1970 г. Июль Том 101, вып. 3

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

РАСТУЩИЕ ТРАЕКТОРИИ РЕДЖЕ И ДИНАМИКА РЕЗОНАНСОВ *)

С. Мандельстам

Траекторией Редже называют кривую, выражающую зависимость момента количества движения от энергии **). Хотя в квантовой теории момент принимает лишь дискретные значения, можно говорить о непрерывной кривой, так как уравнение Шредингера устанавливает аналитическую связь между энергией и моментом. Простейшим примером является общеизвестная формула для энергетического спектра атома водорода

$$E(l) = -(\hbar^2/2ma^2)/(l+1+n_r)^2$$

(E — энергия, l — орбитальный момент, n_r — радиальное квантовое число, a — боровский радиус, m — масса электрона). Эту зависимость можно обратить и записать в виде

$$l(E) = -1 + [i\hbar/a\,(2mE)^{1/2}] - n_r.$$

Данная формула и есть уравнение траекторий Редже кулоновской задачи. Рассматривая формально E как независимую переменную, мы получаем однопараметрическое (параметр — n_r) семейство кривых. Точки, в которых ордината l целочисленна, отвечают уровням атома водорода.

Из формулы для $l(E)$ видно, что: а) при $E < 0$ момент $l(E)$ действителен, причем $dl/dE > 0$; б) точка $E = 0$ (порог диссоциации) является особой: при $E > 0$ момент $l(E)$ становится комплексным, и $\operatorname{Re} l(E)$ уже не возрастает с увеличением E.

Указанные свойства присущи траекториям Редже для широкого класса потенциалов, в том числе короткодействующих. В последнем случае, в отличие от кулоновской задачи, кривая $l(E)$ при отрицательных $E \to 0$ пересекает ось ординат (а не асимптотически приближается к ней) и, кроме того, при $E > 0$ $\operatorname{Re} l(E)$ убывает (а не остается постоянной). Значения $E > 0$, при которых $\operatorname{Re} l(E)$ целочисленно, соответствуют квазистационарным состояниям, т. е. резонансам в рассеянии, причем $\operatorname{Im} l(E)$ определяет ширину резонанса.

Описанный выше ход реджевских траекторий легко понять качественно: при $E < 0$ с увеличением l энергия должна расти из-за роста центробежного потенциала, а при $E > 0$ центробежный барьер обеспечивает условие возникновения резонанса при малых энергиях, заставляя частицы отражаться от стенок барьера.

Таким образом, кривая на рис. 1 статьи С. Мандельстама характерна для потенциального взаимодействия двух частиц (автор обозначает момент буквой α, а квадрат полной энергии системы, включая массу покоя, — буквой t).

Реджевский формализм оказывается весьма полезным в нерелятивистской теории рассеяния — для определенного класса потенциалов он позволяет получить асимптотическое поведение амплитуды рассеяния при больших передачах импульса (см. В. де Альфаро, Т. Редже, «Потенциальное рассеяние», М., «Мир», 1966). В физике элементарных частиц использование симметрии частица — античастица (так называемая кроссинг-симметрия) в сочетании с предположением о справедливости асимптотических реджевских теорем в этой области дает возможность найти ход амплитуды рассеяния при высоких энергиях.

---

*) S. Mandelstam, Comm. on Nucl. and Particle Phys. 3 (3) (1969). Перевод Н. И. Макаревич.

Публикуемая статья С. Мандельстама нуждается, по мнению редколлегии, в некоторых вступительных комментариях, которые любезно согласился сделать И. С. Шапиро.

**) Краткий обзор теории полюсов Редже см. УФН 96 (1), 127 (1968).

В статье С. Мандельстама рассматриваются, в сущности, два вопроса: 1) Можно ли, с теоретической точки зрения, представить себе реджевские траектории, отвечающие неограниченному росту момента с ростом энергией? 2) Не следует ли в теории элементарных частиц вместо уравнений для амплитуд исходить непосредственно из уравнений для реджевских траекторий?

Предлагаемый в статье ответ на первый из этих двух вопросов представляет общефизический интерес: автор полагает, что чем больше степеней свободы существенно участвует в формировании спектра уровней квантовой системы, тем дальше по энергетической оси отодвигается точка поворота реджевской траектории (т. е. тем большие моменты допустимы для состояний этой системы). В квантовой теории поля число степеней свободы бесконечно и в соответствии с этим в принципе возможен неограниченный рост спина частиц-резонансов с их массой.

