

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТРЕЩИН ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

Ю. П. Райзер

1. ВВЕДЕНИЕ. НЕКОТОРЫЕ СУЩЕСТВЕННЫЕ ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ

Теоретическая прочность идеальной кристаллической решетки, соответствующая одновременному разрыву всех межмолекулярных связей, очень велика — всего раз в десять меньше модуля Юнга. Прочность реальных твердых тел на несколько порядков меньше, что обычно связано с существованием дефектов решетки. Из различных типов дефектов здесь будут рассматриваться только трещины. Хотя действительно хрупких материалов имеется не так уж много (стекло, кварц и др.), вопрос о трещинах в хрупких телах имеет большое практическое значение потому, что многие, казалось бы, пластические материалы (металлы) разрушаются «хрупким» образом. Проблеме хрупкого разрушения уделяется много внимания, особенно в последние два десятилетия.

В реальных твердых телах всегда имеется множество трещин. Повседневный опыт свидетельствует о том, что пока приложенные к телу нагрузки малы, трещины не растут и тело сохраняет свою несущую способность, даже если нагрузки увеличиваются. Но как только нагрузка достигает некоторой достаточно большой величины, характерной для каждой трещины, последние начинают расширяться. Развитие трещин может происходить по-разному. В одних случаях трещина очень быстро растет вплоть до полного разрыва тела, даже при неизменной, но достигшей критической величины нагрузке, т. е. состояние оказывается неустойчивым. В других случаях трещины медленно расширяются при нарастании нагрузок, останавливаясь, как только прекращается рост нагрузки, причем размеры таких устойчивых равновесных трещин каким-то образом связаны с приложенными к телу нагрузками.

Теория трещин развивалась естественным путем, обычным для большинства областей физики и механики, путем углубления и совершенствования представлений, выдвижения новых идей, постановки новых вопросов и задач, охвата и объяснения все более широкого круга деталей. Современная теория исходит из представлений о теле как о сплошной хрупкой среде, которая подчиняется закону Гука (линейность связи напряжений и деформаций) вплоть до разрушающих напряжений и которая, следовательно, описывается классической теорией упругости. В ранних работах Инглиса (1913 г.)¹ и Мухелишвили (1919 г.)² рассматривалась задача теории упругости для тела, находящегося под действием растягивающих нагрузок и обладающего полостью эллиптического сечения, в частности, тонким разрезом, который может имитировать трещину. Рассмотрение упругого равновесия тела позволяет определить поля

напряжений и деформаций, в том числе и профиль растянутого разреза, но решение оказывается возможным при любых размерах разреза. Кроме того, профиль конца трещины оказывается закругленным (рис. 1), а напряжения и деформации тела вблизи края трещины — бесконечными при любых конечных нагрузках и размерах разреза. Поскольку реальное тело выдерживает только напряжения, не превосходящие определенного

предела, отсюда следует, что тело, ослабленное разрезом, должно было бы разрушаться при любых малых нагрузках.

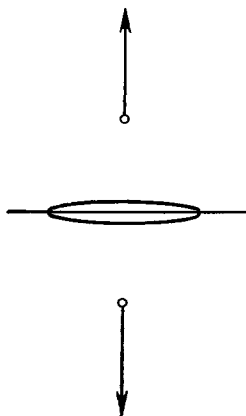


Рис. 1.

Выход из этого противоречия был указан Гриффитсом (1920 г.)³, работа которого была основополагающей для теории трещин. Гриффитс первый понял, что нельзя построить адекватную теорию трещин с помощью одних лишь понятий теории упругости. Необходимо ввести в рассмотрение дополнительные величины, характеризующие молекулярные силы сцепления и сопротивляемость материала разрыву. В качестве такой величины он использовал энергетическую константу — поверхностное натяжение γ , т. е. работу, необходимую для образования единицы новой поверхности. Гриффитс рассматривал неустойчивые трещины в однородном поле растягивающих напряжений и нашел критическое значение напряжений, при котором трещина данной длины

начинает катастрофически расти. Ирвин⁴ и Орован⁵ существенно расширили класс материалов, к которым можно было применять теорию трещин, заметив, что некоторые пластичные при обычных испытаниях вещества ведут себя как хрупкие при образовании трещин. Пластические деформации в таких материалах сосредотачиваются в тонком приповерхностном слое трещины, и вместо поверхностного натяжения γ следует просто использовать некоторую эффективную величину $\gamma_{\text{эфф}}$, включающую в себя затраты энергии на пластические деформации. Заметим, что теоретически величина $\gamma_{\text{эфф}}$, которая оказывается на два-три порядка больше γ , до сих пор не получена.

Вопрос об устойчивости трещин, о форме ее края и о бесконечности напряжений интересовал многих физиков и механиков, которые пытались объяснить появление физически неправдоподобных особенностей края трещины, следующих из теории: закругленности профиля и бесконечности напряжений. К этому вопросу обращались Ребиндер⁶, Мотт⁷, Лифшиц⁸, Френкель⁹, Христианович (см. ¹⁰) и др.

