1970 г. Август Том 101, вып. 4

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

235.215 9

ВОПРОСЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТОМОВ С ИЗЛУЧЕНИЕМ

Ю. Л. Климонтович

В последние годы значительно возрос интерес к статистической теории электромагнитных процессов в различных средах. Это обусловлено в первую очередь развитием квантовой радиофизики и, в частности, теории флуктуаций лазерного излучения [1-11], статистических процессов в нелинейной оптике [12, 13]. Развитие общей статистической теории стимулируется также развитием некоторых спектроскопических проблем — теорией уширения спектральных линий в газах и плазме, возбуждения атомов в сильно неравновесных системах [14, 15] и т. д.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы изложить один из возможных методов описания статистических процессов в классических и квантовых системах атомов и электромагнитного поля. Естественно, что в рамках одной работы достаточно полное описание может быть дано лишь для конкретной системы. Общая теория изложена здесь на примере газа, атомы которого взаимодействуют через поперечное поле. Однако результаты даны в такой форме, что обобщение на случай взаимодействия через продольное поле является очевидным.

В качестве конкретного применения рассмотрена теория естественных флуктуаций излучения газового лазера, определяющих ширину линии излучения. Основной при этом является задача определения неравновесного поляризационного шума рабочей среды лазера. Степень неравновесности определяется величиной генерируемого поля.

Работа состоит из двух глав. В первой главе излагается классическая теория, а во второй — квантовая. Каждую из глав в свою очередь можно подразделить на две. Такое подразделение обусловлено следующим.

Первая задача состоит в получении на основе исходных микроскопических уравнений системы кинетических уравнений для частиц и поля, описывающих диссипативные процессы в рассматриваемой среде.

В качестве исходного можно использовать уравнение Лиувилля для функции распределения $f(x, X, t)$ переменных частиц и поля (здесь x — совокупность координат и импульсов атомов, X — совокупность полевых осцилляторов).

Из уравнений Лиувилля можно получить систему зацепляющихся уравнений для более простых функций распределения — функции распределения переменных одного атома, функции распределения переменных одного осциллятора, вторых функций распределения, третьих функций распределения и т. д. Такая система уравнений аналогична системе уравнений, использованных в работах Боголюбова [16], Борна и Грина [17] и др., в теории газов и плазмы.

Вместо вторых и высших функций распределения более удобно использовать уравнения для соответствующих корреляционных функций.

Для приближенного решения цепочки уравнений и получения кинетических уравнений — замкнутой системы уравнений для первых функций распределения $f_1(x_1, t)$, $f_1(X_1, t)$ используются два способа.

Первый основан на применении различных вариантов теории возмущений по взаимодействию. Такой метод был впервые использован Боголюбовым при выводе кинетического уравнения Ландау, а также Боголюбовым и Гуровым (см., например, [18]) при выводе соответствующего квантового уравнения. Значительное количество работ посвящено применению теории возмущений по взаимодействию для систем заряженных частиц и атомов, взаимодействующих с электромагнитным полем. Обзор ряда таких работ можно найти в книгах [1, 18, 19].

Наряду с методом теории возмущений в последнее время широко используется более общий метод, позволяющий учесть в интеграле столкновений влияние поляризации среды. Он основан на приближении вторых корреляционных функций, когда в цепочке уравнений полагаются равными нулю третьи и высшие корреляционные функции. Такой подход для системы заряженных частиц был сформулирован Боголюбовым [16]. Соответствующие классические кинетические уравнения впервые были получены в работах Балеску [21] и Ленарда [20]. В работах [21, 22] были установлены соответствующие квантовые уравнения.

В настоящей статье для вывода кинетических уравнений принят метод, близкий к использованному ранее автором в теории плазмы [23–26]. Этот метод позволяет сравнительно просто учесть в кинетическом уравнении вклад резонансного и нерезонансного электромагнитного излучения и поляризацию среды.

После установления кинетических уравнений переходим к следующей стадии — расчету естественных флуктуаций в газовом He — Ne-лазере.

Для неограниченной среды характерными являются четыре временны́х параметра: частота колебания или перехода, допплеровская ширина, коэффициент радиационного трения и время затухания поля. При описании статистических процессов в лазере появляются дополнительные параметры: время затухания поля в резонаторе, времена корреляции флуктуаций амплитуды и фазы излучения лазера. В газовом лазере эти характерные времена значительно больше времен, характеризующих процессы диссипации в неограниченной среде. Это и делает возможным проведение статистического описания процессов в два этапа: сначала можно получить кинетические уравнения, описывающие диссипативные процессы в неограниченной среде, а затем использовать эти кинетические уравнения для описания естественных флуктуаций лазерного излучения.

Ширина линии лазерного излучения определяется двумя факторами: тепловыми флуктуациями поля в резонаторе и неравновесными флуктуациями поляризации среды. Тепловые флуктуации в резонаторе определяются известной формулой Каллена — Вельтона, поэтому основная задача сводится к расчету неравновесных флуктуаций поляризации в режиме генерации лазера.

Расчет флуктуаций лазерного излучения проводится в настоящей статье как для классической, так и для квантовой систем. Однако проведенный здесь расчет ширины линии когерентного излучения классического генератора носит лишь иллюстративный характер, так как нет прямого соответствия выбранной модели и реальной системы. Этот материал введен с целью облегчения понимания соответствующего квантового расчета для He — Ne-лазера.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

1.1. Исходные уравнения

Рассмотрим систему атомов, взаимодействующих с электромагнитным полем. Будем рассматривать атом как осциллятор, обладающий дипольным электрическим моментом. Полное число атомов обозначим через N. Состояние осцилляторов определяется заданием координат и импульсов центров тяжести $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{P}_i$ и координат и импульсов внутреннего движения $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{p}_i$. Индекс i принимает значения 1, 2, . . ., N. Изменение состояния осцилляторов со временем определяется системой соответствующих уравнений движения.

Вместо системы уравнений движения эволюцию состояний системы можно описать, используя уравнение для фазовой плотности $N(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в пространстве переменных $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$. Она определяется следующим образом:

$$N(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_i(t))\, \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}_i(t))\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)). \tag{1,1}$$

Отсюда следует, что функция

$$N(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, d\mathbf{R}\, d\mathbf{P}\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{p} \tag{1,2}$$

определяет число атомов, у которых в момент времени t переменные $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{p}_i$ лежат в пределах $d\mathbf{R}$, $d\mathbf{P}$, $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{p}$ около значений $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$.

Интеграл от функции $N(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ по всем значениям переменных $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ равен полному числу атомов, т. е.

$$\int N(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, d\mathbf{R}\, d\mathbf{P}\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{p} = N. \tag{1,3}$$

Уравнение для фазовой плотности следует из условия сохранения полного числа атомов. В дипольном приближении оно может быть записано в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - m\omega_0^2 \mathbf{r}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + e\mathbf{E}^{\text{м}}(\mathbf{R}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) N = 0, \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{M}. \tag{1,4}$$

В этом уравнении m, M — массы электрона и атома, ω_0 — собственная частота осциллятора, $\mathbf{E}^{\text{м}}$ — микроскопическая напряженность электрического поля. В дипольном приближении функция $\mathbf{E}^{\text{м}}$ не зависит от $\mathbf{r}$.

Уравнение для функции $\mathbf{E}^{\text{м}}$ следует из системы микроскопических уравнений Лоренца. Запишем его в виде

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}^{\text{м}}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{E}^{\text{м}} = -4\pi \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{\text{м}}}{\partial t^2}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E}^{\text{м}} = 0. \tag{1,5}$$

Микроскопический вектор поляризации $\mathbf{P}^{\text{м}}$ определяется фазовой плотностью

$$\mathbf{P}^{\text{м}}(\mathbf{R}, t) = e \int \mathbf{r} N(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, d\mathbf{P}\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{p}. \tag{1,6}$$

При учете взаимодействия с поперечным электромагнитным полем в выражении (1,6) следует учитывать лишь вихревую часть и тем самым использовать условие $\operatorname{div} \mathbf{P}^{\text{м}} = 0$.

Обозначим через $\overline{N}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$ средние значения по ансамблю фазовой плотности, поля и поляризации. Используя тождество $\overline{N\mathbf{E}^{\text{м}}} = \overline{N}\mathbf{E} + \overline{\delta N \delta \mathbf{E}}$, где δN, $\delta \mathbf{E}$ — отклонение от средних значений, получим из (1,4) следующее уравнение для функции $\overline{N}$:

$$\hat{L}\overline{N} = -e\frac{\partial \overline{\delta N \delta \mathbf{E}}}{\partial \mathbf{p}} \equiv nJ, \qquad \overline{N} = nf \tag{1,7}$$

(f — функция распределения, нормированная на единицу); здесь оператор

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - m\omega_0^2\mathbf{r}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + e\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \tag{1,8}$$

n — среднее число атомов в единице объема, J — интеграл столкновений.

Из (1,5) следует уравнение для среднего поля

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2\Delta\mathbf{E} = -4\pi\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0; \tag{1,9}$$

здесь $\mathbf{P}$ — среднее значение вектора поляризации. Из (1,6) имеем

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}, t) = e\int \mathbf{r}\overline{N}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, d\mathbf{P}\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{p}. \tag{1,10}$$

Система уравнений (1,7) — (1,10) для средних значений $\overline{N}$, $\mathbf{E}$ — первых моментов — не является замкнутой, так как в уравнение (1,7) входит функция $\overline{\delta N \delta \mathbf{E}}$ — второй центральный момент.

Чтобы получить уравнения для вторых моментов, используем уравнения для отклонений δN, $\delta\mathbf{E}$.

Из уравнений (1,4), (1,7), (1,5), (1,9) находим

$$\hat{L}\delta N + e\delta\mathbf{E}\frac{\partial \overline{N}}{\partial \mathbf{p}} = -e\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}(\delta N\delta\mathbf{E} - \overline{\delta N\delta\mathbf{E}}) \equiv n\delta J, \tag{1,11}$$

$$\frac{\partial^2 \delta\mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2\Delta\delta\mathbf{E} = -4\pi\frac{\partial^2 \delta\mathbf{P}}{\partial t^2}, \qquad \operatorname{div}\delta\mathbf{E} = 0, \tag{1,12}$$

$$\delta\mathbf{P}(\mathbf{R}, t) = e\int \mathbf{r}\delta N\, d\mathbf{P}\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{p}. \tag{1,13}$$

В уравнение (1,11) входит произведение отклонений δN, $\delta\mathbf{E}$. Вследствие этого в уравнение для вторых моментов входит третий момент и т. д. Таким образом, мы приходим к цепочке зацепляющихся уравнений, точное решение которой, разумеется, невозможно.

Интеграл столкновений в уравнении (1,7) определяется второй корреляционной функцией координат и импульсов атомного и полевого осцилляторов. Если пренебречь этой корреляцией, т. е. положить $J = 0$, то получим систему самосогласованных уравнений для первых моментов $\overline{N}$, $\mathbf{E}$. При этом выбрасываются диссипативные эффекты. Для учета диссипативных процессов необходимо по меньшей мере учесть вклад от второй корреляционной функции и тем самым, кроме первых, учесть и вторые моменты.

Чтобы сделать более ясным, каким образом надо произвести обрыв цепочки уравнений, рассмотрим соотношения между различными временными параметрами, характеризующими рассматриваемую систему.

1.2. Характерные временные параметры

Введем обозначения: ω_0 — частота собственных колебаний атомного осциллятора, γ — коэффициент радиационного затухания, γ_ω — коэффициент затухания поля на частоте ω в неограниченной среде, $\Delta\omega_D$ — допплеровская ширина.

Для упрощения расчета мы не будем учитывать влияние столкновений на допплеровское уширение и столкновительное уширение. Учет этих явлений не вносит новых принципиальных трудностей. Для равновесного состояния подробный расчет допплеровского и столкновительного уширения проведен в обзоре Раутиана и Собельмана [14].

В режиме генерации когерентного излучения спектр излучения будет характеризоваться параметрами: $\Delta\omega_\text{ф}$ и $\Delta\omega_\text{а}$ — ширинами спектров,

обусловленными флуктуациями фазы и амплитуды; $\Delta\omega_р$ — ширина полосы резонатора.

Семь временны́х параметров ω_0, γ_ω, $\Delta\omega_D$, γ, $\Delta\omega_р$, $\Delta\omega_а$, $\Delta\omega_ф$ можно разбить на две группы. К одной отнесем «быстрые» параметры, а к другой —«медленные».

Будем рассматривать случай неоднородного уширения, когда $\Delta\omega_D \gg \gamma$. Коэффициент затухания поля пропорционален концентрации атомов n и существенно зависит от частоты ω. Он максимален на резонансной частоте ω_0. Если $\gamma \sim 10^8$, $\Delta\omega_D \sim 10^{10}$, то уже при $n > 10^9$ $см^{-3}$ $\gamma_{\omega_0} > \gamma$. Будем предполагать, что $\gamma_{\omega_0} \gg \gamma$.

Величины γ_ω, γ_{ω_0} связаны соотношением

$$\gamma_\omega = \gamma_{\omega_0} \exp\left[-(\omega-\omega_0)^2/\Delta\omega_D^2\right].$$

Для нерезонансных частот, когда $|\omega - \omega_0| > \Delta\omega_D$, $\gamma_\omega \ll \gamma_{\omega_0}$. Ниже через $\gamma_\omega^н$ будем обозначать коэффициент затухания на нерезонансных частотах.

Введенные параметры удовлетворяют условию

$$\omega_0,\ \gamma_{\omega_0},\ \Delta\omega_D \gg \gamma,\ \gamma_\omega^н,\ \Delta\omega_р,\ \Delta\omega_а,\ \Delta\omega_ф. \tag{1,14}$$

Медленные параметры в свою очередь в дальнейшем будут подразделяться на «быстрые» и «медленные».

Соотношение параметров γ_{ω_0}, $\Delta\omega_D$ зависит от концентрации атомов $\gamma_{\omega_0} > \Delta\omega_D$ при $n > 10^{11}$ $см^{-3}$.

