{1\pm 1}^{LM\tilde{M}} = \mp \frac{1}{\sqrt{6}} (p_{X'}^{LM\tilde{M}} \mp i p_{Y'}^{LM\tilde{M}}), \quad (6,29)$$

причем $X'Y'L'$ направлены так, как показано на рис. 2.

В терминах $p_{X', Y', Z'}^{LM\tilde{M}}$ свойства КПМ (6,16), (6,17) соответственно имеют вид

$$p_{X', Y', Z'}^{LM\tilde{M}*} = (-1)^{M+\tilde{M}} p_{X', Y', Z'}^{L-M-\tilde{M}}, \quad t_{00}^{LM\tilde{M}*} = (-1)^{M+\tilde{M}} t_{00}^{L-M-\tilde{M}}, \quad (6,30)$$

$$p_{X', Z'}^{LM\tilde{M}} = (-1)^{L+\tilde{M}+1} p_{X', Z'}^{L-M-\tilde{M}}, \quad p_{Y'}^{LM\tilde{M}} = (-1)^{L+\tilde{M}} p_{Y'}^{L-M-\tilde{M}}, \quad (6,31)$$

$$t_{00}^{LM\tilde{M}} = (-1)^{L-\tilde{M}} t_{00}^{L-M-\tilde{M}}.$$

Эти формулы получены с учетом (6,29).

Если в реакции рождения x выполнено условие Каппса и если XZ выбраны в плоскости этой реакции, то из (6,18), (6,29) заключаем, что $t_{00}^{LM\tilde{M}}$ и $p_{Y'}^{LM\tilde{M}}$ действительны, а $p_{X', Z'}^{LM\tilde{M}}$ мнимы. Если барион распадается с несохранением четности по схеме (5,29), то из (5,31), (6,28) получаем формулу для экспериментального определения $p_{X', Y', Z'}^{LM\tilde{M}}$:

$$p_{X', Y', Z'}^{LM\tilde{M}} = (3/\alpha) \langle \mathbf{v}_{X', Y', Z'} D_{M\tilde{M}}^L(\psi, \vartheta, \Phi) \rangle, \quad (6,32)$$

где α — коэффициент асимметрии в распаде (5,29), $\mathbf{v}$ — единичный вектор вдоль импульса N в системе покоя a_1 . $t_{00}^{LM\tilde{M}}$ определяется на опыте по формуле (6,8), где принято обозначение (4,17).

Подставляя в (6,20) значения $C_{1/2\lambda' L, \mu}^{1/2\lambda}$ и учитывая (6,29), получаем соотношения для определения j и η_π

$$\sum_{L_{\text{чет}}=0}^{2j-1} (2L+1) C_{j\tilde{m}, L\tilde{M}}^{j\tilde{m}} (t_{00}^{LM\tilde{M}}/T_{LM}) - iI (-1)^{\tilde{m}'+1/2} \times \\ \times \sum_{L_{\text{нечет}}=1}^{2j} (2L'+1) C_{j-\tilde{m}', L'\tilde{M}'}^{j\tilde{m}'} (p_{Y'}^{L'M'\tilde{M}'}/T_{L'M'}) = 0, \quad (6,33) \\ \sum_{L_{\text{чет}}=0}^{2j-1} (2L+1) C_{j\tilde{m}, L\tilde{M}}^{j\tilde{m}} (p_{Z'}^{LM\tilde{M}}/T_{LM}) - I (-1)^{\tilde{m}'-1/2} \times \\ \times \sum_{L_{\text{нечет}}=0}^{2j-1} (2L'+1) C_{j-\tilde{m}', L'\tilde{M}'}^{j\tilde{m}'} (p_{X'}^{L'M'\tilde{M}'}/T_{L'M'}) = 0.$$

(6,33) справедливы, если одновременно изменить четность L, L' .

В качестве иллюстрации рассмотрим распад $1/2 \rightarrow 1/2 + 0 + 0$. Из (6,33) получаем следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} p_{Z'}^{1M0} - I \sqrt{2} p_{X'}^{1M1} &= 0, & M = 0, 1; \\ p_{X'}^{1M0} - I \sqrt{2} p_{Z'}^{1M1} &= 0, & M = 0, 1; \\ ip_{Y'}^{000} - I \sqrt{6} (t_{00}^{1M1}/T_{1M}) &= 0, & M = 0, 1; \\ 1 - iI \sqrt{6} (p_{Y'}^{1M1}/T_{1M}) &= 0, & M = 0, 1. \end{aligned} \right\} \quad (6,34)$$

Согласно (6,6)

$$I = (\eta_x/\eta_1\eta_2\eta_3).$$

В работе³⁵ приведена система уравнений (4,33) для распада $3/2 \rightarrow 1/2 + 0 + 0$.

7. РОЖДЕНИЕ РЕЗОНАНСА В ЧЕТЫРЕХЧАСТИЧНОЙ РЕАКЦИИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕГО КВАНТОВЫХ ЧИСЕЛ

а) Амплитуды реакции и их свойства

Пусть резонанс r рождается в сохраняющей четность реакции

$$b_1 + b_2 \rightarrow c + x. \quad (7,1)$$

Спины, четности и импульсы частиц, участвующих в реакции (7,1), обозначим соответственно через s_{b_1} , s_{b_2} , s_c , j ; η_{b_1} , η_{b_2} , η_c , η_x ; k_{b_1} , k_{b_2} , k_c , k_x .

Спиновые состояния частиц будем задавать проекциями m на оси, лежащие в плоскости реакции (7,1) в СЦИ (вдоль нормали к плоскости реакции направим ось Y).

Реакция (7,1) описывается амплитудами

$$F_{m_{b_1}m_{b_2}; m_c m_x}(k_{b_1}, k_{b_2}; k_c, k_x) = \langle k_c m_c, k_x m_x | \hat{T} | k_{b_1} m_{b_1}, k_{b_2} m_{b_2} \rangle. \quad (7,2)$$

В силу сохранения четности оператор перехода $\hat{T}$ коммутирует с оператором отражения в плоскости реакции (7,1). Отсюда вытекают соотношения между амплитудами (7,2):

$$F_{m_{b_1}m_{b_2}, m_c m_x} = \xi (-1)^{m_{b_1} + m_{b_2} - m_c - m_x} F_{-m_{b_1} - m_{b_2}, -m_c - m_x}, \quad (7,3)$$

$$\xi = (\eta_x \eta_c / \eta_{b_1} \eta_{b_2}) (-1)^{j + s_c - s_{b_1} - s_{b_2}}. \quad (7,4)$$

Доказательство (7,3) совершенно аналогично доказательству (6,5), которое приведено в приложении IV.

В (7,3) мы опустили импульсы частиц в амплитудах реакции, так как в левой и правой частях импульсы одни и те же (при отражении в плоскости реакции импульсы не изменяются!).

Соотношения типа (7,3), вытекающие из сохранения четности в реакции (7,1), впервые получены О. Бором³⁷ (только в³⁷ в качестве оси квантования спинов выбиралась нормаль и плоскости реакции).

С помощью (7,3) (или формул Бора) получаются соотношения между поляризационными эффектами в сохраняющих четность реакциях^{19,38}, которые можно использовать для определения спина и четности x .