Весьма существенной для математической теории трещин явилась работа Ирвина 1957 г.¹¹, который в общей форме связал скорость освобождения упругой энергии, определяющую критические условия для начала роста трещин, с так называемым коэффициентом интенсивности напряжений у края трещины.

Большое значение формулы Ирвина состоит в том, что в дальнейшем она послужила основой для формулировки общего метода решения задач о любых трещинах в рамках так называемого «энергетического» подхода. Сам Ирвин рассматривал главным образом неустойчивые трещины, и его некоторые высказывания по поводу медленно растущих при увеличении нагрузки трещин свидетельствуют о том, что он не вполне правильно понимал этот процесс.

Начиная с 1955 г. в СССР Христианович, Баренблатт^{12,13} и их сотрудники развивали новое направление в теории трещин хрупкого разрушения, основанное на высказанной Христиановичем (см. ¹⁰) идее

о конечности напряжений в конце трещины. В ходе этих работ Баренблаттом была в общей форме поставлена задача об устойчивых равновесных трещинах как задача теории упругости, в которой размер трещины находится в зависимости от приложенной нагрузки. В 1959 г. Баренблатт в окончательном виде сформулировал^{14,15} теорию, которая, во-первых, в силу самой постановки проблемы охватывала любые случаи как устойчивых, так и неустойчивых трещин и, во-вторых, содержала иной, «силовой» (как мы будем его в дальнейшем называть) подход к трещинам. Вместо энергетического параметра (поверхностного натяжения) в уравнения, диктуемые теорией упругости, непосредственно вводятся молекулярные силы сцепления, действующие на краю трещины и ответственные за сопротивляемость материала разрыву. Следует отметить, что условие, равносильное гипотезе о конечности напряжений, в близкой к теории трещин задаче о распространении «двойников», было высказано в работе Лифшица⁸ (1948 г.)⁹.

Введение сил сцепления позволило объяснить причину существования бесконечных напряжений на концах трещины в решениях, свойственных энергетическому подходу, физически правильным образом устранить эти нереальные бесконечности и выяснить детали строения (профиль) концов трещин, где, собственно, и разыгрывается процесс разрыва материала.

В макроскопическом смысле оба подхода, силовой и энергетический, оказались эквивалентными, чего и следовало ожидать, ибо новый подход является более «микроскопическим» и, следовательно, не опровергает старый, но лишь дополняет и уточняет его. Весь макроскопический эффект сил сцепления определяется единственной константой вещества, которая интегральным образом зависит от сил сцепления. Данная Баренблаттом общая постановка задач о трещинах способствовала, в частности, и последующей формулировке задач в рамках энергетического метода применительно к любым (устойчивым и неустойчивым) трещинам. Близкую по духу модель трещины с учетом сил сцепления, но не в столь общей и законченной форме, независимо (чуть позже) предложили Леонов и Панасюк¹⁶.

Судя по литературе, работы Баренблатта завоевали признание; они используются и развиваются. Об этом можно судить, например, по тому, что в нескольких статьях, содержащихся в семитомной энциклопедии по разрушению, которая вышла в США в 1968 г.³¹, подробно излагается теория Баренблатта, причем теорию так и называют его именем. Идеи этой теории, в частности, были применены Косевичем и Пастуром¹⁷ к теории распространения «двойников» — важного явления, существенного для объяснения механизма пластической деформации.

Однако наряду с этим в последнее время работы Баренблатта подверглись ожесточенным нападкам со стороны некоторых авторов^{25–28}. Результатирующий вывод критических выступлений короче всего передается следующей цитатой: «...изложение ошибочных и формальных концепций Г. И. Баренблатта заняли в нашей литературе место, не соответствующее их действительному значению»²⁷ — ситуация, как видим, сложилась довольно странная.

Поскольку дело касается некоторого физического явления, его понимания и теоретического описания, безусловный интерес представляет общее рассмотрение физических основ и идей, на которых базируются современные построения теории трещин, чему и посвящена эта статья. Для более глубокого ознакомления с проблемой трещин можно рекомендовать обзор¹⁵ (см. также книгу³⁰); доведенную до более позднего времени библиографию можно найти в обзоре¹⁸.

II. НЕУСТОЙЧИВАЯ ТРЕЩИНА (ЗАДАЧА ГРИФФИТСА)

Рассмотрим бесконечное тело, которое находится в однородном поле растягивающих напряжений σ_{yy} , создаваемых однородной нагрузкой $p = \sigma_{yy} = \text{const}$, приложенной на бесконечности. Пусть в теле имеется прямолинейная трещина — полоса шириной $2l$, которая протянулась в направлении оси z , перпендикулярной к плоскости рис. 2. Требуется найти критическое напряжение p_0 , при котором трещина начнет неограниченно расширяться.

