1970 г. Июль *Том 101, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.121.7

РОЛЬ НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ И ТЕОРИЯ ФАЙРБОЛОВ

И. М. Дрёмин, И. И. Ройзен, Д. С. Чернавский

I. ВВЕДЕНИЕ

В физике сильных взаимодействий частиц высокой энергии неупругие процессы играют определяющую роль. Тем не менее до недавнего времени как экспериментаторы, работающие на ускорителях, так и теоретики предпочитали иметь дело с процессами упругого рассеяния, либо, в крайнем случае, с процессами генерации одной-двух частиц.

Экспериментальная обработка таких событий менее трудоемка и более надежна. Для теоретика упрощения обусловлены относительной простотой математического аппарата, некоторой выделенностью амплитуды упругого рассеяния, которая оптической теоремой связана с полным сечением, и, наконец, наличием сейчас более полной и точной экспериментальной информации об упругих соударениях по сравнению с неупругими процессами. В последнее время в связи с развитием новых методов обработки эксперимента и широким использованием вычислительной техники заметно повысился интерес к неупругим процессам с большой множественностью в ускорительной области энергий. Что касается космических лучей, то там исследуются главным образом именно такие неупругие процессы, поскольку изучение упругих и квазиупругих взаимодействий сталкивается с большими экспериментальными трудностями.

С теоретической точки зрения представляет интерес взаимосвязь упругих и неупругих процессов. Как уже упоминалось, неупругие процессы играют ведущую роль.

Во-первых, при сильных взаимодействиях частиц высоких энергий соударения в основном неупругие (около 80%).

Во-вторых, сама амплитуда упругого рассеяния полностью определяется характером неупругих процессов при высоких энергиях.

В-третьих, уже при современных ускорительных энергиях ($E_{лаб} \sim$ $\sim 25-30$ *Гэв* в ЦЕРН и Брукхейвене и $E_{лаб} \sim 70$ *Гэв* в Серпухове) основной вклад в неупругие взаимодействия вносят процессы множественного рождения, которые не сводятся к бинарным, и, следовательно, их нельзя рассматривать по аналогии с упругими. Поэтому проблема теоретического описания неупругих процессов имеет первостепенное значение.

В предлагаемом обзоре рассматриваются два главных вопроса.

Первый из них состоит в том, каким образом неупругие процессы большой множественности влияют на характеристики упругого рассеяния. Этому посвящены гл. II и III обзора. В них показано, что неупругие процессы определяют упругое рассеяние как на малые, так и на средние и «большие» углы.

Второй вопрос: каковы свойства самих неупругих процессов при высоких энергиях и как они связаны с упругими взаимодействиями в «асимптотической» области энергий? Этому посвящены последующие главы обзора. Особое внимание в них уделено неупругим процессам, в которых образуются файрболы.

Обзор носит теоретический характер. В связи с этим мы не ставили себе задачей подробное и детальное обсуждение экспериментальных данных. Нам кажется даже, что такое обсуждение сейчас было бы преждевременным. Дело в том, что, с одной стороны, ни одна из теоретических схем неупругих процессов не доведена до уровня точных количественных предсказаний в широком интервале энергий (скажем, от 10^{10} до 10^{15} *эв*) и, с другой стороны, характер экспериментальной информации, получаемой на ускорителях ($E_{\text{лаб}} \leqslant 20-30$ *Гэв*) и в космических лучах ($E_{\text{лаб}} \sim 10^{11}-10^{13}$ *эв*), разный. В первом случае большинство данных относится к событиям с малой множественностью, тогда как во втором — рассматриваются в основном только многолучевые события. Можно думать, что эта разница уменьшится в результате экспериментов на Серпуховском ускорителе. При этом во всяком случае прояснятся многие спорные вопросы и будет выработана единая точка зрения, что необходимо для подробного анализа экспериментальных результатов. Мы обсудим лишь некоторые существенные качественные результаты эксперимента, сыгравшие большую роль в формировании теоретических представлений.

Прежде всего, отметим следующие данные, полученные сначала в космических лучах, а затем — значительно более точно, но пока в существенно меньшей области энергий — и на ускорителях:

1. Полные сечения взаимодействия при энергиях от 10^{10} *эв* до 10^{15} *эв* постоянны с точностью $\sim 50\%$. (Ускорительные данные свидетельствуют о слабой зависимости этих сечений от энергии в интервале от 10^{10} до $7 \cdot 10^{10}$ *эв*.)

2. Вторичные частицы в СЦИ при высоких энергиях сильно коллимированы вдоль линии соударения. Коллимация по углам возрастает с ростом энергии, так что средний поперечный импульс $\overline{p_\perp}$ остается постоянным ($\overline{p_\perp} \sim 2{,}5\ \mu$, где μ — масса пиона; здесь и далее мы будем полагать $\hbar = c = 1$) практически во всей исследованной области энергий.

3. Средняя множественность с возрастанием энергии растет довольно слабо.

4. При взаимодействии нуклонов высокой энергии они сохраняют основную долю первичной энергии. Отношение энергии E_1, пошедшей на образование новых частиц, к энергии первичной частицы E_0 в СЦИ в среднем составляет $E_1/E_0 \sim 0{,}5$ (хотя разброс в значениях этого отношения очень велик). Эту величину называют коэффициентом неупругости

$$K = E_1/E_0.$$

5. Особо следует отметить важные, с нашей точки зрения, данные об образовании файрболов при высоких энергиях. Эти данные до сих пор остаются дискуссионными. Разногласия в основном связаны с трудностями получения и интерпретации результатов в космических лучах. Этот вопрос подробно рассмотрен в обзоре Менсовича [1]. Мы не будем входить здесь в детали дискуссии, а кратко опишем лишь основные выводы. При изучении взаимодействий нуклонов с энергией $\sim 10^{12}$ *эв* было выска-

зано утверждение, что образуются два центра эмиссии вторичных пионов. Эти центры движутся в СЦИ с релятивистской скоростью. Число заряженных частиц, излучающихся из каждого центра, порядка шести-семи. Масса центра эмиссии порядка $\mathfrak{M} \sim 3$ *Гэв.*

Эти данные были получены в основном Менсовичем, Герулей и их сотрудниками [2] и независимо Ниу [3]. По предложению Кокконп [4] эти центры эмиссии были названы файрболами.

В дальнейшем в работах Добротина, Славатинского и их сотрудников [5] были получены данные, указывающие на то, что при соударении нуклонов несколько меньших энергий ($E_{\text{лаб}} \sim 3 \cdot 10^{11}$ *эв*) образуется один центр эмиссии. Основные характеристики центра (масса, число вторичных частиц и т. п.) совпали с приведенными выше. Было сделано заключение о том, что образуется один файрбол.

Затем в работах Хасегавы [6] и Рыбицкого [7] были получены указания на то, что при более высоких энергиях $\sim 10^{13}$ *эв* образуется большее число файрболов. Эти данные, однако, пока нельзя считать обоснованными даже в той мере, в какой справедливы выводы о процессах образования одного и двух файрболов.

Сопоставление данных наводит на мысль о том, что при увеличении энергии увеличивается и число файрболов, но характеристики их (прежде всего масса) остаются практически постоянными, т. е. не изменяются с ростом энергии в интервале от $3 \cdot 10^{11}$ *эв* до $\sim 10^{13}$ *эв*. Несомненный интерес представляют поиски процессов образования одного файрбола при ускорительных энергиях. Первые предварительные результаты были получены Уокером [8] в πp-взаимодействиях при энергии 25 *Гэв* и Ждановым с сотрудниками [9] в pp-взаимодействиях при энергиях 21 и 24 *Гэв*. Однако при этих энергиях сечение такого процесса еще очень мало, и его детальное исследование на ускорителях станет, по-видимому, возможным лишь при энергиях Серпуховского ускорителя.

Отметим, что в последнее время получены весьма детальные характеристики неупругих процессов при ускорительных энергиях вплоть до 16 *Гэв* [10]. Сейчас ведется исследование вклада файрбольных процессов при этих энергиях.

Одновременно с экспериментом (и под его влиянием) совершенствовались и теоретические представления о неупругих процессах. Долгое время единственными серьезными теоретическими схемами описания таких процессов были гидродинамическая теория [11], использовавшаяся при сверхвысоких энергиях $E_{\text{лаб}} \gg 10^{12}$ *эв*, и статистическая теория [12], применявшаяся в области энергий $10^9 \leqslant E_{\text{лаб}} \leqslant 10^{10}$ *эв*. Использовался также и метод Вейцзекера — Вильямса, который, однако, содержал много неизвестных параметров. Высказывались идеи о периферических взаимодействиях адронов [13–15]. Использование фейнмановских диаграмм с обменом одним мезоном в работах Гёбеля [16] и Чу и Лоу [17] позволило продвинуться дальше в изучении неупругих процессов. В работах Дрёмина и Чернавского [18], а затем Ф. и Г. Зальцман [19] было сформулировано одномезонное приближение, которое в дальнейшем было, с одной стороны, дополнено учетом эффектов взаимодействия в начальном и конечном состояниях в таких процессах [20] и, с другой,— привело к более развитой идее периферичности — к рассмотрению мультипериферических диаграмм, учтенных впервые в работе Берестецкого и Померанчука [21]. Наиболее полно второе направление было представлено в работах Амати, Фубини, Стангеллини и Тонина [22], предложивших мультипериферическую модель (AFST-модель), в которой, в отличие от предыдущих моделей, было использовано замкнутое уравнение, описывающее целую совокупность диаграмм. Модель исследовалась очень интенсивно и подвергалась сравнению с экспериментом. При этом выявились ее практические недостатки: она не могла обеспечить асимптотическое постоянство сечения и не описывала явление образования файрболов. Однако вскоре было показано [23], что эти недостатки связаны только с нечеткой интерпретацией ядра уравнения, использованного в модели [22]. Последовательное рассмотрение в рамках уравнения Бете — Солпитера, проведенное в работе Дрёмина, Ройзена, Уайта и Чернавского [23], позволяет интерпретировать это ядро как совокупность определенного класса фейнмановских диаграмм и получить модель AFST в виде частного случая уравнения Бете — Солпитера. Более того, оказалось, что уравнение Бете — Солпитера совместно с соотношением унитарности в s-канале позволяет непосредственно исследовать также свойства упругого рассеяния, обусловленного неупругими процессами различного типа. При этом ограничения, накладываемые на амплитуду упругого рассеяния, являются одновременно и ограничениями на неупругие процессы. Оказывается, что в результате выполнения таких, казалось бы, «абстрактных» требований, как условие существования решения и наличие вакуумной особенности вблизи $l = 1$, теория естественным образом предсказывает явление, сходное с образованием файрболов. Более того, эти «абстрактные» условия позволяют определить (по порядку величины) параметры, которые в прежних моделях периферических процессов считались произвольными.

Интенсивно развивалось и другое направление теории неупругих процессов — мультиреджионная модель, наиболее детально исследованная в работах Тер-Мартиросяна с сотрудниками [24]. Диаграммы, обсуждаемые в этой модели, топологически эквивалентны диаграммам мультипериферической модели. Отличие состоит лишь в том, что рассматривается обмен не элементарной частицей, а реджионом. Сравнение феноменологического варианта этой модели, дополненного некоторыми конкретными предположениями о поведении в низкоэнергетической области, с экспериментальными данными при 8 и 16 *Гэв* было проведено в работе [25]. Сопоставлению различных моделей неупругих процессов, и в особенности мультиреджионной и мультипериферической моделей, посвящена гл. IX

Следует отметить, что было предложено много моделей неупругих процессов, например, модель некоррелированных струй [26, 27], модель тормозного излучения [28], кварковая модель [29]. Однако они не получили существенного развития, хотя и помогли в выяснении, например, таких важных вопросов, как роль фаз матричных элементов неупругих процессов (см. гл. III) или же изотопические соотношения между различными каналами и т. п. В последнее время вновь возобновился интерес к статистической теории [12] в связи с ускорительными экспериментами по определению спектров частиц [30], по рождению пар частиц-античастиц и связанной с ней проблеме кварков [31] и т. п. Ясно, однако, что статистическая теория не может претендовать на описание всей совокупности неупругих процессов. Ее взаимосвязь с другими моделями также обсуждается в гл. IX.

Мы хотели бы особо подчеркнуть, что, употребляя всюду слово «модель», мы тем самым указываем, что основных положений теории оказывается недостаточно для полного количественного описания неупругих процессов. В связи с этим на каком-то этапе приходится делать определенные предположения о некоторых величинах, а ряд параметров оставлять произвольными впредь до сравнения с экспериментом. Тем не менее тот факт, что удается теоретически выяснить качественные, а в некоторых случаях и количественные характеристики неупругих процессов и связать их со свойствами амплитуды теневого упругого рассеяния, является несомненным достижением последних лет.

II. ВЗАИМОСВЯЗЬ УПРУГИХ И НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Главы II и III обзора посвящены вопросу о взаимосвязи упругих и неупругих процессов. Поэтому читатель, знакомый с этой проблемой или интересующийся лишь вопросами описания неупругих процессов, может перейти непосредственно к чтению гл. IV.

В этой главе мы покажем, что амплитуда упругого рассеяния на любой угол при высоких энергиях практически целиком определяется характером неупругих процессов. На первый взгляд это утверждение может показаться тривиальным. При более детальном рассмотрении здесь возникают следующие вопросы.

1. Из эксперимента известно, что в угловом распределении упругого рассеяния вслед за дифракционным конусом [32] расположена область с более слабой зависимостью от углов [33].

Рассеяние в дифракционном конусе, как будет показано в гл. II, IV, VI, практически целиком определяется именно периферическими неупругими процессами с достаточно высокой множественностью. Задание модулей матричных элементов этих процессов *) позволяет найти наклон главной вакуумной особенности парциальной волны в кросс-канале (см. гл. VI, формулу (47)). Однако этот наклон слишком мал, чтобы воспроизвести экспериментально наблюдаемую ширину дифракционного пика, которая в основном определяется поведением вычета в ведущем полюсе. В то же время в гл. III показывается, что в обратную ширину дифракционного конуса фазы и модули амплитуд неупругих процессов дают аддитивные положительные вклады. При этом из независимых оценок следует, что вклад фаз должен быть как раз того же порядка, который приходится приписывать вычетам при феноменологической обработке эксперимента по реджевским формулам. Поэтому ставится вопрос о возможной связи реджевских траекторий с модулями матричных элементов неупругих процессов, а реджевских вычетов — с фазами этих матричных элементов. Таким образом, изучение упругого рассеяния может дать некоторую информацию (хотя бы косвенную и весьма неполную) о фазах амплитуд неупругих процессов.

2. При рассеянии вне дифракционного конуса существует область, в которой сечение падает с ростом угла экспоненциально. Здесь непосредственный вклад неупругих процессов может оказаться малым. Однако даже в этом случае характеристики упругого рассеяния, в частности показатель экспоненты, однозначно определяются параметрами дифракционного пика. Таким образом, упругое рассеяние опять-таки, в конечном счете, задается характером периферических неупругих процессов, несмотря на возможную малость непосредственного вклада.

В области еще бóльших углов имеет место слабая угловая зависимость. При этом свойства упругого рассеяния вновь определяются непосредственным вкладом неупругих процессов непериферического типа. Таким образом, угловая зависимость упругого рассеяния может давать указания на существование неупругих процессов разных типов. Современные экспериментальные данные достаточно хорошо описываются как следствие процессов только двух типов: периферических и непериферических (возможно, статистических).

Для рассмотрения этих вопросов лучше всего воспользоваться условием унитарности, которое непосредственно связывает амплитуду

---

*) Экспериментальные распределения частиц в неупругих процессах дают сведения лишь о модулях матричных элементов этих процессов.

упругого рассеяния с матричными элементами неупругих процессов. Оно записывается в виде

$$\operatorname{Im} A(p, \theta) = \frac{1}{32\pi^2} \int d\theta_1 \int d\theta_2 \frac{\sin\theta_1 \sin\theta_2 A(p, \theta_1) A^*(p, \theta_2)}{\{[\cos\theta - \cos(\theta_1+\theta_2)][\cos(\theta_1-\theta_2)-\cos\theta]\}^{1/2}} + F(p, \theta); \quad (1)$$

здесь $A(p, \theta)$ — амплитуда упругого рассеяния, зависящая от импульса $p \equiv |\mathbf{p}|$ и угла рассеяния θ (в СЦИ); $F(p, \theta)$ — вклад в мнимую часть амплитуды ($\operatorname{Im} A(p, \theta)$) от всех неупругих процессов (так называемая функция перекрывания), который символически можно записать следующим образом:

$$F(p, \theta) = \sum_n \int M_{a\to n} M^*_{a'\to n} \delta\left(\hat{Q} - \sum_{i=1}^{n} q_i\right) d\Phi_n; \quad (2)$$

M — матричные элементы неупругих процессов $a \to n$ и $a' \to n$ (a и a' — начальное и конечное состояния рассматриваемого процесса упругого рассеяния, n — промежуточное n-частичное состояние); интегрирование ведется по всему фазовому объему Φ_n, допускаемому δ-функцией законов сохранения для процесса с полным начальным 4-импульсом $\hat{Q}$ и 4-импульсами n конечных частиц q_i. Первое слагаемое в (1) соответствует вкладу упругих процессов и в нем интегрирование идет по области углов

$$|\theta_1 - \theta_2| \leqslant \theta, \quad \theta \leqslant \theta_1 + \theta_2 \leqslant 2\pi - \theta. \quad (3)$$

При угле $\theta = 0°$ условие (1) приводит к обычной оптической теореме, где первый член сводится к полному сечению упругого рассеяния σ_{el}, а второй — к полному сечению неупругих процессов σ_{in}:

$$\operatorname{Im} A(p, 0) = 4p^2 (\sigma_{el} + \sigma_{in}) \equiv 4p^2 \sigma_{tot}, \quad (4)$$

т. е., как указывает эксперимент, при $\theta = 0°$ наибольший вклад в (1) при высоких энергиях (около 80%) дает второе слагаемое.

Функция перекрывания дает основной вклад в амплитуду упругого рассеяния и в области дифракционного конуса. Действительно, если учесть, что (как следует из эксперимента) амплитуда упругого рассеяния на малые углы почти чисто мнима, а дифференциальные сечения падают с ростом угла гауссовым образом, то с хорошей степенью точности в этой области углов можно записать

$$A(p, \theta) \approx 4ip^2 \sigma_{tot} e^{-ap^2\theta^2/2} \qquad (\theta \leqslant \theta_d). \quad (5)$$

Параметр a называется обратной шириной дифракционного конуса *), границу которого мы обозначили через θ_d. Непосредственной подстановкой (5) в (1) легко убедиться, что упругий вклад в этой области будет иметь вид $\exp(-ap^2\theta^2/4)$, т. е. он не может воспроизвести первоначальную форму (5), а приводит лишь к небольшому уширению углового распределения, задаваемого функцией $F(p, \theta)$. Нетрудно показать из (1), что при $F(p, \theta)$, приближенно описываемой формулой

$$F(p, \theta) \approx 4p^2 \sigma_{in} \exp(-\alpha p^2 \theta^2/2) \qquad (\theta \leqslant \theta_d), \quad (6)$$

это уширение эффективно приводит к тому, что параметр a в (5) оказывается связан с α следующим образом (при $\sigma_{el}/\sigma_{in} \ll 1$):

$$a \approx \alpha\,[1 - (\sigma_{el}/2\sigma_{tot})]. \quad (7)$$

Таким образом, неупругие процессы определяют вид дифракционного конуса в упругом рассеянии, поскольку функция перекрывания здесь

*) Он различается для разных процессов и может зависеть от энергии.

много больше вклада двухчастичных промежуточных состояний (первого слагаемого в правой части соотношения (1)).