1.3. Приближение вторых корреляционных функций

Первая задача будет состоять в том, чтобы получить уравнения, описывающие процессы в системе на временах порядка $1/\gamma$. Диссипативные процессы в этих уравнениях определяются быстрыми флуктуациями. Основное предположение состоит в том, что тройные и высшие корреляции быстрых флуктуаций дают малый вклад при описании диссипативных процессов на временах порядка $1/\gamma$.

Приближение вторых корреляций было предложено впервые Боголюбовым [16] при рассмотрении системы заряженных частиц. Дальнейшие работы показали [20-26], что, в отличие от теории возмущений по малому взаимодействию, это приближение сразу позволяет учесть в кинетических уравнениях поляризацию среды.

Приближение по моментам функций N, $\mathbf{E}^м$ и по корреляционным функциям, естественно, не совпадают. Например, в приближении вторых моментов, как и в приближении самосогласованного поля, среда рассматривается как непрерывная.

В приближении вторых корреляционных функций учитывается атомная структура среды. Покажем, что это приближение эквивалентно уравнениям для вторых моментов с источником, который может быть выражен через первые моменты.

В приближении вторых моментов в уравнении (1,11) правую часть следует положить равной нулю. В результате получаем

$$\hat{L}\delta N + e\delta\mathbf{E}\frac{\partial\bar{N}}{\partial\mathbf{p}} = 0. \tag{1,15}$$

Умножим это уравнение на $\delta N(x', t)$ $(x = (\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p}))$ и усредним:

$$\hat{L}\overline{\delta N(x, t)\,\delta N(x', t')} + e\,\overline{\delta\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)\,\delta N(x', t')}\frac{\partial\bar{N}}{\partial\mathbf{p}} = 0, \qquad t > t'. \tag{1,16}$$

Запишем соответствующее уравнение в приближении вторых корреляционных функций. Обозначим через $g_2(x, x', t, t')$ корреляционную функцию переменных двух атомных осцилляторов в моменты t, t'. При $t=t'$ функция g_2 определяется выражением

$$\overline{\delta N(x, t)\,\delta N(x', t)} = n^2 g_2(x, x', t) + n\delta(x-x')\,f(x, t). \qquad (1,17)$$

Можно записать аналогичное соотношение и при $t \neq t'$:

$$\overline{\delta N(x, t)\,\delta N(x', t')} = n^2 g_2(x, x', t, t') + n f_2(x, t, x', t'). \qquad (1,18)$$

Функция $f_2(x, t, x', t')$ определяет статистическую связь состояний одной частоты в разные моменты времени. При $t=t'$

$$f_2(x, t, x', t') = \delta(x-x')\,f(x', t). \qquad (1,19)$$

В приближении вторых корреляционных функций вместо уравнения (1,16) получаем

$$\hat{L} n^2 g_2(x, x', t, t') + e\overline{\delta\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)\,\delta N(x', t')}\,\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mathbf{p}} = 0, \qquad t > t'. \qquad (1,20)$$

Используя соотношение (1,18), запишем это уравнение в виде

$$\hat{L}\overline{\delta N(x, t)\,\delta N(x', t')} + e\overline{\delta\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)\,\delta N(x', t')}\,\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mathbf{p}} = \hat{L}\overline{\delta N(x, t)\,\delta N(x', t')}^{(\text{ист})}. \qquad (1,21)$$

Здесь введено обозначение

$$\overline{\delta N(x, t)\,\delta N(x', t')}^{(\text{ист})} = n f_2(x, t, x', t'). \qquad (1,22)$$

Таким образом, в приближении вторых корреляционных функций уравнение (1,21) отличается от уравнения (1,16) наличием «источника» (1,22).

В функцию f_2 величины x', t' входят как параметры, поэтому уравнение для нее совпадает с кинетическим уравнением для функции распределения $f(x, t)$.

Уравнение для функции f_2 решается при начальном условии (1,19).

Из уравнения (1,21) следует, что функция $\overline{\delta N(x, t)\,\delta N(x', t')}$ полностью определяется выражением (1,22), если флуктуации поля дают пренебрежимо малый вклад, т. е. эффекты поляризации среды не являются существенными.

Удобно ввести источник непосредственно в уравнение для функции δN. При этом вместо (1,15) получим уравнение

$$\hat{L}\delta N + e\delta\mathbf{E}\,\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mathbf{p}} = \hat{L}\delta N^{(\text{ист})}. \qquad (1,23)$$

Корреляция функций $\delta N^{(\text{ист})}(x, t)$, $\delta N^{(\text{ист})}(x', t')$ определится выражением (1,22).

Поскольку пока еще нет явного выражения для интеграла столкновений J, мы не можем записать в явном виде и уравнение для f_2 и, следовательно, не можем определить источник. Мы увидим, однако, что при условии (1,14) интеграл столкновений определяется быстрыми флуктуациями. Для определения их спектральных функций достаточно знать функцию f_2 на временно́м интервале $t - t' \ll 1/\gamma$. Уравнение для нее определяется кинетическим уравнением (1,7) при $J = 0$.

Здесь введен источник лишь для атомных осцилляторов. Аналогичным путем он может быть введен и для осцилляторов поперечного электромагнитного поля.

Таким образом, как и в статистической теории неравновесных процессов в плазме (см. книгу [23], § 14—16. и статью [25]), можно использовать либо уравнение для корреляционных функций (1,20), либо уравнение для δN (1,23). Первый путь оказывается более сложным, так как для определения двухвременно́й корреляционной функции по уравнению (1,20) надо знать одновременную корреляционную функцию. Она может быть найдена путем приближенного решения цепочки уравнений для функций распределения.

Использование уравнения (1,23) позволяет найти спектральные функции более простым путем без предварительного определения одновременной корреляционной функции.

Следует, однако, иметь в виду, что доказательство эквивалентности уравнений (1,21), (1,23) может быть проведено без знания одновременной корреляционной функции. Поэтому использование уравнения (1,23) с источником (1,22) не основано на определенном предположении. Доказательство эквивалентности уравнений (1,21), (1,23) для плазмы дано в работах [23, 25].

1.4. Интеграл столкновений

Рассмотрим функцию

$$\overline{\delta N(x, t)\,\delta\mathbf{E}(\mathbf{R}', t')} \equiv \overline{(\delta N\delta\mathbf{E})}_{x,\,t,\,\mathbf{R}-\mathbf{R}',\,t-t'}.$$

Разложим ее в интеграл Фурье по $t-t'$, $\mathbf{R}-\mathbf{R}'$, а затем положим $t=t'$, $\mathbf{R}=\mathbf{R}'$ и подставим полученное выражение в интеграл столкновений. В результате

$$J(x, t) = -\frac{e}{n}\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\int \mathrm{Re}\,(\delta N\delta\mathbf{E})_{x,\,t,\,\omega,\,\mathbf{k}}\,d\omega\,d\mathbf{k}. \qquad (1,24)$$

Из выражения (1,24) следует, что время релаксации функции f порядка $1/\gamma$. Интеграл столкновений определяется быстрыми флуктуациями. Медленные флуктуации будут определяться самим кинетическим уравнением.

Чтобы найти спектральную функцию $(\delta N\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}$ для быстрых флуктуаций, рассмотрим решение уравнения (1,23) на временно́м интервале $t-t'$, таком, что

$$1/\gamma_{\omega_0}, \quad 1/\Delta\omega_D \ll t-t' \ll 1/\gamma. \qquad (1,25)$$

Величину среднего поля ограничим условием

$$eE(t-t')/mV_{\mathrm{T}} \ll 1, \quad \text{но} \quad eE/mV_{\mathrm{T}}\gamma \sim 1. \qquad (1,26)$$

При этом в уравнении (1,23) имеем

$$\hat{L} \to \hat{L}_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - m\omega_0^2\mathbf{r}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}, \qquad (1,27)$$

и уравнение (1,23) можно записать в виде

$$\hat{L}_0\delta N(x, t) = -e\delta\mathbf{E}\frac{\partial\overline{N}}{\partial\mathbf{p}} + \hat{L}_0\delta N^{(\text{ист})}. \qquad (1,28)$$

В правой части этого уравнения стоят два члена. В соответствии с этим представим спектральную функцию $\mathrm{Re}\,(\delta N\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}$ в виде

$$\mathrm{Re}\,(\delta N\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}} = \mathrm{Re}\,(\delta N\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{ист})} + \mathrm{Re}\,(\delta N\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{инд})}. \qquad (1,29)$$

Найдем сначала первую часть, обусловленную источником.

При условиях (1,25), (1,26) уравнение для f_2 определяется уравнением (1,7) при $J=0$, $\mathbf{E}=0$, т. е.

$$\hat{L}_0 f_2(x, t, x', t') = 0. \qquad (1,30)$$

Решаем это уравнение при начальном условии (1,19). Решение можно записать в виде

$$f_2(x, t, x', t') = \delta(x'(x, t-t') - x') f(x, t). \tag{1,31}$$

Здесь учтено, что на интервале $t-t' \ll 1/\gamma$ $f(x', t') = f(x, t)$. Функция $x'(x, t-t')$ определяется решением системы уравнений характеристик.

Из (1.31) находим выражение для спектральной функции источника

$$(\delta N \delta N)^{(\text{ист})}_{xtr'p'\omega k} = n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta[x'(x, \tau) - x'] e^{i\omega\tau - i\mathbf{k}\rho} d\tau\, d\boldsymbol{\rho} f(x, t). \tag{1,32}$$

где $\tau = t - t'$, а $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R} - \mathbf{R}'$.

Чтобы найти с помощью этого выражения спектральную функцию $\operatorname{Re}(\delta N \delta \mathbf{E})^{(\text{ист})}_{\omega k}$, рассмотрим решение уравнений для $\delta\mathbf{P}$, $\delta\mathbf{E}$ на интервале (1,25).

Из (1,28) находим уравнение для $\delta\mathbf{P}$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right)^2 + \omega_0^2\right](\delta\mathbf{P} - \delta\mathbf{P}^{(\text{ист})}) = \frac{e^2 n}{m} f(\mathbf{P})\,\delta\mathbf{E}; \tag{1,33}$$

здесь $f(\mathbf{P}) = \int f(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p})\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{p}$ — распределение по импульсам центров тяжести.

В рассматриваемом нами приближении естественно считать распределение атомов пространственно однородным, а функцию $f(\mathbf{P})$ — распределением Максвелла.

Из уравнения (1,33) следует, что $\delta\mathbf{P}$ состоит из двух частей:

$$\delta\mathbf{P} = \delta\mathbf{P}^{(\text{инд})} + \delta\mathbf{P}^{(\text{ист})}. \tag{1,34}$$

Индуцированная часть $\delta\mathbf{P}$ определяется полем $\delta\mathbf{E}$. На интервале (1,25) для индуцированной части поля $\delta\mathbf{P}$ из уравнения (1,33) находим

$$\delta\mathbf{P}^{(\text{инд})}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{P}) = [\varepsilon_v(\omega, \mathbf{k}) - 1] f(\mathbf{P})\,\delta\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})/4\pi; \tag{1,35}$$

здесь

$$\varepsilon_v(\omega, \mathbf{k}) = 1 + (4\pi e^2 n/m)[\omega_0^2 - (\omega - \mathbf{kv} + i\Delta)^2]^{-1} \tag{1,36}$$

— диэлектрическая проницаемость для быстрых флуктуаций, обусловленная атомами со скоростью $\mathbf{v}$.

При решении уравнения (1,33) интеграл

$$\int\limits_0^{t-t'} \ldots d\tau \to \int\limits_0^{\infty} e^{-\Delta\tau} \ldots d\tau,$$

где

$$\gamma_{\omega_0}, \qquad \Delta\omega_D \gg \Delta \gg \gamma. \tag{1,37}$$

Из (1,35), (1,36) после интегрирования по $\mathbf{P}$ находим

$$\delta\mathbf{P}^{(\text{инд})}(\omega, \mathbf{k}) = [\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) - 1]\,\delta\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})/4\pi, \tag{1,38}$$

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \int \varepsilon_v(\omega, \mathbf{k}) f(\mathbf{P})\, d\mathbf{P} \equiv \varepsilon' + i\varepsilon''. \tag{1,39}$$

Действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости при условии (1,37) определяются выражениями

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= 1 + \frac{4\pi e^2 n}{m\omega_0 \Delta\omega_D}\left(e^{-z_+^2}\int\limits_0^{z_+} e^{t^2} dt - e^{-z_-^2}\int\limits_0^{z_-} e^{t^2} dt\right), \\ \varepsilon'' &= (\pi^{1/2}/2)(4\pi e^2 n/m\omega_0\Delta\omega_D)(e^{-z_-^2} - e^{-z_+^2}); \end{aligned} \tag{1,40}$$

здесь $Z_\pm = (\omega \pm \omega_0)/\Delta\omega_D$, $\Delta\omega_D = k(2\varkappa T/M)^{1/2}$. При $|Z_\pm| \gg 1$

$$\varepsilon' = 1 + [4\pi e^2 n/m(\omega_0^2 - \omega^2)]. \tag{1,41}$$

При $|Z_\pm| \ll 1$

$$\varepsilon' = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m(\Delta\omega_D)^2}\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \qquad \varepsilon'' = \frac{\pi^{1/2}}{2}\frac{4\pi e^2 n}{m\omega_0\Delta\omega_D}. \tag{1,42}$$

При условии (1,37) формулы (1,40)—(1,42) не зависят от Δ.

Рассмотрим вклад резонансного поля. Вследствие условия (1,37) поле при $\omega \sim \omega_0$ можно считать установившимся.

Из уравнения (1,12) с учетом (1,34), (1,38) находим

$$\delta\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = -4\pi\omega^2\delta\mathbf{P}^{\perp(\text{ист})}/[\omega^2\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) - c^2k^2]; \tag{1,43}$$

здесь и ниже $\mathbf{a}^\perp = [\mathbf{k}[\mathbf{ak}]]/k^2$ — поперечная составляющая вектора $\mathbf{a}$.