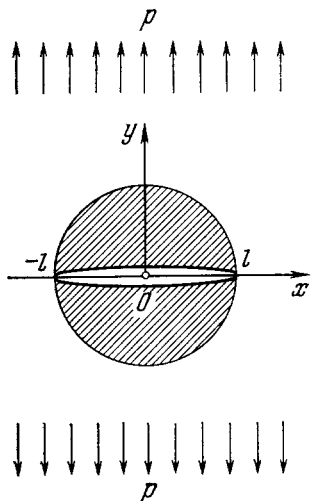


Рис. 2.

Представим себе, что трещины нет. Тогда однородно растянутое тело обладает упругой энергией $p^2/2E$ на единицу объема (E — модуль Юнга). Пусть теперь появился разрез. Под действием растягивающих напряжений он раскроется, и напряжения в его окрестности ослабеют (материал «отпустит»). Характерный размер этой окрестности (заштрихованной на рис. 2), очевидно, порядка l . Следовательно, «высвободится» упругая энергия W порядка $W \sim (p^2/2E)(2l)^2$ на единицу длины трещины. С другой стороны, при раскрытии трещины затрачивается работа на преодоление сил сцепления, действующих между противоположными берегами разреза, и эта работа, или поверхностная энергия трещины, равна $\Pi = 2\gamma \cdot 2l$ на единицу длины тела (написано 2γ , так как образуются две поверхности).

Если отвлечься от изменений температуры, считая ее постоянной, то с точностью до константы свободная энергия F складывается из объемной упругой U и поверхностной энергии трещины Π . Самопроизвольное возникновение трещины, не сопровождаемое работой внешних сил, приводит к изменению свободной энергии

$$\Delta F = \Delta(U + \Pi) = -W + \Pi \sim -(p^2/2E)4l^2 + 4\gamma l.$$

Видно, что ΔF (или F), как функция l , имеет максимум, соответствующий $p = p_0 \sim (\gamma E/l)^{1/2}$. Величина p_0 , при которой трещина с полушириной $l \sim \gamma E/p_0^2$ равновесна, представляет собой критическое напряжение. Равновесие это неустойчивое, потому что свободная энергия не минимальна, а максимальна. При $p > p_0$ $\frac{\partial F}{\partial l} < 0$ и уже существующая трещина данной ширины начнет неограниченно расширяться. При нагрузке меньше критической $\frac{\partial F}{\partial l} > 0$ и трещина должна сокращаться*).

Таким образом, критерий неустойчивого равновесия и начала роста трещины таков:

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} (-W + \Pi) = -\frac{\partial W}{\partial l} + 4\gamma \leq 0. \quad (1)$$

Путем более точного расчета с использованием результатов Инглиса¹ для величины W Гриффитс³ нашел точное значение критического напряжения

$$p_0 = [2E\gamma/\pi(1-\nu^2)l]^{1/2}, \quad (2)$$

*) Реальные трещины при докритических нагрузках не захлопываются. Возможно, на поверхности концентрируются посторонние атомы или происходят какие-то превращения, препятствующие стягиванию поверхностей.

где ν — коэффициент Пуассона. Эта формула относится к случаю плоской деформации (который в дальнейшем только и будет рассматриваться), когда смещения среды в направлении z , перпендикулярном к плоскости чертежа (см. рис. 2), равны нулю, а нормальные напряжения σ_{zz} отличны от нуля. Эту и все последующие формулы можно вывести и для случая плоского напряженного состояния, когда смещения в направлении z таковы, что отсутствуют напряжения σ_{zz} .

Опыт хорошо подтверждает критическое условие Гриффитса $p_0 l^{1/2} = \text{const}$. В опытах самого Гриффитса³ на стекло наносились трещины различной ширины и измерялась нагрузка, при которой стекло разрушалось. Оказалось, что $p_0 l^{1/2} \approx 26 \text{ кг/см}^{3/2}$, что соответствует, например, $p_0 = 58 \text{ кг/см}^2$, $2l = 0,38 \text{ см}$.

III. КОЭФФИЦИЕНТ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ И КРИТЕРИЙ РОСТА ТРЕЩИН

Скорость освобождения упругой энергии при увеличении площади трещины, которая, в сущности, определяет критические условия, вычисляется легко только в простейших случаях. При неоднородных нагрузках или непрямой форме трещины вычисление упругой энергии представляет собой весьма сложную задачу.

Эта трудность была преодолена Ирвином¹¹ с помощью следующего приема. Как уже отмечалось выше, математические методы теории упругости, примененные к нагруженному телу с тонким разрезом, в принципе позволяют найти поле напряжений в теле и смещения точек поверхности растянутого разреза, т. е. профиль трещины. На самой свободной поверхности трещины напряжения, естественно, отсутствуют (силы сцепления между берегами в теории пока не фигурируют), и потому в получающемся решении уравнений упругого равновесия профиль края трещины оказывается закругленным (рис. 1 и 3). По этой причине деформация среды, а следовательно, и напряжение в точке O со стороны среды оказываются бесконечными, а напряжение в этой точке терпит разрыв.