Рассмотрим теперь, какова роль $F(p, \theta)$ при бóльших углах рассеяния ($\theta > \theta_d$). В этом случае основной вклад в интегральный член в (1) дают области, где один из углов θ_i мал (меньше θ_d), а другой — велик (порядка θ). Подставляя в (1) на малых углах амплитуду в виде (5), получим следующее интегральное уравнение при $\theta > \theta_d$:

$$\operatorname{Im} A(p, \theta) = \frac{p\sigma_{tot}}{4\pi (2\pi a)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \exp\left[-ap^2(\theta-\nu)^2/2\right] \operatorname{Im} A(p, \nu) + F(p, \theta), \quad (8)$$

решение которого имеет вид [34]

$$\operatorname{Im} A(p, \theta) = F(p, \theta) - \frac{i\sigma_{tot} p}{8\pi^2 a} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu F(p, \nu) \int_{-i\infty}^{i\infty} dr \frac{\exp[-rp(\theta-\nu)]}{\exp(-r^2/2a) - (\sigma_{tot}/4\pi a)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(p) \exp[-b_k(p) p\theta], \quad (9)$$

где C_k и b_k, вообще говоря, комплексны (но при этом вся сумма вещественна, см. (10)). Если в какой-то подобласти углов функция перекрывания не существенна, то $\operatorname{Im} A(p, \theta)$ должна описываться решением однородного уравнения (т. е. последним слагаемым в (9)):

$$\operatorname{Im} A(p, \theta) = C_0(p) \exp[-b_0(p) p\theta] + \sum_{k=1}^{\infty} 2 |C_k(p)| e^{-(\operatorname{Re} b_k) p\theta} \cos(|\operatorname{Im} b_k| p\theta - \varphi_k), \quad (10)$$

где $b_k(p)$ даются формулами

$$b_0 = [2a \ln(4\pi a/\sigma_{tot})]^{1/2}, \quad (11)$$

$$b_k \approx (2\pi a |k|)^{1/2} (1 + i \operatorname{sign} k) \quad (|k| \geqslant 1);$$

коэффициенты $C_k(p)$ — неопределенные функции энергии, а фазы φ_k могут быть выбраны равными $\pi/4$ (см. [34]) *). Для всех исследованных в настоящее время процессов упругого рассеяния $b_0 < \operatorname{Re} b_k$ ($k \geqslant 1$). Поэтому при больших значениях $p\theta$ играет роль только первое слагаемое в (10). По мере смещения в сторону меньших значений $p\theta$ могут становиться существенными другие слагаемые в (10), т. е. на падающую экспоненту будут накладываться осцилляции, амплитуда которых растет с уменьшением $p\theta$. При этом параметры b_0, b_k определяются через полное сечение и обратную ширину дифракционного пика, величина которых прежде всего связана с неупругими процессами, как указывалось выше.

Таким образом, даже в той области углов, где функция перекрывания может оказаться пренебрежимо малой, неупругие процессы определяют функциональную зависимость от угла упругой амплитуды вследствие того, что они играют главную роль в области дифракционного конуса **). Этим фактически доказывается утверждение о том, что неупругие процессы определяют упругое рассеяние на любой угол.

---

*) Учет реальной части амплитуды упругого рассеяния приводит к тому, что в формулах (11) величина σ_{tot} заменяется на выражение $\sigma_{tot}(1 + \bar{\delta}_d \bar{\delta}_l)$, где $\delta = \operatorname{Re} A / \operatorname{Im} A$, $\bar{\delta}_l$ означает среднее значение δ при больших углах, а $\bar{\delta}_d$ — среднее значение δ в области дифракционного конуса.

**) Следовательно, пренебрежение функцией $F(p, \theta)$ отнюдь не означает полного отрицания роли неупругих процессов.

Вопрос о том, существует ли реально область углов, где $F(p, \theta) \ll \ll \operatorname{Im} A(p, \theta)$, может быть решен лишь путем сравнения с экспериментом. Оказалось [35], что полученная формула (10) хорошо описывает очень точные данные о протон-протонном рассеянии при импульсах в ЛС от 8,1 до 21,1 *Гэв/с* [33] в интервале $1 \leqslant p\theta \leqslant 2{,}4$ *Гэв/с* (т. е. $1 \leqslant |t| \leqslant 6$ $(Гэв/с)^2$). При этом точно воспроизводятся показатель основной экспоненты, затухание амплитуды осцилляций с ростом $p\theta$, их период, знак и положение нулей. Это дает основания считать, что при рассмотренных энергиях в этой области значений $p\theta$ вкладом $F(p, \theta)$ в $\operatorname{Im} A(p, \theta)$ можно пренебречь.

Тем не менее возможно, что с ростом энергии эта область как-то изменится. Так, например, в модели с обменом реджионами [36, 37] или же в модели Чоу — Янга [38], претендующих на асимптотическое описание упругого рассеяния, функция перекрывания, как нетрудно показать, всегда того же порядка, что и мнимая часть амплитуды.

При бóльших углах поведение сечений на опыте отличается от предсказываемого формулой (10).

В области $p\theta \geqslant 2{,}4$ *Гэв/с* (т. е. $|t| \geqslant 6$ $(Гэв/с)^2$) дифференциальные сечения pp-рассеяния в указанном выше интервале энергий падают с ростом угла слабее, нежели экспоненциально (см. формулу (10)). Это можно понять, если считать, что $F(p, \theta)$ вновь становится существенной. Слабая зависимость дифференциальных сечений от угла позволяет предположить, что здесь слабо меняется и $\operatorname{Im} A(p, \theta)$. Тогда из (8), (9) нетрудно получить, что $\operatorname{Im} A(p, \theta)$ и $F(p, \theta)$ связаны соотношением

$$\operatorname{Im} A(p, \theta) = F(p, \theta)/(1 - \sigma_{tot}/4\pi a). \qquad (12)$$

Следовательно, при больших углах неупругие процессы опять непосредственно (через $F(p, \theta)$) определяют упругое рассеяние.

Подводя итог, можно сказать, что в описании упругого рассеяния первостепенной задачей является выяснение поведения функции перекрывания $F(p, \theta)$ на малых углах, так как в этом случае станет ясна структура дифракционного пика, т. е. основной доли процессов упругого рассеяния. В то же время при больших углах поведение этой функции может быть связано с такими принципиальными теоретическими вопросами, как рассмотрение микрочастиц в качестве статистических объектов.

Здесь мы лишь кратко заметим, что попытки описать дифракционный пик как следствие определенного класса неупругих процессов содержатся в модели некоррелированных струй [26, 27], моделях мультипериферического типа [22, 24], тогда как область рассеяния на очень большие углы связывается обычно с наличием неупругих процессов статистического типа [31].

III. РОЛЬ ФАЗ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим более детально, какими свойствами матричных элементов неупругих процессов может определяться вид функции перекрывания $F(p, \theta)$ при малых углах рассеяния. Мы выяснили, что условие унитарности вместе с экспериментальными данными об упругом рассеянии позволяет сделать некоторые выводы о поведении функции $F(p, \theta)$. При этом в области малых углов $F(p, \theta)$ хорошо аппроксимируется функцией, гауссовым образом спадающей с ростом угла (см. формулу (6)). Естественно возникает вопрос о том, чем определяется скорость спадания этой функции. Дело в том, что матричные элементы неупругих процессов, определяющие $F(p, \theta)$ согласно (2), суть комплексные функции, характеризуемые модулем и фазой. Впервые на роль фаз указали Фукуда и Исо [39]. Ниже будет показано, что параметр α в (6) может быть представлен в виде суммы двух слагаемых, одно из которых определяется модулем, а другое — фазой матричного элемента [49]. В то же время всевозможные распределения частиц в неупругих процессах определяются только модулем матричного элемента (так как в выражения для дифференциальных сечений входят лишь квадраты модулей матричных элементов *)). Поэтому рассмотрение дифракционного пика упругого рассеяния может дать некоторую дополнительную информацию о неупругих процессах.

Представим функцию перекрывания $F(p, \theta)$ в (2) в виде суммы вкладов от всех неупругих каналов:

$$F(p, \theta)=\sum_n F_n(p, \theta), \tag{13}$$

где

$$F_n(p, \theta)=\left\langle p;\, n \left| \exp(-iJ_y\theta)\, \delta^4\left(Q-\sum_j^n q_j\right) \right| p;\, n\right\rangle \tag{14}$$

и введено обозначение $M_{a\to n}\equiv\langle q_1, \ldots, q_n \mid p;\, n\rangle$.

Формула (14) является формальной записью F_n, физический смысл которой состоит в том, что берется произведение матричного элемента процесса перехода двух частиц с импульсами $\mathbf{p}$ и $-\mathbf{p}$ в n-частичное состояние на сопряженный матричный элемент перехода этих n-частиц в две с импульсами $\mathbf{p}'$ и $-\mathbf{p}'$, причем угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ равен θ. Последнее обстоятельство отражено в том, что $\langle p',\, n\mid=\langle p,\, n\mid\exp(-iJ_y\theta)$, где J_y — компонента оператора полного момента в направлении, перпендикулярном плоскости рассеяния. Поскольку рассматриваются бесспиновые частицы, J_y можно заменить на L_y-компоненту орбитального углового момента в том же направлении. Если теперь, руководствуясь общим видом функции перекрывания (6), считать, что и каждый n-частичный вклад в нее хорошо аппроксимируется гауссовой зависимостью, т. е. что

$$F_n(p, \theta)\approx 4p^2\sigma_n \exp(-\alpha_n p^2\theta^2/2), \tag{15}$$

или при очень малых углах

$$F_n(p, \theta)\approx 4p^2\sigma_n\,[1-(\alpha_n p^2\theta^2/2)], \tag{16}$$

то

$$\alpha_n=\frac{\left\langle p,\, n \left| L_y\delta^4\left(Q-\sum\limits_{j=1}^n q_j\right) L_y \right| p,\, n\right\rangle}{p^2\left\langle p,\, n \left| \delta^4\left(Q-\sum\limits_{j=1}^n q_j\right)\right| p,\, n\right\rangle}. \tag{17}$$

При этом

$$\alpha\approx\sum_n \sigma_n\alpha_n/\sigma_{in}. \tag{18}$$

Перепишем (17) в виде

$$\alpha_n=\frac{\int\ldots\int \mid \mathcal{L}_y R_n e^{i\varphi_n}\mid^2 \delta^4\left(Q-\sum\limits_{j=1}^n q_j\right)\prod\limits_{j=1}^n d^4q_j\delta_+(q_j^2+m_j^2)}{p^2\int\ldots\int \mid R_n e^{i\varphi_n}\mid^2 \delta^4\left(Q-\sum\limits_{j=1}^n q_j\right)\prod\limits_{j=1}^n d^4q_j\delta_+(q_j^2+m_j^2)}, \tag{19}$$

где введено конкретное представление оператора L_y в виде

$$\mathcal{L}_y=\sum_{j=1}^n \mathcal{L}_y^{(j)}=i\sum_{j=1}^n\left(q_{jx}\frac{\partial}{\partial q_{jz}}-q_{jz}\frac{\partial}{\partial q_{jx}}\right), \tag{20}$$

---

*) Действительно, как видно из (2), при $\theta\neq 0$ имеем $a\neq a'$ и фазы M важны, тогда как полное сечение неупругих процессов определяется величиной $F(p, 0)$ и фазы не играют роли, а различные распределения в неупругих процессах получаются, если в выражении для $F(p, 0)$ опустить интегрирование по соответствующим переменным.

δ_+ — положительно-частотные δ-функции; $M_{a\to n}=R_n e^{i\varphi_n}$, R_n вещественно, а m_j — масса j-й частицы. Нетрудно видеть, что

$$\alpha_n=\frac{\int\ldots\int\{|\mathscr{L}_y\ln R_n|^2+|\mathscr{L}_y\varphi_n|^2\}R_n^2\delta^4\left(Q-\sum_{j=1}^{n}q_j\right)\prod_{j=1}^{n}d^4q_j\delta_+(q_i^2+m_j^2)}{p^2\int\ldots\int R_n^2\delta^4\left(Q-\sum_{j=1}^{n}q_j\right)\prod_{j=1}^{n}d^4q_j\delta_+(q_j^2+m_j^2)},\qquad(21)$$

поскольку $\mathscr{L}_y$ — антиэрмитовый оператор.

Следовательно, величина α_n состоит из двух положительных аддитивных членов, один из которых определяется модулем матричного элемента, а второй — его фазой. В силу формулы (18) то же справедливо как для величины α, т. е.

$$\alpha=\alpha_R+\alpha_\varphi,\qquad(22)$$

где $\alpha_R\geqslant 0$, $\alpha_\varphi\geqslant 0$, так и для величины a (см. (7)):

$$a=a_R+a_\varphi\qquad(23)$$

($a_R\geqslant 0$, $a_\varphi\geqslant 0$). Несомненно, что в силу сделанных допущений эти равенства выполняются лишь приближенно в области малых углов. Если использовать формальный аппарат работы с волновыми пакетами [40, 41], то можно показать, что фаза φ_n связана со смещением центра волнового пакета в процессе взаимодействия, тогда как величина модуля R_n определяет деформацию волнового пакета.

Отметим, что фазы φ_n могут давать вклад в a только в том случае, если они зависят от импульсов вторичных частиц q_j. Если же фазы постоянны или зависят только от полной энергии сталкивающихся частиц, то $a_\varphi\equiv 0$ (см. [21, 28]). Таким образом, предположение о постоянной фазе или же о фазе, зависящей только от полной энергии соударения, немедленно приводит к наибольшей ширине дифракционного конуса $a^{-1}=a_R^{-1}$. Введение фазы, зависящей от импульсов вторичных частиц, может только сузить этот конус.

Проведенное выше общее рассмотрение не может ответить на вопрос о том, какое из слагаемых в (23) дает основной вклад в a, т. е. определяет ширину дифракционного конуса. Для этого надо сделать какие-то конкретные предположения о виде матричного элемента неупругих процессов. В настоящее время роль фаз изучена в модели некоррелированных струй [40, 42–45], в мультиреджионной модели [40, 43, 44], в гидродинамической модели [39]. Полученные количественные результаты зависят от предположений относительно поведения фаз и слегка отличаются в разных работах. Однако из всей совокупности работ можно сделать общий качественный вывод, что: 1) при отсутствии корреляций между вторичными частицами роль фаз преобладающая (a_φ примерно на порядок больше a_R), 2) с введением таких корреляций роль фаз уменьшается, но, например, в мультиреджионной модели она все еще остается весьма существенной ($a_\varphi>a_R$) при достигнутых сейчас на ускорителях энергиях ($\ln s\sim 3$—4; s — в *Гэв*^{2}), хотя асимптотически и может стать малой, 3) при очень сильных корреляциях (в гидродинамической модели) имеем $a_R\sim a_\varphi$.

Таким образом, роль фаз матричных элементов неупругих процессов в формировании дифракционного пика в упругом рассеянии велика. К сожалению, в настоящее время не видно каких-либо других путей для экспериментального изучения этих фаз и их зависимости от импульсов рождающихся частиц.

В упомянутых работах [38, 40, 42–45] рассматривались такие неупругие процессы, когда число образующихся частиц велико ($n \gg 1$). Естественно, возникает вопрос о том, не могут ли реакции с рождением малого числа частиц, когда одна или обе сталкивающиеся частицы превращаются в резонансы (так называемые неупругие бинарные или квазидвухчастичные реакции), определять вид дифракционного конуса. Экспериментальные данные о таких реакциях [10, 46–48] при энергиях от 10 до 30 *Гэв* указывают, что доля таких событий среди всех неупругих процессов мала ($\leqslant 10\%$). Согласно оптической теореме это означает, что при $\theta = 0°$ обусловленная ими часть функции перекрывания столь же мала ($\leqslant 10\%$). При углах, отличных от нуля, вклад бинарных процессов в дифференциальное сечение упругого рассеяния должен быть согласно (2) ограничен сверху [49] неравенством

$$d\sigma_{el}^{(b)}/dt \leqslant \sum_i (16\pi c_i^2)^{-1} [(d\sigma_B^{(i)}/dt_i)_{t_i=0}]^2 e^{c_i t/2}, \tag{24}$$

если учесть экспериментальный факт [10, 46–48] экспоненциального падения сечения бинарных реакций *) с ростом $|t|$: $d\sigma_b^{(i)}/dt_i = [(d\sigma_b^{(i)}/dt_i)_{t_{i=0}}] e^{c_i t}$. Подставив в (24) значения c_i и $(d\sigma_b^{(i)}/dt_i)_{t_{i=0}}$, взятые из эксперимента [10, 46–48], нетрудно показать, что во всем дифракционном конусе вклад теневого рассеяния, вызванного бинарными реакциями, несуществен. Поэтому можно утверждать, что упругое рассеяние на малые углы представляет собой результат дифракции, обусловленной наличием неупругих процессов с большой множественностью.

IV. УРАВНЕНИЕ БЕТЕ — СОЛПИТЕРА

Перейдем теперь непосредственно к описанию неупругих процессов с большой множественностью. Как было показано выше, они не только играют ведущую роль в полном сечении, но и определяют в основном вид дифракционного конуса в упругом рассеянии. Поэтому без детального понимания характера таких процессов любое описание упругого рассеяния можно рассматривать всего лишь как формальное, феноменологическое приближение.

В то же время, как указывалось выше, для вычисления дифференциальных сечений неупругих процессов необходимо знать лишь модули матричных элементов этих процессов, тогда как вызванное ими теневое упругое рассеяние существенно зависит от их фаз, о которых у нас имеется еще очень мало сведений. Поэтому проблему взаимосвязи упругих и неупругих процессов в данный момент реальнее решать, задаваясь лишь вопросом о том, каким особенностям парциальной амплитуды упругого рассеяния в плоскости углового момента в перекрестном канале соответствуют те или иным неупругие процессы в прямом канале. Именно такая ограниченная постановка задачи и будет основной во всем последующем изложении.

Несомненно, теоретическое рассмотрение существенно неупругих столкновений представляет собой весьма сложную проблему. В этой области физики в данный момент наряду с некоторыми общими соотношениями бытует множество различных моделей.

Излагаемая ниже теория, предложенная в работе [23], представляет собой попытку описания и классификации именно таких процессов и выяснения их взаимосвязи с упругим рассеянием (в указанном выше ограниченном смысле). В этой теории уже в рамках исходного уравнения производится естественное разделение всех неупругих процессов на периферические и непериферические **). В результате характерной чертой

---

*) Индекс b означает «бинарный», индекс i указывает тип бинарной реакции; c_i не зависит от t_i.

**) Эти термины мы поясним ниже.

периферических соударений в области высоких энергий оказывается образование пионных сгустков — файрболов.

Основным математическим аппаратом теории является уравнение Бете — Солпитера. Именно использование этого уравнения позволяет непосредственно связать между собой упругие и неупругие процессы и в то же время разделить неупругие процессы на периферические и непериферические. Необходимо сразу же подчеркнуть, что, в отличие от часто понимаемого под этим термином лестничного приближения, мы будем использовать при рассмотрении общих вопросов точное уравнение Бете — Солпитера. Разумеется, оно является уравнением в обычном смысле этого слова, только когда заданы его ядро и неоднородный член. Однако некоторые общие свойства амплитуды рассеяния, не вытекающие из уравнения Бете — Солпитера (прежде всего, аналитичность и унитарность),

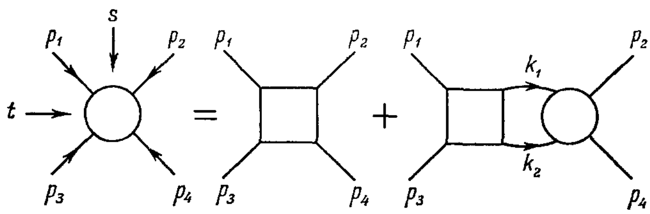


Рис. 1. Диаграммное изображение уравнения Бете — Солпитера.