Рассмотрим частные случаи.

б) О применении бесспиновой мишени
для определения спина
и четности бозонного резонанса

В реакции типа

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow x \rightarrow 0 \quad (7,5)$$

амплитуды перехода согласно (7,3), (7,4) удовлетворяют соотношению

$$F_m = \xi (-1)^m F_{-m}, \quad (7,6)$$

где ξ равна умноженному на $(-1)^1$ произведению четностей частиц, участвующих в реакции (7,5); m — проекция спина x на ось, лежащую в плоскости реакции (7,5).

Матрица плотности x , очевидно, равна

$$\rho_{mm'} = F_m F_{m'}^* / \left(\sum_{m=-j}^j |F_m|^2 \right). \quad (7,7)$$

Из (7,6), (7,7) следует

$$\rho_{mm'} = \xi (-1)^{m'} \rho_{m-m'}. \quad (7,8)$$

Подставляя (3,15) в (7,8), получаем соотношение, которое можно использовать для определения j и η_x ^{39, 40}:

$$\sum_{L=0}^{2j} (2L+1) C_{jm', LM}^{jm} T_{LM} = \xi (-1)^{m'} \sum_{L'=0}^{2j} (2L'+1) C_{j-m', L'M}^{jm} T_{L'M}. \quad (7,9)$$

Штрих у знака суммы означает, что суммирование можно производить только по четным L, L' либо только по нечетным (это следует из (3,24)) *).

(7,9), очевидно, справедливы при усреднении T_{LM} по любой области углов рождения x в реакции (7,5), так что для определения j и η_x можно использовать всю статистику в реакции (7,5).

В силу (3,16) независимыми являются T_{LM} с неотрицательными M . Поэтому соотношения (7,9) независимы при

$$0 \leq m' \leq m \leq j. \quad (7,10)$$

Если x распадается по схеме $x \rightarrow 20$ либо $x \rightarrow \gamma + 0$, либо $x \rightarrow 1 + 0$, то, подставив в соотношения (7,9) формулы для экспериментального определения T_{LM} (5,1), либо (5,8), либо (5,18), (5,19) соответственно, получим соотношения между наблюдаемыми величинами. Задаваясь различными значениями j и η_x , из этих соотношений по методу χ^2 можно найти наиболее вероятные j и η_x .

Если x распадается на три бесспиновые частицы, то добавление соотношений (7,9) к системе (6,22) увеличит количество уравнений, не изменяя количества неизвестных T_{LM} . Поэтому надежность определения j и η_x увеличится.

Если из (7,9), (6,22) исключить T_{LM} , то получим, вообще говоря, нелинейные соотношения между наблюдаемыми величинами $\langle D_{M\tilde{M}}^L \rangle$ (Φ, Ψ, Φ). Однако (по крайней мере до $j = 4$) будут иметь место и линейные соотношения (для $j = 1, 2$ линейные соотношения см. в ⁴⁰). В качестве

*) Отметим, что соотношения (7,9) остаются в силе, если бозонный резонанс рождается в реакции $\Pi + p \rightarrow x + p$ (Π — бесспиновая частица) при высоких энергиях и если основной вклад в амплитуду этой реакции дают полюса в i -плоскости только вакуумной группы ($P, P', \rho, R, \omega, \phi$ — полюса ⁶¹), причем $\xi = \eta_{\Pi} \eta_x (-1)^1$.

иллюстрации приведем одно из линейных соотношений для $j = 2$, $I = -1$, $\xi = -1$ *)

$$\langle D_{00}^2(\varphi, \vartheta, \Phi) \rangle + \sqrt{6} (\langle D_{02}^2(\varphi, \vartheta, \Phi) \rangle - \langle D_{20}^2(\varphi, \vartheta, \Phi) \rangle) + \\ + 6 \langle D_{22}^2(\varphi, \vartheta, \Phi) \rangle = \frac{2}{7}. \quad (7,11)$$

Если x рождается в реакции (7,5) и распадается на две бесспиновые частицы, то, как показали Пешкин ⁴¹,

$$\langle P_{2j}(\cos \Theta) \rangle \neq 0, \quad (7,12)$$

где P_{2j} — полином Лежандра, θ — угол между нормалью к плоскости реакции (5,5) и направлением импульса одного из продуктов распада x (в системе покоя x).

Используя идею Пешкина, Рындин показал ⁴², что (7,12) справедливо и в том случае, если x , рождаясь в реакции (7,5), распадается на три бесспиновые частицы, причем в этом случае Θ — угол между нормалью к плоскости реакции (7,5) и к плоскости распада x (в системе покоя x). В табл. IV приведены полученные в ⁴² границы для $\langle P_{2j}(\cos \Theta) \rangle$ при $j = 0, 1, 2, 3$ (через I_R , I_D обозначены произведения четностей частиц в реакции (7,5) и в распаде (6,1) соответственно).

Т а б л и ц а IV

$j \backslash I_R, I_D$	$I_R = I_D = 1 (I_R I_D = 1)$	$I_R = I_D = -1 (I_R I_D = 1)$	$I_R I_D = 1$
0	$\langle P_0 \rangle = 1$	Запрет	Запрет
1	$\langle P_2 \rangle = 2/5$	$\langle P_2 \rangle = 1/10$	$\langle P_2 \rangle = -1/5$
2	$1/126 \leq \langle P_4 \rangle \leq 38/126$	$\langle P_4 \rangle = 8/63$	$-12/63 \leq \langle P_4 \rangle \leq -2/63$
3	$9/429 \leq \langle P_6 \rangle \leq 100/429$	$1/1716 \leq \langle P_6 \rangle \leq 225/1716$	$-50/286 \leq \langle P_6 \rangle \leq -1/286$

Процедура определения j состоит просто в определении наивысшего $\langle P_L(\cos \Theta) \rangle$; тогда $j = L_{\max}/2$. Более того, если $\langle P_{2j}(\cos \Theta) \rangle$ окажется между верхними или между нижними границами для случаев $I_R = I_D = 1$ и $I_R = I_D = -1$, то можно определить и четность x . Однако нужно иметь в виду, что нижняя граница $|\langle P_{2j}(\cos \Theta) \rangle|$ весьма мала и может быть достигнута за счет фона. Поэтому наиболее надежным методом определения j и η_x является решение систем (7,9), (6,22).

в) О применении поляризованной протонной мишени для определения спина и четности изобары

Если изобара распадается на стабильный барион (нуклон) и бесспиновую частицу или на стабильный барион и две бесспиновые частицы, то определить j и η_x с помощью соотношений (5,27), (6,33) нельзя, так

*) В (7,11), как и в (6,22), (7,9), углы φ, ϑ, Φ следует выбирать, как показано на рис. 2; причем ось Y направлена вдоль нормали к плоскости реакции (7,5).

как для стабильного бариона невозможно определить на опыте КПМ $t_{1\mu}^{LM}$ и $p_{X', Y', Z'}^{LM\bar{M}}$.

Мы покажем, что определить спин и четность изобары можно и без упомянутых КПМ при условии, если изобара рождается в реакции с поляризованной протонной мишенью^{43, 44}

$$0 + p \rightarrow 0 + x. \quad (7,13)$$

Этот вопрос заслуживает внимания, так как в последнее время метод поляризованных протонных мишеней находит широкое применение.