Используя это выражение, получаем

$$\operatorname{Re}(\delta N\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{ист})} = -\operatorname{Re}\frac{4\pi\omega^2(\delta N\delta\mathbf{P}^\perp)_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{ист})}}{\omega^2\varepsilon^* - c^2k^2}. \tag{1,44}$$

Вернемся к выражению (1,32). Умножим его на $e\mathbf{r}'$ и проинтегрируем по r' и p'. В результате получим

$$e(\delta N\delta\mathbf{P}^\perp)_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{ист})} = \frac{2\pi e^2 n}{\omega}\frac{\delta(\omega - \mathbf{kv} - \omega_0) + \delta(\omega - \mathbf{kv} + \omega_0)}{2}\left(\omega\mathbf{r}^\perp - i\frac{\mathbf{p}^\perp}{m}\right)f(x, t). \tag{1,45}$$

Выражения (1,44), (1,45) и определяют искомую спектральную функцию.

Второй член в (1,45), как мы увидим, определяет затухание, а первый — смещение частоты атомного вибратора.

Чтобы не усложнять вычислений, будем оставлять лишь члены, определяющие затухание. Выражение для смещения частоты запишем лишь в окончательном уравнении.

При этом из (1,44), (1,45) получим

$$e\operatorname{Re}(\delta N\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{ист})} = -\frac{8\pi^2 e^2 n\omega^3\varepsilon''}{m|\omega^2\varepsilon - c^2k^2|^2}\frac{\delta(\omega - \mathbf{kv} - \omega_0) + \delta(\omega - \mathbf{kv} + \omega_0)}{2}\mathbf{p}^\perp f(x, t). \tag{1,46}$$

Отсюда находим

$$\frac{e}{n(2\pi)^4}\int \operatorname{Re}(\delta N\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{ист})}\,d\omega\,d\mathbf{k} = -\gamma\mathbf{p}f(x, t); \tag{1,47}$$

здесь введено обозначение

$$\gamma = \frac{e^2}{2\pi^2 m}\int\frac{\omega^3\varepsilon''}{|\omega^2\varepsilon - c^2k^2|^2}\frac{\delta(\omega - \mathbf{kv} - \omega_0) + \delta(\omega - \mathbf{kv} + \omega_0)}{2}\frac{\mathbf{pp}^\perp}{p^2}\,d\omega\,d\mathbf{k}. \tag{1,48}$$

Отсюда в нулевом приближении по $\Delta\omega_D/\omega_0$ после интегрирования по ω и $\mathbf{k}$ находим

$$\gamma = (2e^2\omega_0^2/3mc^3)[\varepsilon'(\omega_0)]^{1/2}. \tag{1,49}$$

Ниже нам понадобится выражение для спектральной функции $\operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}$. Из (1.46) находим

$$\operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{ист})} = -\frac{\omega}{4\pi}\varepsilon''(\omega, k)\frac{8\pi\omega^3\varepsilon''}{|\omega^2\varepsilon - c^2k^2|^2}\frac{\overline{p^{\perp 2}}}{m}; \tag{1,50}$$

здесь использовано выражение (1,40) для ε'' и распределение Максвелла по скоростям центров атомов.

В формулах (1,46), (1,50) учтен лишь резонансный вклад, т. е. вклад от поля $\delta\mathbf{E}$ на частотах $\omega \sim \omega_0$. При учете нерезонансного вклада, например, в (1,50) появится дополнительный член порядка $\gamma/\Delta\omega_D$ от (1,50).

Найдем теперь выражение для индуцированной части спектральной плотности $\mathrm{Re}\,(\delta N\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}$.

При тех же предположениях

$$\mathrm{Re}\,(\delta\mathbf{j}\,\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{инд})} = \frac{1}{4\pi}\left(\omega\varepsilon'' + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\omega\,(\varepsilon'-1)}{\partial\omega}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)(\delta\mathbf{E}\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}t}. \qquad (1,51)$$

Второй член учитывает вклад, обусловленный дисперсией в нерезонансной области. В резонансной области поле устанавливается за время много меньше $1/\gamma$, поэтому вклад от второго члена порядка $\gamma/\Delta\omega_D$ от первого.

Чтобы найти само выражение $\mathrm{Re}\,(\delta N\,\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{инд})}$, из которого следует формула (1,51), используем решение уравнения (1,28) для функции

$$\delta N^{(\text{инд})} = \delta N - \delta N^{(\text{ист})}$$

на временно́м интервале (1,25). В результате получаем следующее выражение:

$$e\,\mathrm{Re}\,(\delta N\,\delta E_i)_{\omega\mathbf{k}}^{\text{инд}} = -\frac{m}{4\pi}\left(\varepsilon_V''\omega + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\omega\,(\varepsilon_V'-1)}{\partial\omega}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)(\delta E_i\delta E_j)_{\omega\mathbf{k}}\,\frac{\partial f}{\partial p_j}. \qquad (1,52)$$

Из (1,52) после интегрирования по ω и $\mathbf{k}$ находим

$$\frac{e}{n\,(2\pi)^4}\int \mathrm{Re}\,(\delta N\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}\,d\omega\,d\mathbf{k} =$$

$$= -\frac{e^2}{6}\left[(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_{\omega_0} + \frac{m}{4\pi e^2 n}\,\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial\omega\,(\varepsilon'-1)}{\partial\omega}\,\frac{\partial\,(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega}{\partial t}\,d\omega\right]\frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}}. \qquad (1,53)$$

Второй член в этом выражении учитывает вклад от нерезонансного поля.

Из (1,52) следует выражение (1,51). При этом надо учитывать, что $\mathbf{k}\,\delta\mathbf{E} = 0$.

Теперь мы можем записать искомое кинетическое уравнение. Из (1,7), (1,8) имеем

$$\hat{L}f = -\frac{e}{n}\,\frac{\partial\,\overline{\delta N\,\delta\mathbf{E}}}{\partial\mathbf{p}} \equiv J. \qquad (1,54)$$

На основании (1,52), (1,47) интеграл столкновений запишем в виде

$$J = D\,\frac{\partial^2 f}{\partial\mathbf{p}^2} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\,(A\mathbf{p}f). \qquad (1,55)$$

Коэффициенты диффузии и трения определяются выражениями

$$D = \frac{e^2}{6}\left[(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_{\omega_0} + \frac{m}{4\pi e^2 n}\,\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial\omega\,(\varepsilon'-1)}{\partial\omega}\,\frac{\partial\,(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega}{\partial t}\,d\omega\right], \qquad (1,56)$$

$$A = \gamma = (2e^2\omega_0^2/3mc^3)\,[\varepsilon'(\omega_0)]^{1/2}.$$

Таким образом, коэффициент диффузии определяется спектральной функцией поля.

1.5. Уравнение для спектральной функции поля

Из уравнения поля при пространственно однородном распределении атомов следует уравнение баланса энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}} + (\delta\mathbf{B}\,\delta\mathbf{B})_{\omega\mathbf{k}}}{8\pi}\right] = -\mathrm{Re}\,(\delta\mathbf{j}\,\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}; \qquad (1,57)$$

$\delta\mathbf{B}$ — отклонение напряженности магнитного поля от среднего.

Используя выражения (1,50), (1,51), можем записать это уравнение в виде

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\omega\varepsilon'}{\partial\omega}(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}+(\delta\mathbf{B}\,\delta\mathbf{B})_{\omega\mathbf{k}}\right]=$$

$$=-\frac{\omega}{4\pi}\varepsilon''\left[(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}-\frac{8\pi\omega^3\varepsilon''}{|\omega^2\varepsilon-c^2k^2|^2}\frac{\overline{p^{\perp 2}}}{m}\right]. \qquad (1,58)$$

В равновесном случае $\overline{p^{\perp 2}}/m=2\varkappa T$ и из (1,58) следует известное из теории равновесных электромагнитных флуктуаций выражение[27, 28]

$$(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}=16\pi\omega^3\varepsilon''\varkappa T/(|\omega^2\varepsilon-c^2k^2|^2). \qquad (1,59)$$

Из уравнения (1,58) находим уравнение для спектральной функции $(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega$:

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\omega\varepsilon'}{\partial\omega}(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega+(\delta\mathbf{B}\,\delta\mathbf{B})_\omega\right]=$$

$$=-\frac{\omega}{4\pi}\varepsilon''\left(\omega,\ \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'}\right)\left[(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{\varepsilon'}}{c^2}\omega^2\frac{\overline{p^2}}{m}\right]. \qquad (1,60)$$

В равновесном случае $\overline{p^2}/m=3\varkappa T$ и из (1,60) получаем известное выражение с учетом поляризации среды[27]:

$$(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega\equiv 4\pi^2\rho_\omega=4\omega^2\sqrt{\varepsilon'}\varkappa T/c^3. \qquad (1,61)$$

Для спектральной функции поля на резонансной частоте ω_0 в силу условия $\gamma_{\omega_0}\gg\gamma$ используем установившееся решение уравнения (1,60)

$$(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_{\omega_0}=4\omega^2\overline{p^2}/3c^3m,\qquad \varepsilon'(\omega_0)=1. \qquad (1,62)$$

Кинетическое уравнение (1,54), (1,55) даже без учета воздействия нерезонансного поля отличается от обычного уравнения Фоккера — Планка для системы атомных осцилляторов в поле тем, что вместо выражения для коэффициента диффузии

$$D=\gamma m\varkappa T \qquad (1,63)$$

из (1,56), (1,62) следует выражение

$$D=\frac{m\gamma\overline{p^2}}{3m}=\frac{1}{3}m\gamma\int\frac{p^2}{m}f\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{p}, \qquad (1,64)$$

т. е. коэффициент диффузии сам зависит от вида функции распределения. Вследствие этого кинетическое уравнение оказывается нелинейным.

Запишем уравнение для средней энергии атомных вибраторов. Из (1,54), (1,55) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[n\left(\frac{\overline{p^2}}{2m}+\frac{m\omega_0^2\overline{r^2}}{2}\right)\right]=\frac{3nD}{m}-\gamma n\frac{\overline{p^2}}{m}. \qquad (1,65)$$

Из (1,60) находим уравнение для плотности электромагнитной энергии. Его можно записать в виде

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int[(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega+(\delta\mathbf{B}\,\delta\mathbf{B})_\omega]\,d\omega=-\left(\frac{3nD}{m}-\gamma n\frac{\overline{p^2}}{m}\right). \qquad (1,66)$$

Из (1,65), (1,66) следует закон сохранения полной энергии атомных осцилляторов и поля.

При наличии термостата, роль которого может играть поле излучения другой системы атомов, в кинетическом уравнении появятся соответствующие дополнительные члены.

1.6. Медленные флуктуации при нулевом среднем поле

Чтобы получить выражение для спектральных функций медленных флуктуаций — флуктуаций с характерным временем порядка $1/\gamma$, следует повторить сделанное выше с тем отличием, что в качестве исходных берутся не уравнения (1,4), (1,5), а кинетические уравнения.

Получим, для примера, таким путем выражения для спектральной функции источника медленных флуктуаций поляризации.

Из кинетического уравнения (1,54) находим при $\mathbf{E}=0$ следующее уравнение для вектора поляризации $\mathbf{P}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right)^2\mathbf{P}+\gamma\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}+\omega_0^2\mathbf{P}=0. \tag{1,67}$$

Рассматривая это уравнение как кинетическое, находим уравнение корреляции флуктуаций поляризации источника

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right)^2+\gamma\frac{\partial}{\partial t}+\omega_0^2\right](\delta\mathbf{P}\,\delta\mathbf{P})^{(\text{ист})}_{\mathbf{RP}t,\,\mathbf{R}'\mathbf{P}'t'}=0, \qquad t>t'. \tag{1,68}$$

Это уравнение решаем при начальном условии, которое следует из (1,19):

$$(\delta\mathbf{P}\,\delta\mathbf{P})^{(\text{ист})}_{\mathbf{RR}'\mathbf{PP}'t}=\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}')\,\delta(\mathbf{P}-\mathbf{P}')\,e^2n\int r^2 f(\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{p}. \tag{1,69}$$

Из уравнения (1,68) с начальным условием (1,69) и с учетом того, что $\operatorname{div}\delta\mathbf{P}=0$, находим

$$(\delta\mathbf{P}\,\delta\mathbf{P})^{(\text{ист})}_{\omega\mathbf{k}\mathbf{P}t}=m\omega\varepsilon''_V(\omega, \mathbf{k})\,\overline{(r^{\perp 2})}_{\mathbf{P},\,t}/2\pi; \tag{1,70}$$

здесь

$$\varepsilon''_V=(4\pi e^2n/m)\,\omega\gamma\,\{[\omega_0^2-(\omega-\mathbf{kv})^2]^2+\omega^2\gamma^2\}^{-1}. \tag{1,71}$$

При $\Delta\omega_D\gg\gamma$ после интегрирования по скоростям из (1,70) следует выражение

$$(\delta\mathbf{P}\,\delta\mathbf{P})^{(\text{ист})}_{\omega\mathbf{k}t}=m\omega\varepsilon''(\omega, \mathbf{k})\,\overline{(r^{\perp 2})}_t/2\pi. \tag{1,72}$$

Функция ε'' определяется формулой (1,40).

В равновесном состоянии $m\omega^2\overline{r^{\perp 2}}=2\varkappa T$ и выражение (1,72) принимает вид

$$(\delta\mathbf{P}\,\delta\mathbf{P})^{(\text{ист})}_{\omega\mathbf{k}}=\varepsilon''(\omega, \mathbf{k})\,\varkappa T/\pi\omega. \tag{1,73}$$

Выражение (1,72) может быть использовано для нахождения спектральной функции поля.

1.7. Ширина линии излучения классического генератора когерентного излучения

Систему классических осцилляторов можно использовать в качестве рабочего вещества в генераторах когерентного излучения. В обзоре Гапонова, Петелина, Юлпатова [29] (см. также диссертацию Гальцова [30]) подробно описаны возможные механизмы когерентного индуцированного излучения в классических системах.