накладывают на входящие в него величины серьезные дополнительные ограничения. В результате, несмотря на весьма общий характер этого уравнения, из него удается извлечь определенную информацию о свойствах взаимодействия при высоких энергиях *).

При рассмотрении всех общих следствий, вытекающих из совместного использования уравнения Бете — Солпитера, аналитичности, унитарности, будем для простоты считать вначале, что во взаимодействии принимают участие только одинаковые нейтральные псевдоскалярные частицы массы μ (например, π^0-мезоны **)). Рассмотрим процесс упругого рассеяния таких частиц с 4-импульсами p_1, p_2, p_3, p_4. В уравнение Бете — — Солпитера входит амплитуда рассеяния не только на массовой поверхности (при $p_i^2 = -\mu^2$), но и вне нее по двум внешним импульсам. Обозначим ее через $A(s, t, p_1^2, p_3^2)$, где $s = -(p_1 + p_2)^2$, $t = -(p_1 + p_3)^2$. Уравнение Бете — Солпитера записывается в следующем виде:

$$A(s, t, p_1^2, p_3^2) = \bar{A}(s, t, p_1^2, p_3^2) - \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k_1 \bar{A}(s_1, t, p_1^2, p_3^2, k_1^2, k_2^2) \times \\ \times A(s_2, t, k_1^2, k_2^2) D(k_1^2) D(k_2^2); \quad (25)$$

здесь $s_1 = -(p_1 - k_1)^2$, $s_2 = -(p_2 + k_1)^2$, $k_2 = p_1 + p_3 - k_1$. Через $\bar{A}$ обозначена неприводимая (в t-канале) часть амплитуды ***), через $D(k_i^2)$ — функции распространения. Диаграммный вид уравнения (25) представлен на рис. 1.

*) Говоря более точно, оно позволяет связать некоторые свойства взаимодействия при высоких энергиях с характеристиками процессов при сравнительно низких энергиях. Ситуация в известной степени аналогична той, к которой приводят правила сумм (см. гл. VII, п. 2).

**) В гл. VIII мы обобщим это рассмотрение на реальные процессы NN- и πN-соударений.

***) То есть часть, не содержащая в этом канале двухчастичных промежуточных состояний.

Разложим как саму амплитуду A, так и ее неприводимую часть $\bar{A}$ по парциальным волнам в t-канале *):

$$A(s_2, t, k_1^2, k_2^2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(t, k_1^2, k_2^2) P_l(z_2), \tag{26}$$

$$\bar{A}(s_1, t, p_1^2, p_3^2, k_1^2, k_2^2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l-1) \bar{f}_l(t, p_1^2, p_3^2, k_1^2, k_2^2) P_l(z_1), \tag{27}$$

где z_1 и z_2 — косинусы углов рассеяния в t-канале частиц с квадратами масс $(\mu^2, \mu^2, -k_1^2, -k_2^2)$ и $(-p_1^2, -p_3^2, -k_1^2, -k_2^2)$ соответственно, т. е.

$$z_1 = \frac{2ts_1 + t(p_1^2 + p_3^2 + k_1^2 + k_2^2) + (p_1^2 - p_3^2)(k_1^2 - k_2^2) + t^2}{[2t(k_1^2 + k_2^2) + (k_1^2 - k_2^2)^2 + t^2]^{1/2} [2t(p_1^2 + p_3^2) + (p_1^2 - p_3^2)^2 + t^2]^{1/2}}, \tag{28}$$

а z_2 получается из z_1, если заменить s_1 на s_2 и положить $p_1^2 = p_3^2 = -\mu^2$. Подставляя формулы (26), (27) в (25) и используя свойство ортогональности полиномов Лежандра, получаем уравнение Бете — Солпитера для парциальных волн

$$f_l(t, p_1^2, p_3^2) = \bar{f}_l(t, p_1^2, p_3^2) - \\ - \frac{2i}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} q^2\, dq \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \bar{f}_l(t, p_1^2, p_3^2, k_1^2, k_2^2) f_l(t, k_1^2, k_2^2) D(k_1^2) D(k_2^2), \tag{29}$$

где

$$q = |\mathbf{k}_1|, \quad q_0 = (p_{1_0} + p_{3_0})/2 - k_{1_0} = (k_2^2 - k_1^2)/2t^{1/2}. \tag{30}$$

Уравнения (25) и (29) справедливы как при $t > 4\mu^2$, так и при $t < 4\mu^2$. Существенно, однако, что при $t < 4\mu^2$ все особенности подынтегральных функций в (25), (29) расположены во втором и четвертом квадрантах плоскости q_0. Поэтому, совершая виковский поворот [50] и используя инвариантные переменные

$$\begin{aligned} r &= -k_1^2 - k_2^2 - 2\mu^2, & r_0 &= -p_1^2 - p_3^2 - 2\mu^2, \\ v &= k_2^2 - k_1^2, & v_0 &= p_3^2 - p_1^2, \end{aligned} \tag{31}$$

перепишем уравнение (30) при $t < 4\mu^2$ в виде

$$f_l(t, r_0, v_0) = \bar{f}_l(t, r_0, v_0) + \\ + \frac{4}{(4\pi)^3 |t|} \int dr\, dv \frac{[-t(t-4\mu^2) + 2tr - v^2]^{1/2} \bar{f}_l(t, r_0, v_0, r, v) f_l(t, r, v)}{(r - i\varepsilon)^2 - v^2}, \tag{32}$$

где область интегрирования определяется условием

$$2tr - t(t - 4\mu^2) - v^2 \quad 0. \tag{33}$$

При $t \to 0$ как область интегрирования по v, так и само v стремятся к нулю. Для того чтобы перейти в уравнении (32) к пределу при $t \to 0$, нужно сначала выделить в явном виде из функций f_l и $\bar{f}_l$ кинематические множители, которые на этом пределе обращаются в нуль и бесконечность. Поскольку при $q \to 0$ эти парциальные амплитуды пропорциональны q^l, удобно ввести функции φ_l и $\bar{\varphi}_l$, определяемые соотношениями

$$\varphi_l = |t|^{l/2} [2tr - t(t - 4\mu^2) - v^2]^{-l/2} (t - 4\mu^2)^{-l/2} f_l, \tag{34а}$$

$$\bar{\varphi}_l = |t|^l [2tr - t(t - 4\mu^2) - v^2]^{-l/2} [2tr_0 - t(t - 4\mu^2) - v_0^2]^{-l/2} \bar{f}_l. \tag{34б}$$

---

*) Обе функции разложимы внутри эллипса Мартэна — Лемана.

Эти функции уже не содержат упомянутых кинематических особенностей, поэтому при $t \to 0$ их (точно так же как и функции распространения $D(k^2)$) можно вынести за знак интеграла по v. Интегрируя оставшееся под интегралом выражение по v, получаем уравнение Бете — Солпитера для парциальной амплитуды в точке $t = 0$

$$\varphi_l(p^2) = \bar{\varphi}_l(p^2) + \frac{2^{2l}\pi^{1/2}\,\Gamma(l+3/2)}{(2\pi)^3\,\Gamma(l+2)} \int\limits_0^\infty \bar{\varphi}_l(p^2, k^2)\,\varphi_l(k^2)\,D^2(k^2)\,(k^2)^{l+1}\,dk^2, \qquad (35)$$

где $p^2 = p_1^2 = p_3^2$ и $k^2 = k_1^2 = k_2^2$.

Важная особенность уравнения (35) состоит в том, что в области интегрирования 4-вектор k является пространственноподобным, $k^2 > 0$. Необходимо подчеркнуть, что уравнение Бете — Солпитера обладает этим свойством только в области $t \leqslant 0$. Из (33) можно усмотреть, что при любых значениях $t > 0$ область интегрирования включает также и сколь угодно большие времениподобные 4-импульсы $k_{1,2}^2$. При пространственно-подобных значениях импульсов формула Ватсона — Зоммерфельда (как и дисперсионные соотношения по s) должна быть заведомо применима, если ее можно использовать на массовой поверхности $k^2 = -\mu^2$, так как в этой области мнимая часть амплитуды не имеет особых точек [51a]. Поэтому можно представить мнимые части амплитуды и ее неприводимого блока при $t = 0$ $A_1(s_2) = (1/2i)[A(s_2 + i\varepsilon) - A(s_2 - i\varepsilon)]$ и $\bar{A}_1(s_1) = (1/2i)[\bar{A}(s_1 + i\varepsilon) - \bar{A}(s_1 - i\varepsilon)]$ в следующем виде:

$$A_1(z_2) = -\frac{i}{4} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} dl\,(2l+1)\,f_l P_l(z_2), \qquad (36а)$$

$$\bar{A}_1(z_1) = -\frac{i}{4} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} dl\,(2l+1)\,\bar{f}_l P_l(z_1), \qquad (36б)$$

где $b = \mathrm{const}$. Обратные им соотношения будут иметь вид

$$f_l = \frac{2}{\pi} \int\limits_{z_{min}}^{\infty} A_1(z_2)\,Q_l(z_2)\,dz_2, \qquad (37а)$$

$$\bar{f}_l = \frac{2}{\pi} \int\limits_{z_{\min}}^{\infty} \bar{A}_1(z_1)\,Q_l(z_1)\,dz_1. \qquad (37б)$$

Функции φ_l и $\bar{\varphi}_l$ выразятся аналогично*):

$$\varphi_l(p^2, k^2) = (4pk)^{-l}\,\frac{2}{\pi} \int\limits_{z_{\min}}^{\infty} A_1(z_2)\,Q_l(z_2)\,dz_2 = \frac{(4kp)^{1-l}}{\pi} \int\limits_{z_{\min}}^{\infty} (z_2^2 - 1)^{1/2}\,\sigma(s_2, p^2, k^2)\,Q_l(z_2)\,dz_2, \qquad (38а)$$

$$\bar{\varphi}_l(p^2, k^2) = (4pk)^{-l}\,\frac{2}{\pi} \int\limits_{z_{\min}}^{\infty} \bar{A}_1(z_1)\,Q_l(z_1)\,dz_1 = \frac{(4kp)^{1-l}}{\pi} \int\limits_{z_{\min}}^{\infty} (z_1^2 - 1)^{1/2}\,\bar{\sigma}(s_1, p^2, k^2)\,Q_l(z_1)\,dz_1, \qquad (38б)$$

*) Обратные соотношения аналогичны (36а) и (36б).

где

$$z_{\min} = (4\mu^2 + p^2 + k^2)/2pk, \quad p \equiv \sqrt{p^2}; \quad k \equiv \sqrt{k^2} = (\mathbf{k}^2 - k_0^2)^{1/2}.$$

Подставив соотношения (38а) — (38б) (а также обратные им, выражающие A_1 и $\bar{A}_1$ в виде интегралов от φ и $\bar{\varphi}$) в уравнение (35) *), получим следующее уравнение для мнимой части амплитуды при $t = 0$:

$$A_1(s, p^2) = \bar{A}_1(s, p^2) + \frac{1}{8\pi^3 [(s + p^2 - \mu^2)^2 + 4p^2\mu^2]^{1/2}} \int \bar{A}_1(s_1, p^2, k^2) \times \\ \times A_1(s_2, k^2) D^2(k^2)\, dk^2\, ds_1\, ds_2. \qquad (39)$$

Область интегрирования в (39) определяется условиями

$$-k^2[-su + (p^2 + \mu^2)^2] + (s_1 + p^2 + k^2)^2 \mu^2 - p^2(s_2 + k^2 - \mu^2)^2 + \\ + (s_1 + p^2 + k^2)(s_2 + k^2 - \mu^2)(s + p^2 - \mu^2) \leqslant 0, \qquad (40) \\ s_{1,2} \geqslant 4\mu^2, \qquad s^{1/2} \geqslant s_1^{1/2} + s_2^{1/2}.$$

Таким образом, мы видим, что, если амплитуда представима в виде интеграла Ватсона — Зоммерфельда, при $t = 0$ оказывается возможным получить из уравнения Бете — Солпитера для полной амплитуды аналогичное уравнение (39) для мнимой части амплитуды.

Используя оптическую теорему, согласно которой

$$A_1(s, p^2) = \sigma(s, p^2)[(s + p^2 - \mu^2)^2 + 4\mu^2 p^2]^{1/2}, \qquad (41а)$$

где σ — полное сечение взаимодействия, и определив величину $\bar{\sigma}$ соотношением

$$\bar{A}_1(s, p^2, k^2) = \bar{\sigma}(s, p^2, k^2)[(s + p^2 + k^2)^2 - 4p^2k^2]^{1/2}, \qquad (41б)$$

получим из (39) уравнение для сечения $\sigma(s, p^2)$

$$\sigma(s, p^2) = \bar{\sigma}(s, p^2) + \frac{1}{8\pi^3} \int dk^2\, ds_1\, ds_2 D^2(k^2)\, \bar{\sigma}(s_1, p^2, k^2)\, \sigma(s_2, k^2) \times \\ \times H(s, s_1, s_2, p^2, k^2), \qquad (42)$$

где

$$H = \frac{[(s_1 + p^2 + k^2)^2 - 4p^2k^2]^{1/2}\, [(s_2 + k^2 - \mu^2)^2 + 4\mu^2k^2]^{1/2}}{(s + p^2 - \mu^2)^2 + 4\mu^2p^2}. \qquad (43)$$

Для конкретных каналов с рождением n частиц уравнение (42) запишется в виде системы уравнений **)

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_2(s, p^2) = \bar{\sigma}_2(s, p^2), \\ &\sigma_n(s, p^2) = \bar{\sigma}_n(s, p^2) + \frac{1}{8\pi^3} \sum_{m=1}^{n-1} \int dk^2\, ds_1\, ds_2 D^2(k^2) \times \\ &\qquad\qquad \times \bar{\sigma}_m(s_1, p^2, k^2)\, \sigma_{n-m}(s_2, k^2)\, H. \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Таким образом, мы установили взаимосвязь неупругих процессов, описываемых уравнениями (42), (44) (диаграммный смысл этих уравнений будет пояснен ниже), с обусловленным ими упругим рассеянием, парциальная амплитуда которого в перекрестном канале описывается уравнениями (29), (35).

---

*) Аналогичные вычисления подробно изложены в работе [57б].

**) $\bar{\sigma}_1$ и σ_1 обозначают форм-факторы.

Отметим также, что из рассмотренных уравнений в соответствующих областях кинематических переменных s и t легко получить манделстамовскую спектральную функцию ($s > 4\mu^2$, $4\mu^2 < t < 16\mu^2$), нерелятивистское уравнение Бете — Солпитера ($s \to 4\mu^2$) при $\bar{A}$, интерпретируемом как потенциал, и уравнение квазипотенциального приближения [52] (см. [23]).

V. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ УРАВНЕНИЙ И ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Проанализируем теперь физический смысл различных членов, входящих в уравнение (42), а также его соответствие уравнению мультипериферической модели.

Интегральный член в (42) представлят собой полное сечение σ^P периферического взаимодействия. Под этим термином мы понимаем все процессы, обусловленные обменом одним мезоном. Действительно, переход от уравнения (25) для упругой амплитуды к уравнению (39) для ее мнимой части при $t = 0$, а затем и к уравнению (42) для полных сечений соответствует на диаграммном языке переходу от диаграмм рис. 1 к диаграммам рис. 2. Отсюда видно, что выражение для сечения периферического взаимодействия, использованное в первых работах по одномезонному приближению [18, 19], строго говоря, некорректно. Оно действительно имело вид (42), но при этом $\bar{\sigma}$ под знаком интеграла приравнивалась полному сечению σ.

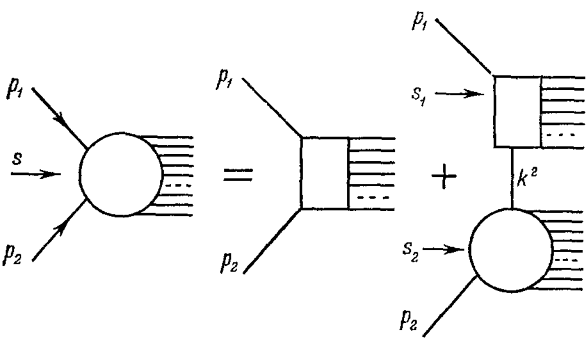


Рис. 2. Диаграмное изображение уравнения для полных сечений.

Каков же смысл величины $\bar{\sigma}$? Уравнение (42) похоже на уравнение, которое было положено Амати и др. [22] в основу мультипериферической модели. В этой модели величина $\bar{\sigma}$ полагалась просто равной сечению взаимодействия в низкоэнергетической области (ниже порога неупругих процессов), что приводило к асимптотическому падению полного сечения с ростом энергии. Использование уравнения Бете — Солпитера позволяет точнее интерпретировать вличину $\bar{\sigma}$. Согласно данному выше определению функции $\bar{A}$ можно утверждать, что $\bar{\sigma}$ является суммой сечений всех неодномезонных процессов и вклада от различных интерференционных членов. В развиваемой теории, как и в ряде родственных ей схем (например, мультипериферической и мультиреджионной моделях), весьма существенна положительность неприводимой части. Именно это обстоятельство позволяет связать неприводимый блок с сечением непериферических (неодномезонных) неупругих взаимодействий и интерпретировать его как образование файрбола.

Положительность неприводимого блока связана с величиной и знаком интерференционных членов. Дело в том, что, кроме диаграмм, получающихся квадрированием диаграмм, изображенных на рис. 3, *а* и рис. 4, *а* и дающих заведомо положительный вклад, в тот же неприводимый блок вносят вклады диаграммы типа рис. 3, *б* и рис. 4, *б*, описывающие интерференцию амплитуд неупругих процессов. Сумма вкладов может стать отрицательной, только если интерференционные члены имеют отрицательный знак и преобладают над основным вкладом.

Если даже вклад интерференционных членов приближается по порядку величины к вкладу основного процесса (например, составляет ($^1/_2$—$^1/_3$) его), но ядро остается положительным, то все утверждения (как математического, так и инерпретационного характера) сохраняют силу.

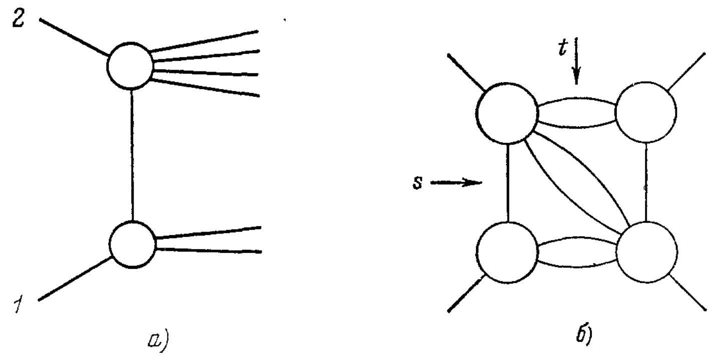


Рис. 3. *а*) Одномезонный процесс; *б*) его интерференционная диаграмма в упругом рассеянии.

Вопрос о величине и знаке интерференционных членов не может быть решен в рамках исходной схемы (как и в рамках родственных ей моделей). Поэтому при обсуждении его можно лишь опираться на наглядные физические соображения, которые сейчас считаются менее строгими. Однако

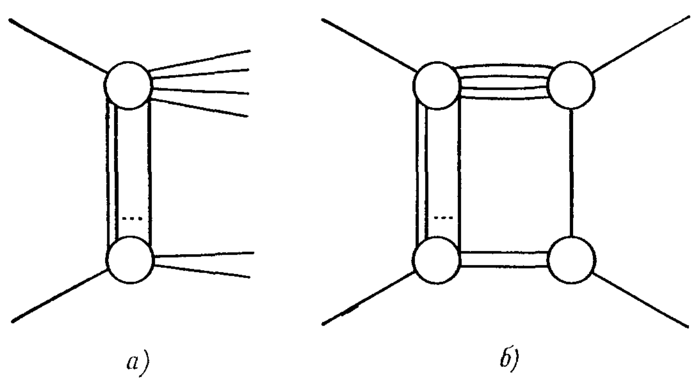


Рис. 4. *а*) Многомезонный процесс; *б*) его интерференция с одномезонным процессом.