Несмотря на то, что идея автора является пока лишь вероятной гипотезой, она представляется весьма интересной, так как указывает на одну из немногих качественных особенностей энергетических спектров многочастичных квантовых систем.

И. С. Шапиро

В потенциальном рассеянии или в упрощенных S-матричных расчетах, когда многочастичными промежуточными состояниями пренебрегают, вещественная часть траектории Редже выглядит примерно так, как это показано на рис. 1. Если потенциальное взаимодействие достаточно сильно, то функция $\alpha\ (t)$ пройдет через одно или два небольших целочисленных

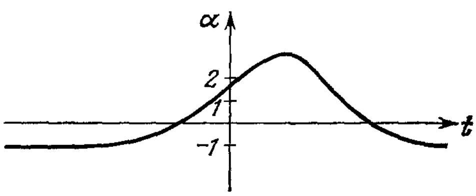

Рис. 1. Траектория Редже при потенциальном рассеянии.

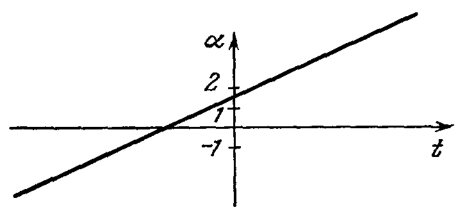

Рис. 2. Растущая траектория Редже.

значения *). Тогда будет существовать частица с массой, отвечающей тому значению t, при котором траектория проходит через целое число, само же это число есть спин частицы.

Вещественная часть функции $\alpha\ (t)$ может пройти через одну или несколько целочисленных точек и при t, большем порога. Значения t и α, при которых это имеет место, отвечают уже не частицам, а резонансам.

Траектории Редже для элементарных частиц, насколько можно судить по экспериментальным данным, отличаются от предсказываемых потенциальной моделью.

Типичная траектория приведена на рис. 2. Траектории как будто бы растут неограниченно, хотя, разумеется, нельзя исключить, что при энергиях, лежащих за пределами, достигнутыми в современных экспериментах, может начаться падение их. По своей форме траектории почти линейны.

В этой статье мы приводим правдоподобный аргумент в пользу того, что траектории могут расти неограниченно. Мы укажем затем, каким образом можно осуществить количественное динамическое рассмотрение систем с такими траекториями.

Наш прежний подход к динамическим расчетам может претерпеть фундаментальные изменения. Если траектории Редже почти линейны,

---

*) Когда мы говорим о траекториях Редже, проходящих через целочисленные значения, всегда подразумевается, что в фермионных каналах целые числа заменяются полуцелыми.

то представляется предпочтительным производить вычисления, используя непосредственно сами резонансные параметры, а не всю амплитуду рассеяния целиком. Такой подход близок по духу современным тенденциям теории элементарных частиц.

Рассмотрим кратко экспериментальные указания, свидетельствующие в пользу неограниченного роста траекторий Редже. Всякий раз, когда траектория проходит через целое число, возникает частица или резонанс с соответствующим спином. В принципе можно надеяться идентифицировать частицы и резонансы с каждой точкой траектории на рис. 2, отвечающей целому положительному значению α. В настоящее время известны частицы или резонансы, соответствующие двум или трем нижним целочисленным точкам. Обнаружены и резонансы с большими массами, при которых траектория достигает таких высоких значений, как, например, 19/2. Спины этих тяжелых частиц еще не измерены, но сочетание сравнительно большого времени жизни с высоким значением энерговыделения Q указывает на то, что они могут быть велики. Весьма соблазнительно отождествить указанные частицы с высокими членами реджевской последовательности.

Можно ли ожидать, основываясь на теории, что реджевские траектории будут расти неограниченно, или они обязательно должны быть похожи на траектории потенциального рассеяния, изображенные на рис. 1? Мы хотели бы привести доводы в пользу того, что в системах, которые нельзя рассматривать как состоящие из «элементарных» частиц, существование неограниченно растущих реджевских траекторий представляется весьма вероятным [1]. Потенциальная теория рассеяния может оказаться здесь плохим ориентиром по той причине, что с ее помощью можно рассматривать лишь системы, содержащие конечное число частиц. Между тем в природе существуют системы с неопределенным числом частиц, причем с ростом энергии число частиц в доминирующих состояниях возрастает неограниченно.

В модели, допускающей только двухчастичные состояния, траектории Редже действительно выглядят так, как это показано на рис. 1. Энергия, при которой траектория поворачивает вниз, по порядку величины равна порогу двухчастичного распада. В трехчастичной модели траектории Редже тоже имеют вид, аналогичный кривой на рис. 1, но точки поворота лежат вблизи порога трехчастичного распада.