Поляризацию протона и изобары будем задавать в системах их покоя относительно осей $X_1 Y_1 Z_1$ и XYZ соответственно, причем оси координат направим следующим образом:

$$Z \parallel \mathbf{k}_x, \quad Y \parallel Y_1 \parallel [\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_x], \quad Z_1 \parallel \mathbf{k}_0, \quad (7,14)$$

где $\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_0$ — импульсы изобары и налетающей частицы в реакции (7,13) в лабораторной системе. При таком выборе осей амплитуды реакции (7,13) согласно (7,3), (7,4) удовлетворяют соотношению

$$F_{\nu, m} = \xi (-1)^{\nu-m} F_{-\nu, -m}, \quad (7,15)$$

$$\xi = (\eta_x/\eta_p) I' (-1)^{j-1/2}, \quad (7,16)$$

где I' — произведение четностей бесспиновых частиц, участвующих в реакции (7,13); m (ν) — проекция спина изобары (протона) на ось Z (Z_1).

Матрица плотности изобары выражается через амплитуды реакции (7,13) по формуле

$$\mathcal{F} \rho_{mm'} = \sum_{\nu, \nu'=-1/2}^{1/2} F_{\nu, m} F_{\nu', m'}^* \cdot \frac{1}{2} (1 + \mathbf{p}\sigma)_{\nu\nu'}, \quad (7,17)$$

где $\sigma_{\nu\nu'}$ — матрицы Паули, $\mathbf{p}$ — вектор поляризации протонной мишени, так что $(1 + \mathbf{p}\sigma)_{\nu\nu'}/2$ есть ее матрица плотности, $\mathcal{F}$ — квадрат матричного элемента, просуммированного по спиновым состояниям. С точностью до фазового объема $\mathcal{F}$ равно дифференциальному сечению реакции (7,13).

Пусть в реакции (7,13) исследуется рождение изобары в одной и той же плоскости на один и тот же угол в обе стороны по отношению к падающему пучку. Из (7,14) следует, что при рассеянии изобары в одну сторону $p_{X_1} > 0$, а в другую — $p_{X_1} < 0$. В соответствии с этим назовем положительной ту сторону, для которой $p_{X_1} > 0$, а отрицательной, — для которой $p_{X_1} < 0$.

Обозначим через $\mathcal{F}^\pm$, $T_{LM}^\pm$ вероятность перехода и ПМ изобары при рассеянии в положительную либо отрицательную сторону (на один и тот же угол в одной и той же плоскости).

Подставляя (3,15) в (7,17), с учетом (7,15), (1,4e), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|p_{X_1}|} \sum_{\text{чет } L=0}^{2j-1} (2L+1) C_{j'm', L}^{jm} (\mathcal{F}^+ \text{Im } T_{LM}^+ - \mathcal{F}^- \text{Im } T_{LM}^-) = \\ & = \xi (-1)^{m'+1/2} (1/p_{Z_1}) \sum_{\text{чет } L'=0}^{2j-1} (2L'+1) C_{j'-m', L'M'}^{jm} (\mathcal{F}^+ \text{Im } T_{L'M'}^+ - \mathcal{F}^- \text{Im } T_{L'M'}^-) = \\ & = (2j+1) \text{Im} (F_{1/2, m} F_{-1/2, m'}^* + F_{-1/2, m} F_{1/2, m'}^*). \quad (7,18) \end{aligned}$$

Если мишень поляризована, то согласно (3,24) $\text{Im } T_{LM} = 0$ при четных L .

В силу (3,16) независимыми являются T_{LM} с неотрицательными M , поэтому (7,18) независимы при условии, что

$$0 < m' < m \leq j. \quad (7,19)$$

Из этого условия нетрудно подсчитать, что число независимых соотношений (7,18) равно $(j^2 - 1/4)$.

T_{LM} с четным L можно определить на опыте по формуле (5,34) без измерения поляризации бариона, образовавшегося в результате распада изобары. Поэтому соотношения (7,18) можно использовать для определения спина и четности изобары, распадающейся на стабильный барион и бесспиновую частицу.

Подставляя (5,34) в (7,18), получаем

$$\begin{aligned} p_{Z_1} \sum_{\text{чет } L=0}^{2j-1} (2L+1) (C_{jm', LM}^{jm} / C_{j1/2, L0}^{j1/2}) \operatorname{Im} \left\{ \sum_{i=1}^{n^+} D_{M0}^L(\varphi_i, \vartheta_i, 0) - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{n^-} D_{M0}^L(\varphi_j, \vartheta_j, 0) \right\} = \xi (-1)^{m'-1/2} \sum_{\text{чет } L'=0}^{2j-1} (2L'+1) (C_{j-m', L'M'}^{jm} / C_{j1/2, L0}^{j1/2}) \times \\ \times \operatorname{Im} \left\{ \sum_{i=1}^{n^+} |p_{X_1}|_i D_{M'0}^{L'}(\varphi_i, \vartheta_i, 0) + \sum_{j=1}^{n^-} |p_{X_1}|_j D_{M'0}^{L'}(\varphi_j, \vartheta_j, 0) \right\}, \quad (7,20) \end{aligned}$$

где индексом i перенумерованы случаи рождения изобары в положительную сторону, а j в отрицательную.

Так как соотношения (7,18) остаются в силе, если их усреднить по любой области углов рождения изобары в реакции (7,13), то в (7,20) суммирование можно производить тоже по любой области углов рождения изобары. Напомним, что углы ϑ , φ задают направление импульса бариона в системе покоя x относительно осей XYZ (см. рис. 1). Оси XYZ , $X_1Y_1Z_1$ выбираются согласно (7,14).

В (7,20) учтено, что p_{Z_1} для всех случаев рождения изобары одно и то же.

Задаваясь различными значениями j и η_x , из $(j^2 - 1/4)$ соотношений (7,20) по методу χ^2 можно определить наиболее вероятные значения j и η_x .

Приведем пример. Если $j = 3/2$, то имеют место два соотношения (7,20)

$$\left. \begin{aligned} p_{Z_1} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{i=1}^{n^+} D_{10}^2(\varphi_i, \vartheta_i, 0) - \sum_{j=1}^{n^-} D_{10}^2(\varphi_j, \vartheta_j, 0) \right\} = \\ = \xi \operatorname{Im} \left\{ \sum_{i=1}^{n^+} |p_{X_1}|_i D_{20}^2(\varphi_i, \vartheta_i, 0) + \sum_{j=1}^{n^-} |p_{X_1}|_j D_{20}^2(\varphi_j, \vartheta_j, 0) \right\}, \\ p_{Z_1} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{i=1}^{n^+} D_{20}^2(\varphi_i, \vartheta_i, 0) - \sum_{j=1}^{n^-} D_{20}^2(\varphi_j, \vartheta_j, 0) \right\} = \\ = -\xi \operatorname{Im} \left\{ \sum_{i=1}^{n^+} |p_{X_1}|_i D_{10}^2(\varphi_i, \vartheta_i, 0) + \sum_{j=1}^{n^-} |p_{X_1}|_j D_{10}^2(\varphi_j, \vartheta_j, 0) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (7,21)$$

Если x распадается на барион и две бесспиновые частицы, то согласно (6,10), (6,8)

$$T_{LM} = A_L \langle D_{M0}^L(\varphi, \vartheta, \Phi) \rangle, \quad (7,22)$$

где

$$A_L = \left(\sum_{v=-1/2}^{1/2} \sum_{\tilde{m}=-j}^j C_{jm, L0}^{j\tilde{m}} \tilde{f}_{\tilde{m}v, \tilde{m}v} \right)^{-1} \quad (7,23)$$

определяются динамикой распада.