и на этом уровне он освещен в литературе недостаточно. В большинстве работ молчаливо предполагается как само собой разумеющееся, что интерференционные члены несущественны. Последнее нам кажется справедливым, но тем не менее вопрос заслуживает обсуждения.

Следует различать два типа интерференционных членов. Первый — это интерференция между амплитудами двух одномезонных процессов, которую часто называют обменной (exchange). Она появляется в случае, если какие-либо из частиц, образовавшихся в первом процессе в одном узле диаграммы, вылетают в СЦИ под теми же углами и имеют те же импульсы, что и частицы, родившиеся в другом узле второго процесса (см. рис. 3, *б*). Вклад таких процессов может быть оценен на основе кинематических соображений.

Если относительная скорость блоков очень велика и лоренц-фактор $\bar{\gamma} \gg 1$, то такая интерференция мала. Это утверждение справедливо, поскольку в СЦИ блоков образующиеся в различных блоках частицы сильно коллимированы, летят в разные стороны и угловые распределения их не перекрываются.

Напротив, если относительная скорость блоков мала: $\bar{v} \ll 1$ и мал лоренц-фактор: $\bar{\gamma} - 1 \ll 1$, то интерференционные члены могут быть того же порядка, что и основной вклад.

В нашем случае реализуется промежуточная ситуация. Действительно, оценка $\bar{\gamma}$ по порядку величины из простых кинематических соображений [51б] дает

$$\gamma_0 = [1 + (s_0/4k^2)]^{1/2},$$

в то время как

$$\bar{\gamma} = 2\gamma_0^2 - 1$$

(здесь γ_0 — лоренц-фактор блоков в их СЦИ, s_0 — квадрат «массы» блока, k^2 — квадрат передаваемого между блоками 4-импульса).

Отсюда следует, что $\bar{\gamma}$ велико лишь постольку, поскольку $s_0 > k^2$. Конкретно, согласно гл. VII, п. 2, $s_0 \approx 5k^2$ и $\bar{\gamma} \approx 3{,}5$. Относительные скорости блоков порядка скорости света, но не экстремально релятивистские. При этом импульсные и угловые распределения вторичных частиц, образованных в различных блоках, перекрываются лишь частично. Ясно, что полного погашения основного вклада интерференционными членами при этом не может быть. Таким образом, интерференция первого типа в нашем случае не может привести к отрицательной неприводимой части.

Второй тип интерференционных членов связан с диаграммами вида рис. 4, *б*. Это — интерференция амплитуд неупругих процессов периферического (правая часть) и многомезонного (левая часть) взаимодействий.

Ясно, что интерференционные члены этого типа могут быть велики, только если квантовые числа, множественность, а также угловые и импульсные распределения вторичных частиц в периферическом и в многомезонном процессах совпадают.

Однако, как было показано [53], даже в случае совпадения характеристик *интерференция возможна, если только в многомезонном процессе* происходит обмен нечетным числом пионов. Хотя мы не можем дать строгого обоснования малости подобной интерференции, нам не известно никаких доказательств того, что реализуется обратная ситуация *).

Суммируя сказанное, можно сделать вывод: положительность неприводимой части представляется вполне естественным (хотя и не доказанным строго) условием.

Мы остановились на вопросе об отсутствии интерференции одномезонных и многомезонных неупругих диаграмм столь подробно только потому, что он является основным для всего дальнейшего развития предлагаемой схемы. Отсутствие полностью деструктивной интерференции является главным предположением последующей теории. Однако приведенные выше аргументы свидетельствуют в пользу того, что такое предположение оправдано.

---

*) Можно было бы думать, что возможна сильная интерференция между амплитудой одномезонного неупругого процесса и амлитудой дифракционной генерации. Однако здесь интерференция запрещена, как показано в [53], в силу сохранения G-четности.

Если принять это предположение, то одномезонные (или периферические) и неодномезонные (или непериферические) процессы оказываются практически независимыми друг от друга. Величина $\bar{\sigma}$ в (42) представляет собой суммарное сечение всех неодномезонных процессов и потому положительна, т. е. $\bar{\sigma} \geqslant 0$. Ниже мы будем называть $\bar{\sigma}$ также сечением непериферического взаимодействия. Таким образом, мы считаем, что полное сечение слагается из двух положительных вкладов — сечений периферического и непериферического взаимодействий. Подчеркнем еще раз, что, поскольку строгого доказательства этого утверждения мы не имеем, оно представляет собой один из дополнительных постулатов или гипотез, принимаемых нами за основу.

VI. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим ряд общих следствий полученных уравнений в рамках сделанного предположения.

1. О полюсе Померанчука

Прежде всего из (38б) следует, что $\bar{\varphi}_l(p^2,\ k^2) \geqslant 0$ при $l > l_0$, где l_0 — положение крайне правой особенности функции $\bar{\varphi}_l$. Поскольку для функций φ_l аналогичное утверждение справедливо всегда (так как согласно (38а) ее знак в той части плоскости, которая расположена правее всех ее особенностей, совпадает со знаком полного сечения σ), уравнение (12) не может иметь решения, если независимо от p^2, k^2 положение крайне правых особенностей функций φ_l и $\bar{\varphi}_l$ совпадает и в особой точке обе функции обращаются в бесконечность. Поэтому в особой точке $l = \alpha$ функции φ_l функция $\bar{\varphi}_\alpha$ всегда ограничена, если $\varphi_\alpha \to \infty$, так что при $l = \alpha$ неоднородное уравнение (35) превращается в однородное:

$$R_\alpha(p^2) = \frac{2^{2\alpha}\pi^{1/2}\Gamma(\alpha+3/2)}{(2\pi)^3\,\Gamma(\alpha+2)} \int\limits_0^\infty \frac{(k^2)^{\alpha+1}}{(k^2+\mu^2)^2}\,\bar{\varphi}_\alpha(p^2,\ k^2)\,R_\alpha(k^2)\,dk^2, \tag{45}$$

где $R_\alpha(p^2)$ — коэффициент при сингулярном множителе в функции $\varphi_l(p^2)$ при $l = \alpha$ (см. приложение).

Далее, если воспользоваться соотношением унитарности в s-канале, то, как мы покажем ниже, из сказанного непосредственно вытекает, что вакуумный полюс Померанчука $\alpha_P(t)$ с $\alpha_P(0) = 1$ несовместим с уравнением (35) [54]. Нетрудно убедиться, что это противоречие устраняется, только если парциальная амплитуда в t-канале $f_l(t)$ (или $\varphi_l(t)$) обладает при $t = 0$ в точке $l = 1$ сингулярностью более слабой [50], чем $\varphi_l \sim \sim 1/(l-1)\ln^{1/2}(l-1)$, или же если эта сингулярность расположена левее точки $l = 1$, т. е. если $\alpha_P(0) < 1$ [54, 55]. Это, разумеется, означает, что при асимптотически высоких энергиях полное сечение должно падать:

$$\sigma < \mathrm{const}/[\ln\ln(s/\mu^2)]^{1/2}. \tag{46}$$

Для доказательства сначала предположим противное, т. е. что существует вакуумный полюс с $\alpha_P(0) = 1$. Тогда, поскольку весь двухчастичный вклад в соотношении унитарности в s-канале содержится в $\bar{A}$, при $s \to \infty$ величина $\bar{\sigma}$ должна падать не слабее чем логарифимически: $\bar{\sigma}(s,\ p_1^2,\ p_3^2) \geqslant \sigma_{el} \geqslant \mathrm{const}/\ln s$, где σ_{el} — сечение упругого рассеяния *).

*) Действительно, при отсутствии полностью деструктивной интерференции суммарный вклад в $\bar{\sigma}$ всех остальных промежуточных состояний не может быть отрицательным.

Легко видеть, что в этом случае $\bar{\varphi}_1 \to \infty$ и, следовательно, уравнение (35) не имеет решения. В этом можно убедиться и непосредственно, подставляя в интегральный член уравнения (42) $\bar{\sigma} \gg \mathrm{const}/\ln s$ и $\sigma = \sigma(p^2) = \mathrm{const}$, так как, выполнив интегрирование, получим, что он растет с энергией не медленнее чем $\ln\ln s$, в противоречии с начальным предположением *).

Таким образом, существование полюса Померанчука с $\alpha_P(0) = 1$ противоречит полученным выше уравнениям (42) и (35). Для того чтобы они имели решение, необходимо, чтобы полное сечение асимптотически убывало, хотя это убывание и может быть чрезвычайно слабым.

Таким образом, на массовой поверхности полюс в точке $l = 1$ при $t = 0$ может существовать только в том случае, если его траектория зависит от внешних масс или же если при выходе за массовую оболочку он перестает быть полюсом, т. е. меняется характер сингулярности. Полюса редженвского типа, зависящего только от t, в этой точке, строго говоря, быть не может.

Хотя этот вывод и получен как общее следствие рассматриваемых уравнений, однако видно, что практически отличие характера максимально допустимой сингулярности от полюса может проявиться только лишь при ультравысоких энергиях, когда $\ln\ln(s/\mu^2) \gg 1$. Поэтому если истинное поведение полного сечения близко к предельно допустимому, то как при феноменологической обработке экспериментальных данных, так и при теоретическом рассмотрении неупругих процессов при всех разумно высоких энергиях (вплоть до энергий, при которых отличие приведет к существенному падению сечения) это отличие не имеет смысла учитывать. В дальнейшем мы будем использовать полюс Померанчука с $\alpha_P(0) \approx 1$, помня, что при ультравысоких энергиях это не оправдано.

2. Характер ведущей особенности

Покажем теперь, что ведущая особенность парциальной амплитуды φ_l должна быть движущейся. Для этого определим наклон γ соответствующей траектории $\alpha_P(t)$ этой особенности [56]. Согласно методу, подробно изложенному в приложении, нетрудно получить

$$\gamma \equiv \left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)_{t=0} = \frac{9}{(4\pi)^4 R_1(-\mu^2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{\varphi}_1'(p^2, k^2) R_1(k^2) R_1(p^2) \times$$
$$\times [p^2 k^2 D(p^2) D(k^2)]^2 \, dp^2 \, dk^2, \tag{47}$$

где

$$R_l(p^2) = \varphi_l(p^2)(l - \alpha(0)), \qquad \bar{\varphi}_1' = (d\bar{\varphi}_1/dt)_{t=0}.$$

$R_1(p^2)$ определяется как правильно нормированное (см. ниже) решение однородного уравнения (см. (II,4)):

$$R_1(p^2) = \frac{3}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \bar{\varphi}_1(p^2, k^2) [k^2 D(k^2)]^2 R_1(k^2) \, dk^2. \tag{45a}$$

В подынтегральном выражении в (47) все функции положительно определенные: $R_1 > 0$, так как согласно (38а) знак R_1 совпадает со знаком полного сечения; $\bar{\varphi}_1'(0, p^2, k^2) > 0$, поскольку согласно (38б) знак $\bar{\varphi}_1'(0)$

*) Физический смысл этого противоречия фактически тот же самый, что и в работе [21], где было показано, что при не зависящих от энергии величинах $\bar{\sigma}$ и σ интегральный член в (42) логарифмически растет с энергией.

совпадает со знаком $\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}$, а последняя величина положительна *). Следовательно, наклон ведущей траектории положителен, т. е. неупругие процессы, описываемые интегральным членом в (42), приводят к движущейся сингулярности в парциальной упругой амплитуде, а дифракционный пик в теневом упругом рассеянии, обусловленном этими процессами, сужается с ростом энергии. Физический смысл этого результата был пояснен в [58], где было показано, что рост радиуса взаимодействия (сужение пика) тесно связан с ростом числа блоков в итерационном решении уравнения (42), а коэффициент γ равен по порядку величины обратному квадрату перпендикулярной компоненты импульса, передаваемого от одного блока к другому. Мы оценим его численное значение ниже.

3. Физический смысл ведущей движущейся особенности

Часто ставится вопрос: каковы те неупругие процессы, которые приводят к появлению обмена ведущей движущейся особенностью (вакуумным реджионом) **) в упругом рассеянии? В рамках предлагаемого подхода ответ на этот вопрос ясен. Как показано выше, учет одномезонных диаграмм в неупругих процессах на основе уравнения Бете — Солпитера приводит к появлению движущегося полюса в l-плоскости у парциальной волны в перекрестном канале для соответствующего упругого дифракционного процесса. При этом, согласно предположению об отсутствии полностью деструктивной интерференции и вытекающей из него знакоопределенности (положительности) функции $\bar{\varphi}_1$ $(0, p^2, k^2)$, такого полюса нет в неприводимой части $\bar{\varphi}_l$ (t, p^2, k^2). Отметим, что именно рассмотренные одномезонные диаграммы при изучении упругой амплитуды в перекрестном канале ниже порога рождения новых частиц приводят к унитарности амплитуды рассеяния и появлению у амплитуды точки ветвления при $t = 4\mu^2$. В то же время мы знаем, что неприводимая часть $\bar{\varphi}_l$ (t, p^2, k^2) регулярна по t при $t = 4\mu^2$, а для полюса Померанчука эта точка обязательно является точкой ветвления.

Поэтому нам представляется естественной такая картина «физического строения» вакуумного реджиона, когда он целиком связан с одномезонными неупругими процессами ***). Вместе с тем дифракция на непериферических неупругих процессах может приводить к существенному вкладу в упругое рассеяние, не описываемому обменом вакуумным реджионом.

Особо подчеркнем, что взаимосвязь упругих и неупругих процессов устанавливается с помощью унитарности в прямом (s), а не в перекрестном (t) канале (переход от уравнения (39) к уравнению (42)).

---

*) В этом легко убедиться, повторив для $\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial t}$ известное доказательство [57a] положительности величины $\left(\frac{\partial A(s, t)}{\partial t}\right)_{t=0}$.

**) Здесь мы не будем учитывать слабого отличия этой особенности от полюсного вида или же возможного сдвига этого полюса, обсуждавшихся выше.

***) Заметим, что в принципе можно представить себе модели, в которых у функции $\bar{\varphi}_l$ имеются одновременно два вакуумных полюса, которые комплексно сопряжены при $t > 4\mu^2$, при $t = 4\mu^2$ полностью компенсируют друг друга, а при $t < 4\mu^2$ приводят к какой-то компенсации полюса, обусловленного интегральным членом в уравнении Бете — Солпитера. Однако, во-первых, для этого надо было бы считать, что интерференция очень существенна при высоких энергиях, что, как обсуждалось выше, представляется нам маловероятным, и, во-вторых, на современном феноменологическом уровне теории вряд ли имеет смысл усложнять модели до тех пор, пока простейшие из них не столкнутся с противоречиями.

4. Асимптотическое значение полного сечения

Однородное уравнение (45) определяет функцию $R_1(p^2)$ лишь с точностью до нормировочного множителя. Однако оно получено как предел неоднородного уравнения, решение которого является однозначным и определяет собой величину сечения периферических взаимодействий в асимптотической области согласно (38а), (41а). Правильную нормировку можно найти, если рассмотреть уравнение (35) в точке $l = 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon \to 0$) (подробнее см. работы [59, 60a] и приложение). В результате асимптотическое значение полного сечения периферических взаимодействий может быть выражено через функции $R_1(p^2)$ в виде

$$\sigma^P = 2\pi^3 R_1^2(-\mu^2) \Big/ \int_0^\infty\int p^2 D^2(p^2) K_1'(p^2, k^2) R_1(p^2) R_1(k^2)\, dp^2\, dk^2, \tag{48}$$

где

$$K_1' = \left(\frac{\partial K_l}{\partial l}\right)_{l=1}, \qquad K_l(p^2, k^2) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(l+3/2)}{(2\pi)^3\,\Gamma(l+2)}\,\frac{k^2\bar{f}_l(p^2, k^2)}{(k^2+\mu^2)^2}. \tag{49}$$

При этом полное сечение, естественно, равно

$$\sigma_{tot} = \bar{\sigma} + \sigma^P. \tag{50}$$

5. Дифференциальные распределения

Нетрудно получить и распределения по массам неприводимых блоков и квадратам переданных 4-импульсов в периферических процессах (см. рис. 2). Для этого рассмотрим интегральный член в уравнении (42). Учитывая снова вклад только от полюса в $l = 1$, заменим $\sigma(s_2, k^2)$ на $\sigma^P(k^2) = R_1(k^2)\,\sigma^P/R_1(-\mu^2)$ и примем во внимание, что эффективные значения s_2 много больше величины k^2. Интегрируя по s_2, получим следующие распределения:

$$\frac{d\sigma^P}{ds_1} = \frac{\sigma^P}{4\pi^3 R_1(-\mu^2)}\int_0^\infty dk^2\,\frac{(k^2)^2 D^2(k^2)\,\bar{A}_1(s_1, -\mu^2, k^2)\,R_1(k^2)}{\{s_1+k^2-\mu^2+[(s_1+k^2-\mu^2)^2+4k^2\mu^2]^{1/2}\}^2}, \tag{51}$$

$$\frac{d\sigma^P}{dk^2} = \frac{\sigma^P (k^2)^2 D^2(k^2)}{4\pi^3}\,\frac{R_1(k^2)}{R_1(-\mu^2)}\int_{4\mu^2}^\infty ds_1\,\frac{\bar{A}_1(s_1, -\mu^2, k^2)}{\{s_1+k^2-\mu^2+[(s_1+k^2-\mu^2)^2+4k^2\mu^2]^{1/2}\}^2}. \tag{52}$$

Конкретная форма этих распределений, как видно, зависит от поведения функции $\bar{A}_1(s_1, -\mu^2, k^2)$ и связанной с ней уравнением (46) функции $R_1(k^2)$. Тем не менее можно утверждать, что эти распределения обладают максимумом, поскольку они интегрируемы (т. е. стремятся к нулю при s_1 и k^2, стремящихся соответственно к бесконечности при $s \to \infty$), а в точках $s_1 = 4\mu^2$ и $k^2 = k^2_{\min} \to 0$ обращаются в нуль.

VII. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И СВОЙСТВА ПЕРИФЕРИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

1. Модель неприводимых блоков и ее параметры

Попытаемся теперь провести качественную оценку эффективных значений s_1 и k^2, играющих основную роль в полученных распределениях. Заметим прежде всего, что ядра уравнений (35), (42) положительны. Поэтому каждая итерация при итерационном решении этих уравнений будет тоже положительна *). Поскольку сумма этих итераций (полное сечение) существует и конечна при $s \to \infty$, итерационный ряд должен быть сходящимся. Это означает, что ядро $\bar{\sigma}(s_1, p^2, k^2)$ должно падать как функция своих аргументов, когда они стремятся к бесконечности:

$$\lim_{s_1,\, p^2,\, k^2 \to \infty} \bar{\sigma}(s_1, p^2, k^2) = 0. \tag{53}$$

Для отыскания приближенных численных значений величин s_0 и $k_0^2 = p_0^2$, на которых должно происходить эффективное обрезание сечения $\bar{\sigma}(s, p^2, k^2)$, произведем прежде всего очень грубую качественную оценку. В дальнейшем (см. VII.2) мы сделаем это более корректно, однако нам кажется, что такая оценка весьма полезна как некий ориентир для понимания взаимосвязи различных параметров.