Рассмотрим теперь модель, в которой представлены и двухчастичные, и трехчастичные состояния. Допустим, например, что частицы, образующие двухчастичное состояние, неэлементарны. В такой модели мы не должны особо рассматривать чисто двухчастичные конфигурации, поскольку они являются лишь подпоследовательностью трехчастичных состояний, в которых две из трех частиц связаны. Всю систему в целом нужно, таким образом, изучать на основе уравнений для трех взаимодействующих частиц. Следует ожидать поэтому, что поворот реджевских траекторий произойдет на пороге трехчастичного распада.

В улучшенной теории надо принять во внимание, что рассмотренные ранее три частицы также неэлементарны, вследствие чего трехчастичная система должна быть заменена четырехчастичной, совершенно так же как мы раньше перешли от двух частиц к трем. В новом приближении траектории Редже будут продолжать расти значительно дольше и начнут падать лишь вблизи четырехчастичного порога.

По мере перехода к более высоким приближениям точки поворота реджевских траекторий будут отодвигаться все дальше и дальше. Представляется вероятным поэтому, что истинная траектория должна расти неограниченно.

Приведенные соображения показывают, как в рамках использовавшегося до сего времени подхода могли бы возникнуть неограниченно растущие реджевские траектории. Сами же вычисления в этом формализме в случае многочастичных промежуточных состояний необычайно трудны, если вообще выполнимы. Однако если мы примем, что траектории Редже неограниченно растут, можно попытаться указать другой вычислительный метод, совершенно отличный от описанной выше схемы приближений и исходящий непосредственно из самих траекторий.

Если такой метод возможен, то факт существования неограниченно растущих реджевских траекторий является достаточным основанием для его использования. Более того, новая схема расчета имела бы то большое преимущество, что при ее применении можно было бы непосредственно воспользоваться узостью резонансов.

Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим дисперсионное соотношение для описывающей траектории функции $\alpha(t)$. Если α растет при больших t пропорционально t, то дисперсионное соотношение потребует двух вычитаний и может быть записано в следующем виде:

$$\alpha(t) = at + b + \frac{1}{\pi} \int dt' \, \frac{\operatorname{Im} \alpha(t')}{t' - t} \, . \tag{1}$$

Из уравнения (1) сразу видно, что условие линейности сводится к малости $\operatorname{Im} \alpha$. Из реджевской теории хорошо известно, что ширина резонанса пропорциональна $\operatorname{Im} \alpha$. Таким образом, приблизительная линейность траектории является необходимым и достаточным условием узости резонанса.

Траектории типа, показанного на рис. 1, вблизи точки поворота заведомо нелинейны. Более того, область энергий, в которой траектории идут вниз, играет решающую роль в динамике системы. Последнее означает, что динамические уравнения для таких систем не могут быть рассмотрены в узкорезонансном приближении. В этом случае приходится решать интегральные уравнения, полученные с помощью условий аналитичности и унитарности. Если реджевские траектории приблизительно линейны, то подобных возражений против «узкорезонансного» приближения не возникает (вряд ли нужно оговаривать, что приближение будет оправдано лишь в том случае, если удастся достичь удовлетворительного согласия с опытом).

Приближенная схема расчета, о которой идет речь, состоит в следующем. Предполагается, что в амплитуде рассеяния доминирует конечное число линейных реджевских траекторий. Отвечающие траекториям неизвестные величины α и β непосредственно связаны с резонансными параметрами. Вместо интегральных уравнений для амплитуд рассеяния мы получаем (в данном приближении) численные уравнения для реджевских параметров. Сравнительная простота таких уравнений позволяет рассматривать большое число связанных каналов. Многие из ранее полученных результатов по нарушенным симметриям или симметрии $SU(6)$ (такие, например, как формула Гелл-Манна — Окубо) относятся непосредственно к резонансным параметрам. Гораздо легче увидеть, как возникают подобного рода соотношения из уравнений для самих резонансных параметров, чем из интегральных уравнений для амплитуд рассеяния.

Соотношение унитарности, являющееся важнейшим пунктом прежней динамической схемы, в приближении узких резонансов не используется явно, но, как будет отмечено ниже, одно из следствий унитарности играет существенную роль. Любой узкий брейт-вигнеровский резонанс удовлетворяет условию унитарности. Разумеется, при улучшении узкорезонансного приближения условие унитарности придется использовать.