Рассмотрим какой-нибудь участок трещины вблизи края и направим ось x' в плоскости трещины перпендикулярно к ее контуру. Начало координат O поместим в точку края трещины (см. рис. 3). Как следует из математического решения, асимптотически профиль края $v(x')$ и растягивающие напряжения $\sigma_{yy}(x')$ на продолжении плоскости трещины на расстояниях $|x'|$, малых по сравнению с размерами всей трещины, ведут себя как

$$v = 4(1 - \nu^2) E^{-1} N |x'|^{1/2} + O(|x'|^{3/2}), \quad (3)$$

$$\sigma_{yy} = N (x')^{-1/2} + O(1), \quad (4)$$

где N — константа. Эта константа, имеющая размерность $\text{дин/см}^{3/2}$, полностью определяет поведение поля напряжений и деформаций у края

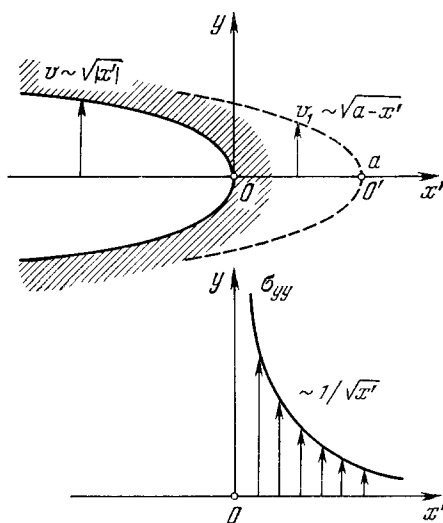


Рис. 3.

трещины и играет важную роль в теории. Она получила название коэффициента интенсивности напряжений. В решении уравнений теории упругости N зависит от нагрузок и размеров трещины, например, при однородной нагрузке $p = \text{const}$ и трещине — полосе шириной $2l$ $N = p(l/2)^{1/2}$.

Предположим, что трещина расширилась и край ее O сместился вправо на небольшое расстояние a , такое, что при $|x'| \sim a$ еще справедливы асимптотические формулы (3) и (4). Пусть это произошло при неподвижных границах тела, к которым приложены нагрузки, так что внешние силы не совершили никакой работы. Найдем изменение упругой энергии тела, которое в этом случае связано только с расширением трещины. Для этого сделаем мысленный разрез вдоль плоскости трещины от $x' = 0$ до $x' = a$ и положим, что к поверхностям разреза приложены фиктивные «внешние» силы, равные и противоположные истинным напряжениям $\sigma_{yy}(x')$, так, чтобы поверхности удерживались вместе. Пусть эти силы постепенно ослабевают до нуля. Поверхности при этом столь же постепенно расходятся до окончательного нового профиля $v_1(x') = v(x' - a)$ (см. рис. 3). Работа, совершенная фиктивными силами при раскрытии разреза, и будет равна изменению упругой энергии тела. Работа эта отрицательна, и, следовательно, упругая энергия уменьшается. Освобождение энергии на единицу длины трещины в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, очевидно, равно

$$\Delta W = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^a \sigma_{yy}(x') v(x' - a) dx = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{E} N^2 a.$$

Коэффициент $1/2$ перед знаком интеграла появляется вследствие линейности связи смещений поверхности и сил при постепенном убывании последних. Область $x' < 0$ не дает вклада в интеграл, так как здесь поверхности свободные.

Как ясно из самого вывода, формула справедлива для любой малой вариации площади трещины δS (в данном случае $\delta S = a \cdot 1$), и связанное с такой вариацией освобождение упругой энергии тела $\delta W = -\delta U$ равно

$$\delta W = 2\pi(1-\nu^2) E^{-1} N^2 \delta S. \quad (5)$$

Оно определяется только локальными свойствами края трещины, характеризуемыми коэффициентами интенсивности N . Формулу (5) можно вывести и путем точного вычисления упругой энергии тела для какого-либо конкретного случая и замены комбинации нагрузок и размеров, входящих в формулу для скорости освобождения энергии, на N . Так, для бесконечного тела с прямолинейной трещиной ширины $2l$, находящегося в однородном поле внешних напряжений p , согласно Инглису¹ $W = \pi(1-\nu^2)p^2 l^2 E^{-1}$, т. е.

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{2\pi(1-\nu^2) p^2 l}{E},$$

что вместе с выражениями $N = p(l/2)^{1/2}$ и $\delta l = \delta S/2$ дает (5). Тот факт, что p и l выпадают из формулы для $\frac{\partial W}{\partial l}$ и заменяются одной величиной N , подтверждает определяющую роль края трещины.