Подставив (7,22) в (7,18), получим $(j^2 - 1/4)$ линейных однородных уравнений относительно $(j - 1/2)$ неизвестных A_L (L четные, $L \neq 0$). Эти уравнения отличаются от (7,20) тем, что вместо $(C_{j+1/2, L_0}^{j+1/2})^{-1}$, $D_{M_0}^L(\varphi, \vartheta, 0)$ стоят A_L и $D_{M_0}^L(\varphi, \vartheta, \Phi)$ (напомним, что углы φ, ϑ, Φ определяются в системе покоя x , как показано на рис. 2). Подбирая A_L , которые наилучшим образом удовлетворяют полученным уравнениям, по методу χ^2 можно определить наиболее вероятные значения j и η_x . Для $j = 3/2$ имеют место соотношения (7,21) с заменой $D_{M_0}^2(\varphi, \vartheta, 0) \rightarrow D_{M_0}^2(\varphi, \vartheta, \Phi)$ (A_2 сокращаются).

Выражаем благодарность экспериментаторам ИТЭФ, и прежде всего В. К. Григорьеву, И. А. Ерофееву, Г. К. Клигеру, В. З. Колганову, Г. С. Ломкаци, В. Т. Смолянкину, Г. Д. Тихомирову, за плодотворное обсуждение обзора²⁴⁻²⁶, на основе которого написана настоящая статья. Авторы признательны Л. И. Лапидусу за обсуждение вопросов, связанных с поляризованной протонной мишенью, С. М. Биленькому, Р. М. Рындиному, приславшим препринты и оттиски своих работ. Авторы выражают глубокую благодарность Л. Б. Окуню, прочитавшему первоначальный вариант рукописи и сделавшему большое количество ценных замечаний, которые нами были учтены в окончательной редакции статьи.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША—ГОРДАНА

Коэффициенты Клебша—Гордана (ККГ) $C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j m}$ возникают при квантовомеханическом сложении моментов. Они отличны от нуля, если

$$m_1 + m_2 = m, \quad |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2, \quad (I,1)$$

что согласуется с общеизвестным правилом сложения моментов.

Коэффициенты КГ удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j m} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j' m'} = \delta_{j j'} \delta_{m m'}, \quad (I,2)$$

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j m} C_{j_1 m_1', j_2 m_2'}^{j m} = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} \quad (I,3)$$

и соотношениям симметрии

$$C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j m} = (-1)^{j-j_1-m_2} \left[\frac{2j+1}{2j_1+1} \right]^{1/2} C_{j_2 m_2, j_1 -m_1}^{j_1 -m_1} = \quad (I,4a)$$

$$= (-1)^{j-j_2+m_1} \left[\frac{2j+1}{2j_2+1} \right]^{1/2} C_{j_1 -m_1, j_2 m_2}^{j_2 -m_2} = \quad (I,4б)$$

$$= (-1)^{j_1+j_2-j} C_{j_2 m_2, j_1 m_1}^{j m} = \quad (I,4в)$$

$$= (-1)^{j_1-m_1} \left[\frac{2j-1}{2j_2+1} \right]^{1/2} C_{j_1 m_1, j_2 -m_2}^{j_2 -m_2} = \quad (I,4г)$$

$$= (-1)^{j_2+m_2} \left[\frac{2j+1}{2j_1+1} \right]^{1/2} C_{j_2 -m_2, j_1 m_1}^{j_1 -m_1} = \quad (I,4д)$$

$$= (-1)^{j_1+j_2-j} C_{j_1 -m_1, j_2 -m_2}^{j -m}. \quad (I,4е)$$

Приведем некоторые частные значения коэффициентов КГ:

$$C_{j m, 0 0}^{j m} = 1, \quad (I,5)$$

$$C_{j0, L0}^{j0} = \frac{1 + (-1)^L}{2} (-1)^{L/2} \left[\frac{(2j - L)^! (2j + 1)^!}{(2j - L - 1)^!} \right]^{1/2} \frac{L! (j + L/2)!}{(j - L/2)! \left(\frac{L}{2} \right)!^2} \quad (1.6)$$

$$C_{jm, 10}^{jm} = -C_{j-m, 10}^{j-m} = \frac{m}{\sqrt{j(j+1)}}, \quad (1.7)$$

$$C_{jm, 20}^{jm} = C_{j-m, 20}^{j-m} = \frac{3m^2 - j(j+1)}{\sqrt{j(j-1)(2j-1)(2j+3)}}, \quad (1.8)$$

$$C_{j1/2, L0}^{j1/2} = 2(-1)^{\frac{L-1}{2}} \left[\frac{(2j-L)^!}{(2j-1)(2j-L+1)^!} \right]^{1/2} \frac{L! \left(j - \frac{L}{2} \right)!}{\left(j - \frac{L}{2} \right)! \left[\frac{(L-1)!}{2} \right]^2} \quad (1.9)$$

в (1,9) L нечетные),

$$C_{j1/2, L0}^{j1/2} = 2(-1)^{\frac{L}{2}} \left[\frac{(2j-L)^!}{(2j+1)(2j+L+1)^!} \right]^{1/2} \frac{L! \left(j - \frac{L+1}{2} \right)!}{\left(j - \frac{L+1}{2} \right)! \left(\frac{L}{2} \right)!^2} \quad (1.10)$$

(в (1,10) L четные)

В настоящем обзоре использованы следующие соотношения между коэффициентами КГ

$$C_{j3/2, L0}^{j3/2} = \frac{1}{(j+3/2)(j-1/2)} \{ (j+3/2)(j-1/2) - L(L+1) + (j+1/2)^2 [1 - (-1)^{L+1}] \} C_{j1/2, L0}^{j1/2}, \quad (1.11)$$

$$C_{j-1/2, L1}^{j1/2} = -\frac{[1 + (-1)^{L+1}]}{2\sqrt{L(L+1)}} (2j+1) C_{j1/2, L0}^{j1/2}, \quad (1.12)$$

$$G_{j1/2, L1}^{j3/2} = \frac{L(L+1) - (j+1/2)^2 [1 + (-1)^{L+1}]}{\sqrt{(j-3/2)(j-1/2)L(L+1)}} C_{j1/2, L0}^{j1/2}, \quad (1.13)$$

$$C_{j-1/2, L2}^{j3/2} = \frac{(2j+1)[1 + (-1)^{L+1} - L(L+1)]}{2\sqrt{(j+3/2)(j-1/2)(L-1)L(L+1)(L-2)}} C_{j1/2, L0}^{j1/2}, \quad (1.14)$$

$$C_{j-3/2, L3}^{j3/2} = \frac{[1 + (-1)^{L+1}](j+1/2)(L-1)(L+2)}{\sqrt{(L-2)(L-1)L(L+1)(L+2)(L+3)}} C_{j1/2, L0}^{j1/2}, \quad (1.15)$$

$$C_{j1, L0}^{j1} = \left[1 - \frac{L(L+1)}{2j(j+1)} \right] C_{j0, L0}^{j0}, \quad (1.16)$$

$$G_{j-1, L2}^{j1} = -\left[\frac{L(L+1)}{(L-1)(L+2)} \right]^{1/2} C_{j0, L0}^{j0}, \quad (1.17)$$

$$C_{j0, L1}^{j1} = \frac{1}{2} \left[\frac{L(L+1)}{j(j+1)} \right]^{1/2} C_{j0, L0}^{j0}. \quad (1.18)$$