Пусть $\bar{\sigma}$ имеет простейший вид

$$\bar{\sigma}(s, p^2, k^2) = \sigma_0 \theta(s_0 - s)\, \theta(k_0^2 - k^2)\, \theta(k_0^2 - p^2), \tag{54}$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Подставляя (54) в (38б), получим следующее выражение для $\bar{\varphi}_1$:

$$\bar{\varphi}_1(p^2, k^2) \approx \frac{\sigma_0}{3\pi} \ln(z_0/z_{\min})\, \theta(k_0^2 - k^2)\, \theta(k_0^2 - p^2), \tag{55}$$

где

$$z_0 = (s_0 + p^2 + k^2)/2kp, \qquad z_{\min} = (4\mu^2 + k^2 + p^2)/2kp.$$

Подстановка (55) в уравнение (45) позволяет найти связь между параметрами σ_0, s_0 и k_0^2. Чтобы получить ее в явном виде, воспользуемся известным приближенным соотношением, согласно которому след ядра должен быть примерно равен единице, т. е.

$$\frac{\sigma_0}{16\pi^3} \int_0^{k_0^2} \ln\left(\frac{s_0 + 2k^2}{4\mu^2 + 2k^2}\right) \left(\frac{k^2}{k^2 + \mu^2}\right)^2 dk^2 \approx 1. \tag{56}$$

Учитывая, что существенны $k^2 \gg \mu^2$ (см. ниже), получаем

$$\frac{\sigma_0 k_0^2}{16\pi^3}\left[\ln\left(\frac{s_0}{2k_0^2}\right) + 1 + \frac{2k_0^2}{s_0}\right] \approx 1 \quad \text{при} \quad 2k_0^2 < s_0, \tag{57а}$$

$$\frac{\sigma_0 s_0}{32\pi^3}\left[\ln\left(\frac{2k_0^2}{s_0}\right) + 1 + \frac{s_0}{2k_0^2}\right] \approx 1 \quad \text{при} \quad s_0 < 2k_0^2, \tag{57б}$$

$$3\sigma_0 k_0^2/32\pi^3 \approx 3\sigma_0 s_0/64\pi^3 \approx 1 \quad \text{при} \quad 2k_0^2 \approx s_0. \tag{57в}$$

Так как по смыслу σ_0 — это среднее значение сечения непериферических взаимодействий при $s < s_0$, т. е. фактически и в резонансной области (см. ниже), естественно считать, что $\mu^{-2} \leqslant \sigma_0 \leqslant 3\mu^{-2}$. Тогда из формулы, скажем (57в), находим, что

$$4{,}3\ \textit{Гэв}^2 \leqslant 2k_0^2 \approx s_0 \leqslant 13\ \textit{Гэв}^2. \tag{58}$$

Если же величины k_0^2 и s_0 сильно отличаются друг от друга, то, согласно

*) Более того, каждый член итерационного ряда, как будет показано ниже, является наблюдаемой величиной и имеет ясный физический смысл. При конечной энергии итерационный ряд содержит конечное число членов, неограниченно растущее при стремлении энергии к бесконечности.

(56), чем больше s_0, тем меньше k_0^2, и наоборот. Таким образом, в теории появляется новый большой параметр размерности квадрата энергии. Существенно, что этот вывод получен только лишь из оправданного требования конечности сечения периферических процессов *) (разрешимости уравнения (45)).

2. Более точное определение параметров

Значение параметра s_0 можно оценить более точно [60б], если привлечь для этого гипотезу дуальности. Будем, как принято, считать, что мнимая часть амплитуды упругого рассеяния слагается из двух вкладов разного типа — вклада, отвечающего ведущей вакуумной особенности, который не укладывается в рамки обычной дуальной схемы, и всего, что остается за вычетом этого вклада и к чему гипотеза дуальности применима. Первый, как уже отмечалось, целиком содержится в периферической части амплитуды. Что же касается второго, то в духе гипотезы дуальности эта часть амплитуд может быть представлена в виде суммы резонансов в s-канале. Поэтому, чтобы вычислить ее интегральный вклад, который только и представляет интерес для уравнения (39) при больших энергиях (или, что то же, для уравнения (45)), достаточно вместо истинной амплитуды $\overline{A}_1$ подставить сумму вкладов соответствующих редженских траекторий. Однако такая процедура может быть оправдана только при интегрировании до некоторой конечной энергии. Дело в том, что при достаточно высокой энергии, когда двухпионный обмен *действительно* «реджизуется», вклад всех траекторий, имеющих отличную от нуля двухпионную вершину **), уже содержится в периферическом члене, так что использование их в условии дуальности для непериферического члена означало бы теперь переучет диаграмм. Разумно считать, что в упомянутом смысле граница s_0 между «низкими» и «высокими» энергиями расположена там, где исчезает четко выраженная резонансная структура сечения непериферических взаимодействий и оно становится порядка геометрического, т. е. где $\overline{\sigma}(s_0) \approx \mu^{-2}$. При $s > s_0$ мы будем полагать, что это сечение описывается как хвост, быть может, большого, но конечного числа резонансов, имеющихся в области $s<s_0$, т. е. ведет себя асимптотически как s^{-1} ***). Сшивая эти два режима на границе, т. е. при $s=s_0$, приходим к следующему выражению для $\overline{A}_1$ на массовой поверхности (в смысле правил сумм!):

$$\overline{A}_1(s_1) = \overline{\sigma}(s_0)\,[s_0(s_0-4\mu^2)]^{1/2}\left\{\left(\frac{s_1-4\mu^2}{s_0-4\mu^2}\right)^{\alpha}\theta(s_0-s_1)+\frac{s_0}{s_1}\,\theta(s_1-s_0)\right\}, \qquad (59)$$

где α—эффективное значение положения полюса при $t=0$. Возможность такой «однополюсной» записи оправдывается тем, что в непериферическом $\pi\pi$-рассеянии доминирующая роль должна принадлежать P'- или f-траекториям, а все остальные вклады естественно рассматривать как небольшие поправки. Таким образом, можно полагать, что $\alpha \approx 0{,}5$—$0{,}6$. Впрочем, из дальнейшего будет видно, что результат (т. е. значение s_0) не очень

*) Если сечение при больших энергиях только приблизительно постоянно, т. е. если вакуумная особенность расположена не в самой точке $l=1$, а вблизи нее [55] или же не является полюсом [54], то это не повлияет на вывод, а лишь может слегка сказаться на численном значении этого параметра, не изменяя порядка его величины.

**) Этим свойством во всяком случае обладают все неэкзотические траектории с положительной G-четностью и, в частности, P'- или f-траектории, которые будут интересовать нас в первую очередь.

***) Следует отметить, что из-за присутствия ветвлений ядро содержит также еще и вклад, который падает с ростом s значительно медленнее (см. [54] и п. 1 гл. VI). Этот вклад, будучи принципиально важным, по-видимому, численно мал и для обсуждаемых здесь вопросов несуществен.

чувствителен к выбору точного значения α. Вычислив, в соответствии с (38б) и (59), в явном виде функцию $\overline{A}_1$ и подставив ее в (45), приходим к следующему уравнению (влияние того обстоятельства, что в действительности в (45) входит функция $\overline{A}_1$ вне массовой поверхности, мы обсудим в конце этого раздела):

$$R_1(p^2) = \frac{\sigma(s_0)\, s_0^2}{16\pi^3(1+\alpha)} \int\limits_0^\infty dk^2 R_1(k^2) \left\{ \frac{F(2,\ 1+\alpha;\ 2+\alpha;\ -s_0/(k^2+p^2+4\mu^2))}{(k^2+p^2+4\mu^2)^2} + \right.$$

$$\left. + (1+\alpha)\left[\frac{1}{(k^2+p^2)^2}\ln\left(1+\frac{k^2+p^2}{s_0}\right) - \frac{1}{k^2+p^2}\,\frac{1}{s_0+k^2+p^2}\right]\right\}, \qquad (60)$$

где $F(2, 1+\alpha, 2+\alpha; x)$ — гипергеометрическая функция. Ясно, что из условия разрешимости этого уравнения можно найти величину s_0. Для ее приближенного вычисления с недостатком приравняем след ядра уравнения (60) единице и учтем, что в соответствии с изложенными выше аргументами $\overline{\sigma}(s_0) \approx \mu^{-2}$. В результате получим *)

$$s_0/\mu^2 \approx 32\pi^3\alpha/[1+\alpha-(\pi\alpha/\sin\pi\alpha)(4\mu^2/s_0)^\alpha]. \qquad (61)$$

Подставив в (61) значение $\alpha \approx 0{,}5 - 0{,}6$, т. е. близкое к значению, соответствующему P'-траектории, видим, что $s_0 \approx 7 - 8$ $(Гэв)^2$. В то же время ясно. что среднее значение $\overline{\sigma}_0$ величины $\sigma(s)$ в интервале $s < s_0$ существенно больше, чем μ^{-2}. Используя выражение (59) и тот факт, что $\overline{\sigma}(s_0) \approx \mu^{-2}$, легко убедиться, что $\sigma_0 \approx 3\mu^{-2}$. Зная значения s_0 и σ_0, можно из (57а) найти величину k_0^2 — эффективный параметр обрезания по k^2. Получаем $k_0^2 \approx 1{,}2 - 1{,}5$ $(Гэв)^2$. К тому же результату можно прийти [60б], непосредственно анализируя уравнение (60).

Здесь уместно отметить, что полученная оценка величины s_0 хорошо согласуется с теми оценками, которые получаются в результате анализа экспериментальных данных по упругому рассеянию на основе конечноэнергетических правил сумм [61] (FESR) и интерференционной модели [62]. О последней имеет смысл сказать несколько подробнее. Если в первом приближении представить амплитуду упругого рассеяния как сумму вкладов резонансов в s-канале и вклада от обмена вакуумным полюсом в t-канале, то непосредственный анализ экспериментальных данных по πp-рассеянию при энергиях порядка 2 *Гэв* и выше показывает [62], что нерегулярности амплитуды. обусловленные резонансами в прямом канале, существенно проявляются только при энергиях $E_{лаб} \leqslant 3 - 4$ *Гэв*. Это означает, во-первых, что все непериферическое взаимодействие можно описывать в основном резонансами в прямом канале и, во-вторых, что максимальные массы резонансов порядка 2,5 — 3 *Гэв*. Мы пришли к этому выводу, опираясь на результаты сравнения теории с экспериментальными данными по πp-рассеянию. К сожалению, пока невозможно проанализировать подобным образом $\pi\pi$-взаимодействие. Однако мы не видим оснований для того, чтобы ожидать большого качественного различия между основными свойствами этих взаимодействий. Таким образом. естественно ожидать, что s_0 ограничено сверху условием $s_0 \leqslant 10$ *Гэв*^{2}.

Обсудим теперь, как должен повлиять на полученные результаты учет зависимости функции $\overline{A}_1$ от p^2, k^2. Так как при p^2, $k^2 > 0$. т. е. в пространственноподобной области амплитуда $\overline{A}_1$ должна быть падающей функцией переменных p^2, k^2, ясно, что учет этой зависимости может привести только к возрастанию величины s_0. В то же время мы не видим

*) В действительности это приближение является весьма хорошим в пределах той точности, на которую вообще может претендовать обсуждаемый анализ [60б].

никаких оснований ожидать очень существенного убывания функции $\bar{A}_1$ на интервале p^2, $k^2 \ll k_0$, так как ни в одном из известных в настоящее время подходов к описанию сильных взаимодействий, включая и излагаемый здесь, нет соответствующего параметра *). Таким образом, полученное выше значение величины s_0 является оценкой снизу, а значение k_0^2 соответственно — оценкой сверху, но их истинные значения не должны сильно отличаться от этих оценок. На это указывают также и соображения, основанные на интерференционной модели.

Из приведенного рассмотрения вытекает также, что в известном смысле вакуумная особенность может быть включена в рамки дуальной схемы, если сопоставить её множественному рождению всевозможных наборов резонансов в s-канале, в отличие от невакуумных траекторий, которым обычно сопоставляется совокупность одиночных резонансов. В этой связи неудивительно, что ее свойства существенно отличаются от универсальных свойств всех остальных траекторий.

3. Файрболы

Поясним теперь физический смысл полученных результатов. Для этого рассмотрим итерационное решение уравнения (25). На диаграммах оно имеет вид, изображенный на рис. 5, где слагаемые соответствуют первой, второй, третьей и т. д. итерациям (25). Переход от (25) к уравнению для мнимых частей (39) и для полных сечений (42) соответствует

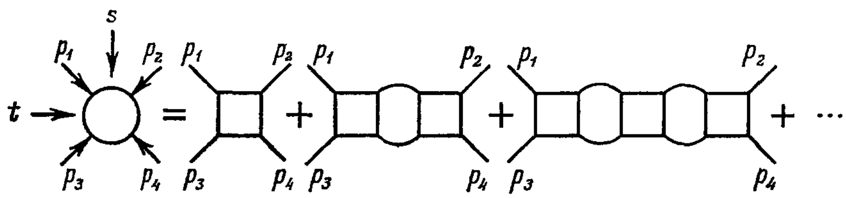


Рис. 5. Итерационное решение уравнения Бете — Солпитера.

тому, что частицы в промежуточных состояниях находятся на массовой поверхности, так что от рис. 5 мы переходим к диаграммам на рис. 6, которые топологически совпадают с рассмотренными в модели AFST [22]. Блокам на этих диаграммах соответствуют неприводимые части, описываемые величинами $\bar{\sigma}(s_i,\ p^2,\ k^2)$. Из диаграмм видно, что генерацию частиц можно рассматривать как происходящую в «блоках», т. е. центрах эмиссии, которые связаны друг с другом только одной мезонной линией. Физический смысл параметров s_0 и k_0^2 состоит в том, что они описывают эффективные квадрат массы блоков и квадрат переданного от блока к блоку 4-импульса. Из сказанного ранее следует, что «массы» блоков должны при $s \to \infty$ оставаться ограниченными (правда, довольно большими — порядка $s_0^{1/2}$), равно как и передаваемые между соседними блоками квадраты 4-импульсов.

Физически блоки разделены из-за сравнительно большой величины их относительного γ-фактора (этот вопрос обсуждался в гл. V).

Эти свойства центров эмиссии — ограниченность их массы, характерная ее величина (*несколько Гэв*) и порядок k^2, связывающего соседние центры,— совпадают со свойствами файрболов — сгустков пионной материи с ограниченной массой, о которых шла речь во введении (гл. I). Поэто-

*) То, что таким параметром не может быть величина μ^2, по-видимому, вполне надежно доказывается всеми экспериментальными данными.

му в дальнейшем мы будем использовать термин «файрбол» для обозначения таких центров эмиссии частиц. При этом необходимо иметь в виду, что в рассматриваемой схеме центры эмиссии возникают не как самостоятельные объекты, свойства которых не зависят от характера взаимодействия. Скорее наоборот, свойства файрболов целиком определяются периферическим характером процесса, именно тем, что взаимодействие между

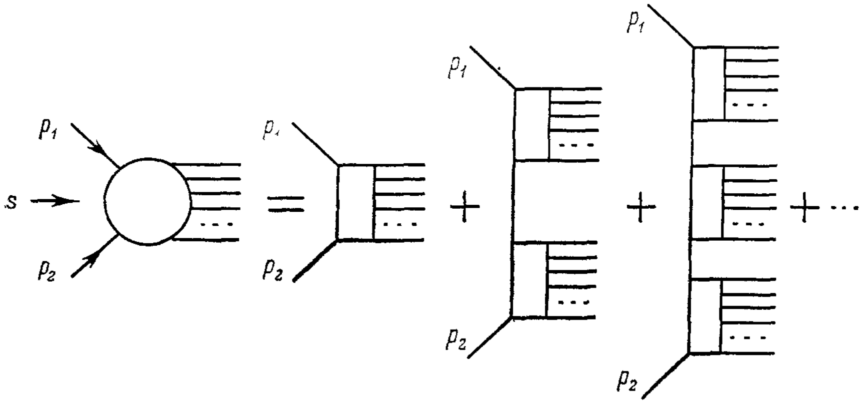


Рис. 6. Итерационное решение уравнения для неупругих процессов.

ними осуществляется за счет обмена одним мезоном. Поэтому правильно было бы подобрать термин, определяющий процесс в целом, а не отдельные его черты. Другими словами, определить, что такое файрбол, независимо от способа его «приготовления», мы не можем. Логичнее было бы говорить о процессах файрбольного типа. Тем не менее, следуя сложившейся традиции, мы будем в дальнейшем употреблять термин «файрбол», имея, однако, в виду его несовершенство.

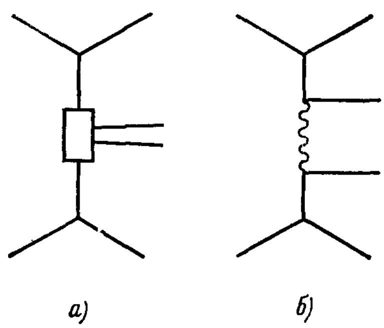


Рис. 7. Вклад упругих процессов в неприводимый блок.

Величина $\bar{\sigma}$, описывающая неприводимый блок, включает в себя, в частности, полное сечение упругого рассеяния, т. е. нужно рассматривать, например, и диаграмму, изображенную на рис. 7, *а*. Если упругое рассеяние происходит за счет обмена реджионом, то эта диаграмма эквивалентна изображенной на рис. 7, *б*. Объединяя пионы с ближайшей из сталкивающихся частиц, видим, что одновременно этот процесс можно интерпретировать и как дифракционную генерацию (неупругий процесс без обмена квантовыми числами между блоками). Однако поскольку упругое сечение заметно меньше неупругого, мы будем все же использовать термин «файрбол».

Итак, один из главных выводов развиваемой теории, вытекающий из довольно общих предположений, состоит в том, что в периферических взаимодействиях должны возникать массивные центры эмиссии частиц — файрболы.

Отметим здесь же, что из факта ограниченности массы файрбола и квадрата передаваемого ему 4-импульса немедленно следует логарифмический рост числа файрболов с ростом энергии при высоких энергиях. Все расчеты при этом аналогичны проведенным в работе [22] (подробнее см. [23]).

4. О спине файрболов

Уместно здесь же обсудить и вопрос о том, какие моменты дают вклад в блоки-файрболы. Для этого заметим, что в интеграл в (42) должна давать вклад широкая область энергий и во всей этой области сечение непериферических взаимодействий σ_0 должно быть велико:

$$\sigma_0 s_0 \sim 50\pi^3 \gg 1. \tag{62}$$

Эта оценка получена выше при предположении о том, что $\sigma_0 \sim 3/\mu^2 = \text{const}$; в случае, если σ_0 зависит от энергии, аналогичному условию должен удовлетворять интеграл

$$\int\limits_{4\mu^2}^{s_0} \sigma_0(s)\, ds \approx \frac{s_0}{\mu^2} \approx 50\pi^3 \gg 1. \tag{63}$$

Отсюда следует, что число различных парциальных волн, участвующих в формировании блока, также должно быть велико.

Это утверждение основано на следующих соображениях. Наибольшая допустимая условием унитарности величина парциального сечения с моментом l равна

$$(\sigma_0^l)_{\max} = \pi(2l+1)/\mathbf{p}^2 = (2l+1)\cdot 4\pi/(s-4\mu^2), \tag{64}$$

т. е. убывает с ростом s при заданном l. В то же время радиус сильных взаимодействий конечен и равен $r_0 \sim \mu^{-1}$. Поэтому сильное взаимодействие, характеризуемое моментом l, может иметь место, если только импульсы сталкивающихся частиц $|\mathbf{p}|$ достаточно велики: $|\mathbf{p}|\, r_0 \gtrsim l$, т. е. если $|\mathbf{p}| \gtrsim l\mu$. При меньших s взаимодействие практически отсутствует, при бо́льших — падает согласно (64). Оценим, какое число парциальных волн должно давать эффективный вклад в сечение для того, чтобы было выполнено необходимое условие (63). Вклад волны с данным l *) на интервале от $|\mathbf{p}|_{\min} = l\mu$ до $|\mathbf{p}|_{\max} = [(s_0/4) - \mu^2]^{1/2}$ будет меньше, чем

$$\int\limits_{4\mu^2}^{s_0} (\sigma_0^l)_{\max}\, ds \approx 4\pi(2l+1)\ln\left(\frac{s_0}{4l^2\mu^2}\right) \qquad \left(0 < l \leqslant \frac{s_0^{1/2}}{2\mu}\right). \tag{65}$$

Даже эта максимальная величина при любом l из интервала от 1 до $s_0^{1/2}/2\mu$ меньше, чем значение $50\pi^3$, которое следует из условия (63). Подставляя в (65) $s_0 \sim 10$ *Гэв*^{2}, видим, что должно выполняться неравенство

$$16\pi^3 = \int\limits_{4\mu^2}^{s_0} \sigma_0\, ds \leqslant \sum_{l=1}^{l_{\max}} \int\limits_{4\mu^2}^{s_0} (\sigma_0^l)_{\max}\, ds = \sum_{l=1}^{l_{\max}} 4\pi(2l+1)\ln\left(\frac{s_0}{4l^2\mu^2}\right) \approx$$

$$\approx \sum_{l=1}^{l_{\max}} 4\pi(2l+1)\ln\left(\frac{120}{l^2}\right). \tag{66}$$

Неравенство выполняется лишь в случае $l_{\max} \gtrsim 3$, т. е. когда в эффективное сечение вносят вклад по крайней мере три парциальных сечения. Эти оценки показывают, что присутствие набора волн совершенно необходимо для удовлетворения условий (62) и (63). На самом деле эффективное число парциальных волн должно быть больше, так как замена парциального сечения на его максимальное значение существенно увеличи-

*) Мы не учитываем здесь s-волну. Учет ее не изменил бы получаемых выводов, но сделал бы все выкладки более громоздкими.