В этом разделе рассмотрим модель такого генератора. Накачка и нелинейность будут введены феноменологически через эффективное поле. Это позволит проследить за возникновением излучения с шириной линии менее γ.

Обозначим эффективное электрическое поле, действующее на осциллятор, через $\mathbf{E}_{\text{eff}}$. Зададим связь его с когерентным полем $\mathbf{E}$ в виде

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E} + \alpha \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{1,74}$$

где α — нелинейная функция поля. При слабом поле

$$\alpha = \alpha_0 - \beta E^2. \tag{1,75}$$

Ниже будем рассматривать лишь флуктуации фазы, определяющие в основном ширину линии когерентного излучения. Обозначим эту ширину через $\Delta\omega_{\text{ф}}$. Название «когерентное поле» будет оправдано, если окажется, что $\Delta\omega_{\text{ф}} = \ll \gamma$.

При $t - t_0 \gg 1/\Delta\omega_{\text{ф}}$ устанавливается стационарный режим, в котором среднее значение когерентного поля равно нулю.

Рассмотрим одномодовый режим генерации и представим поле $\mathbf{E}$ в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{e}_0 E(R, t), \qquad E(R, t) = E_0 \cos(\Omega_0 t - \mathbf{k}_0\mathbf{R} + \varphi), \quad \mathbf{k}_0 \parallel x; \tag{1,76}$$

здесь $\Omega_0 = ck_0$ — собственная частота резонатора, E_0 — постоянная амплитуда (амплитудные флуктуации не рассматриваем), $\varphi = \varphi(\mu t)$ — медленно меняющаяся фаза, $\mathbf{e}_0$ — единичный вектор.

Так как рассматриваемый пример носит иллюстративный характер, будем предполагать для простоты, что атомы покоятся и концентрация атомов постоянна. В этом приближении уравнение для вектора поляризации имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} + \omega_0^2\right) \mathbf{P} = \frac{e^2 n}{m} \mathbf{E}_{\text{eff}} = \frac{e^2 n}{m} \left(\mathbf{E} + \alpha \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right). \tag{1,77}$$

Представим вектор поляризации в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(\text{инд})} + \mathbf{P}^{(\text{ист})}. \tag{1,78}$$

Уравнение для индуцированной части поляризации совпадает с уравнением (1,77), а для $\mathbf{P}^{(\text{ист})}$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} + \omega_0^2\right) \mathbf{P}^{(\text{ист})} = 0. \tag{1,79}$$

С учетом (1,78) уравнение поля можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\Omega_0}{Q} \frac{\partial}{\partial t} - c^2\Delta\right) \mathbf{E} = -4\pi \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{P}^{(\text{инд})} + \mathbf{P}^{(\text{ист})}) + \Omega_0^2 \mathbf{E}^{(\text{т})}; \tag{1,80}$$

здесь введены два новых члена. Второй член левой части учитывает потери энергии когерентного излучения в резонаторе, Q — соответствующая добротность, $\mathbf{E}^{\text{т}}$ — источник тепловых шумов в резонаторе, $\Delta\omega_{\text{р}} = \Omega_0/Q \ll \gamma$.

Найдем сначала выражение для $\mathbf{P}^{(\text{инд})}$. Для этого выделим из $\mathbf{E}_{\text{eff}}$ первую гармонику. С учетом выражения (1,76) найдем

$$E_{\text{eff}} = E(\mathbf{R}, t) - \Omega_0 \left(\alpha - \frac{\beta}{4} E_0^2\right) E_0 \sin(\Omega_0 t - \mathbf{k}_0\mathbf{R} + \varphi). \tag{1,81}$$

Подставим это выражение в уравнение (1,77). В результате для активной части вектора $\mathbf{P}^{(\text{инд})}$ получим выражение

$$\begin{gathered} P = \varepsilon_{\text{а}}'' E_0 \sin(\Omega_0 t - \mathbf{k}_0\mathbf{R} + \varphi)/4\pi, \\ \varepsilon_{\text{а}}'' = -\frac{4\pi e^2 n}{m} \frac{(\omega_0 - \Omega_0)[\alpha_0 - (\beta/4) E_0^2] - \gamma/2\,\Omega_0}{2[(\omega_0 - \Omega_0)^2 + (\gamma^2/4)]} < 0 \end{gathered} \tag{1,82}$$

— мнимая часть диэлектрической проницаемости активной среды. Реактивная часть дает вклад порядка $\gamma_{\omega_0}/\omega_0$.

Амплитуда E_0 определяется из условия

$$-\varepsilon''_a = 1/Q, \tag{1,83}$$

задающего баланс притока энергии и потерь.

Уравнение для фазы φ имеет вид

$$\begin{gathered} d\varphi/dt = \Omega_0\xi/E_0, \\ \xi = -\frac{1}{V}\int \mathbf{e}_0\,(4\pi\mathbf{P}^{(\text{ист})} + \mathbf{E}^{(\text{т})})\cos(\Omega_0 t - \mathbf{k}_0\mathbf{R} + \varphi)\,dV \end{gathered} \tag{1,84}$$

— источник шума.

Усреднение по объему возникает вследствие того, что фаза зависит лишь от времени.

Спектральная плотность шума определяется выражением

$$(\xi^2)_\omega = [(4\pi)^2\,(\mathbf{e}_0\delta\mathbf{P}^{(\text{ист})})^2_{\Omega_0\mathbf{k}_0} + (\mathbf{e}_0\delta\mathbf{E}^{(\text{т})})_{\Omega_0\mathbf{k}_0}]/2V. \tag{1,85}$$

Уравнение (1,84) совпадает с соответствующим уравнением, которое используется при расчете ширины линии в автогенераторе[31, 32].

Спектральная функция теплового шума определяется формулой Найквиста (или более общей формулой Каллена — Вельтона). В рассматриваемом случае она принимает вид

$$(1/2V)\,(\mathbf{e}_0\delta\mathbf{E}^{(\text{т})})^2_{\Omega_0\mathbf{k}_0} = 4\pi\varkappa T/V\Omega_0 Q. \tag{1,86}$$

Нам осталось найти спектральную плотность поляризационного шума. Для этого используем уравнение (1,79) для $\mathbf{P}^{(\text{ист})}$.

Так как уравнение (1,79) совпадает при $V=0$ с (1,67), для спектральной функции источника можно использовать выражение (1,72).

В результате получаем

$$[(4\pi)^2/2V]\,(\mathbf{e}_0\delta\mathbf{P}^{(\text{ист})})^2_{\Omega_0\mathbf{k}_0} = (4\pi m\Omega_0\varepsilon''/V)\,(\bar{r}^2/3). \tag{1,87}$$

Из (1,85) — (1,87) находим выражение для спектральной функции шума ξ:

$$(\xi^2)_\omega = (4\pi/V\Omega_0)\,(Q^{-1}\varkappa T + \varepsilon''\bar{E}_{\Omega_0}), \qquad \bar{E}_{\Omega_0} = m\Omega_0^2\bar{r}^2/3; \tag{1,88}$$

$\bar{E}_{\Omega_0}$ — средняя энергия атомного осциллятора.

Полная ширина линии излучения, обусловленная флуктуациями фазы, определяется выражением[31-33]

$$\Delta\omega_\text{ф} \equiv 2D = \Omega_0^2\,(\xi^2)_\omega/E_0^2; \tag{1,89}$$

здесь D — коэффициент диффузии фазы (иногда приводят выражение для полуширины линии $\Delta\omega_\text{ф} = D$).

Обозначим через W энергию поля в резонаторе:

$$W = VE_0^2/8\pi, \tag{1,90}$$

и запишем выражение для $\Delta\omega_\text{ф}$ в виде

$$\Delta\omega_\text{ф} = (\Omega_0/2W)\,(Q^{-1}\varkappa T + \varepsilon''\bar{E}_{\Omega_0}). \tag{1,91}$$

Если $\bar{E}_{\Omega_0} = \varkappa T$, то выражение (1,90) можно записать в виде

$$\Delta\omega_\text{ф} = (\Omega_0/2)\,(Q^{-1} + \varepsilon'')\,\varkappa T/W. \tag{1,92}$$

Заметим, что величина $(\varepsilon'' + Q^{-1})\,\Omega_0$ определяет полную ширину полосы резонатора, заполненного средой. Таким образом, при генерации происходит сужение спектра в $\varkappa T/2W$ раз.

Формула для ширины линии имеет столь простой вид лишь в случае слабого поля, когда можно пренебречь влиянием поля на спектр флуктуаций поляризации и в то же время при достаточно большом превышении над порогом, чтобы можно было использовать корреляционное приближение.

Если при изменении энергии генерации добротность остается постоянной, то ширина полосы обратно пропорциональна энергии. Если же изменение энергии производится путем изменения добротности, то для выяснения зависимости $\Delta\omega_\phi$ от W надо исключить $1/Q$ из (1,91) с помощью выражения (1,85). Аналогичное положение имеет место и в квантовой теории ширины линии газового лазера [33].

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

2.1. Исходные уравнения

Движение центров атомов будем описывать классически, а внутреннее состояние атомов квантовым образом. Рассмотрим функцию

$$N_{nm}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t), \tag{2,1}$$

обладающую следующими свойствами:

$$\sum_n N_{nn}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t) = N(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t) \tag{2,2}$$

— фазовая плотность в пространстве $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$ — координат и импульсов:

$$\int N_{nm}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t)\frac{d\mathbf{R}\,d\mathbf{P}}{(2\pi\hbar)^3} = \hat{\rho}_{nm} \tag{2,3}$$

— операторная матрица плотности по переменным nm — квантовым числам, определяющим внутреннее состояние атома.

Таким образом, функция (2,1) является квантовым аналогом классической фазовой плотности (1,1) в пространстве $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}$.

Нормировка функции (2,1):

$$\sum_n \int N_{nn}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t)\frac{d\mathbf{R}\,d\mathbf{P}}{(2\pi\hbar)^3} = N; \tag{2,4}$$

N — полное число атомов.

В дипольном приближении уравнение для функции (2,1) имеет вид

$$\hat{L}N_{nm} = \frac{ie}{\hbar}\sum_{n_1}(\mathbf{r}_{nn_1}N_{n_1m}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t) - N_{nn_1}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t)\,\mathbf{r}_{n_1m})\,\mathbf{E}^{\text{м}}(\mathbf{R}, t). \tag{2,5}$$

Здесь и ниже используем обозначение

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + i\omega_{nm},$$

$\mathbf{E}^{\text{м}}(\mathbf{R}, t)$ — микроскопическое поле. Уравнение поля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^2} - c^2\Delta\right)\mathbf{E}^{\text{м}} = -4\pi\frac{\partial^2\mathbf{P}^{\text{м}}}{\partial t^2}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E}^{\text{м}} = 0, \tag{2,6}$$

$$\mathbf{P}^{\text{м}}(\mathbf{R}, t) = e\sum_{nm}\int \mathbf{r}_{mn}N_{nm}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t)\frac{d\mathbf{P}}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{2,7}$$

Последнее выражение определяет микроскопическую поляризацию среды.

Как и выше, будем обозначать чертой усреднение по ансамблю. Введем обозначение для средних

$$\overline{N_{nm}}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t) \equiv N f_{nm}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t), \qquad \mathbf{E} = \overline{\mathbf{E}^{\text{м}}}, \quad \mathbf{P} = \overline{\mathbf{P}^{\text{м}}}. \tag{2,8}$$

Уравнение для функции f_{nm} запишем в виде

$$\hat{L} f_{nm} - \frac{ie}{\hbar} \sum_{n_1} (\mathbf{r}_{nn_1} f_{n_1 m} - f_{nn_1} \mathbf{r}_{n_1 m}) \mathbf{E} = J_{nm}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t). \tag{2,9}$$

Уравнение (2,9) аналогично кинетическому уравнению (1,7), поэтому функцию J_{nm} также будем называть интегралом столкновений.

Из уравнений (2,5), (2,9) следует, что интеграл столкновений определяется выражением

$$J_{nm} = \frac{ie}{\hbar N} \sum_{n_1} (\mathbf{r}_{nn_1} \overline{\delta N_{n_1 m} \delta \mathbf{E}} - \overline{\delta N_{nn_1} \delta \mathbf{E}} \mathbf{r}_{n_1 m}). \tag{2,10}$$

Уравнение для отклонения δN_{nm} по аналогии с уравнением (1,11) запишем в виде

$$L \delta N_{nm} = \frac{ieN}{\hbar} \sum_{n_1} (\mathbf{r}_{nn_1} f_{n_1 m} - f_{nn_1} \mathbf{r}_{n_1 m}) \delta \mathbf{E} + N \delta J_{nm}; \tag{2,11}$$

здесь сразу опущен член со средним полем $\mathbf{E}$, так как ниже потребуется решение уравнения (2,11) в интервале $t - t' \ll 1/\gamma$, когда выполняется условие (1,26).

Из уравнения (2,6) находим уравнения для функции $\mathbf{E}$, $\delta\mathbf{E}$, например,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta\right) \delta \mathbf{E} = -4\pi \frac{\partial^2 \delta \mathbf{P}}{\partial t^2}, \qquad \delta \mathbf{P} = e \sum_{nm} \int \mathbf{r}_{mn} \delta N_{nm} \frac{d\mathbf{P}}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{2,12}$$

Для дальнейшего удобно представить функцию f_{nm} в виде

$$f_{nm} = \delta_{nm} f_n + f_{nm}^{(1)}; \tag{2,13}$$

здесь выделена диагональная часть функции f_{nm}.

Наложим на матричные элементы условие

$$\mathbf{r}_{nn} = 0. \tag{2,14}$$

Это означает, что мы рассматриваем атомы, в которых поляризация возникает лишь при переходах между различными состояниями.