(в (1,16)–(1,18) L четные)

Описание существующих таблиц коэффициентов КГ дано в книге Юциса Левинсона, Ванагаса⁷ на стр. 26–28. В книге Юциса и Бандзаитиса⁸ приведены таблицы коэффициентов КГ для $j_1 + j_2 + j_3 \leq 16$, $j_{\max} \leq 6$, а также алгебраические формулы при заданных значениях j_2 и m_2 .

II. ФУНКЦИИ ВИГНЕРА

D функции $D_{mn}^j(\varphi, \vartheta, \Phi)$ возникают при вращении шаровых функции (шаровых спиноров) на углы Эйлера φ, ϑ, Φ

$$D_{mn}^j(\varphi, \vartheta, \Phi) = e^{-im\varphi} d_{mn}^j(\vartheta) e^{-in\Phi} \quad (II.1)$$

D -функции с целым j связаны с шаровыми функциями по формуле

$$Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{m0}^{j*}(\varphi, \vartheta, 0), \quad (II.2)$$

так что, например,

$$P_j(\cos \vartheta) = d_{00}^j(\vartheta). \quad (\text{II},3)$$

D -функции удовлетворяют соотношениям симметрии

$$D_{mn}^j(\varphi, \vartheta, \Phi) = (-1)^{m-n} D_{-m-n}^{j*}(\varphi, \vartheta, \Phi) = D_{-n-m}^{j*}(\Phi, \vartheta, \varphi), \quad (\text{II},4)$$

$$d_{mn}^j(\vartheta) = (-1)^{j+m} d_{m-n}^j(\pi - \vartheta), \quad (\text{II},4')$$

$$d_{mn}^j(0) = (-1)^{j+m} d_{m-n}^j(\pi) = \delta_{mn}, \quad (\text{II},4'')$$

а также соотношениям ортогональности

$$\int D_{mn}^j(\varphi, \vartheta, \Phi) D_{m'n'}^{j'*}(\varphi, \vartheta, \Phi) d \cos \vartheta d\varphi d\Phi = \frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \quad (\text{II},5)$$

$$\int D_{mn}^j(\varphi, \vartheta, 0) D_{m'n'}^{j'*}(\varphi, \vartheta, 0) d \cos \vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (\text{II},6)$$

Имеет место формула разложения произведения двух D -функций,

$$D_{mn}^j(\varphi, \vartheta, \Phi) D_{m'n'}^{j'*}(\varphi, \vartheta, \Phi) = \sum_{L=|j-j'|}^{j+j'} C_{jm, j'm'}^{Lm+m'} C_{jn, j'n'}^{Ln+n'} D_{m+m', n+n'}^L(\varphi, \vartheta, \Phi). \quad (\text{II},7)$$

Из (II,2), (II,4), (II,7) следует:

$$Y_{jm}(\vartheta, \varphi) Y_{j'm'}^{*}(\vartheta, \varphi) = \sum_{L=0}^{2j} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} C_{j0, L0}^{j0} C_{jm, Lm}^{j0} Y_{LM}(\vartheta, \varphi), \quad (\text{II},7')$$

$$D_{mn}^j(\varphi, \vartheta, \Phi) = 0, \quad \text{если } |m| > j, \quad \text{либо } |n| > j. \quad (\text{II},8)$$

III. ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПО МЕТОДУ χ^2

При определении спина и четности резонансного состояния по методу χ^2 сначала следует найти нижнюю границу для j . Из условия (4,23) заключаем, что для фермионного резонанса

$$j > L_{\max}^{\text{odd}}/2, \quad j \geq (L_{\max}^{\text{even}} + 1)/2, \quad (\text{III},4)$$

а для бозонного резонанса

$$j \geq L_{\max}^{\text{even}}/2, \quad j > (L_{\max}^{\text{odd}} + 1)/2. \quad (\text{III},4')$$

где $L_{\max}^{\text{odd}}$ и $L_{\max}^{\text{even}}$ — максимальные значения L , для которых имеются отличные от нуля КПМ.

Чтобы найти $L_{\max}$, для каждого фиксированного значения L пронумеруем независимые КИМ (так как действительная и мнимая части КПМ независимы, то им присваивается различный номер) и обозначим их через t_α . Найдем матрицу ошибок по формуле

$$U_{\alpha\alpha'} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \{t_{\alpha_i} - \langle t_\alpha \rangle\} \{t_{\alpha'_i} - \langle t_{\alpha'} \rangle\}, \quad (\text{III},2)$$

где t_{α_i} есть значение t_α в i -ом случае распада, n — число случаев распада:

$$\langle t_\alpha \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{\alpha_i}. \quad (\text{III},2')$$

Вычислив обратную матрицу $U_{\alpha\alpha'}^{-1}$, находим χ^2 по формуле

$$\chi^2 = \sum_{\alpha, \alpha'=1}^m \langle t_\alpha \rangle u_{\alpha\alpha'}^{-1} \langle t_{\alpha'} \rangle, \quad (\text{III},3)$$

где m — ранг матрицы ошибок, равный числу определяемых на опыте независимых КПМ.

Для найденного значения χ^2 и числа степеней свободы по таблицам интеграла вероятности (см., например, ⁴⁸) найдем вероятность того, что отклонение $\langle t_\alpha \rangle$ от нуля (при данном L) равно или больше того значения, которое оказалось в нашем эксперименте. Максимальное значение L , для которого эта вероятность окажется малой, и следует подставить в (III,1), (III,1').

Теперь нужно установить, при каком значении j и η_x экспериментальные данные лучше всего удовлетворяют соотношениям (4,29) либо (6,20), причем к конкурсу допускаются только такие j , которые удовлетворяют (III,1), (III,1').

Для фиксированных значений j и η_x вычисляется вероятность выполнения гипотез (4,29) либо (6,20). Процедура вычисления этой вероятности полностью совпадает с только что описанной.

Более подробно о методе χ^2 см. в книгах ⁴⁸, ⁴⁹.