вает правую часть неравенства, поскольку ни одно из парциальных сечений обычно не достигает своего унитарного предела (см., например, [63]). Практически число парциальных волн, дающих вклад в сечение, порядка $L \sim \sqrt{s_0}/2\mu \sim 10$. Для нас, однако, сейчас важно лишь то, что файрбол не может характеризоваться заданным угловым моментом.

Из приведенного рассмотрения следует, что файрбол в том виде, в котором он возникает в теории, отнюдь нельзя связывать с каким-либо определенным бозонным резонансом, так как ни один из резонансов с заданным моментом l не может обеспечить требуемый вклад в интеграл (63). Более того, согласно гипотезе дуальности (см. гл. VII, п. 2) файрбол можно представить как совокупность всех резонансов, «взвешенных» согласно динамическому уравнению Бете — Солпитера.

5. Предасимптотическое поведение сечений

Задав ядро уравнения (42) в виде (54), можно определить асимптотическое значение сечения периферических взаимодействий согласно (48). Уравнение (47) при $k_0^2 = s_0$ перепишется в виде

$$R_1(p^2) = \frac{\sigma_0}{16\pi^3} \int\limits_0^{k_0^2=s_0} dk^2 [k^2 D(k^2)]^2 \ln\left(\frac{s_0+p^2+k^2}{4\mu^2+p^2+k^2}\right) R_1(k^2). \tag{67}$$

Собственные функции R_1 и собственные значения σ_0 были вычислены на электронно-счетной машине при трех разных значениях s_0 в уравнении (67). σ^P и σ_{tot} были определены согласно (48), (49). Результаты приведены в таблице. Видно, что параметр s_0 должен быть заключен в пределах

Значения сечений при разном выборе параметра s_0

$s_0 = 250\ \mu^2$			$s_0 = 400\ \mu^2$			$s_0 = 600\ \mu^2$		
σ_0	σ_∞^P	σ_{tot}	σ_0	σ_∞^P	σ_{tot}	σ_0	σ_∞^P	σ_{tot}
57	66	66	35,4	43	43	23	30	30

$5 \leqslant s_0 \leqslant 12$ *Гэв*^{2}, если $\sigma_0 \sim (3 \div 1)\ \mu^{-2}$. Наиболее существенный результат состоит в том, что полное сечение при асимптотически высоких энергиях получилось больше его значения при низких энергиях для всех этих значений s_0 ($\sigma^P > \sigma_0$). Поэтому должна существовать предасимптотическая область энергий, где это сечение возрастает. Покажем, что этот рост является монотонным. Для этого продифференцируем уравнение (42) по s. При больших энергиях ($(s_0/s)^2 \ll 1$) получим

$$\frac{d\sigma(s, p^2)}{ds} = \frac{d\bar{\sigma}(s, p^2)}{ds} + \frac{1}{8\pi^3(s+p^2-\mu^2)^2} \int\limits_{k^2_{\min}}^{k^2_{\max}} \frac{dk^2}{(k^2+\mu^2)^2} \times$$

$$\times \int\limits_{4\mu^2}^{s_{1\max}} ds_1 \bar{\sigma}(s_1, p^2, k^2) [(s_1+p^2-k^2)^2 - 4p^2k^2]^{1/2} \times$$

$$\times \int\limits_{s_0}^{s_{2\max}} ds_2 (s_2+k^2-\mu^2)^2 \frac{d\sigma}{ds_2}(s_2, k^2). \tag{68}$$

В рассматриваемой модели $d\bar{\sigma}/ds \equiv 0$ при $s > s_0$. Уравнение (68) является однородным уравнением Вольтерра с положительно-определенным ядром. Поэтому собственные функции $d\sigma/ds$ должны быть знакоопределенными. Численное решение уравнения (42) показало, что независимо от s_0 полное сечение начинает расти при $s \gtrsim 150$ *Гэв*^{2}, т. е. производная $d\sigma/ds$ в этой области положительна. Следовательно, она должна быть положительна во всей предасимптотической области, т. е. сечение периферических процессов растет монотонно.

В рассмотренной модели это приводит и к предасимптотическому росту полного сечения. Однако в общем случае такого вывода в данном подходе сделать не удалось. Простые соображения о преобладании периферических процессов позволяют думать, что этот рост будет наблюдаться и для полного сечения.

Отметим, что в реджевской модели слабой связи [64] получен вывод о предасимптотическом росте именно полного сечения. Там он обусловлен тем, что вклады от точек ветвления в l-плоскости убывают с ростом энергии, причем основная поправка к асимптотически постоянному полному сечению отрицательна. Удается установить также нижнюю границу на величину поправочного члена. Оказывается, что сечение ведет себя в предасимптотической области следующим образом [64]:

$$\sigma_t(s) \approx \sigma_{tot}(\infty)\,[1-(B/\ln s)], \tag{69}$$

где $B > \sigma_{tot}(\infty)/32\pi\alpha'$. α' — наклон ведущей траектории.

В этой связи интересны экспериментальные результаты, полученные в работе [65], где указывается на рост полных сечений взаимодействия частиц в космических лучах с ядрами в интервале энергий от $2\cdot 10^{10}$ до 10^{12} *эв*.

6. Средняя множественность

В рассматриваемой модели среднее число неприводимых блоков (файрболов) при высокой энергии определяется точно так же, как и в работе [22]:

$$\mathfrak{N} = (d\alpha/d\lambda_\alpha)_{\substack{\lambda_\alpha=1,\\ \alpha=1}} \ln(s/2\overline{k^2}), \tag{70}$$

где λ_α — дополнительный варьируемый параметр, вводимый путем замены $\bar{\varphi}_\alpha$ на $\lambda_\alpha\varphi_\alpha$ в уравнении (32), где f_α заменено на φ_α согласно (34а), (34б) (подробнее см. приложение). Величина $d\alpha/d\lambda_\alpha$ может быть найдена согласно методу, изложенному в приложении, и равна

$$(d\alpha/d\lambda_\alpha)_{\lambda_\alpha=\alpha=1} = \sigma^P\mu^2/16\pi^3 R_{1_0}^2(-\mu^2), \tag{71}$$

где индекс 0 означает, что R_1 нормирована на единицу. Средняя множественность $\bar{N}$ в периферических процессах равна $\bar{N} = \mathfrak{N}\bar{n}$, где $\bar{n}$ — среднее число частиц, рождающихся при распаде файрбола.

Для различных значений параметра s_0 числовые коэффициенты в формуле (71) таковы:

$$\bar{N} = \left\{ \begin{array}{lll} 6{,}0 \lg(s/2\overline{k^2}) & \text{при} & s_0 = 5\ \textit{Гэв}^2, \\ 6{,}8 \lg(s/2\overline{k^2}) & \text{при} & s_0 = 8\ \textit{Гэв}^2, \\ 7{,}7 \lg(s/2\overline{k^2}) & \text{при} & s_0 = 12\ \textit{Гэв}^2. \end{array} \right\} \tag{72}$$

Таким образом, средняя множественность в периферических процессах растет с энергией логарифмически [22], причем коэффициенты в рассматриваемой модели даются формулой (72).

Величины $\bar{n}(s_0)$ получаются из расчетов по статистической теории [31]: $\bar{n}(s_0) \approx 2(s_0/m^2)^{1/2}$. Данные об $\bar{N}(s)$, полученные на ускорителях и в космических лучах, описываются наилучшим образом [66] при следующих значениях параметров s_0 и $\bar{k}^2$ в формуле (72): $s_0 \approx 8$ *Гэв*^{2}, $\bar{k}^2 \approx 2$ *Гэв*^{2} (рис. 8).

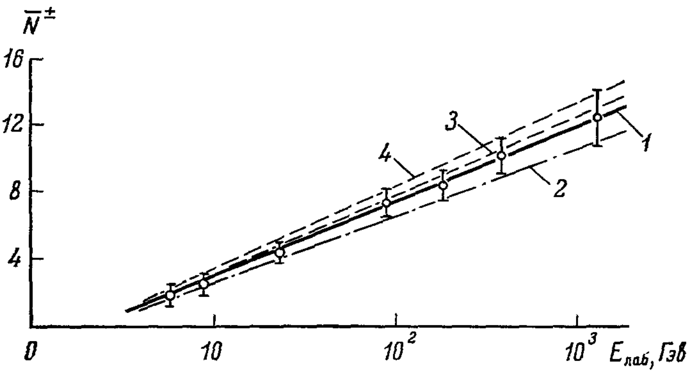


Рис. 8. Сравнение теоретических предсказаний о множественности с экспериментальными данными.

Так как экспериментальные точки учитывают только заряженные пионы, то при сравнении правая часть формулы (72) умножалась на 2/3. Занижение теоретической оценки может быть обусловлено тем, что часть пионов образуется в результате распада изобар. Прямая 1 проведена по экспериментальным точкам: расчетные кривые 2—4 соответствуют значениям $s_0 = 5$; 8, 12 *Гэв*^{2}.

Рассмотренные модели, конечно, являются лишь первым приближением к действительности, позволяющим понять основные черты процессов и оценить их параметры. Для того чтобы провести сравнение с экспериментом, нужно, во-первых, рассмотреть экспериментально наблюдаемые процессы протон-протонных и пион-протонных соударений и, во-вторых, рассмотреть более реалистические модели для $\bar{\sigma}$ (например, учесть структуру низкоэнергетических резонансов и т. п.). Ниже мы вкратце обсудим проблемы, которые возникают при использовании простейшей модели в реальных процессах.

VIII. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОТОНОВ С ПРОТОНАМИ И ПИОНАМИ

Выше был рассмотрен случай взаимодействия нейтральных псевдоскалярных частиц. Однако с точки зрения эксперимента интерес представляет прежде всего взаимодействие протонов с протонами и пионами при высоких энергиях. Если положить, как принято сейчас считать, что при высоких энергиях взаимодействие не зависит от изоспинового состояния соударяющихся частиц, эффекты переворота спина пренебрежимо малы, а все амплитуды без переворота спина равны, то как pp-, так и πp-рассеяние будут характеризоваться одной амплитудой. Поэтому при изучении таких процессов надо рассматривать следующую систему уравнений для парциальных амплитуд [23] (помимо уравнения (35) для $\pi\pi$-рассеяния):

$$\varphi_{\pi\pi\to p\bar{p}}(l, p^2) = \bar{\varphi}_{\pi\pi\to p\bar{p}}(l, p^2) +$$

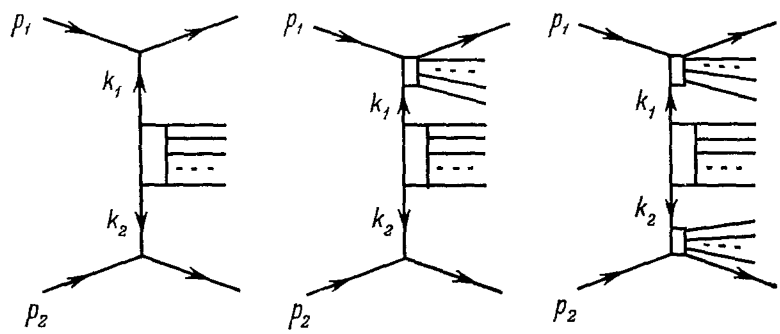
$$+\begin{cases} \dfrac{2^{2l}\pi^{1/2}\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)}{(2\pi)^3\,\Gamma(l+2)} \displaystyle\int_0^\infty dk^2\,(k^2)^{l+1} D^2(k^2)\,\bar{\varphi}(l, p^2, k^2)\,\varphi_{\pi\pi\to p\bar{p}}(l, k^2), & (73)\\[2ex] \dfrac{2^{2l}\pi^{1/2}\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)}{(2\pi)^3\,\Gamma(l+2)} \displaystyle\int_0^\infty dk^2\,(k^2)^{l+1} D^2(k^2)\,\varphi(l, p^2, k^2)\,\bar{\varphi}_{\pi\pi\to p\bar{p}}(l, k^2), & (74)\end{cases}$$

где $\varphi \equiv \varphi_{\pi\pi\to\pi\pi}$, и

$$\varphi_{p\bar p\to p\bar p}(l) = \overline{\varphi}_{p\bar p\to p\bar p}(l) + \\ + \frac{2^{2l}\pi^{1/2}\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)}{(2\pi)^3\,\Gamma(l-2)} \int\limits_0^\infty dk^2\,(k^2)^{l+1}\,D^2(k^2)\,\overline{\varphi}_{\pi\pi\to p\bar p}(l, k^2)\,\varphi_{\pi\pi\to p\bar p}(l, k^2). \quad (75)$$

Соответственно переписывается и система уравнений для полных сечений, связанных с уравнением (42). В действительности лишь (35) и (73) являются уравнениями, а (74) и (75) представляют собой просто соотношения между амплитудами разных процессов (неприводимые блоки считаются заданными).

Изложим теперь результаты, которые получаются на основе развитых представлений при рассмотрении конкретного процесса однофайрбольного



а) б) в)

Рис. 9. Расчетные диаграммы pp-рассеяния.

типа в pp-соударениях [66]. Как мы покажем ниже, процессы такого типа будут проявляться в интервале энергий $30 \leqslant E_{лаб} \leqslant 500$ *Гэв*. Этому процессу можно сопоставить три диаграммы, показанные на рис. 9. В соответствии с оптической теоремой вклад в полное сечение, обусловленный каждой из этих диаграмм, определяется второй итерацией уравнения Бете — Солпитера и может быть записан в виде

$$\sigma_{pp}^{(2)}(s) = \frac{4}{(8\pi^3)^2 s} \int \frac{ds_1\,ds_2\,dk_1^2\,dk_2^2\,ds_3\,ds_4}{(k_1^2+\mu^2)^2\,(k_2^2+\mu^2)^2}\, R(s_1, k_1^2)\,\overline{\sigma}_{\pi p}(s_1, k_1^2)\,\times \\ \times R^{-1}(s_2, k_1^2)\,R(s_3, k_1^2, k_2^2)\,\overline{\sigma}_{\pi\pi}(s_3, k_1^2, k_2^2)\,R(s_4, k_2^2)\,\overline{\sigma}_{\pi p}(s_4, k_2^2), \quad (76)$$

где

$$s_1 = -(p_1+k_1)^2,\quad s_2 = -(p_2-k_1)^2,\quad s_3 = -(k_1+k_2)^2,\quad s_4 = -(p_2+k_2)^2, \quad (77)$$

$$R(s_i, p^2, k^2) = [(s_i+p^2+k^2)^2 - 4p^2k^2]^{1/2},\quad R(s_i, k^2) \equiv R(s_i, -\mu^2, k^2), \quad (78)$$

а области интегрирования определяются соотношением (49), последовательно примененным к соответствующим наборам переменных. Ясно, что в (76) нужно подставить в качестве величин $\overline{\sigma}_{\pi p}(s_i, p^2, k^2)$ в случае *а*) выражение

$$\overline{\sigma}_{\pi p}(s_i, p^2, k^2) = \pi G^2 k^2 \delta(s-m^2)/[(s_i+p^2+k^2)^2 - 4p^2k^2]^{1/2}, \quad (79)$$

а в случае *б*) одно из $\overline{\sigma}_{\pi p}$ должно определяться согласно (79), а другое — равняться удвоенному сечению непериферического πp-взаимодействия, так как эту диаграмму следует учитывать дважды, и, наконец, в случае *в*) оба $\bar{\sigma}_{\pi p}$ равны сечению непериферического πp-взаимодействия. При конкретных вычислениях предполагалось, что это последнее равно σ_0 в области $s < s_{1,4} < 7$ *Гэв*^{2} и нулю вне этой области, т. е. считалось, что практически все непериферическое πp-взаимодействие обусловлено областью резонансов (т. е. $\bar{\sigma}_{\pi\pi}$ и $\bar{\sigma}_{\pi p}$ — величины одного порядка).

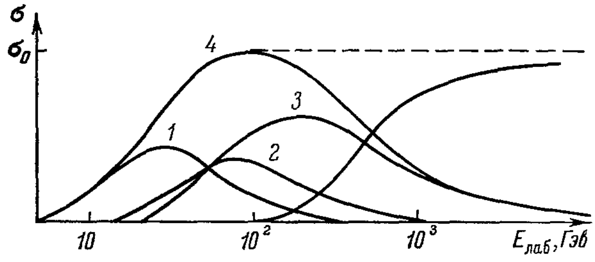


Рис. 10. Зависимость сечений от энергии для процессов, изображенных на рис. 9, *а*, *б*, *в* (кривые *1*, *2*, *3* соответственно). Суммарное сечение дается кривой *4*.

Сечение двухфайрболных процессов изображается сплошной непронумерованной кривой. Штриховая кривая указывает примерно асимптотическое значение сечения периферических процессов.

Исходя из этого, были вычислены сечения перечисленных процессов как функции энергии (рис. 10), а также следующие их характеристики при тех энергиях, где эти сечения максимальны, т. е. при 40; 70 и 250 *Гэв*:

1. Распределение по массам файрболов, которое получается, если в (76) опустить интегрирование по s_3 (рис. 11). Следует подчеркнуть, что конкретный вид этого распределения очень чувствителен к частной модели. Так, например, резкая верхняя граница этого распределения полностью обусловлена заданием $\bar{\sigma}$ в форме (54) и не может быть оправдана вне рамок модели.

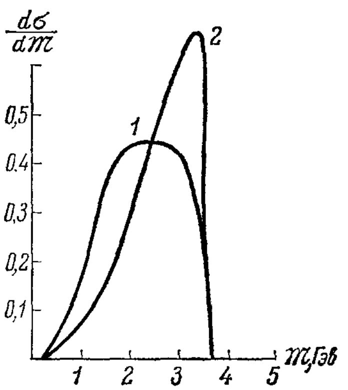


Рис. 11. Распределение по массам файрболов.

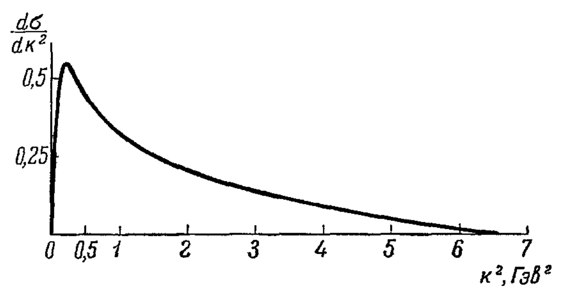


Рис. 12. Распределение по квадратам переданных 4-импульсов.