Для читателей, знакомых с теоремой Левинсона, заметим, что предлагаемая схема отличается от прежней тем, что эта теорема перестает быть справедливой. Если траектория Редже сначала растет, а затем падает, как на рис. 1, то то же самое происходит и со сдвигами фаз, причем энергии, при которых происходит поворот траекторий и фазового сдвига, по порядку величины одинаковы. Если реджевские траектории продолжают расти, то от сдвигов фаз следует ожидать аналогичного поведения. Требование «бутстрапа» об отсутствии выделенных «элементарных» частиц вводится теперь не через посредство теоремы Левинсона, а условием, чтобы все частицы лежали на реджевских траекториях.

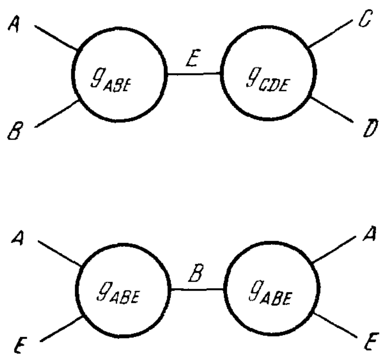

Рис. 3. Факторизация вычетов амплитуд рассеяния.

Решившись аппроксимировать амплитуду рассеяния конечным числом реджевских траекторий, мы должны найти уравнения для параметров, определяющих эти траектории. Существуют два ограничения на амплитуды, приводящие к искомым уравнениям. Чтобы изучить первое ограничение (назовем его факторизацией), рассмотрим амплитуду процесса $A + B \to C + D$ и какой-либо полюс, отвечающий одночастичному промежуточному состоянию E (рис. 3, *а*). Вычет в таком полюсе представляет собой произведение двух «констант взаимодействия» g_{ABE} и g_{CDE}. Если мы применим условие факторизации к амплитудам $A + B \to A + B$, $A + B \to C + D$ и $C + D \to C + D$, то заметим, что все три вычета выразятся через две константы: g_{ABE} и g_{CDE}. Для систем с большим числом связанных каналов будет соответственно большее число соотношений.

Другие следствия факторизации мы получим, рассмотрев амплитуду процесса $A + E \to A + E$ и полюс, отвечающий состоянию B. В эту амплитуду входит в точности та же константа связи, что и в предыдущую реакцию. Мы видим, таким образом, что факторизация существенно ограничивает произвол в выборе реджевских параметров. Факторизация есть следствие унитарности. Хотя само условие унитарности явно не используется в приближении узких резонансов, оно тем не менее накладывает свои ограничения через требование факторизации.

Второе ограничение на амплитуды рассеяния накладывается кроссинг-симметрией. Это соотношение есть тот ключевой пункт, через который вводится динамическая информация, эквивалентная заданию природы сил в лагранжевом формализме. Суть кроссинг-симметрии состоит в том, что амплитуды трех процессов $A + B \to C + D$, $A + \bar{C} \to \bar{B} + C$ и $A + \bar{D} \to C + \bar{B}$ даются одной и той же аналитической функцией. Это значит, что реджевские параметры, отвечающие первой реакции, содержат также информацию и о двух других процессах. Но тогда между реджевскими параметрами указанных каналов должны существовать соотношения, позволяющие в принципе определить параметры трех каналов по одному из них.

Следует отметить, что данная точка зрения не является общепринятой.

Некоторые физики считают, что амплитуда характеризуется *совокупностью* реджевских траекторий во всех каналах, тогда как мы предполагаем, что траектории в любом одном канале в принципе определяют всю амплитуду.

Для использования кроссинг-симметрии предложено два метода. Первый из них основывается на *правилах сумм при конечных энергиях* (см. работу [2]). Они были предложены в 1962 г.[3], но их общие возможности были реализованы значительно позднее независимо несколькими авторами. На тесную связь этих правил сумм с динамикой бутстрапа впервые обратили внимание Долен, Горн и Шмид [4].

Фундаментальным пунктом теории Редже является тот факт, что асимптотическое поведение амплитуды в одном из каналов определяется реджевскими параметрами двух других. С другой стороны, знание асимптотики аналитической функции дает возможность наложить ограничения на ее поведение при конечных значениях энергии. Для аналитических функций интересующего нас типа правила сумм при конечных энергиях как раз и выражают собой эти ограничения. В общем виде они могут быть записаны так: [6]

$$\lim_{N\to\infty}\left[\int_{t_0}^{N} dt\,\mathrm{Im}\,A(t)-\frac{\beta(N)\,N^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]=0. \tag{2}$$

В уравнении (2) A — амплитуда рассеяния в одном из каналов при энергии t (вторая переменная опущена). Функции α и β суть реджевские параметры для *одного из двух других каналов*, поскольку, согласно сказанному выше, эти каналы определяют асимптотику. Интегрирование в первом члене уравнения (2) распространяется по интервалу энергий от порога до N. В этой энергетической области поведение A определяется только резонансными параметрами *исходного канала*. Мы получаем, таким образом, связь между параметрами двух каналов. Значение работы Долена, Горна и Шмида состоит в том, что в ней впервые дан конкретный пример использования принципа, позволяющего найти полную амплитуду по реджевским параметрам одного канала. Авторы назвали этот подход *принципом дуальности* [2].