Т а б л и ц а V

Гипотеза	χ^2	Количество степеней свободы	Вероятность	Вывод
$t_0^{2M} = 0$	16,5	3	0,0003	$j_{\min} = 3/2$
$t_{1\mu}^{3M} = 0$	12,0	6	0,036	
$t_0^{2M} = 0, t_{1\mu}^{3M} = 0$	29,2	9	0,0002	
$t_0^{4M} = 0$	7,6	5	0,11	
$t_{1\mu}^{5M} = 0$	7,6	10	0,58	
$t_0^{4M} = 0, t_{1\mu}^{5M} = 0$	18,2	15	0,20	
$j = \frac{3}{2} \begin{cases} (2j+1) t_{10}^{LM} - \sqrt{2L(L+1)} t_{11}^{LM} \\ (2j+1) t_{10}^{LM} + \sqrt{2L(L+1)} t_{11}^{LM} \end{cases}$	10,3	4	0,016	$D_{3/2}$ неправдоподобно
	1,5	4	0,65	$P_{3/2}$ правдоподобно
$j = \frac{5}{2} \begin{cases} (2j+1) t_{10}^{LM} - \sqrt{2L(L+1)} t_{11}^{LM} \\ (2j+1) t_{10}^{LM} + \sqrt{2L(L+1)} t_{11}^{LM} \end{cases}$	9,5	4	0,023	$F_{5/2}$ неправдоподобно
	0,9	4	0,84	$D_{5/2}$ правдоподобно

В качестве примера в табл. V приведены результаты работы группы Шлеина ³⁰, в которой исследовался распад $\Xi^*(1530) \rightarrow \Xi + \pi$.

Из этой таблицы видно, что вопрос о четности решается более определенно, чем о спине.

IV. АМПЛИТУДЫ ДВУХЧАСТИЧНОГО И ТРЕХЧАСТИЧНОГО РАСПАДА И ИХ СВОЙСТВА

Пусть в сохраняющем четность распаде (6,1) спины частиц a_1, a_2, a_3 равны соответственно s_1, s_2, s_3 .

Состояние родившихся частиц можно характеризовать в системе покоя x следующими величинами: углами ϑ, Φ , определяющими направление импульса одной из частиц (например, a_2), углом Φ , задающим положение плоскости распада (6,1) (см. рис. 2), энергиями ω_1, ω_2 (ω_3 определяется законом сохранения энергии), а также спиральностями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, которые характеризуют спиновое состояние частиц a_1, a_2, a_3 .

Если x находится в состоянии s проекцией спина на ось Z , равной m , то волновая функция продуктов распада (6,1), очевидно, равна

$$\Psi_{m\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(\varphi, \vartheta, \Phi; \omega_1, \omega_2) = \langle \varphi, \vartheta, \Phi; \omega_1, \omega_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 | \hat{T} | jm \rangle, \quad (IV,1)$$

где $\hat{T}$ — оператор перехода (6,1).

Обозначим через $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ оператор поворота на углы Эйлера α, β, γ и проведем некоторые преобразования в правой части (IV,1):

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \vartheta, \Phi; \omega_1, \omega_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 | \hat{T}^+ | jm \rangle &= \langle jm | \hat{T}^+ | \varphi, \vartheta, \Phi; \omega_1, \omega_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle^* = \\ &= \langle jm | \hat{T}^+ \hat{R}(\varphi, \vartheta, \Phi) | 0, 0, 0; \omega_1, \omega_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle^* = \\ &= \langle jm | \hat{R}(\varphi, \vartheta, \Phi) \hat{T}^+ | 0, 0, 0; \omega_1, \omega_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle^*. \end{aligned} \quad (\text{IV},2)$$

Из рис. 2 легко понять, что $|0, 0, 0; \omega_1, \omega_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\rangle$ есть такое состояние частиц a_1, a_2, a_3 , когда импульс $\mathbf{k}_2$ направлен вдоль оси Z , а плоскость распада (6,1) совпадает с XZ . Очевидно, что

$$\hat{R}(\varphi, \vartheta, \Phi) | 0, 0, 0; \omega_1, \omega_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle = | \varphi, \vartheta, \Phi; \omega_1, \omega_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle.$$

Так как $|j\tilde{m}\rangle$ ($-j \leq \tilde{m} \leq j$) есть полный набор состояний частицы x , то (IV,2) можно преобразовать далее:

$$\begin{aligned} \langle jm | \hat{R}(\varphi, \vartheta, \Phi) \hat{T}^+ | 0, 0, 0; \omega_1, \omega_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle^* &= \\ &= \sum_{\tilde{m}=-j}^j \langle jm | \hat{R}(\varphi, \vartheta, \Phi) | j\tilde{m} \rangle^* \langle j\tilde{m} | \hat{T}^+ | 0, 0, 0; \omega_1, \omega_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle^* = \\ &= \sum_{\tilde{m}=-j}^j \langle 0, 0, 0; \omega_1, \omega_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 | \hat{T} | j\tilde{m} \rangle \langle jm | \hat{R}(\varphi, \vartheta, \Phi) | j\tilde{m} \rangle^*. \end{aligned} \quad (\text{IV},3)$$

Как известно, матрицей преобразования состояний $|jm\rangle$ при вращении являются D -функции, так что

$$\langle jm | \hat{R}(\varphi, \vartheta, \Phi) | j\tilde{m} \rangle = D_{m\tilde{m}}^j(\varphi, \vartheta, \Phi). \quad (\text{IV},4)$$

Из (IV,1)–(IV,4) следует

$$\Psi_{m\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(\varphi, \vartheta, \Phi; \omega_1, \omega_2) = (\sqrt{j+1/2/2\pi}) \sum_{\tilde{m}=-j}^j f_{\tilde{m}\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(\omega_1, \omega_2) D_{m\tilde{m}}^{j*}(\varphi, \vartheta, \Phi), \quad (\text{IV},5)$$

где использовано обозначение

$$f_{\tilde{m}\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(\omega_1, \omega_2) = \frac{2\pi}{\sqrt{j+1/2}} \langle 0, 0, 0; \omega_1, \omega_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 | \hat{T} | j\tilde{m} \rangle. \quad (\text{IV},6)$$

Из сохранения четности в распаде (6,1) вытекают соотношения между амплитудами распада

$$\begin{aligned} f_{\tilde{m}\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(\omega_1, \omega_2) &= I (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\tilde{m}} f_{-\tilde{m}-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}(\omega_1, \omega_2), \\ I &= (\eta_x/\eta_1\eta_2\eta_3) (-1)^{j-s_1-s_2-s_3}. \end{aligned} \quad (\text{IV},7)$$

Для доказательства (IV,7) рассмотрим оператор

$$\hat{Y} = \hat{P}\hat{R}(0, \pi, 0), \quad (\text{IV},8)$$

где $\hat{P}$ — оператор инверсии.

$\hat{R}(0, \pi, 0)$ есть, очевидно, оператор вращения вокруг оси Y на угол π . Поэтому из (IV,8) ясно, что $\hat{Y}$ есть оператор отражения в плоскости XZ .