2. Распределение по квадратам передаваемых импульсов k_i^2, которое получается, если опустить в (76) интегрирование по соответствующему k_i^2 (рис. 12).

3. Распределения по коэффициентам неупругости и средние значения γ-факторов нуклонов и изобар в СЦИ. Коэффициент неупругости нуклона K определялся по формуле

$$K = (s_2 - m^2)/s, \tag{80}$$

а коэффициент неупругости изобары R определялся как доля первичной энергии нуклона, идущая на образование вторичных частиц, за исключением тех, которые рождаются в результате распада изобары:

$$R = (s_2 - s_1)/s. \tag{81}$$

Соответствующие γ-факторы определяются формулами: для нуклона

$$\gamma_N = (s + m^2 - s_2)/2ms^{1/2} = (1 - K)\, s^{1/2}/2m \tag{82}$$

и для изобары

$$\gamma_R = (s + s_1 - s_2)/2\,(ss_1)^{1/2} = \frac{1-R}{2}\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/2}. \tag{83}$$

Распределения по коэффициентам неупругости приведены на рис. 13, а соответствующие средние значения γ-факторов $\bar{\gamma}$ легко найти, используя соотношения (80)—(83).

В результате оказывается, что $\bar{\gamma}_N \approx 2{,}5$ при $E_{\text{лаб}} = 40$ *Гэв*, $\bar{\gamma}_N \approx 3{,}6$ при $E_{\text{лаб}} = 70$ *Гэв* и $\bar{\gamma}_R \approx 4$ при $E_{\text{лаб}} = 250$ *Гэв*.

4. Вычислялось среднее значение $(\bar{\gamma}_f)$ γ-фактора файрбола, определяемого выражением

$$\gamma_f = \left\{ \frac{s_2 + s_3 - s_4}{2\sqrt{s_2}} + \left[\frac{(s + s_2 - s_1)^2 - 4ss_2}{s + s_2 - s_1}\; \frac{(s - s_1 - s_2)^2 - 4s_1s_2}{4s} \right]^{1/2} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{2\,(k_1^2 - s_3 - k_2^2)\, s_2 + (s_2 - k_1^2 + p_2^2)\,(s_2 + s_3 - s_4)}{[(s_2 + k_1^2 + p_2^2)^2 - 4k_1^2p_2^2]^{1/2}\, [(s_2 - s_3 - s_4)^2 - 4s_3s_4]^{1/2}} \right\} \frac{s + s_2 - s_1}{2\,(ss_2s_3)^{1/2}}. \tag{84}$$

При этом вместо величин s_i, k_i^2, p_i^2 подставлялись их средние значения, полученные из перечисленных ранее распределений.

Обсудим вкратце полученные результаты.

Как и следовало ожидать из простых кинематических соображений, однофайрбольные процессы типов а), б) и в) по мере роста энергии последовательно сменяют друг друга, достигая максимума соответственно при энергиях порядка 40; 70 и 250 *Гэв*. При дальнейшем увеличении энергии они должны смениться двухфайрбольным процессом. Согласно результатам предварительных вычислений максимум сечения двухфайрбольного процесса без возбуждения нуклонов приходится на энергию порядка 250 *Гэв*. Суммарное сечение однофайрбольных процессов достигает величины порядка σ_0 (кривая 4 на рис. 10), так что при соответствующих энергиях этот процесс должен вносить существенный вклад в полное сечение pp-взаимодействия. В то же время мы видим, что при современных ускорительных энергиях (исключая ускоритель в Серпухове, на котором эксперименты только начинаются) файрбольный механизм взаимодействия должен проявляться незначительно. Между тем анализ экспериментальных данных, полученных при энергиях ~ 20 *Гэв*, уже указывает на присутствие небольшой доли событий, которые можно интерпретировать как проявление однофайрбольного механизма рождения частиц [8, 9]. Что касается экспериментов с космическими лучами, то, как уже отмечалось ранее, они также позволяют говорить о существовании одно- и двухфайрбольных (а быть может, уже и трехфайрбольных) процессов, хотя, разумеется, точность соответствующих данных далека от той, которая необходима для однозначности подобного вывода.

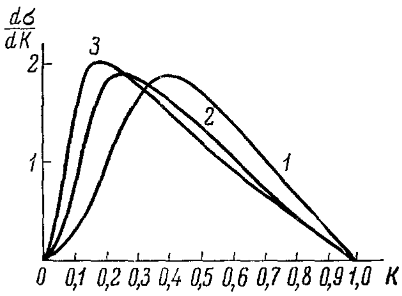


Рис. 13. Распределение по коэффициентам неупругости.

Из приведенных распределений по массам видно, что среднее значение массы файрбола оказывается порядка 3 *Гэв* и находится в качественном согласии с данными эксперимента [1-9]. В то же время ясно, что при низких энергиях, т. е. вблизи «порога» соответствующих процессов, массы файрболов должны быть несколько меньше.

Результаты проведенных выше теоретических расчетов показывают, что распределение по k^2 практически не зависит от величины полной энергии взаимодействия и имеет максимум при $k^2 \approx 0{,}5$ *Гэв*^{2}, но эффективные значения несколько больше, порядка 1—2 *Гэв*^{2}. К сожалению, детали этого распределения довольно чувствительны к выбору модели.

Среднее значение коэффициента неупругости K, которое получается из распределений, приведенных на рис. 13, порядка 0,4 и практически не зависит от энергии. Это тоже согласуется с данными экспериментов по космическим лучам.

Наконец, полученная величина среднего значения γ-фактора файрбола $\overline{\gamma}_f \approx 1{,}15$ также не противоречит экспериментальным данным, согласно которым [2, 5] $\overline{\gamma}_f$ равно примерно 1,1—1,2.

Таким образом, можно сказать, что все результаты, полученные на основе модели файрболов для процессов однофайрбольного типа, в целом находятся в согласии с теми весьма скудными экспериментальными данными, которые имеются в настоящее время.

IX. СВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ ОПИСАНИЯ НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Изложенный выше метод теоретического описания неупругих взаимодействий, как уже указывалось, целесообразно применять лишь в той области энергий, где используемые параметры становятся стабильными *). В то же время существует много других моделей неупругих процессов при высоких энергиях. Из них наиболее часто используются следующие: 1) статистическая (термодинамическая) [12, 30, 31], 2) гидродинамическая [11], 3) некоррелированных струй [26, 27, 42], 4) мультиреджионная [24, 25, 67, 68].

Различные модели претендуют на описание процессов разного типа и в различных областях энергий. Поэтому представляет интерес вкратце рассмотреть возможную взаимосвязь всех этих моделей.

В соответствии с постулатами, положенными в основу первых трех моделей, их скорее всего следует применять для описания непериферических взаимодействий в рамках уравнения Бете — Солпитера. При этом статистическую модель, по-видимому, имеет смысл применять к взаимодействиям при достаточно низких энергиях, т. е. для описания распада файрбола ($s \lesssim 10$ *Гэв*^{2}). Гидродинамическая модель может применяться лишь при очень высоких энергиях ($s \gtrsim 200$ *Гэв*^{2}). Поэтому она не имеет отношения к распаду файрболов, а может описывать при таких энергиях лишь неоднородный член в уравнении Бете — Солпитера.

Область применимости модели некоррелированных струй сейчас еще недостаточно ясна. Однако существенно, что в развитой в работах [27, 45] форме она является некоторым обобщением статистической модели, в котором падение сечений $\overline{\sigma}$ с ростом виртуальности, принятое *ad hoc* в рассмотренной выше модели (54), возникает как результат ограниченности передаваемых импульсов в непериферических взаимодействиях.

Связь между рассматриваемой схемой и моделью полюсов Редже следует обсудить более подробно.

В дальнейшем под мультиреджионной схемой мы будем понимать описание неупругих процессов, в которых происходит обмен, вообще говоря, *произвольными* реджионами между *группами* частиц.

*) Применение его в области энергии порядка 10 *Гэв* возможно для феноменологической обработки экспериментальных данных, не претендующей на получение предсказаний при других энергиях (так как здесь параметры могут зависеть от энергии).

Если рассматривать обмен только вакуумными реджионами, то такие процессы отличны от мультипериферических. Последовательный анализ их проведен в работах [24]. Однако доступная для них область фазового объема мала. На опыте они проявляются в виде дифракционных неупругих процессов с небольшим полным сечением. В связи с этим возникли попытки [25, 67, 68] расширить мультиреджистику, учитывая обмен другими реджионами и рождение частиц группами, с целью применения ее во всем фазовом пространстве. Однако такое расширение приводит практически к переходу мультиреджионной схемы в мультипериферическую в основной области фазового объема.

1. Роль мезонного обмена

Взаимосвязь мультипериферической схемы с моделью полюсов Редже проявляется в топологической эквивалентности диаграмм, описывающих неупругие процессы [22, 24]. В мультиреджионной модели диаграммы отличаются от изображенных на рис. 6 прежде всего тем, что обмен происходит не пионом, а каким-либо реджионом. Поэтому в соответствующем аналитическом выражении внутренней линии, частице, например, с положительной сигнатурой, сопоставляется не пропагатор $D\ (k^2)$, а множитель $I\ (t)$:

$$D\ (k^2) \longrightarrow |\, I\ (t)\,|\ (\pi\alpha'\ (0)/2) = (\pi\alpha'\ (0)/2)\sin^{-1}(\pi\alpha_i\ (t)/2),$$

где $\alpha_i\ (t)$ — траектория i-го реджионного полюса (под индексом i подразумевается как порядковый номер реджиона в цепочке, так и характер его траектории).

Кроме того, появляются типично реджевские множители вида $z^{\alpha_i\ (t)}$, где z — соответствующие косинусы углов рассеяния в t-канале. Например, для однореджионной диаграммы, топологически эквивалентной рис. 3, *а* с образованием в верхнем узле группы частиц с «массой» $s_1^{1/2}$, а в нижнем — $\sqrt{s_2}$ и передачей импульса $|\, t\, |$, величина z имеет вид

$$z \approx (2\,|\, t\,|\, s/s_1 s_2) - 1. \tag{85}$$

Реджевский подход, т. е. введение множителей типа $s^{\alpha_i\ (t)}$, оправдан, когда величина $|\, z\, |$ велика: $|\, z\, | \gg 1$. В этом случае обмен вакуумной траекторией выделен [24].

Из формулы (85) видно, что значение z велико, лишь если полная энергия $s^{1/2}$ намного больше не только «масс» образующихся блоков $s_{1,2}^{1/2}$, но, кроме того, компенсирует влияние малого отношения переданного импульса к массе блока. Эта область фазового объема мала.

В работе [69] было показано, что в основной доле фазового пространства неупругих процессов величина $|\, z\, |$ порядка единицы. В частности, при неупругом рассеянии «вперед», т. е. на границе фазового объема, имеем $|\, t\, |_{\min} \approx s_1 s_2/s$ и $|\, z\, | = 1$.

Поэтому в основной части фазового объема реджевские множители «не отдают предпочтения» той или иной реджевской траектории. В то же время сигнатурные множители выделяют (численно!) именно пионную траекторию, поскольку они сводятся в точках полюсов к пропагаторам, т. е. при малых $|\, t\, |$ выделяют пионный полюс *) как ближайший к физической области [69]. Следовательно, именно к основной доле неупругих процессов должна быть применима мультипериферическая теория.

Обмен вакуумными реджионами не играет основной роли в неупругих процессах [69, 24, 68] (в отличие от упругих). Его роль важна лишь там,

*) Например, при $t = 0$ отношение квадратов сигнатурных множителей для каонной и пионной траекторий порядка $(\mu/m_k)^4 \sim 10^{-2}$.

где $|z| \gg 1$, *или для процессов рождения резонансов (с не зависящими* от энергии массами $s_1^{1/2}$ и $s_2^{1/2}$ в однореджионной схеме), даже если $|z| \sim 1$. Последнее утверждение основано на изучении четырехмерного варианта реджистики в работах [70, 71], где проводилось разложение амплитуды изучаемого процесса по неприводимым представлениям группы четырехмерных вращений. Тогда в предположении о существовании лоренцева полюса (т. е. совокупности основного и всех дочерних полюсов в l-плоскости) можно показать, что асимптотика амплитуды такого квазиупругого процесса дается обычной реджевской формулой

$$T \sim I(t)\, g(t, s_1)\, g(t, s_2)\, [s/(s_1 s_2)^{1/2}]^{\alpha(t)}. \tag{86}$$

Вблизи границы фазового объема ($|z| \sim 1$) это связано с поведением вычетов парциальной амплитуды, а не с асимптотикой сферических функций [60].

Однако ни область $|z| \gg 1$, ни процессы с рождением резонансов не могут дать асимптотически постоянного вклада в полное сечение *), а потому обмен вакуумными реджионами не является доминирующим механизмом в неупругих взаимодействиях при высоких энергиях.

2. Группировка частиц

Тем более мал вклад в сечение процессов с обменом реджионом и рождением в каждом неприводимом блоке только одной частицы. Именно поэтому при сопоставлении конкретного феноменологического варианта реджионной схемы с экспериментом в интервале энергий от 5 до 16 *Гэв* пришлось предположить [25], что частицы вылетают из узлов группами (кластерами) с относительно малой полной энергией в их СЦИ, распад которых определяется статистической моделью. Кластеры можно рассматривать как файрболы, сформировавшиеся не полностью из-за недостаточно высокой начальной энергии (параметр s_0 не достигнут).

3. Соответствие уравнений

Мы хотели бы подчеркнуть, что учет группировки частиц и обмена разными реджионами является абсолютно неизбежным при попытках формального применения мультиреджионного подхода в основной области фазового обмена и фактически соответствует переходу к мультипериферическому описанию.

Этот факт наиболее наглядно проявляется в том, что можно записать [72, 73] единое мультипериферическое уравнение, которое в основной области фазового объема неупругих процессов переходит в уравнение мультипериферических процессов, описываемых в рамках уравнения Бете — Солпитера, а в области применимости реджевского подхода — в уравнение для мультиреджионных диаграмм, описываемых с помощью уравнения Чу, Гольдбергера, Лоу [67]. Это единое уравнение имеет вид

$$B(k_1, p_a, p_b) =$$
$$= \overline{B}(k_1, p_a, p_b) + \frac{1}{4\pi^4} \int d^4k_3 \overline{A}_1(k_1, k_3)\, D^2(k_3^2)\, R^2(k_3, k_1, p_a)\, B(k_3, k_1, p_b), \tag{87}$$

где через B обозначена однократно недоинтегрированная мнимая часть амплитуды упругого рассеяния (или мнимая часть «амплитуды» рассеяния

*) С ростом энергии сечения этих процессов падают по крайней мере как $\ln^{-1} s$ (см. работы [69, 24]).

реджиона на частице), определяемая соотношением

$$A_1(p_a, p_b) = \frac{1}{4\pi^4} \int d^4k_1 \bar{A}_1(p_a, k_1) D^2(k_1^2) B(k_1, p_a, p_b). \tag{88}$$

Это уравнение верно как в мультипериферической, так и в мультиреджионной схемах, однако в первом случае $\bar{A}_1$ и D^2 интерпретируются соответственно как мнимая часть неприводимого блока амплитуды упругого рассеяния и квадрат пропагатора в уравнении Бете — Солпитера (39), а во втором — как квадраты вершинной части и сигнатурного множителя в уравнении Чу, Гольдбергера, Лоу *). Через R обозначен типично реджевский множитель:

$$R = (z_{a3})^{\alpha(k_1^2)}, \tag{89}$$

где $\alpha(k_1^2)$ — обмениваемая реджевская траектория ($\alpha \equiv 0$ в случае уравнения Бете — Солпитера), $\bar{B}(k_1, p_a, p_b) = \bar{A}(k_1, p_b) R^2(k_1, p_a, p_b)$. Обозначения импульсов ясны из рис. 14 (при $t = 0$ имеем $k_1^2 = k_2^2$, $k_3^2 = k_4^2$ и т. д.). Величина $|z_{a3}| = (2|t|s_{a3}/s_{a1}s_{13}) - 1$ представляет собой косинус угла рассеяния ($p_a \to k_3$) в t-канале. Иногда вместо z_{a3} без обоснования берут величину s_{a3}/s_0 при $s_0 = \text{const}$.

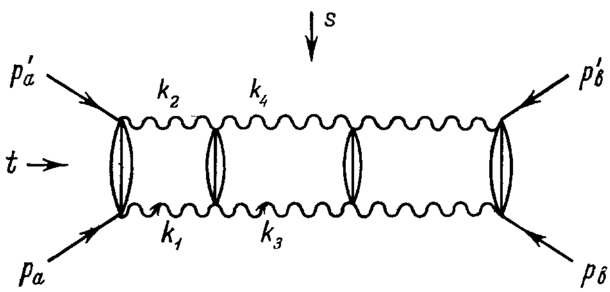


Рис. 14. Упругое рассеяние, обусловленное мультипериферическими (или мультиреджионными) процессами.

Зависимость от p_a входит в уравнение (87) только через множитель R, но $R \equiv 1$ в случае уравнения Бете — Солпитера. Поэтому в мультипериферической схеме B не зависит от p_a. Этот факт означает, что длина корреляций в периферической цепочке в случае обмена элементарным пионом меньше, чем при обмене реджевской траекторией. Он имеет важное значение при переходе к соответствующим уравнениям для парциальных амплитуд. Анализ этих уравнений в работе [73] показал, что условием их разрешимости при асимптотически постоянном полном сечении служит соотношение

$$\nu + 2\alpha(k^2) < 1, \tag{90}$$

если асимптотика $\bar{A}_1$ имеет вид **)

$$\bar{A}_1(s_i) \sim s_i^{\nu} \quad \text{при } s_i \to \infty. \tag{91}$$

Отсюда становятся ясными причины несамосогласованности траектории Померанчука. Условие (90) нарушалось в уравнении Бете — Солпитера, как показано в работе [54], из-за того, что при $\alpha \equiv 0$ недопустимо значение $\nu = 1$ (см. гл. VI, п. 1). В модели Чу, Гольдбергера, Лоу, с другой стороны, полагалось $\nu \equiv -1$ (δ-функционная модель для $\bar{A}_1$), но $\alpha(k^2)$ обращалось в единицу в точке $k^2 = 0$ (траектория Померанчука). Поскольку

*) В конкретной модели, рассмотренной в работе [67], выбиралось $\bar{A}_1(p_a, k_1) = g^2(p_a^2, k_1^2)\, \delta_+((p_a - k_1)^2 + m^2)$.

**) Случаи с $\nu < -1$ эквивалентны случаю $\nu = -1$.

везде при $k^2 > 0$ имеем $\alpha(k^2) < 1$, устранить трудность в этом случае можно тремя способами:

1) исключив из рассмотрения точку $k^2 = 0$, требуя в этой точке обращения в нуль константы связи вакуумных реджионов с частицей [24] (модель слабой связи [64]);

2) считая, что вакуумная траектория проходит ниже точки $l = 1$ (т. е. $\alpha_P(0) < 1$) [54, 55, 67];

3) полагая, что в этой точке особенность более слабая, нежели полюс [54] (см. гл. VI, п. 1).

Вторым важным выводом, полученным из анализа уравнения для парциальных амплитуд [73], является заключение о том, что после интегрирования по углу Треймана — Янга [74] все различие между мультиреджионным и мультипериферическим подходами при любом (из указанных выше) выборе R пропадает из-за того, что зависимость от s_{a3} сводится к зависимости лишь от произведения $s_{a1} \cdot s_{13}$, т. е. к выбору определенных форм-факторов в вершинах мультипериферической цепочки.

Следовательно, уравнение сводится фактически к уравнению Бете — Солпитера, несмотря на то, что формально оно учитывает «реджизацию» обмениваемой частицы.