Комбинируя выражение (5) с соответствующим произвольной вариации δS неравенством типа (1) для всего тела с трещиной

$$\delta F = -\delta W + \delta \Pi \leq 0, \quad \delta \Pi = 2\gamma_{\text{эфф}} \delta S, \quad (6)$$

Ирвин получает критерий роста («начала быстрого распространения») трещины

$$\pi(1-\nu^2) E^{-1} N^2 \geq \gamma_{\text{эфф}}. \quad (7)$$

IV. СЛУЧАЙ, КОГДА СИЛЫ ПРИЛОЖЕНЫ ИЗНУТРИ ТРЕЩИНЫ

Условие стационарности свободной энергии при равновесии $\delta F = 0$ несправедливо в случае, когда изнутри трещины приложены силы, так как при вариации площади трещины смещается вся ее поверхность и силы совершают работу. Между тем процессы, при которых внешние силы приложены к телу не с наружной поверхности (или не только с наружной), но изнутри трещины, представляют большой интерес. Сюда относится, например, случай расклинивания материала или разрыв его изнутри газом, находящимся под высоким давлением *). Применительно к этим случаям, условие равновесия необходимо записать в форме, соответствующей вариации трещины не при постоянных смещениях точек приложения сил, а при неизменных силах.

В обратимом процессе при постоянной температуре приращение свободной энергии δF равно работе внешних сил δR . Равенство $\delta F = \delta R$ означает, что внутреннее состояние тела равновесно: если $\delta R = 0$, то $\delta F = 0$, т. е. свободная энергия стационарна. Пусть силы приложены к поверхности тела; тогда

$$\delta R = \int p du df,$$

где p — сила, приходящаяся на единицу площади, u — смещение точки поверхности тела от свободного состояния, df — элемент поверхности, интеграл берется по всем поверхностям.

В условиях механического равновесия упругого тела силы линейно связаны со смещениями. Поэтому при равновесной деформации тела от свободного состояния ($p = 0$, $u = 0$) до некоторого состояния, соответствующего p и u , силы должны нарастать пропорционально деформации. В результате упругая энергия в этом состоянии оказывается равной половине работы сил p на перемещениях u (теорема Клапейрона):

$$U = \frac{1}{2} A, \quad A = \int p u df. \quad (8)$$

Если трещина немного вырастает при незакрепленных границах, но неизменных нагрузках p , границы смещаются и приложенные к ним силы производят работу $(\delta R)_p = \delta \int p u df = 2\delta U$. Условие равновесия $\delta F = \delta U + \delta \Pi = \delta R$ в этом случае принимает форму условия стационарности термодинамического потенциала $\Phi = F - 2U$:

$$(\delta \Phi)_p = \delta \Pi - (\delta U)_p = 0. \quad (9)$$

Таким образом, приращение площади трещины освобождает материал настолько, что внешние силы еще больше деформируют тело и совершают работу δR , которая не только восполняет затраты энергии на образование новой поверхности $\delta \Pi$, но и запасается в упругой энергии тела, причем $\delta \Pi = (\delta U)_p = (\delta R)_p / 2$.

Выше было вычислено количество упругой энергии δW , которое освобождается при увеличении площади, свободной от сил трещины на δS , при условиях, когда внешние силы не совершают работы (при закрепленных границах). Величина δW выражается через коэффициент

*) Интересно, что последнее имеет место при разрушении прозрачных полимеров типа органического стекла под действием интенсивного лазерного излучения. Как показали опыты ²⁰, внутри образцов образуются газовые пузырьки с высоким давлением и возникающие дискообразные трещины развиваются из пузырьков, благодаря распирающему действию газового давления.

интенсивности напряжений формулой (5). Проварьируем ту же равновесную трещину на δS при неизменных нагрузках; упругая энергия тела вырастет при этом на величину $(\delta U)_p$, в точности равную δW . Покажем, что этот результат справедлив и в том случае, когда к поверхности трещины приложены произвольные силы. В самом деле, приращение упругой энергии при вариации трещины и неизменных силах складывается из приращения δU_1 , связанного с раскрытием нового участка разреза и работой δR всех сил на перемещениях всех поверхностей.

Но δU_1 , как и раньше, определяется только коэффициентом интенсивности напряжений $\delta U_1 = -\delta W$, а δR , в соответствии с постоянством сил и теоремой Клапейрона, равно $\delta R = \delta A = 2\delta U$. Поэтому $\delta U = \delta U_1 + \delta R = -\delta W + 2\delta U$, откуда $\delta U = \delta W$. Итак, при любой системе сил p , приложенных к телу, в том числе и к поверхности трещины,

$$(\delta U)_{p=\text{const}} = \delta W = 2\pi(1 - \nu^2) E^{-1} N^2 \delta S, \quad (10)$$

где N соответствует данной системе сил. В соответствии с (9) критерий Ирвина (7) остается справедливым всегда, независимо от того, приложены ли силы снаружи тела или изнутри трещины.