В сохраняющем четность распаде $\hat{T}$ и $\hat{Y}$ коммутируют, так что

$$\hat{T} = \hat{Y}\hat{T}\hat{Y}^{-1}. \quad (\text{IV},9)$$

Подставим (IV,9) в (IV,6) и учтем, что $\hat{Y}$, действуя на состояния $|j\tilde{m}\rangle$, $|0, 0, 0; \omega_1, \omega_2; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\rangle$, не изменяет импульсов частиц, а спинные состояния частиц в соответствии с (IV,4) изменяет следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{Y} | s, \lambda \rangle &= \hat{P}\hat{R}(0, \pi, 0) | s, \lambda \rangle = \eta \sum_{\lambda'=-s}^s D_{\lambda\lambda'}^s(0, \pi, 0) | s, \lambda' \rangle = \\ &= \eta \sum_{\lambda'=-s}^s (-1)^{s-\lambda} \delta_{\lambda\lambda'} | s, \lambda' \rangle = \eta (-1)^{s-\lambda} | s, -\lambda \rangle. \end{aligned} \quad (\text{IV},10)$$

После указанной подстановки получаем (IV,7), что и требовалось.

Заметим, что в распаде (6,1) углы φ , θ , Φ можно определить и иным способом, чем в настоящем обзоре. Волновая функция продуктов распада по-прежнему будет иметь вид (IV,5). Новые амплитуды распада будут линейными комбинациями старых. Соотношения, вытекающие из сохранения четности, будут, конечно, отличаться от (IV,7) (подробно см. 11, 29).

В двухчастичном распаде (4,4) состояние частиц a_1 , a_2 (спины которых равны s_1 , s_2) можно характеризовать углами θ , φ , задающими направление импульса одной из частиц (в системе покоя x), и спиральностями λ_1 , λ_2 .

Если x находится в состоянии с проекцией спина на ось Z , равной m , то волновая функция продуктов распада (4,1) равна

$$\Psi_{m\lambda_1\lambda_2}(\varphi, \theta) = [(2J-1)4\pi]^{1/2} \cdot I_{\lambda_1\lambda_2} D_{m, \lambda_1-\lambda_2}^{J*}(\varphi, \theta, 0), \quad (\text{IV}, 11)$$

где

$$A_{\lambda_1\lambda_2} = [4\pi/(2j+1)]^{1/2} \langle 0, 0; \lambda_1, \lambda_2 | \hat{T} | i, \lambda_1 - \lambda_2 \rangle. \quad (\text{IV}, 12)$$

(IV,11), (IV,12) можно получить в точности таким же способом, что и (IV,5), (IV,6), если учесть, что состояние

$$| \varphi, \theta; \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \hat{R}(\varphi, \theta, 0) | 0, 0; \lambda_1, \lambda_2 \rangle, \quad (\text{IV}, 13)$$

и что распад x вдоль оси Z возможен только при $m = \lambda_1 - \lambda_2$.

Если в распаде (4,1) сохраняется четность, то амплитуды распада $I_{\lambda_1\lambda_2}$ удовлетворяют соотношениям

$$A_{\lambda_1\lambda_2} = \sigma A_{-\lambda_1-\lambda_2}, \quad \sigma = (\eta_1\eta_2/\eta_x) (-1)^{j-s_1-s_2}. \quad (\text{IV}, 14)$$

(IV,14) доказывается в точности таким же способом, что и (IV,7).

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПРИНЯТЫЕ В ОБЗОРЕ

1. О б о з н а ч е н и я

- x — резонанс, квантовые числа которого нужно определить;
- j, η_x — спин и четность резонанса x ;
- a_k — ($k = 1, 2$ либо $k = 1, 2, 3$) — продукты распада резонанса x ;
- s — спин частицы a_1 ;
- $\rho_{mn'}$ — спиновая матрица плотности x ;
- $\rho_{\lambda\lambda'}$ — спиновая матрица плотности a_1 ;
- T_{LM} — поляризационные моменты (ПМ) x ;
- $t_{l\mu}$ — поляризационные моменты (ПМ) a_1 ;
- $D_{MM'}^L(\alpha, \beta, \gamma)$ — функции Вигнера;
- A_λ — спиральные амплитуды двухчастичного распада x (4,1), если частица a_2 бесспиновая;
- $\sigma = (\eta_x/\eta_1\eta_2) (-1)^{j-s}$, где η_1, η_2 — четности частиц в распаде (4,1);
- $t_{l\mu}^{LM}$ — каскадные поляризационные моменты (КПМ) частицы a_1 в распаде (4,1);
- $\langle t_\alpha \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{\alpha i}$ суммирование происходит по всем случаям изучаемого распада, $t_{\alpha i}$ — величина t_α в i -м случае, n — полное число случаев распада;
- N — барион;
- Π — псевдоскалярный мезон;
- α — коэффициент асимметрии в распаде (5,29);
- $\mathbf{P}$ — вектор поляризации частицы со спином $1/2$;
- $\mathbf{v}$ — единичный вектор в направлении импульса N в распаде (5,29);
- $f_{m\lambda}^{\sim}(\omega_1, \omega_2)$ — амплитуда трехчастичного распада (6,1);
- $I = (\eta_x/\eta_1\eta_2\eta_3) (-1)^{j-s}$; η_1, η_2, η_3 — четности частиц в распаде (6,1);
- $t_{l\mu}^{LM}$ — каскадные поляризационные моменты частицы a_1 в распаде (6,1).

2. Определения

Плоскость рождения x — плоскость, содержащая импульсы налетающей частицы и резонанса x в л. с. реакции (2, 1).

Z-система (Y-система) — система координат, в которой в качестве оси Z (Y) выбрано направление нормали к плоскости рождения x .

Система Треймана — Янга — Y -система, в которой ось Z направлена вдоль импульса налетающей частицы в реакции (2,1) в системе покоя x .

Условие Кипса — ситуация, когда в реакции (2,1) частицы b_1 , b_2 не поляризованы, а импульсы и спиновые состояния частиц c_1 , c_2 , ..., c_n не измеряются, причем в реакции (2,1) четность сохраняется.

Плоскость распада x — плоскость в системе покоя x , содержащая импульсы продуктов его распада в случае трехчастичного распада x (6,1).