При условии (2,14) вектор поляризации полностью определяется функцией $f_{nm}^{(1)}$ и, следовательно, функция $f_{nm}^{(1)} = f_{nm}^{(1)}(\mu t, t)$, т. е. зависит от быстрого ($\sim 1/\omega_{nm}$) и медленного ($1/\gamma_{nm}$) времени. Функция $f_n = f_n(\mu t)$, т. е. зависит только от медленного времени.

Отклонение δN_{nm} также представим в виде суммы быстро и медленно меняющихся функций

$$\delta N_{nm} = \delta_{nm} \delta N_{nn} + \delta N_{nm}^{(1)}. \tag{2,15}$$

Запишем уравнения для функций f_n, $f_{nm}^{(1)}$.

Из (2,9), (2,10) следует

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right) f_n - \frac{ie}{\hbar} \sum_{n_1} (\mathbf{r}_{nn_1} f_{n_1 n}^{(1)} - f_{nn_1}^{(1)} \mathbf{r}_{n_1 n}) \mathbf{E} = J_n, \tag{2,16}$$

$$J_n = \frac{ie}{\hbar N} \sum_{n_1} (\mathbf{r}_{nm} \overline{\delta N_{mn}^{(1)} \delta \mathbf{E}} - \overline{\delta N_{nm} \delta \mathbf{E}} \mathbf{r}_{mn}), \tag{2,17}$$

$$\hat{L} f_{nm}^{(1)} - (ie/\hbar)\, \mathbf{r}_{nm} (f_m - f_n)\, \mathbf{E} = J_{nm}^{(1)}, \tag{2,18}$$

$$J_{nm}^{(1)} = (ie/\hbar N)\, \mathbf{r}_{nm} (\overline{\delta N_{mm} \delta \mathbf{E}} - \overline{\delta N_{nn} \delta \mathbf{E}}). \tag{2,19}$$

Уравнения для отклонений δN_{nn}, $\delta N_{nm}^{(1)}$ в приближении вторых корреляционных функций имеют вид, аналогичный уравнению (1,23):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right)(\delta N_{nn} - \delta N_{nn}^{(\text{ист})}) - \frac{ie}{\hbar}\sum_m (\mathbf{r}_{nm} f_{mn}^{(1)} - f_{nm}^{(1)}\mathbf{r}_{mn})\,\delta\mathbf{E} = 0, \quad (2,20)$$

$$L(\delta N_{nm}^{(1)} - \delta N_{nm}^{(1)\,(\text{ист})}) = \frac{ieN}{\hbar}\mathbf{r}_{nm}(f_m - f_n)\,\delta\mathbf{E}. \quad (2,21)$$

Корреляцию флуктуаций $\delta N_{nm}^{(\text{ист})}$ можно представить в виде

$$(\delta N_{nm}\,\delta N_{n'm'}^{*})_{\mathbf{RR'PP'}tt'}^{(\text{ист})} = N f_{nmn'm'}(\mathbf{RR'PP'}tt'). \quad (2,22)$$

Уравнение для функции $f_{nmn'm'}$ определяется кинетическим уравнением (2,9) и решается при начальном условии

$$(\delta N_{nm}\,\delta N_{n'm'}^{*})_{\mathbf{RR'PP'}t}^{(\text{ист})} =$$

$$= \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} N\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R'})\,\delta(\mathbf{P}-\mathbf{P'})\,(\delta_{nn'} f_{m'm}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t) + f_{nn'}\delta_{m'm}). \quad (2,23)$$

Вывод этой формулы дан в приложении к статье [34].

Выражения (2,22), (2,23) соответствуют классическим формулам (1,22), (1,19).

Рассмотрим частный случай общей формулы (2,23).

При $f_{nn'} = \delta_{nn'} f_n$ (для медленной части функции $f_{nn'}$) из (2,23) находим

$$(\delta N_{nm}\delta N_{n'm'}^{*})_{\mathbf{RR'PP'}t'}^{(\text{ист})} = (2\pi\hbar)^3\,\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R'})\,\delta(\mathbf{P}-\mathbf{P'})\,N\delta_{nn'}\delta_{mm'}(f_m + f_n)/2. \quad (2,24)$$

Это выражение для спектральной функции источника мы используем при выводе выражения для интеграла столкновений.

2.2. Интеграл столкновений J_n

Как и в первой части (см. (1,24)), выразим интеграл столкновений (2,17) через спектральную функцию

$$J_n = \frac{2e}{\hbar N(2\pi)^4}\sum_m \int \operatorname{Im}(\delta N_{nm}^{(1)}\,\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}\,\mathbf{r}_{mn}\,d\omega\,d\mathbf{k}. \quad (2,25)$$

Спектральную функцию $(\delta N_{nm}\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}$ и здесь представим в виде суммы двух частей — индуцированной части и вклада от источника (см. (1,29)).

Для индуцированной части при тех же предположениях, что и в первой части, получаем выражение

$$\frac{2e}{\hbar N}\operatorname{Im}((\delta N_{nm}^{(1)}\,\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}\,r_{mn})^{(\text{инд})} =$$

$$= -\frac{2e^2|r_{nm}|^2}{3\hbar^2}(f_m - f_n)\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{\omega-\omega_{nm}-\mathbf{kv}+i\Delta}(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}} + \right.$$

$$\left. + i\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\omega-\omega_{nm}-\mathbf{kv}+i\Delta}\frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}\right\}. \quad (2,26)$$

Отсюда находим соответствующее выражение для функции $\operatorname{Re}(\delta\mathbf{j}\,\delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}$. Оно совпадает по форме с выражением (1,51). Диэлектрическая проницаемость теперь определяется выражением

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{nm}\frac{4\pi e^2 N|r_{nm}|^2}{3\hbar(2\pi\hbar)^3}\int\frac{f_n - f_m}{\omega-\omega_{nm}-\mathbf{kv}+i\Delta}\,d\mathbf{P}. \quad (2,27)$$

При максвелловском распределении по скоростям после интегрирования получаем

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi e^2 n}{3\sqrt{\pi}\,\hbar\Delta\omega_D} \sum_{nm} |r_{nm}|^2 (\rho_m - \rho_n) I_{nm},$$

$$I_{nm} = i\pi e^{-Z_{nm}^2} - 2\pi^{1/2} e^{-Z_{nm}^2} \int_0^{Z_{nm}} e^{t^2}\, dt, \tag{2,28}$$

$$Z_{nm} = \frac{\omega - \omega_{nm}}{\Delta\omega_D}, \quad \rho_n = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int f_n\, d\mathbf{P}, \quad \Delta\omega_D = k\,(2\varkappa T/M)^{1/2}.$$

Для частот, близких к резонансным ($|\omega - \omega_{nm}| \ll \Delta\omega_D$), из (2,28) следует

$$\varepsilon' = 1 - \frac{8\pi e^2 n}{3\hbar\Delta\omega_D} \sum_{n>m} |r_{nm}|^2 (\rho_m - \rho_n) \frac{\omega - \omega_{nm}}{\Delta\omega_D},$$

$$\varepsilon'' = \pi^{1/2} \frac{4\pi e^2 n}{3\hbar\Delta\omega_D} \sum_{n>m} |r_{nm}|^2 (\rho_m - \rho_n). \tag{2,29}$$

Для нерезонансной области из (2,27)

$$\varepsilon' = 1 + \frac{8\pi e^2 n}{3\hbar} \sum_{nm} \frac{|r_{nm}|^2 \omega_{nm}}{\omega_{nm}^2 - \omega^2} \rho_m. \tag{2,30}$$

Для осциллятора формулы (2,27) — (2,30) совпадают с соответствующими классическими формулами (1,40) — (1,42).

Вклад в спектральную функцию от источника определяется выражением

$$\frac{2e}{\hbar N} \operatorname{Im} \left((\delta N_{nm}^{(1)}\, \delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}} \mathbf{r}_{nm} \right)^{(\text{ист})} =$$

$$= -\frac{16\pi^2 e^2 \omega^4 |r_{nm}|^2 \varepsilon''}{3\hbar\, |\omega^2\varepsilon - c^2k^2|^2} \delta(\omega - \omega_{nm} - \mathbf{kv})(f_n + f_m). \tag{2,31}$$

Отсюда, с учетом того, что

$$\delta\mathbf{j} = i \frac{e}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{nm} \int \omega_{mn} \mathbf{r}_{mn} \delta N_{nm}\, d\mathbf{P},$$

находим

$$\operatorname{Re} (\delta\mathbf{j}\, \delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{ист})} =$$

$$= -\frac{\omega}{4\pi} \frac{32\pi^3 e^2 N \omega^4 \varepsilon''}{|\omega^2\varepsilon - c^2k^2|^2} \sum_{nm} \int \frac{|r_{nm}|^2}{3} \delta(\omega - \omega_{nm} - \mathbf{kv})(f_n + f_m) \frac{d\mathbf{P}}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{2,32}$$

Формулы (2,26), (2,31) и определяют интеграл столкновений $J_n(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t)$ (2,25).

Уравнение для спектральной функции электромагнитного поля отличается от уравнения (1,58) лишь тем, что для $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ надо взять квантовое выражение (2,27), а для второго члена правой части, определяющего вклад от источника,— выражение (2,32).

Из формул (1,51), (2,32) в равновесном случае для спектральной функции поля следует известное выражение (формула Каллена — Вельтона)

$$(\delta\mathbf{E}\, \delta\mathbf{E})_{\omega\mathbf{k}} = \frac{16\pi\hbar\omega^4\varepsilon''}{|\omega^2\varepsilon - c^2k^2|^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/\varkappa T} - 1} \right). \tag{2,33}$$

При $\hbar = 0$ оно совпадает с выражением (1,59).

Выполним в выражении для J_n интегрирование по $\mathbf{k}$, а в резонансных членах и по ω. В результате в нулевом приближении по $\Delta\omega_D/\omega_{nm}$ получим следующее выражение (более общий результат приведен в работе [26]):

$$J_n = \frac{e^2}{3\hbar^2}\sum_m |r_{nm}|^2 \left\{\left[(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_{\omega_{nm}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\omega-\omega_{nm}}\frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega\, d\omega\right](f_m - f_n) - \frac{2\hbar\omega_{nm}^3}{c^3}\sqrt{\varepsilon'}\,(f_m + f_n)\right\}. \quad (2,34)$$

Это выражение соответствует классическим выражениям (1,55), (1,56).

Из формул (1,51), (2,32) следует соответствующее выражение для функции $\mathrm{Re}\,(\delta\mathbf{j}\,\delta\mathbf{E})_\omega$.

В равновесном состоянии спектральная функция поля определяется выражением

$$(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega = \frac{4\pi\hbar\omega^3\sqrt{\varepsilon'}}{c^3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/\varkappa T}-1}\right) \equiv 4\pi^2\rho_\omega^{(\text{т})} + \frac{2\hbar\omega^3\sqrt{\varepsilon'}}{c^3}. \quad (2,35)$$

Оно следует, например, из уравнения для $\mathrm{Re}\,(\delta\mathbf{j}\,\delta\mathbf{E})_\omega = 0$.

В правой части $\rho_\omega^{(\text{т})}$ — температурная часть формулы Планка. Введем соответствующую функцию и для неравновесного состояния

$$\rho_\omega = [(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega/4\pi^2] - (\hbar\omega^3\sqrt{\varepsilon'}/2\pi^2c^3). \quad (2,36)$$

Используя эту функцию, интеграл столкновений (2,34) можно записать в виде

$$J_n = \sum_{m<n}\left[B_m^n\left(\rho_{\omega_{nm}} + \frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\omega-\omega_{nm}}\frac{\partial\rho_\omega}{\partial t}d\omega\right)(f_m - f_n) - A_m^n f_n\right] +$$

$$+ \sum_{m>n}\left[B_n^m\left(\rho_{\omega_{mn}} + \frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\omega-\omega_{mn}}\frac{\partial\rho_\omega}{\partial t}d\omega\right)(f_m - f_n) + A_n^m f_m\right]; \quad (2,37)$$

здесь

$$B_m^n = \frac{4\pi^2e^2}{3\hbar^2}|r_{nm}|^2, \qquad A_m^n = \frac{4e^2|r_{nm}|^2}{3\hbar c^3}\omega_{nm}^3\sqrt{\varepsilon'} \quad (2,38)$$

— коэффициенты Эйнштейна.

В выражении (2,37) учитывается как уменьшение населенности уровня n за счет спонтанных переходов на нижние уровни, так и увеличение населенности за счет спонтанных переходов с верхних уровней на данный.

2.3. Интеграл столкновений $J_{mn}^{(1)}$. Уравнение для вектора поляризации

В интеграле столкновений $J_{nm}^{(1)}$ также можно выделить два вклада: индуцированный и от источника.

Из выражений (2,19), (2,12) следует, что для определения вклада от источника надо знать спектральную функцию

$$(\delta N_{mm} - \delta N_{nn},\quad \delta N_{n_1m_1}^{(1)})_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{ист})}$$

на частотах, близких к частотам переходов.

Из формулы (2,23) находим соответствующее начальное условие

$$(\delta N_{mm} - \delta N_{nn},\quad \delta N_{n_1m_1}^{(1)*})^{(\text{ист})} =$$

$$= (2\pi\hbar)^3\,\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}')\,\delta(\mathbf{P}-\mathbf{P}')\,(\delta_{mm_1} + \delta_{mn_1} - \delta_{nm_1} - \delta_{nn_1})\,f_{m_1n_1}/2.$$

Это выражение обращается в нуль, если условие резонанса $\omega_{nm} - \omega_{n_1 m_1}$ выполняется лишь при $n_1 = n$, $m_1 = m$, т. е. нет резонансного взаимодействия между различными переходами. Вследствие этого обращается в нуль и вклад от источника в интеграл столкновений $J^{(1)}_{nm}$.