V. УСТОЙЧИВЫЕ РАВНОВЕСНЫЕ ТРЕЩИНЫ И РАЗРУШЕНИЕ ТЕЛА

В случае однородного поля растягивающих напряжений и ненагруженной поверхности трещины свободная энергия тела при равновесии максимальна, и потому равновесие неустойчиво. Одним из признаков неустойчивости служит тот факт, что равновесное (критическое) напряжение p_0 уменьшается при возрастании размера трещины (ширины — в плоском случае). Ясно, что если трещина по какой-либо причине немного расширится, то приложенное напряжение окажется выше критического, соответствующего новой ширине, и рост пойдет еще быстрее. Трещина оказывается неустойчивой при достаточно сильной нагрузке, если распределение внешних сил таково, что созданные ими напряжения в плоскости трещины не убывают (или слишком медленно убывают) по мере удаления от края трещины наружу. В этом случае суммарная растягивающая внешняя сила, относящаяся ко всей площади трещины, растет пропорционально нарастанию этой площади, т. е. разрывающее действие нагрузки недостаточно ослабевает по мере расширения трещины.

Однако существуют устойчивые равновесные состояния. В этих состояниях свободная энергия имеет не максимум, а минимум. Физически ясно, что равновесие устойчиво, если линейный размер трещины (ширина, радиус) и приложенные нагрузки связаны не обратной, а прямой зависимостью, и напряжения, вызванные внешними силами, достаточно быстро убывают в плоскости трещины при удалении от ее краев наружу. В этом случае при случайном возрастании площади трещины суммарная растягивающая сила, относящаяся ко всей площади, увеличивается медленнее, чем сама площадь, и рост останавливается. Можно сказать иначе: приложенная нагрузка становится меньше равновесной, соответствующей выросшей трещине.

Процесс развития трещин в хрупких материалах можно представить себе качественно следующим образом. В материале имеются микротрещины. При увеличении приложенной к телу растягивающей нагрузки в каком-нибудь месте достигается напряжение, критическое по отношению к имеющейся в этом месте трещине определенного размера. Размер микротрещины, естественно, мал по сравнению с характерной длиной, на которой заметно меняются напряжения, вызванные внешними нагрузками (рис. 4). Поэтому микротрещина оказывается практически в однородном

поле напряжений. По достижении критического напряжения она становится неустойчивой и начинает быстро расширяться. Однако в какой-то момент ее размер вырастает до величины, сравнимой с характерным масштабом, на котором меняются напряжения. Если нагрузки в какой-то мере сосредоточенные, вследствие чего напряжения в целом уменьшаются вдоль плоскости трещины, как на рис. 4, то рост трещины начнет замедляться. При определенных условиях (нагрузки сосредоточены, не слишком велики и приложены достаточно далеко от границ тела), трещина в конце концов перестанет расти, станет устойчивой и в таком состоянии при неизменной нагрузке тело сможет находиться долгое время. Если эти необходимые условия не выполняются, растущая трещина достигает границ тела, что может привести к его разрушению. Существенно, что когда размеры трещины становятся сравнимыми с размерами тела, трещина становится неустойчивой даже в том случае, когда при тех же самых нагрузках в неограниченной среде она устойчива.

Изложенные соображения, впервые в четкой форме высказанные Баренблаттом¹⁴, целиком и полностью подтверждаются также впервые полученными в его работах^{14,15} математическими решениями. Эти решения, которые демонстрируют закономерности равновесных трещин, были найдены Баренблаттом при помощи «силового» метода, о котором пойдет речь в гл. VI. Здесь же мы получим эти результаты на основе энергетического подхода, поскольку с энергетическим методом мы уже познакомились. Содержание энергетического подхода, по существу, заключено в формулах (5) — (7) или (9), но только формулы (6), (7), если отвлечься от вопроса об устойчивости, следует записать в виде равенств, соответствующих равновесному состоянию (в случае устойчивого равновесия свободная энергия или термодинамический потенциал минимальны и знак неравенства в (6) меняется на противоположный).

Если на основе решения задачи теории упругости для тела с данными нагрузками и разрезом данной формы, но пока не известного размера составить выражение для коэффициента интенсивности напряжений N , то уравнение (7)

$$\pi(1 - \nu^2) E^{-1} N^2 = \gamma \quad (11)$$

и даст искомую связь между размером и нагрузками.

Рассмотрим в качестве примера прямоугольную трещину — полосу ширины $2l$, когда нагрузки симметричны как относительно плоскости трещины, так и относительно перпендикулярной плоскости, проходящей через середину полосы. Начало координат $x = 0$ поместим в середину разреза (см. рис. 5). В соответствии с решением Мусхелишвили^{2, 19} для такой задачи

$$N = \frac{(2l)^{1/2}}{\pi} \int_0^l \frac{p(x) dx}{(l^2 - x^2)^{1/2}}, \quad (12)$$

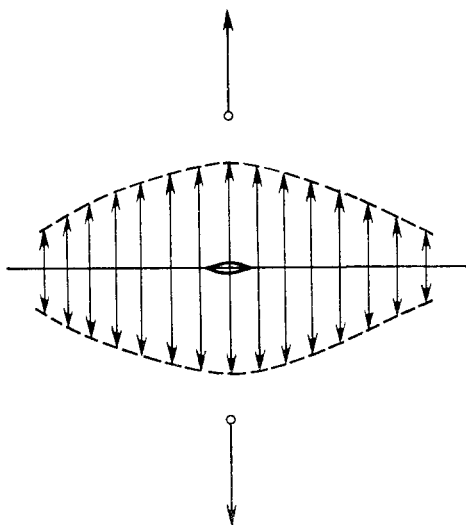


Рис. 4.