Московский физико-технический институт,
Институт теоретической и экспериментальной
физики, Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. C a r r r s, Phys. Rev. **122**, 929 (1961).
2. М. С. М а р и н о в, ЯФ **5**, 6 (1967).
3. U. F a n o, Rev. Mod. Phys. **29**, 74 (1957).
4. L. W o l f e n s t e i n, J. A s h k i n, Phys. Rev. **85**, 947 (1952).
5. А. И. А х н е з е р, В. Б. Б е р е с т е ц к и й, Квантовая электродинамика, изд. 2-е, М., Физматгиз, 1959.
6. Л. Д. Л а н д а у, Е. М. Л и ф ш и ц, Квантовая механика, М., Физматгиз, 1963.
7. И. М. Г е л ь ф а н д, Р. А. М и л л о с, З. Я. Ш а п п р о, Представление группы вращений и группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.
8. А. П. Ю ц и с, И. Б. Л е в и н с о н, В. В. В а н а г а с, Математическая теория момента количества движения, Вильнюс, Госнаучполитиздат Лит. ССР, 1961.
9. А. П. Ю ц и с, А. А. Б а н д з а й т и с, Теория момента количества движения в квантовой механике, Вильнюс, «Минтис», 1965.
10. M. J a c o b, C. W i c k, Ann. Phys. **7**, 404 (1959).
11. S. B e r m a n, M. J a c o b, Phys. Rev. **139**, B1023 (1965).
12. M. E. R o s e, Elementary Theory of Angular Momentum, J. Wiley, New York, 1957.
13. A. R. E d m o n d s, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton Univ. Press, Princeton, 1957.
14. М. С. Д у б о в и к о в, ЯФ **5**, 419 (1967).
15. D. D. C a r m o n y, R. T. V a n d e W a l l e, Phys. Rev. Lett. **8**, 73 (1962).
16. C. U. C h u n g, Phys. Rev. **138**, B1514 (1965).
17. М. С. Д у б о в и к о в, И. М. Н а р о д е ц к и й, ЯФ **8**, 1236 (1968).
18. И. А. В е т л и ц к и й, В. В. В л а д и м и р с к и й, В. К. Г р и г о р ь е в и д р., ЯФ **6**, 795 (1967); M. S. D u b o v i k o v, V. K. G r i g o r y e v, A. P. G r i s h i n et al., Phys. Lett. **23**, 716 (1966).
19. С. М. В и л е н с к и й, Л. И. Т а п и д у с, Р. М. Р ы н д и н, УФН **84**, 243 (1964).
20. J. W. C r o n i n, O. E. O v e r s e t h, Proc. of 1962 Intern. Conference on High-Energy Phys. at CERN, 1962, стр. 452; Phys. Rev. **129**, 1795 (1963).
21. F. S. C r a w f o r d, Proc. of 1962 Intern. Conference on High-Energy Phys. at CERN, 1962, стр. 827.
22. E. F. B e a l l, B. C o r k, D. K e e f e, P. M u r p h y, W. W e n z e l, Phys. Rev. Lett. **8**, 75 (1962).
23. M. A d e m o l l o, R. G a t t o, Phys. Rev. **133**, B531 (1964).
24. М. С. Д у б о в и к о в, Ю. А. С и м о н о в, Препринт ИТЭФ № 474, 1966.
25. М. С. Д у б о в и к о в, Ю. А. С и м о н о в, Препринт ИТЭФ № 533, 1967.
26. И. М. Н а р о д е ц к и й, М. С. Д у б о в и к о в, Препринт ИТЭФ № 593, 1968.
27. T. L e e, C. Y a n g, Phys. Rev. **109**, 1755 (1958).
28. N. B y e r s, S. F e n s t e r, Phys. Rev. Lett. **11**, 52 (1963).
29. J. B. S h a f e r, D. O. H u w e, Phys. Rev. **134**, B1372 (1964).
30. P. E. S h l e i n, D. C a r m o n y, G. P j e r r o u, W. S l a t e r, D. S t o r k, H. T i c h o, Phys. Rev. Lett. **11**, 167 (1963).
31. J. B. S h a f e r, J. M u r r a y, D. O. H u w e, Phys. Rev. Lett. **10**, 179 (1963).
32. L. B e r t a n z a, V. B r i s s o n, P. C o n n o l l y, E. H a r t et al., Phys. Rev. Lett. **10**, 176 (1963).
33. J. B. S h a f e r, Phys. Rev. **139**, B607 (1965).
34. M. A d e m o l l o, R. G a t t o, G. P r e p a r a t a, Phys. Rev. **139**, B1608 (1965).
35. М. С. Д у б о в и к о в, ЯФ **6**, 178 (1967).
36. В. В. В л а д и м и р с к и й, О. И. В а с и л ь е в а, Г. С. Л о м к а ц и, Г. Д. Т н х о м и р о в, ЯФ **8**, 507 (1968).

37. A. Bohr, Nucl. Phys. **10**, 486 (1959).
38. М. С. Дубовиков, ЯФ **3**, 396 (1966).
39. М. С. Дубовиков, Письма ЖЭТФ **3**, 156 (1966).
40. М. С. Дубовиков, ЯФ **7**, 1127 (1968).
41. М. Peshkin, Phys. Rev. **133**, B428 (1964).
42. Р. М. Рындин, ЯФ **4**, 884 (1966).
43. М. С. Дубовиков, ЯФ **4**, 1058 (1966).
44. М. С. Дубовиков, Письма ЖЭТФ **3**, 8 (1966).
45. S. M. Bilenky, R. M. Ryndin, Phys. Lett. **18**, 346 (1965).
46. S. M. Bilenky, R. M. Ryndin, Phys. Lett. **13**, 159 (1964).
47. G. Shapiro, Phys. Rev. **134**, B1393 (1964).
48. A. G. Worthing, J. Geffner, Treatment of Experimental Data, New York, 1964.
49. Э. Ферми, Лекции о нуклонах и π -мезонах, М., ИЛ, 1956.
50. Р. Далиц, Странные частицы и сильные взаимодействия, М., ИЛ, 1964.
51. Лекции Норамбердской школы, Ереван, 1962.
52. В. М. Шехтер, Резонансные состояния элементарных частиц, М., Изд-во ВИНТИ, 1965.
53. C. Zemach, Phys. Rev. **140**, B109 (1965).
54. C. Zemach, Phys. Rev. **133**, B1201 (1964).
55. R. Gatto, H. Stapp, Phys. Rev. **121**, 1553 (1961).
56. S. Fenster, Thesis (UCLA, 1964).
57. N. Byers, Preprint CERN 67-20, 1967.
58. Р. М. Рындин, Лекции в школе в Высоких Татрах (препринт).
59. S. B. Treiman, C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. **8**, 140 (1962).
60. G. Ascoli, H. Crawley, D. Mortara, A. Shapiro, Phys. Rev. Lett. **20**, 1411 (1968).
61. К. А. Тер-Мартirosyan, Препринты ИТЭФ № 417 и № 494, 1967.
62. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Релятивистская квантовая теория, ч. I, М., «Наука», 1968.
63. Л. Г. Заставенко, ЖЭТФ **35**, 758, 1417 (1958).
64. W. Gardner, Proc. Phys. Soc. **64**, 239 (1951).
65. S. Lloyd, Phys. Rev. **83**, 716 (1951).
66. М. И. Широков, ЖЭТФ **32**, 1022 (1957).
67. А. М. Балдин, М. И. Широков, ЖЭТФ **30**, 784 (1956).
68. Д. Худсон, Статистика для физиков, М., «Мир», 1967.
69. Б. Л. Ван-дер-Варден, Математическая статистика, М., ИЛ, 1960.
70. N. Barash-Schmidt, A. Barbaro-Galtieri, L. R. Price, A. H. Rosenfeld, P. Soding, Ch. G. Wohl, M. Roos, G. Conforto, UCRL-8030 (1969).
71. В. Б. Берестецкий, УФН **85**, 393 (1965).
72. H. Hagar, Preprint SLAC-PUB-505 (1968).
73. M. Jacob, Preprint CERN TH-1052 (1969).
74. В. А. Щегельский, в сб. «Материалы 4-й зимней школы по теории ядра и физике высоких энергий. Часть 2», Ленинград, 1969, стр. 276.
75. E. Malamud, P. E. Schlein, Phys. Lett. **10**, 145 (1964).
76. J. B. Shafer, J. S. Lindsey, I. L. Murray, G. A. Smith, Phys. Rev. **142**, 883 (1966).
77. И. А. Ерофеев, И. А. Ветлицкий, В. В. Владимировский и др., ЯФ **11**, 805 (1970).