Ограничимся здесь рассмотрением этого случая. Тогда нам остается определить лишь индуцированную часть интеграла столкновений. При тех же предположениях, что и выше, для нее находим следующее выражение:

$$J^{(1)}_{nm} = -\gamma_{nm} f^{(1)}_{nm}, \qquad \gamma_{nm} = e^2 |r_{nm}|^2 (\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_{\omega_{nm}}/3\hbar^2. \tag{2,39}$$

В результате кинетическое уравнение для $f^{(1)}_{nm}$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \gamma_{nm} + i\omega_{nm}\right) f^{(1)}_{nm} = \frac{ie}{\hbar}\mathbf{r}_{nm}(f_m - f_n)\,\mathbf{E}. \tag{2,40}$$

Таким образом, частота столкновений γ_{nm} определяется спектральной функцией поля на частоте перехода. В выражении для γ_{nm} можно учесть также и нерезонансный вклад, как это сделано в кинетическом уравнении для функций f_n.

Для спектральной функции на резонансной частоте можно использовать установившееся решение, которое следует из уравнения $\mathrm{Re}\,(\delta\mathbf{j}\,\delta\mathbf{E})_{\omega_{nm}} = 0$. Оно имеет вид

$$(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_{\omega_{nm}} = \left(2\hbar\omega^3_{nm}\sqrt{\varepsilon'}/c^3\right)(\rho_m + \rho_n)/(\rho_m - \rho_n). \tag{2,41}$$

В равновесном состоянии это выражение совпадает с (2,35).

В интеграл столкновений J_n, определенный выражением (2,34), входит также спектральная функция $(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega$ на нерезонансных частотах. Уравнение для нее аналогично соответствующему классическому уравнению (1,60) и имеет вид

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\omega\varepsilon'}{\partial\omega}(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega + (\delta\mathbf{B}\,\delta\mathbf{B})_\omega\right] =$$
$$= -\frac{\omega\varepsilon''(\omega, \omega\sqrt{\varepsilon'}/c)}{4\pi}\left[(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega - \frac{8\pi^2 e^2 n}{3\sqrt{\pi}\Delta\omega_D}\frac{\omega^3\sqrt{\varepsilon'}}{c^3\varepsilon''}\sum_{nm}|r_{nm}|^2 e^{-z^2_{nm}}(\rho_m + \rho_n)\right]. \tag{2,41'}$$

Функции ε', ε'' в этом уравнении определяются выражением (2,28).

В равновесном состоянии правая часть уравнения обращается в нуль и для функции $(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega$ получается выражение (2,35).

Из кинетического уравнения (2,40) следует уравнение для вектора поляризации перехода $n \rightleftarrows m$

$$\mathbf{P}_{nm}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t) = eN\left(\mathbf{r}_{mn} f^{(1)}_{nm} + \mathbf{r}_{nm} f^{(1)}_{mn}\right).$$

Оно имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right)^2 \mathbf{P}_{nm} + 2\gamma_{nm}\frac{\partial \mathbf{P}_{nm}}{\partial t} + \omega^2_{nm}\mathbf{P}_{nm} = -\frac{2e^2 N}{3\hbar}\omega_{mn}|r_{nm}|^2(f_m - f_n)\,\mathbf{E}. \tag{2,42}$$

Сравним это уравнение с соответствующим классическим уравнением (1,67).

При $\mathbf{E} = 0$ эти уравнения совпадают по форме. Существенное различие состоит в том, что в классическом уравнении затухание γ обусловлено полностью вкладом от источника, а в квантовом уравнении вклад в γ_{nm} от источника равен нулю. Вследствие этого коэффициент затухания γ_{nm}, как это следует из формул (2,39) и (2,41), зависит от функций f_m, f_n.

Введем вместо спектральной функции поля функцию ρ_ω (2,36) и выразим γ_{nm} через коэффициенты Эйнштейна:

$$2\gamma_{nm} = 2B^n_m \rho_{\omega_{nm}} - A^n_m, \qquad \rho_{\omega_{nm}} = \frac{\hbar\omega^3_{nm}\sqrt{\varepsilon'}}{\pi^2 c^3}\left(\frac{1}{2}\frac{\rho_m+\rho_n}{\rho_m-\rho_n} - \frac{1}{2}\right). \quad (2,43)$$

При равновесном распределении поля из (2,43) следует известное выражение для γ_{nm}.

Из формулы (2,39) видно, что ширина линии перехода $n \rightleftarrows m$ определяется спектральной функцией поля на частоте ω_{nm}. Флуктуации поля определяют также и смещение частоты перехода. Величина смещения определяется выражением

$$\delta\omega_{nm} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{\hbar^2}|r_{nm}|^2 \frac{1}{2\pi}\fint \frac{(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega}{\omega_{nm}-\omega}\,d\omega;$$

здесь $\fint$ обозначает интеграл в смысле главного значения, поэтому смещение частоты определяется спектральной функцией на нерезонансных частотах.

Заметим в заключение, что кинетические уравнения для функций f_n, $f^{(1)}_{n,m}$ остаются справедливыми и при учете взаимодействия через потенциальное поле. При этом функция

$$(\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})_\omega \to (\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})^{(\text{п})}_\omega + (\delta\mathbf{E}\,\delta\mathbf{E})^{(\text{в})}_\omega,$$

т. е. заменяется суммой спектральных функций потенциального и вихревого полей. Выражения для этих функций можно найти, например, в работах [26].

2.4. Спектральная функция флуктуаций поляризации

Из уравнения (2,42) при $\mathbf{E} = 0$ следует уравнение для корреляции флуктуаций поляризации

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right)^2 + 2\gamma_{nm}\frac{\partial}{\partial t} + \omega^2_{nm}\right]\overline{\delta\mathbf{P}_{nm}(\mathbf{R},\mathbf{P},t)\,\delta\mathbf{P}^*_{n'm'}(\mathbf{R}',\mathbf{P}',t')}^{(\text{ист})} = 0. \quad (2,44)$$

Соответствующее начальное условие следует из (2,24)

$$\overline{(\delta\mathbf{P}_{nm}\,\delta\mathbf{P}^*_{n'm'})}^{(\text{ист})} = (2\pi\hbar)^3\,\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}')\,\delta(\mathbf{P}-\mathbf{P}')\,\delta_{nn'}\delta_{mm'}\,|r_{nm}|^2(f_m+f_n). \quad (2,45)$$

Используя решение уравнения (2,44) при начальном условии (2,45), получим выражение для спектральной функции поляризации

$$(\delta\mathbf{P}\,\delta\mathbf{P})^{(\text{ист})}_{\omega\mathbf{k}} = \sum_{n>m}\frac{\hbar\omega\varepsilon''_{nm}(\omega,\mathbf{k})}{\pi\omega_{nm}}\frac{1}{2}\frac{\rho_m+\rho_n}{\rho_m-\rho_n}; \quad (2,46)$$

ε_{nm} — мнимая часть диэлектрической проницаемости для переходов $n \rightleftarrows m$, $f(\mathbf{P})$ — распределение Максвелла.

В выражении (2,46) стоит произведение двух функций

$$\varepsilon''_{nm} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\frac{\rho_m+\rho_n}{\rho_m-\rho_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega_{nm}/\varkappa T}-1}.$$

Первая имеет характерную ширину $\Delta\omega_D$, а вторая $\varkappa T/\hbar$. При условии

$$\varkappa T/\hbar \gg \Delta\omega_D \quad (2,47)$$

выражение (2,46) можно записать в виде

$$(\delta\mathbf{P}\,\delta\mathbf{P})^{(\text{ист})}_{\omega\mathbf{k}} = \frac{\hbar\varepsilon''(\omega\mathbf{k})}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/\varkappa T}-1}\right); \quad (2,48)$$

здесь $\varepsilon'' = \sum_{n>m} \varepsilon''_{nm}$ — мнимая часть диэлектрической проницаемости. Выражение для нее при $\Delta\omega_D \gg \gamma_{nm}$ совпадает с (2,28). При $\hbar = 0$ формула (2,48) совпадает с классическим выражением (1,73).

Условие (2,47) использовалось уже фактически при выделении резонансного вклада при выводе выражений для интегралов столкновений.

Если выполнено условие $\hbar\omega_{nm} \gg \varkappa T$, то в выражении (2,43) для γ_{nm} второй член много больше первого и γ_{nm} не зависит от функций распределения f_n, f_m. При этом условии выражение (2,46) справедливо и для неравновесного состояния.

2.5. Ширина линии излучения лазера

Предположим теперь, что рассматриваемая нами система атомов, является активной средой газового лазера. Это может быть, например, неон в He — Ne-лазере. Рассмотрим флуктуации фазы лазерного излучения. Эти флуктуации и определяют ширину линии излучения. Обозначим индексами a, b уровни с инверсной заселенностью; a — верхний уровень, b — нижний.

В приближении двух уровней кинетические уравнения (2,16), (2,34), (2,40) можно записать в виде системы четырех уравнений для функций f_a, f_b, f_{ab}, f_{ba}. Если выполняется условие $\hbar\omega_{ab} \gg \varkappa T$, то в интегралах столкновений можно пренебречь членами, содержащими функцию ρ_ω. При этом интегралы столкновений (2,37), (2,39) становятся линейными функциями f_n, f_{nm}.

На этом основании систему кинетических уравнений для функций распределения f_a, f_b, f_{ab}, f_{ba} можно записать в виде [35–37]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right) f_a = \frac{ie}{\hbar}(\mathbf{r}_{ab} f_{ba} - f_{ab}\mathbf{r}_{ba})\,\mathbf{E} - \gamma_a (f_a - f_a^{(0)}), \tag{2,49}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right) f_b = -\frac{ie}{\hbar}(\mathbf{r}_{ab} f_{ba} - f_{ab}\mathbf{r}_{ba})\,\mathbf{E} - \gamma_b (f_b - f_b^{(0)}), \tag{2,50}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + i\omega_{ab} + \gamma_{ab}\right) f_{ab} = \frac{ie}{\hbar}\mathbf{r}_{ab}(f_b - f_a)\,\mathbf{E}, \tag{2,51}$$

$$f_{ba} = f_{ab}^*,$$

где $f_a^{(0)}$, $f_b^{(0)}$ — заселенности уровней a, b, определяемые накачкой.

Как и в классическом случае, рассмотрим одномодовый режим генерации. Зададим форму поля в виде бегущей волны, что имеет место, например, в кольцевом генераторе при подавлении одной из волн.

Спектральная функция шума, определяющего ширину линии, снова будет определяться формулой (1,85). Однако выражения для спектральных функций теплового и поляризационного шума будут теперь, естественно, иными.

Спектральная функция теплового шума будет определяться выражением

$$(1/2V)\,(\mathbf{e}_0\delta\mathbf{E}^{(\mathrm{T})})^2_{\omega\mathbf{k}} = (4\pi\hbar/VQ)\,[\bar{n} + (1/2)], \quad \bar{n} = (e^{\hbar\omega/\varkappa T} - 1)^{-1}. \tag{2,52}$$

При $h = 0$ это выражение совпадает с (1,86).

Найдем выражение для спектральной функции поляризационного шума.

Введение названия «поляризационный шум» оправдано тем, что ширина спектра флуктуаций поляризации (порядка $\Delta\omega_D$) много больше ширины спектра излучения лазера $\Delta\omega_\phi$. Амплитудные флуктуации здесь рассматривать не будем.

Чтобы найти спектральную функцию поляризационного шума, рассмотрим, как и в п. 1.7, решение уравнений (2,49) — (2,51) на интервале $t - t'$ таком, что

$$1/\gamma_a, \quad 1/\gamma_b, \quad 1/\gamma_{ab} \ll t - t' \ll 1/\Delta\omega_\Phi, \quad 1/\Delta\omega_p. \tag{2,53}$$

На этом интервале флуктуациями фазы можно пренебречь и, следовательно, считать в уравнениях (2,49) — (2,51) поле детерминированным. Оно определяется выражением (1,76).

Уравнения (2,49) — (2,51) при заданном поле являются относительно функций f_a, f_b, f_{ab} линейными уравнениями, с источниками $f_a^{(0)}$, $f_b^{(0)}$ — накачкой.

Вследствие дискретности рабочей среды — возбужденных атомов неона, а также из-за наличия теплового шума в резонаторе, уравнения (2,49) — (2,51) следует рассматривать как уравнения для случайных функций.

Усредняя эти уравнения, получим соответствующие кинетические уравнения для функций $\bar{f}_a$, $\bar{f}_b$, $\bar{f}_{ab}$. В соответствии с условием (2,53) при усреднении поле рассматривается как детерминированное, поэтому уравнения для средних совпадают с уравнениями для случайных функций.

Рассмотрим установившееся решение кинетических уравнений. Оно определяется заданными функциями $f_a^{(0)}$, $f_b^{(0)}$, т. е. накачкой и полем. Поскольку установившееся решение при заданных функциях $f_a^{(0)}$, $f_b^{(0)}$ определяется только полем, его можно назвать индуцированным.

Обозначим через δf_a, δf_{ab} отклонения функций f_a, f_{ab} от этого решения:

$$f_a = \bar{f}_a \quad \delta f_a, \qquad f_{ab} = \bar{f}_{ab} + \delta f_{ab}.$$

Уравнения для отклонений отличаются от уравнений (2,49) — (2,51) лишь отсутствием членов с функциями $f_a^{(0)}$, $f_b^{(0)}$.