где $p(x)$ — растягивающие нормальные напряжения σ_{yy} , создаваемые в плоскости разреза внешними нагрузками в отсутствие разреза. Комбинируя (12) с соотношением (11), получим уравнение, определяющее ширину равновесной трещины:

$$N = \frac{(2l)^{1/2}}{\pi} \int_0^l \frac{p(x) dx}{(l^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{K}{\pi}, \quad (13)$$

где через K обозначена величина

$$K = [\pi E \gamma^3 / (1 - \nu^2)]^{1/2}. \quad (14)$$

Единственная константа материала K , которая входит в зависимость размера трещины от нагрузок, здесь предстает перед нами как некоторая, на первый взгляд случайная, комбинация других констант E , ν , γ . Однако в действительности K не просто обозначение: эта величина имеет непо-

средственный физический смысл, который станет ясным после того, как мы в следующей главе познакоимся с силовым подходом.

Предположим, что напряжения однородны в полосе полуширины l_0 и отсутствуют вне ее: $p(x) = p$ при $|x| < l_0$, $p(x) = 0$ при $|x| > l_0$, причем $l_0 < l$ (рис. 5). Интегрируя (13), получим уравнение для $l(p, l_0)$

$$p(2l_0)^{1/2} = K(l_0/l)^{1/2} [\arcsin(l_0/l)]^{-1}. \quad (15)$$

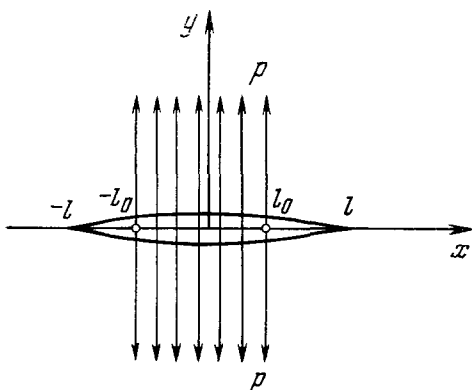


Рис. 5.

Легко показать, что это уравнение относительно l не имеет действительных корней, если $p < p_0 = K(2/l_0)^{1/2}/\pi$. Это значит, что однородное напряжение p , приложенное к полосе $2l_0$, раскрывает разрез и превращает его в трещину только в том случае, если p превышает величину

$$p_0 = K(2/l_0)^{1/2}/\pi = [2E\gamma/\pi(1 - \nu^2)l_0]^{1/2}. \quad (16)$$

В пределе $p = p_0$ равновесная ширина $2l$ как раз равна $2l_0$, что видно из формулы (15). При $p > p_0$ и неизменной ширине полосы приложения напряжений $2l_0$ равновесная ширина трещины $2l$ монотонно растет при увеличении p , начиная с $2l_0$. В пределе $p \gg p_0$, $l \gg l_0$, который соответствует пределу равных и противоположных сосредоточенных сил $P = p \cdot 2l_0$ на единицу длины полосы, приложенных посредине трещины, имеем

$$l = P^2/2K^2, \quad P = p \cdot 2l_0. \quad (17)$$

Но величина p_0 , определенная формулой (16), есть не что иное, как критическое напряжение Гриффитса (2), и полученную зависимость $l(p)$ при $l_0 = \text{const}$ и $0 < p < \infty$ можно интерпретировать в полном соответствии с качественной картиной, описанной выше. Пока напряжения меньше критического для самого большого разреза, еще находящегося в однородном поле, разрез не раскрывается. (Разрез меньшей ширины тем более не раскрывается.) Как только напряжение достигает p_0 , разрез раскрывается сразу до ширины $2l = 2l_0$ (неустойчивость). При дальнейшем росте напряжений трещина становится устойчивой, так как внешние

напряжения за ее краями отсутствуют, и растет постепенно вслед за увеличением нагрузки. Совершенно аналогичное решение получается и в осесимметричном случае дискообразной трещины¹⁴.

Исследование равновесных трещин в ограниченном теле¹³ (в постановке задачи, показанной на рис. 6) позволило выяснить важные особенности влияния границ на трещину. Рассмотрим два предельных случая. Если нагрузка приложена очень далеко от трещины, то в плоскости трещины напряжения практически однородны и по достижении своего критического напряжения трещина любого размера становится неустойчивой, тело рвется пополам. Если же нагрузка приложена близко от трещины, то, казалось бы, мы имеем типичный случай устойчивой трещины. Оказывается, однако, что по достижении такой нагрузки, при которой ширина трещины равна примерно половине ширины тела, трещина становится неустойчивой. В промежуточных случаях имеются области устойчивости и неустойчивости на кривой равновесной зависимости размера трещины от нагрузки.