4. Дифракционные неупругие процессы

Для процессов, где массы s_1 и s_2 фиксированы, формула (86) приводит к ряду интересных выводов. Полное сечение процесса, обязанного обмену i-й реджевской траекторией, при больших s оказывается равным [69]

$$\sigma_i \approx C_i \, | I_i(0) |^2 \, s^{2(\alpha_i(0)-1)} \ln^{-1} s, \tag{92}$$

где C_i — некоторые константы. Из (92) видно, что вклады от всех невакуумных траекторий, для которых $\alpha_i(0) < 1$, падают с ростом s степенным образом, тогда как обмен вакуумным реджионом ($\alpha_V(0) = 1$) приводит к сечению рождения одного или двух резонансов, падающему лишь логарифмически с ростом энергии.

Интересно, однако, отметить, что в качестве коэффициента в формуле (92) стоит величина $| I_i(0) |^2$, которая в случае пионной траектории много больше, чем для остальных траекторий (где она порядка единицы):

$$| I_\pi(0) |^2 \approx 4/\pi^2 \alpha_\pi'^2 \mu^4 \approx 10^3 \gg 1.$$

Поэтому в принципе может оказаться возможной такая ситуация, что для некоторых процессов образования резонансов при не слишком высоких энергиях обмен пионом будет более существенным, чем обмен вакуумным реджионом. Может быть, этим объясняется тот факт, что дифракционные неупругие процессы четко проявились лишь при энергии $E_{\text{лаб}} \sim$ ~ 20 *Гэв*. При более низких энергиях оказывается [75], что анализ изоспиновых соотношений даже в таких реакциях, как $p\pi \to N\pi\pi$, где рождается мало частиц, приводит к выводу, что обмен вакуумным реджионом не всегда играет в них главную роль. В реакциях типа $pp \to pp\pi^+\pi^-$ при энергии 16 *Гэв* также приходится учитывать обмен пионом [76].

В заключение еще раз подчеркнем, что анализ существенно неупругих процессов при попытке применить к ним мультиреджионную схему показал, что в этом случае мультиреджионная схема заметно приближается к методу, основанному на уравнении Бете — Солпитера, поскольку были признаны, во-первых, важная роль мезонных траекторий и, во-вторых, необходимость «группировки» конечных частиц, которые естественным образом вытекают из уравнения Бете — Солпитера.

X. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы рассмотрели вопрос о роли неупругих процессов при высоких энергиях и о методах их описания. С помощью условия унитарности было показано, что неупругие процессы играют столь преобладающую роль в области высоких энергий, что ими определяется упругое рассеяние на любой угол. Поэтому теоретическое описание упругого рассеяния возможно лишь после того, как понята природа неупругих процессов. В то же время оказалось, что все предложенные теоретические модели неупругих процессов приводят к чересчур широкому дифракционному конусу теневого упругого рассеяния. Это, по-видимому, связано с тем, что в этих моделях не учитывались относительные фазы матричных элементов неупругих взаимодействий, роль которых в формировании дифракционного конуса оказывается решающей.

Интересно отметить, что попытки интерпретации упругого рассеяния в этой области углов с помощью полюсов Редже привели к сходной трудности: основной вклад в ширину дифракционного конуса приходится приписывать вычетам в полюсах, а не члену, определяемому самой траекторией полюса.

Взаимосвязь этих проблем может быть понята при одновременном изучении упругих и неупругих процессов с помощью уравнения Бете — Солпитера. При таком подходе удается показать, что знание модулей матричных элементов неупругих процессов или, точнее, полных сечений позволяет изучать аналитическую структуру амплитуды упругого рассеяния. Одновременно проясняются многие черты неупругих процессов при высоких энергиях.

Изложенная теория неупругих процессов основана на точном соотношении квантовой теории поля — уравнении Бете — Солпитера, в предположении об отсутствии интерференции (мы рассматривали этот вопрос подробно в гл. V). Такая теория является внутренне непротиворечивой, удовлетворительно описывает имеющиеся экспериментальные данные по неупругим процессам, полученные в космических лучах, и связывает свойства неупругого процесса со свойствами амплитуды упругого рассеяния. При этом амплитуда теневого упругого рассеяния имеет правильные аналитические свойства и связана с неупругими процессами условием унитарности.

В рамках теории находит естественное объяснение особенно интересная, по нашему мнению, черта неупругого процесса — образование файрболов. К числу общих следствий теории относятся ограниченность массы файрболов и квадратов передаваемых 4-импульсов, логарифмический рост числа файрболов с энергией, возникновение движущейся особенности в амплитуде упругого рассеяния вследствие существования процессов файрбольного типа, внутренняя противоречивость предположения о существовании вакуумного полюса Померанчука с $\alpha_P(0) = 1$ при ультравысоких энергиях. Кроме того, в теории естественно возникает связь между периферическими и непериферическими процессами и автоматически появляется новый энергетический масштаб, связанный с массой файрбола.

Вместе с тем следует отметить, что теория еще очень груба: параметры, входящие в нее, зафиксированы еще недостаточно точно. Иными словами, в современном состоянии она может предсказывать качественные явления, но не способна еще давать точные количественные выводы. Такой уровень был до сих пор достаточен для сопоставления с данными, получаемыми из космических лучей, но он непригоден пока для детального сопоставления с более точным экспериментом на ускорителях. Однако в настоящий момент таких точных данных в требуемой области энергий еще нет. Дело в том, что теория развита и приспособлена для описания процессов при очень высокой энергии. Пользоваться ею для описания эксперимента при энергиях порядка 10 *Гэв*, как нам кажется, бессмысленно. Параметры теории стабилизируются, перестают зависеть от энергии лишь в той области энергий, в которой может образовываться хотя бы один файрбол. Согласно сделанным выше оценкам для этого нужно по крайней мере несколько десятков гигаэлектрон-вольт. Для сопоставления результатов теории с экспериментом в этой области энергий необходимо, во-первых, уточнить ее параметры и, во-вторых, выдать теоретическую информацию в виде, удобном для сравнения с конкретным экспериментом. Уточняя параметры в рамках, допускаемых основными положениями и дополнительными условиями, можно получить модели, которые приводят к четким количественным предсказаниям. Первые простейшие попытки такого рода и описаны в гл. VII—VIII обзора. В настоящий момент после пуска Серпуховского ускорителя появилась возможность для реализации этой программы.

После уточнения параметров и выбора конкретной модели с помощью ускорительных данных можно вновь вернуться к экспериментам в космических лучах и сделать ряд предсказаний с большей определенностью, чем сейчас. И лишь после этого можно будет провести детальное сопоставление эксперимента и теории в широкой области энергий. В частности, полученные предсказания можно будет проверить впоследствии на проектируемых сейчас ускорителях на 200—300 *Гэв*.

В заключение мы пользуемся случаем выразить благодарность Е. Л. Фейнбергу за важные замечания, В. Н. Акимову — за интересные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Асимптотическое значение полного сечения, наклон дифракционного конуса и множественность процесса определяются при помощи единого метода, который мы здесь изложим. Рассмотрим уравнение (32) с учетом (34а), (34б), записав его в самой общей форме

$$\varphi_l(t)=\overline{\varphi}_l(t)+\lambda_l c_l\overline{\varphi}_l(t)\otimes\varphi_l(t). \qquad (\text{П},1)$$

Здесь мы опустили в аргументах зависимость от внешних масс, чтобы упростить запись формул, обозначили

$$c_l\overline{\varphi}_l(t)\otimes\varphi_l(t)=\frac{1}{16\pi^3 t^{l+1}}\int dr\,dv\,\frac{[t(t-4\mu^2)-2tr-v^2]^{l+1/2}}{r^2+v^2}\,\overline{\varphi}_l(t,r,v)\,\varphi_l(t,r,v) \qquad (\text{П},2)$$

и ввели дополнительный множитель λ_l, который для уравнения (32) тождественно равен единице, но пока рассматривается нами как дополнительный свободный параметр.

Запишем $\varphi_l(t)$ в виде

$$\varphi_l(t)=R_l(t)/[l-\alpha(t)],$$

где $\alpha(t)$ не зависит от масс, R_l регулярна при $l=\alpha(t)$. Тогда, разлагая $R_l(t)$, $\alpha(t)$ и $\overline{\varphi}_l(t)$ при малых t, имеем из (П,1)

$$R_l+tR_l'=[l-\alpha-\gamma t]\,[\overline{\varphi}_l+t\overline{\varphi}_l']+\lambda_l c_l[\overline{\varphi}_l+t\overline{\varphi}_l']\otimes[R_l+tR_l'], \qquad (\text{П},3)$$

где, например, $R_l\equiv R_l(0)$ и т. д., штрихи означают производные по t при $t=0$, $\gamma=d\alpha(t)/dt\,|_{t=0}$ *).

*) Вклад члена с c_l' мал, а потому мы им пренебрегаем.

Приравнивая члены одинакового порядка малости по t и рассматривая все в точке $l=\alpha$, имеем

$$\left\{\begin{aligned} &R_\alpha=\lambda_\alpha c_\alpha\overline{\varphi}_\alpha\otimes R_\alpha, && (\text{П},4)\\ &R'_\alpha=-\gamma\overline{\varphi}_\alpha+\lambda_\alpha c_\alpha\overline{\varphi}'_\alpha\otimes R_\alpha+\lambda_\alpha c_\alpha\overline{\varphi}_\alpha\otimes R'_\alpha. && (\text{П},5)\end{aligned}\right.$$

Продифференцировав (П,4) по α, получим

$$\frac{dR_\alpha}{d\alpha}=\frac{d\lambda_\alpha}{d\alpha}c_\alpha\overline{\varphi}_\alpha\otimes R_\alpha+\lambda_\alpha\frac{d}{d\alpha}[c_\alpha\overline{\varphi}_\alpha]\otimes R_\alpha+\lambda_\alpha c_\alpha\overline{\varphi}_\alpha\otimes\frac{dR_\alpha}{d\alpha}. \qquad (\text{П},6)$$

Из приведенных формул видно, что ядра интегральных уравнений ((П, 4), (П, 5), (П, 6) одинаковы. Но (П, 4) является однородным уравнением, тогда как (П, 5) и (П, 6) — неоднородные уравнения. Для того чтобы все эти уравнения имели решения, необходимо и достаточно, чтобы неоднородные члены уравнений (П, 5), (П, 6) были ортогональны решениям уравнения, сопряженного (П, 4). Отсюда легко находятся значения γ и $d\lambda_\alpha/d\alpha$, использованные в формулах (46), (69). Асимптотическое значение полного сечения σ^P (48) получается точно таким же методом, если рассмотреть (П, 3) при $t=0$, $\lambda_l=1$ и $l=1+\varepsilon$ ($\varepsilon\to 0$). Приравняв члены одинакового порядка по ε, получим неоднородное уравнение для $(dR_l/dl)_{l=1}$. Условие ортогональности его свободного члена к решению сопряженного с (П, 4) уравнения приведет к формуле (48).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. M. Miesowicz, Rept Progr. in Cosmic Ray Phys. **10** (1970).
2. P. Ciok, T. Coghen, J. Gierula, R. Holynski, A. Jurak, M. Miesowicz, T. Saniewiska, O. Stanisz, T. Pernegr, Nuovo Cimento 8, 166; **10**, 741 (1958).
3. K. Niu, Nuovo Cimento **10**, 994 (1958).
4. G. Cocconi, Phys. Rev. **111**, 1699 (1958).
5. Н. А. Добротин, С. А. Славатинский, Nucl. Phys. **35**, 152 (1962).
6. S. Hasegawa, Progr. Theor. Phys. **26**, 150 (1961); **29**, 128 (1963).
7. K. Rybicki, Доклад на конференции по космическим лучам, Новосибирск, 1967.
8. W. D. Walker, Preprint ANL-HEP 6909 (1968) (Symposium on Multiparticle Production).
9. Г. Б. Жданов, М. И. Третьякова, М. М. Чернявский, Письма ЖЭТФ 8, 659 (1968).
10. O. Czyzewski, Proc. of the 14th Intern. Conference on High-energy Physics, Vienna, 1968, стр. 367.
11. Л. Д. Ландау, Изв. АН СССР, сер. физ. **17**, 51 (1953); С. З. Беленький, Л. Д. Ландау, УФН **56**, 309 (1955).
12. E. Fermi, Progr. Theor. Phys. 5, 570 (1950); Phys. Rev. **81**, 683 (1951).
13. Г. Т. Зацепин, ДАН **67**, 933 (1949).
14. Е. Л. Фейнберг, Д. С. Чернавский, ДАН **81**, 795 (1951); **91**, 511 (1953).
15. Д. И. Блохинцев, Proc. of CERN Symposium, vol. 2, 1956, стр. 155.
16. C. Goebel, Phys. Rev. Lett. **1**, 337 (1958).
17. G. Chew, F. Low, Phys. Rev. **113**, 1640 (1959).
18. И. М. Дремин, Д. С. Чернавский, ЖЭТФ 38, 229 (160).
19. F. Salzman, G. Salzman, Phys. Rev. Lett. 5, 377 (1960); Phys. Rev. **120**, 599 (1960).
20. K. Gottfried, J. D. Jackson, Nuovo Cimento 33, 309 (1964); 34, 735 (1964).
21. В. Б. Берестецкий, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ **39**, 1078 (1960).
22. D. Amati, S. Fubini, S. Stanghellini, M. Tonin, Nuovo Cimento **22**, 569 (1961); **26**, 896 (1962).
23. И. М. Дремин, И. И. Ройзен, Р. Б. Уайт, Д. С. Чернавский, ЖЭТФ 48, 952 (1965).

24. К. А. Тер-Мартиросян, ЖЭТФ **44**, 341 (1963); И. А. Вердиев, А. М. Попова, К. А. Тер-Мартиросян, ЖЭТФ **46**, 1295 (1964); см. также Т. М. В. Kibble, Phys. Rev. **131**, 2282 (1963).
25. H. M. Chan, J. Loskiewicz, A. Allison, Nuovo Cimento **57A**, 93 (1968).
26. L. Van Hove, Nuovo Cimento **28**, 798 (1963); Rev. Mod. Phys. **36**, 655 (1964).
27. И. В. Андреев, И. М. Дремин, ЯФ **7**, 890 (1968).
28. H. A. Kastrup, Phys. Rev. **147**, 1130 (1966).
29. H. Satz, Phys. Lett. **25B**, 220 (1967).
30. G. Fast, R. Hagedorn, L. W. Jones, Nuovo Cimento **27**, 856 (1963).
31. И. Н. Сисакян, Е. Л. Фейнберг, Д. С. Чернавский, Труды ФИАН **57** (1970).
32. K. J. Foley, S. J. Lindenbaum, W. A. Love et al., Phys. Rev. Lett. **11**, 425 (1963); **15**, 45 (1965).
33. J. V. Allaby, A. N. Diddens, A. Klovning, E. Lillethun, E. J. Sacharidis, K. Schlüpmann, A. M. Wetherell, Phys. Lett. **27B**, 49 (1968); **28B**, 67 (1969).
34. И. В. Андреев, И. М. Дремин, Письма ЖЭТФ **6**, 810 (1967); ЯФ **8**, 814 (1968).
35. I. V. Andreev, I. M. Dremin, I. M. Gramenitskii, Nucl. Phys. **B10**, 137 (1969).
36. A. A. Anselm, I. T. Dyatlov, Phys. Lett. **24B**, 479 (1967); А. А. Ансельм, И. Т. Дятлов, ЯФ **6**, 591, 603 (1967).
37. R. Margolis, S. C. Frautschi, Proc. of the 14th Intern. Conference on High-energy Physics, Vienna, 1968.
38. T. T. Chou, C. N. Yang, High-energy Physics and Nuclear Structure, North-Holland, Amsterdam, 1967, стр. 348; Phys. Rev. **170**, 1591 (1968).
39. H. Fukuda, C. Iso, Nuovo Cimento **43**, 43 (1956).
40. Z. Koba, M. Namiki, Nucl. Phys. **B8**, 413 (1968).
41. A. Krzywicki, ссылка в работе [40].
42. K. Zalewski, Nukleonika **13**, 9 (1968).
43. L. Michejda, Nucl. Phys. **B4**, 113 (1968).
44. L. Michejda, J. Turnau, A. Bialas, Nuovo Cimento **56A**, 241 (1968).
45. И. М. Дремин, ЯФ **10**, 818 (1969).
46. E. W. Anderson, E. J. Bleser, G. B. Collins, T. Fujii et al., Phys. Rev. Lett. **16**, 855 (1966).
47. K. J. Foley, R. S. Jones, S. J. Lindenbaum, W. A. Love, S. Ozaki, E. D. Platner, C. A. Quarles, E. H. Willen, Phys. Rev. Lett. **19**, 397 (1967).
48. F. Turkot, Proc. of the Topical Conference on High-energy Collisions of Hadrons, vol. **1**, Geneva, 1968, стр. 316.
49. И. М. Дремин, ЯФ **6**, 153 (1967).
50. G. C. Wick, Phys. Rev. **96**, 1124 (1954).
51. а) И. М. Дремин, ЖЭТФ **41**, 821 (1961). б) В. Н. Акимов, И. М. Дремин, Препринт ФИАН А-62 (1966).
52. Б. А. Арбузов, А. А. Логунов, А. Т. Филиппов, О. А. Хрусталев, ЖЭТФ **46**, 1266 (1964).
53. И. И. Ройзен, Д. С. Чернавский, ЖЭТФ **42**, 625 (1962).
54. И. И. Ройзен, в сб. «Нуклоны и пионы», Дубна, 1968; Phys. Lett. **29B**, 428 (1969).
55. F. Low, Report at the 14th Intern. Conference on High-energy Physics, Vienna, 1968.
56. В. Н. Акимов, И. И. Ройзен, Препринт ФИАН № 42 (1969); ЯФ **11**, 473 (1970).
57. а) В. Н. Грибов, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ **42**, 1141 (1962); **43**, 308 (1962). б) В. Н. Грибов, ЖЭТФ **41**, 1962 (1961).
58. Е. Л. Фейнберг, Д. С. Чернавский, УФН **82**, 1 (1964).
59. В. Н. Акимов, И. М. Дремин, И. И. Ройзен, Д. С. Чернавский, ЯФ **7**, 629 (1968).
60. а) И. М. Дремин, И. И. Ройзен, Д. С. Чернавский, Труды ФИАН 57 (1970). б) И. М. Дремин, И. И. Ройзен, Phys. Lett. **31B**, 71 (1970).
61. И. Г. Азнаурян, Кандидатская диссертация (Серпухов, 1969).
62. H. Harari, Phys. Rev. Lett. **20**, 1395 (1968); V. Barger, D. Cline, Phys. Rev. **155**, 1792 (1967).
63. L. Michejda, Preprint IBJ 889/VI/PH (1968).

64. В. Н. Грибов, А. А. Мигдал, ЯФ 8, 1002, 1212 (1968).
65. Р. Н. Басилова, Н. Л. Григоров, В. Е. Нестерова и др., Изв. АН СССР **31**, 1450 (1967).
66. В. Н. Акимов, И. И. Ройзен, ЯФ **9**, 1067 (1969).
67. G. F. Chew, M. L. Goldberger, F. F. Low, Phys. Rev. Lett. **22**, 208 (1969).
68. G. F. Chew, A. Pignotti, Phys. Rev. Lett. **20**, 1078 (1968); Phys. Rev. **176**, 2112 (1969).
69. И. М. Дремин, Д. С. Чернавский, ЖЭТФ **45**, 1943 (1963).
70. M. Toller, Nuovo Cimento **37**, 631 (1965).
71. G. Domokos, Phys. Rev. **159**, 1387 (1967).
72. M. Ciafaloni, C. De Tar, M. N. Misheloff, Preprint UCRL-19286 (1969).
73. И. М. Дремин, Письма ЖЭТФ **11**, 272 (1970).
74. S. B. Treiman, C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. **8**, 140 (1962).
75. H. Satz, Phys. Lett. **29B**, 38 (1969).
76. J. G. Rushbrooke, T. R. Williams, Phys. Rev. Lett. **22**, 48 (1969).