Вместо уравнений для f_a, f_b дальше удобнее использовать уравнения для функций

$$R = f_a + f_b, \qquad D = f_a - f_b. \tag{2,54}$$

Система уравнений для отклонений имеет такой вид:

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \gamma_{ab} + i\omega_{ab}\right)\delta f_{ab} = -\frac{ie}{\hbar}\mathbf{r}_{ab}\delta D\mathbf{E}, \quad \delta f_{ba} = \delta f_{ab}^*, && (2,55)\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\gamma_a + \gamma_b}{2}\right)\delta D + \frac{\gamma_a - \gamma_b}{2}\delta R = \frac{2ie}{\hbar}(\mathbf{r}_{ba}\delta f_{ab} - \delta f_{ba}\mathbf{r}_{ab})\,\mathbf{E}, && (2,56)\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\gamma_a + \gamma_b}{2}\right)\delta R + \frac{\gamma_a - \gamma_b}{2}\delta D = 0. && (2,57)
\end{aligned}\right.$$

Снова рассмотрим приближение вторых корреляционных функций. В соответствии с уравнениями (1,23), (2,20), (2,21) в уравнениях (2,55) — (2,57), соответствующих приближению вторых моментов, произведем замену

$$\delta f_{ab} \to \delta f_{ab} - \delta f_{ab}^{(\text{ист})}, \qquad \delta D \to \delta D - \delta D^{(\text{ист})}, \qquad \delta R \to \delta R - \delta R^{(\text{ист})}. \tag{2,58}$$

Так как на временно́м интервале (2,53) поле не флуктуирует, в отличие от (2,20), (2,21), в уравнениях (2,55) — (2,57) нет членов, пропорциональных $\delta\mathbf{E}$, т. е. индуцированные части случайных отклонений δf_{ab}, δD, δR равны нулю. Вследствие этого

$$\delta f_{ab} = \delta f_{ab}^{(\text{ист})}, \qquad \delta D = \delta D^{(\text{ист})}, \qquad \delta R = \delta R^{(\text{ист})}. \tag{2,59}$$

Таким образом, корреляции отклонений δf_{ab}, δD, δR равны соответствующим корреляциям отклонений $\delta f_{ab}^{(\text{ист})}$, $\delta D^{(\text{ист})}$, $\delta R^{(\text{ист})}$.

В соответствии с определением корреляции источника (1,22), (2,22), надо найти решение кинетических уравнений при начальных условиях соответственно (1,19), (2,23).

Кинетические уравнения (2,49) — (2,51) — *неоднородные уравнения.* Решение их при заданном поле **E** может быть представлено в виде суммы двух частей: решений однородного и неоднородного уравнений. Первое решение определяется начальными условиями.

Так как однородные кинетические уравнения совпадают по форме с уравнениями (2,55) — (2,57), то с учетом равенств (2,49), используем эти уравнения для определения интересующих нас корреляционных и спектральных функций случайных отклонений δf_{ab}, δR, δD.

Запишем уравнение для двухвременнóй корреляции отклонений $\delta f_{ab}^{(\text{ист})}$. Из уравнения (2,55) находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}+i\omega_{ab}+\gamma_{ab}\right)(\delta f_{ab}\,\delta f_{ab}^{*})^{(\text{ист})}_{\mathbf{RR'PP'}tt'}=\frac{ie}{\hbar}\,\mathbf{r}_{ab}\mathbf{E}(\mathbf{R},\,t)\,(\delta D\,\delta f_{ab}^{*})^{(\text{ист})}_{\mathbf{RR'PP'}tt'}. \tag{2,60}$$

В это уравнение входит новая функция — корреляция отклонений δD, δf_{ab}^{*}. Уравнение для нее следует из (2,56) и содержит две новые функции: $(\delta R\delta f_{ab}^{*})$, $(\delta f_{ba}\delta f_{ab}^{*})$. Уравнение для первой из них следует из (2,57), а для второй из уравнения для функции δf_{ba}. Эти уравнения не содержат новых функций. В результате получаем систему четырех уравнений. Запишем соответствующие начальные условия.

Из формул (2,23), (2,24) для случая двух уровней находим

$$(\delta f_{ab}\delta f_{ab}^{*})^{(\text{ист})}_{\mathbf{RR'PP'}t}=\frac{(2\pi\hbar)^3}{2N}\,\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R'})\,\delta(\mathbf{P}-\mathbf{P'})\,(\bar{f}_a+\bar{f}_b),\qquad (\delta f_{ba}\delta f_{ab}^{*})^{(\text{ист})}=0, \tag{2,61}$$

$$(\delta D\delta f_{ab}^{*})=0,\quad (\delta R\delta f_{ab}^{*})_{\mathbf{RR'PP'}t}=(2\pi\hbar)^3\,N^{-1}\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R'})\,\delta(\mathbf{P}-\mathbf{P'})\,\bar{f}_{ba}. \tag{2,62}$$

Вернемся к формуле (1,85) для спектральной функции шума, определяющего флуктуации фазы.

Второй член, учитывающий вклад теплового шума резонатора, определяется в квантовом случае формулой (2,52). Первый член, определяющий вклад флуктуаций поляризации, полностью выражается через спектральную функцию $(\mathbf{e}_0\delta\mathbf{P})^2_{\Omega_0\mathbf{k}_0}$ лишь в случае слабого поля, когда можно пренебречь эффектом насыщения *). В случае сильного поля удобнее выразить вклад в $(\xi^2)_\omega$ от поляризационного шума непосредственно через спектральные функции отклонений δf_{ab}, δf_{ba}.

Введем вместо функций δf_{ab}, δf_{ba} медленно меняющиеся функции $\delta\tilde{f}_{ab}$, $\delta\tilde{f}_{ba}$:

$$\delta f_{ab}=\delta\tilde{f}_{ab}e^{-i(\Omega_0 t-\mathbf{k}_0\mathbf{R}+\varphi)}, \tag{2,63}$$

$$\delta f_{ba}=\delta\tilde{f}_{ba}e^{i(\Omega_0 t-\mathbf{k}_0\mathbf{R}+\varphi)}. \tag{2,64}$$

Тогда первый член в формуле (1,84) для ξ можно представить в виде

$$\xi(\mu t)=-\frac{4\pi eN}{2V}\int(\mathbf{e}_0\mathbf{r}_{ba}\delta\tilde{f}_{ab}+\mathbf{e}_0\mathbf{r}_{ab}\delta\tilde{f}_{ba})\,\frac{d\mathbf{R}\,d\mathbf{P}}{(2\pi\hbar)^3}\,. \tag{2,65}$$

---

*) Это обстоятельство не учитывалось в работе [33] (см. [34]).

Отсюда следует выражение для спектральной функции

$$(\xi^2)_\omega = \frac{(4\pi)^2 e^2 N^2}{4V} \int \left\{ \frac{|r_{ab}|^2}{3} (\delta\tilde{f}_{ab}\delta\tilde{f}^*_{ab})_{\omega,0} + (\mathbf{e}_0\mathbf{r}_{ab})^2 (\delta\tilde{f}_{ba}\delta\tilde{f}_{ab})_{\omega,0} + \text{к. с.} \right\} \frac{d\mathbf{P}\, d\mathbf{P}'}{(2\pi\hbar)^6}. \tag{2,66}$$

Таким образом, спектральная функция $(\xi^2)_\omega$ определяется спектральными функциями

$$(\delta\tilde{f}_{ab}\delta\tilde{f}^*_{ab})_{\omega,0}, \qquad (\delta\tilde{f}_{ba}\delta\tilde{f}_{ab})_{\omega,0}. \tag{2,67}$$

Эти функции связаны со спектральными функциями отклонений δf_{ab}, δf_{ba} равенствами

$$\left.\begin{aligned} (\delta f_{ab}\delta f^*_{ab})_{\omega+\Omega_0,\,\mathbf{k}+\mathbf{k}_0} &= (\delta\tilde{f}_{ab}\delta\tilde{f}^*_{ab})_{\omega,\mathbf{k}}, \\ (\delta f_{ba}\delta f^*_{ab})_{\omega-\Omega_0,\,\mathbf{k}-\mathbf{k}_0} &= (\delta\tilde{f}_{ba}\delta\tilde{f}^*_{ab})\, e^{i2(\Omega_0 t - \mathbf{k}_0\mathbf{R} + \varphi)}. \end{aligned}\right\} \tag{2,68}$$

В выражение (2,66) входят спектральные функции при $\mathbf{k} = 0$. Так как $\omega \ll \Omega_0$, при определении спектральных функций (2,68) можно полагать и $\omega = 0$.

В результате вычислений для спектральных функций (2,67) получаются следующие выражения:

$$(\delta\tilde{f}_{ab}(\mathbf{P})\,\delta\tilde{f}^*_{ab}(\mathbf{P}'))_{\omega,0} = \frac{(2\pi\hbar)^3}{2N\Gamma_E}\gamma_{ab}\left[(2 + aE_0^2)(\bar{f}_a + \bar{f}_b) - \frac{\gamma_a - \gamma_b}{\gamma_a + \gamma_b} aE_0^2 \bar{D}\right]\delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}'), \tag{2,69}$$

$$(\mathbf{e}_0\mathbf{r}_{ab})^2 (\delta\tilde{f}_{ba}(\mathbf{P})\,\delta\tilde{f}_{ab}(\mathbf{P}'))_{\omega,0} =$$
$$= \frac{(2\pi\hbar)^3}{2N\Gamma_E}\frac{|r_{ab}|^2}{3}\gamma_{ab} aE^2 \left[\left(\bar{f}_a + \bar{f}_b - \frac{\gamma_a - \gamma_b}{\gamma_a + \gamma_b}\bar{D}\,\frac{(\omega_{ab} - \Omega_0 + \mathbf{k}_0\mathbf{V})^2 - \gamma_{ab}^2}{\Gamma_0}\right]\delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}'); \tag{2,70}$$

здесь введены обозначения

$$\Gamma_E = (\omega_{ab} - \Omega_0 + \mathbf{k}_0\mathbf{V})^2 + \gamma_{ab}^2(1 + aE_0^2), \qquad \Gamma_0 = \Gamma_{E=0}, \tag{2,71}$$

$$a = \frac{e^2 |r_{ab}|^2 (\gamma_a + \gamma_b)}{6\hbar^2\gamma_a\gamma_b\gamma_{ab}} \tag{2,72}$$

— параметр насыщения.

Подставим выражения (2,69), (2,70) в формулу (2,66). В результате получим выражение

$$(\xi^2)_\omega = \frac{(4\pi)^2 e^2 N |r_{ab}|^2}{6V}\gamma_{ab}\int \frac{d\mathbf{P}}{(2\pi\hbar)^3} \times$$
$$\times \frac{1}{\Gamma_E^2}\left[(1 + aE_0^2)(\bar{f}_a(\mathbf{P}) + \bar{f}_b(\mathbf{P})) - \frac{\gamma_a - \gamma_b}{\gamma_a + \gamma_b}\frac{\bar{D}(P)\,aE^2}{\Gamma_0}(\omega_{ab} - \Omega_0 + \mathbf{k}_0\mathbf{V})^2\right]. \tag{2,73}$$

Выразим функции $\bar{f}_a + \bar{f}_b$, $\bar{f}_a - \bar{f}_b$ через функции $f_a^{(0)}$, $f_b^{(0)}$, определяемые накачкой.

Для этого надо использовать уравнения для индуцированных частей функций $\bar{f}_a$, $\bar{f}_b$, $\bar{f}_{ab}$. Напомним, что уравнения для этих функций совпадают с уравнениями (2,49) — (2,51).

В результате решения получаются следующие выражения:

$$f_a(\mathbf{P}) + \bar{f}_b(\mathbf{P}) = f_a^{(0)} + f_b^{(0)} + \frac{\gamma_a - \gamma_b}{\gamma_a + \gamma_b} D^{(0)}(\mathbf{P})\frac{\gamma_{ab}^2 aE^2}{\Gamma_E}, \tag{2,74}$$

$$\bar{D}(\mathbf{P}) = D^{(0)}(\mathbf{P})\,\Gamma_0/\Gamma_E. \tag{2,75}$$

Подставим эти выражения в формулу (2,73). Учтем, что

$$V(2\pi\hbar)^{-3} f_a^{(0)}(\mathbf{P}) = \rho_a^{(0)} f(\mathbf{P});$$

здесь ρ_a — заселенность уровня, обусловленная накачкой, f — распределение Максвелла.

В результате получаем следующее выражение:

$$(\xi^2)_\omega = \frac{(4\pi)^2 e^2 n\,|r_{ab}|^2}{6V}\gamma_{ab}\int d\mathbf{P} f(\mathbf{P})\left\{\frac{(1+aE_0^2)(\rho_a^{(0)}+\rho_b^{(0)})}{\Gamma_E} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{\Gamma_E^2}\frac{\gamma_a-\gamma_b}{\gamma_a+\gamma_b} aE_0^2 D^{(0)}\left[(\omega_{ab}-\Omega_0+\mathbf{k}_0\mathbf{V})^2-\gamma_{ab}^2(1+aE_0^2)\right]\right\}. \quad (2,76)$$

Рассмотрим два предельных случая:

а) Неподвижные атомы ($f(\mathbf{P}) = \delta(\mathbf{P})$):

$$(\xi^2)_\omega = \frac{(4\pi)^2 e^2 n\,|r_{ab}|^2}{6V}\gamma_{ab}\left[\frac{(1+aE_0^2)(\rho_a^{(0)}+\rho_b^{(0)})}{(\omega_{ab}-\Omega_0)^2+\gamma_{ab}^2(1+aE_0^2)} - \right.$$
$$\left. -\frac{\gamma_a-\gamma_b}{\gamma_a+\gamma_b} aE_0^2 D^{(0)}\frac{(\omega_{ab}-\Omega_0)^2-\gamma_{ab}^2(1+aE_0^2)}{[(\omega_{ab}-\Omega_0)^2+\gamma_{ab}^2(1+aE_0^2)]^2}\right]. \quad (2,77)$$

б) Неоднородное уширение ($\gamma_{ab} \ll \Delta\omega_D$). В нулевом приближении по $\gamma_{ab}/\Delta\omega_D$ из (2,76) после интегрирования по $\mathbf{P}$ находим

$$(\xi^2)_\omega = \sqrt{\pi}\,(4\pi)^2 e^2 n\,|r_{ab}|^2 (6V\Delta\omega_D)^{-1}(1+aE_0^2)^{1/2}(\rho_a^{(0)}+\rho_b^{(0)}). \quad (2,78)$$

Выражения (2,77), (2,78) удобно представить в ином виде, используя выражения для мнимой части диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon''(\Omega_0) = -4\pi e^2\,|r_{ab}|^2 n\gamma_{ab} D^{(0)}/3\hbar\left[(\omega_{ab}-\Omega_0)^2+\gamma_{ab}^2(1+aE_0^2)\right] \quad (2,79)$$

для неподвижных атомов и

$$\varepsilon''(\Omega_0) = -\pi^{1/2}\cdot 4\pi e^2 n\,|r_{ab}|^2 D^{(0)}/3\hbar\Delta\omega_D(1+aE_0^2)^{1/2} \quad (2,80)$$

при $\gamma_{ab} \ll \Delta\omega_D$, $\omega_{ab}-\Omega_0 \ll \Delta\omega_D$.