Если верхний предел N в уравнении (2) велик, то соответственно велико и число резонансов в интервале интегрирования. Поэтому часто ограничиваются конечным, не слишком большим значением N и в этом приближении получают довольно простые уравнения для реджевских параметров. Можно развить схему последовательных приближений по числу N. Подстановка вместо N некоторого конечного числа является, по всей вероятности, более рискованной процедурой, чем использование узкорезонансного приближения.

Ряд авторов применял описанный выше подход к конкретным процессам [5-7] *). Укажем, например, на работу Адемолло, Рубинстайна, Венециано и Вирасоро [5], рассмотревших реакцию $\pi\pi \to \pi\omega$. Достигнутое ими согласие с экспериментом является весьма обнадеживающим фактом. В частности, они получили прекрасные результаты для ρ-траектории.

Другой способ использования кроссинг-симметрии состоит в применении формулы Венециано [8], представляющей собой модель амплитуды с реджевским поведением во всех каналах одновременно (поэтому условие кроссинг-симметрии удовлетворяется автоматически). Общая формула Венециано содержит бесконечное число реджевских траекторий и соответственно бесконечное число констант. Учитывая, что лежащие на реджевских траекториях частицы сами могут быть «внешними» в амплитудах рассеяния, и используя факторизацию, можно получить ряд сильных ограничений. Не исключено, что последние приведут нас к искомым динамическим уравнениям.

*) Общий обзор таких вычислений см. в докладе W. R. Frazer'a (Proc. of the 14th Intern. Conference on High-Energy Physics, Vienna, 1968).

Недостаток места не позволяет нам рассмотреть здесь представление Венециано более подробно. Оно открывает наиболее перспективный в настоящее время путь построения динамической схемы, основывающейся на реджевских траекториях.

В заключение — несколько замечаний о границах применимости приближения узких резонансов. Кроме очевидных ограничений, присущих этой схеме, она имеет еще ту особенность, что все уравнения для реджевских вычетов линейны и, следовательно, сами вычеты могут быть определены лишь с точностью до постоянного множителя. Имеются также некоторые трудности с грибовским удвоением, согласно которому все линейные фермионные траектории и многие бозонные траектории сопровождаются дублетами по четности. В простых моделях дублетная траектория отвечает скорее отталкиванию, а не притяжению. Это обстоятельство в узкорезонансном приближении приводит к отрицательным ширинам. Мы полагаем, что приближение узких резонансов аналогично борновскому приближению в потенциальной теории рассеяния. Можно указать несколько различных методов обобщения узкорезонансного приближения, но пока ни один из них не исследован сколько-нибудь подробно. Вполне вероятно, однако, что мы получим ценную информацию о спектре частиц, оставаясь в рамках узкорезонансного приближения, до обращения к значительно более сложной проблеме учета конечности ширин.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. S. Mandelstam, 1966 Tokyo Summer Lectures in Theoretical Physics, pt. 2 (G. Takeda, Ed.), Syokabo. Tokyo, and Benjamin, New York, 1967.
2. G. F. Chew, Comm. on Nucl. and Particle Phys. **2**, 74 (1968).
3. K. Igi, Phys. Rev. Lett. **9**, 76 (1962).
4. R. Dolen, D. Horn, C. Schmid, Phys. Rev. Lett. **19**, 402 (1967); Phys. Rev. **166**, 1768 (1968).
5. M. Ademollo, H. R. Rubinstein, G. Veneziano, M. A. Virasoro, Phys. Rev. Lett. **19**, 1402 (1867); Phys. Lett. **27B**, 99 (1968).
6. S. Mandelstam, Phys. Rev. **166**, 1539 (1968).
7. C. Schmid, Phys. Rev. Lett. **20**, 628 (1968); C. Schmid, J. Vellin, Phys. Lett. **27B**, 19 (1968).
8. G. Veneziano, Nuovo Cimento **57A**, 190 (1968).