В результате выражения (2,77), (2,78) принимают вид

$$(\xi^2)_\omega = \frac{4\pi\varepsilon''\hbar}{2V}\left[(1+aE_0^2)\frac{\rho_b^{(0)}+\rho_a^{(0)}}{\rho_b^{(0)}-\rho_a^{(0)}} + \frac{\gamma_a-\gamma_b}{\gamma_a+\gamma_b} aE_0^2\frac{(\omega_{ab}-\Omega_0)^2-\gamma_{ab}^2(1+aE_0^2)}{(\omega_{ab}-\Omega_0)^2+\gamma_{ab}^2(1+aE_0^2)}\right] \quad (2,81)$$

для неподвижных атомов и

$$(\xi^2)_\omega = \frac{4\pi\varepsilon''\hbar}{2V}(1+aE_0^2)\frac{\rho_b^{(0)}+\rho_a^{(0)}}{\rho_b^{(0)}-\rho_a^{(0)}} \text{ при } \gamma_{ab} \ll \Delta\omega_D. \quad (2,82)$$

Приближение неподвижных атомов оправдано для лазеров с однородным уширением линии.

Рассмотрим предельные случаи слабого и сильного поля:

а) Слабое поле ($aE_0^2 \ll 1$). В нулевом приближении по aE_0^2 формулы (2,81), (2,82) совпадают по виду:

$$(\xi^2)_\omega = (4\pi\varepsilon_0''\hbar/2V)\,[\rho_b^{(0)}+\rho_a^{(0)}]/[\rho_b^{(0)}-\rho_a^{(0)}]. \quad (2,83)$$

Различны лишь выражения для функций ε_0''. Они следуют из формул (2,79), (2,80) при $aE_0^2 = 0$.

Используя формулы (1,89), (2,52), (2,83), получим для этого случая следующее выражение для ширины линии излучения:

$$\Delta\omega_\Phi \equiv 2D = \frac{\hbar\Omega_0^2}{2W}\left(\frac{1}{Q}\left(\bar{n}+\frac{1}{2}\right)+\varepsilon_0''\frac{1}{2}\frac{\rho_b^{(0)}+\rho_a^{(0)}}{\rho_b^{(0)}-\rho_a^{(0)}}\right). \quad (2,84)$$

Здесь первый член определяется тепловым шумом резонатора, а второй — поляризационным шумом. Во втором члене стоит произведение двух отрицательных величин $\varepsilon_0'' < 0$ и $\rho_b^{(0)} - \rho_a^{(0)} < 0$.

Выражение (2,84) обычно записывают в ином виде.

Введем обозначение для мощности

$$P = \Delta\omega_p W = \Delta\omega_p E_0^2 V/8\pi, \qquad \Delta\omega_p = \Omega_0/Q$$

и используем условие самовозбуждения

$$Q^{-1} + \varepsilon_0'' = 0. \tag{2,85}$$

Тогда, исключая ε_0'', можно записать выражение (2,84) в виде

$$\Delta\omega_\Phi = \frac{\hbar\Omega_0}{2P}(\Delta\omega_p)^2\left(\bar{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\rho_a^{(0)} + \rho_b^{(0)}}{\rho_a^{(0)} - \rho_b^{(0)}}\right). \tag{2,86}$$

Это выражение совпадает, например, с полученным в работе Хакена[4]. Вычисление ширины газового лазера проводилось и в ряде других работ, например, Лэмба[35], Лекса[3], Уиллиса[5] и др.

В первом приближении по aE_0^2 из формул (2,81), (2,82) находим

$$(\xi^2)_\omega = \frac{4\pi\varepsilon_0''\hbar}{2V}\left[\frac{\rho_b^{(0)} + \rho_a^{(0)}}{\rho_b^{(0)} - \rho_a^{(0)}} + \frac{\gamma_a - \gamma_b}{\gamma_a + \gamma_b}\,aE_0^2\,\frac{(\omega_{ab} - \Omega_0)^2 - \gamma_{ab}^2}{(\omega_{ab} - \Omega_0)^2 + \gamma_{ab}^2}\right],$$

$$(\xi^2)_\omega = \frac{4\pi\varepsilon_0''\hbar}{2V}\left(1 + \frac{aE_0^2}{2}\right)\frac{\rho_b^{(0)} + \rho_a^{(0)}}{\rho_b^{(0)} - \rho_a^{(0)}}.$$

б) Сильное поле ($aE_0^2 \gg 1$). Для неподвижных атомов из формул (2,81), (2, 77) следует

$$(\xi^2)_\omega = \frac{4\pi\hbar\varepsilon''}{2V}\,aE_0^2\left[\frac{\rho_b^{(0)} + \rho_a^{(0)}}{\rho_b^{(0)} - \rho_a^{(0)}} + \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_b + \gamma_a}\right] =$$

$$= \frac{(4\pi)^2 e^2 n\,|r_{ab}|^2}{6V\gamma_{ab}}\,D^{(0)}\left[\frac{\rho_a^{(0)} + \rho_b^{(0)}}{\rho_a^{(0)} - \rho_b^{(0)}} + \frac{\gamma_a - \gamma_b}{\gamma_a + \gamma_b}\right]. \tag{2,87}$$

Таким образом, спектральная функция поляризационного шума при $aE_0^2 \gg 1$ не зависит от поля.

Если изменение мощности производится за счет изменения добротности при постоянной накачке, то с учетом условия (2,85) выражение (2,52) можно записать в виде

$$(\xi^2)_\omega^T = 4\pi\hbar\,|\varepsilon''|\,V^{-1}(\bar{n} + 1/2). \tag{2,88}$$

Так как в сильном поле

$$\varepsilon'' = -4\pi e^2\,|r_{ab}|^2\,nD^{(0)}/3\hbar\gamma_{ab}aE_0^2 \sim 1/aE_0^2,$$

спектральная функция теплового шума убывает с ростом поля. Вследствие этого ширина линии при $aE_0^2 \gg 1$ определяется поляризационным шумом.

В результате получаем выражение

$$\Delta\omega_\Phi = \frac{\hbar\Omega_0^2}{2W}\,\varepsilon''aE_0^2\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\rho_b^{(0)} + \rho_a^{(0)}}{\rho_b^{(0)} - \rho_a^{(0)}} + \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_b + \gamma_a}\right]. \tag{2,89}$$

Сравним формулы (2,84), (2,89). Из них следует, что как в слабом, так и в сильном поле ширина линии обратно пропорциональна энергии поля, т. е. $\Delta\omega_\Phi \sim 1/W$. Однако коэффициент пропорциональности различен.

В случае газового лазера при $aE_0^2 \gg 1$, но $\gamma_{ab}^2 aE_0^2 \ll \Delta\omega_D^2$, из формулы (2,82) следует

$$(\xi^2)_\omega = (4\pi\hbar\varepsilon''/2V)\, aE_0^2\, (\rho_b^{(0)} + \rho_a^{(0)})/[\rho_b^{(0)} - \rho_a^{(0)}]. \qquad (2,89а)$$

Так как теперь (см. (2,80))

$$\varepsilon'' = -\sqrt{\pi}\, 4\pi e^2 n\, |r_{ab}|^2/3\hbar\Delta\omega_D\, (aE_0^2)^{1/2} \sim 1/(aE_0^2)^{1/2}, \qquad (2,90)$$

то поляризационный шум растет как $(aE_0^2)^{1/2}$.

Ширина линии определяется выражением

$$\Delta\omega_\Phi = (\hbar\Omega_0^2/2W)\, \varepsilon'' aE_0^2\, (\rho_b^{(0)} + \rho_a^{(0)})/[\rho_b^{(0)} - \rho_a^{(0)}] \sim 1/W^{1/2} \qquad (2,91)$$

и, следовательно, уменьшение ширины линии с ростом мощности при $aE_0^2 \gg 1$ замедляется.

Результаты (2,89а), (2,91) качественно согласуются с приведенными в работе [33].

В настоящее время имеется уже значительное число экспериментальных работ, посвященных определению ширины линии излучения и исследованию спектра амплитудных флуктуаций газовых лазеров. По порядку величины результаты расчета ширины линии согласуются с экспериментальными данными в области превышений над порогом, когда справедлива корреляционная теория.

Для детального сравнения с экспериментальными данными необходимо обобщение приведенных выше результатов. Дело в том, что наибольший интерес представляет исследование флуктуаций в линейном лазере, где форма поля близка к стоячей волне, и в кольцевом лазере в режиме двух встречных волн. В этих случаях при расчете фазовых флуктуаций необходимо учитывать влияние амплитудных флуктуаций и связи встречных волн. Обзор этих результатов не может быть проведен в рамках настоящей статьи, поэтому ограничимся лишь указанием литературы [34, 38–47].

В заключение отметим, что хотя изложение велось здесь на примере газа, атомы которого взаимодействуют лишь через поперечное поле, подобным же методом можно рассчитывать неравновесные флуктуации и в других системах.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. W. H. Louisell, Radiation and Noise in Quantum Electronics, N.Y. 1965 (готовится перевод: М., «Мир», 1970).
2. M. Scully, W. Lamb, Phys. Rev. **159**, 208 (1967); **166**, 216 (1968).
3. M. Lax, Dynamycal Processes in Solid State Optics, Tokyo-N.Y., 1967, стр. 195; Phys. Rev. **145**, 110 (1946); Physics of Quantum Electronics, N.Y., 1966, стр. 735; Phys. Rev. **172**, 350, 362 (1968); J. Quant. Electron **QE-3**, 37 (1967).
4. H. Haken, Zs. Phys. **190**, 927; **197**, 267 (1966).
5. C. R. Willis, Phys. Rev. **147**, 406 (1966); **156**, 320 (1967): **165**, 420 (1968).
6. J. A. Fleck, Phys. Rev. **143**, 309; **149**, 323 (1966).
7. J. P. Gordon, Phys. Rev. **161**, 367 (1967).
8. Б. Я. Зельдович, А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ **55**, 589 (1968).
9. А. А. Белавин, Б. Я. Зельдович, А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ **56**, 264 (1969).
10. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, ЖЭТФ **56**, 2001 (1969).
11. С. Г. Раутиан, Некоторые вопросы теории газовых лазеров, Тр. ФИАН **43** (1968).
12. Y. R. Shen, Phys. Rev. **155**, 921 (1967).

13. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Статистические явления в нелинейной оптике, М., Изд-во МГУ, 1970.
14. С. Г. Раутиан, И. И. Собельман, УФН **90**, 209 (1966).
15. Э. Г. Пестов, С. Г. Раутиан, ЖЭТФ **56**, 903 (1969).
16. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, М., Гостехиздат, 1946.
17. M. Born, H. Green, Proc. Roy. Soc. **A188**, 10 (1946)
18. К. П. Гуров, Основания кинетической теории газов, М., «Наука», 1966.
19. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, М., «Сов. радио», 1965.
20. A. Lenard, Ann. of Phys. **10**, 390 (1960).
21. R. Balesqu, Phys. Fluids **4**, 85 (1960). Р. Балеску, Статистическая механика заряженных частиц, М., «Мир», 1967.
22. В. П. Силин, ЖЭТФ **40**, 1768 (1961); ФММ **13**, 180 (1962); Кинетические уравнения для заряженных частиц, Приложение к книге Р. Балеску [21].
23. Ю. Л. Климонтович, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, М., Изд-во МГУ, 1964.
24. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ **37**, 735 (1959); **38**, 1212 (1960).
25. Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, ЖЭТФ **42**, 286 (1962).
26. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ **52**, 1233 (1967); ЖЭТФ **54**, 136 (1968).
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
28. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, М., «Наука», 1967.
29. А. В. Гапонов, М. М. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. вузов (Радиофизика) **10**, 1414 (1967).
30. Д. В. Гальцов, Об усилении электромагнитных волн квазиклассическими системами. Канд. диссертация (Физ. ф-т МГУ, 1968).
31. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, М., «Наука», 1968.
32. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, М., «Сов. радио», 1961.
33. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, ЖЭТФ **56**, 275 (1969).
34. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, ЖЭТФ **58**, 1367 (1970).
35. У. Лэмб, в сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика», М., «Мир», 1966.
36. F. Aronovich, Phys. Rev. **139A**, 635 (1965).
37. Ю. Л. Климонтович, В. Н. Курятов, П. С. Ланда, ЖЭТФ **51**, 3 (1966).
38. И. Л. Берштейн, И. А. Андронова, Ю. И. Зайцев, Радиофизика **10**, 59 (1967).
39. В. С. Смирнов, Б. Л. Желнов, Тезисы доклада на Всесоюзн. симпозиуме по физике газовых лазеров, М., 1969.
40. П. С. Ланда, ЖЭТФ **58**, 1651 (1970).
41. Ю. И. Зайцев, Д. П. Степанов, ЖЭТФ **55**, 1645 (1968).
42. Ю. И. Зайцев, ЖЭТФ **50**, 525 (1966).
43. И. А. Андронова, ЖЭТФ **56**, 417 (1969).
44. F. Arecchi, G. Rodari, A. Sona, Phys. Lett. **A25**, 341 (1967).
45. A. Smith, J. Armstrong, Phys. Rev. Lett. **16**, 1169 (1966).
46. И. А. Андронова, Ю. И. Зайцев, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, 149 (1968).
47. Г. Хвостенко, М. П. Чайка, Оптика и спектроскопия **26**, 482 (1969)