Потеря устойчивости большой трещины, очевидно, связана с тем, что ограниченная длина материала, отделяющего трещину от границы тела, находится в состоянии, перегруженном по сравнению с теми напряжениями, которые испытывало бы бесконечное тело.

VI. ВВЕДЕНИЕ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ В УРАВНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Факт неограниченного нарастания напряжений в материале вблизи края трещины (формула (4)), который следует из теории упругости, если считать поверхность разреза совершенно свободной, свидетельствует о том, что решение задачи в столь «макроскопической» постановке несправедливо в некоторой окрестности края. Физическая причина этого обстоя-

тельства предельно ясна. При расслоении вещества реально действующие между противоположными сторонами разрываемого материала молекулярные силы сцепления преодолеваются постепенно, т. е. поверхность у края на самом деле не свободна. Благодаря действию сил сцепления берега трещины смыкаются, образуя не закругленный профиль, как следует из формулы (3), а плавный, как показано на рис. 7 (вспомним, как отрываются друг от друга два куса склеенного материала). Поэтому деформации и напряжения в теле около края конечны.

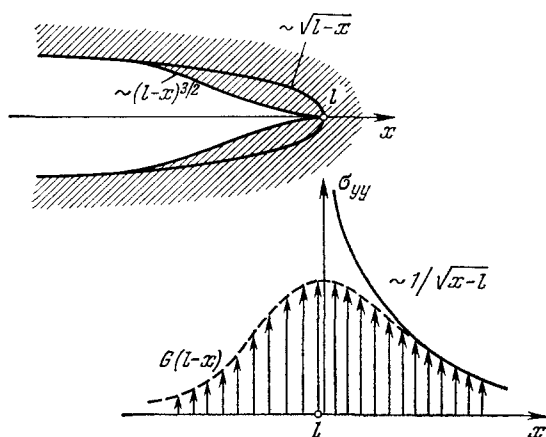


Рис. 7.

В сущности, теория, основанная на энергетическом подходе, содержит некоторую внутреннюю непоследовательность. Неограниченно нарастающие, как следует из решения, деформации и напряжения описываются

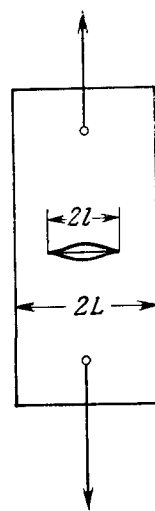


Рис. 6.

уравнениями линейной теории упругости, по самому своему смыслу справедливыми лишь при малых деформациях. И в то же время не учитываются деформации и напряжения в среде, создаваемые силами сцепления, которые реально действуют между противоположными сторонами разреза и как раз предотвращают возникновение нереальных бесконечностей. Работа, затраченная на преодоление сил сцепления, не фигурирующих в уравнениях механического равновесия тела, вводится в виде некоторой эмпирической константы в условие стационарности свободной энергии или термодинамического потенциала, которым приходится дополнять уравнения теории упругости. Эта последняя операция, выходящая за рамки представлений теории упругости, и возмещает указанную неполноту исходных уравнений механического равновесия.

Более совершенным и внутренне последовательным является иной, «силовой» подход к задаче о равновесии тела с трещиной, при котором силы сцепления с самого начала вводятся в уравнения механического равновесия упругого тела, как внешние по отношению к сплошной среде, ограниченной изнутри поверхностями трещины. В такой постановке вся задача полностью решается на основе статических уравнений теории упругости, каковыми являются уравнения равновесия сил в объеме и на поверхностях, с естественным для любой замкнутой задачи условием отсутствия нефизических особенностей в решении, т. е. условием конечности напряжений. Никаких дополнительных условий энергетического характера при таком подходе вводить не приходится, так же как не приходится специально вводить теории упругости понятие поверхностной энергии. Силы сцепления, внешние по отношению к упругой среде, ничем не отличаются от любых других внешних нагрузок. Они вызывают деформацию среды, производят работу, положительную или отрицательную, при соответствующих смещениях точек их приложения, и эта работа превращается (в алгебраическом смысле) в упругую энергию тела. Поверхностная энергия, как работа, затраченная на преодоление сил сцепления при раскрытии разреза, при учете сил в уравнениях равновесия, отделена от упругой среды. Она запасается источником сил сцепления, которым являются молекулярные связи, внешние по отношению к поверхностям разреза. Баланс энергии в системе «упругая среда + источник сил сцепления», описывающей реальное тело, в соответствии с моделью «идеально хрупкого тела», автоматически соблюдается, как в любой другой системе «упругое тело + источник внешних нагрузок».

«Силовой» подход к задаче о трещине расширяет возможности ее исследования, так как является менее «макроскопическим», чем энергетический. Он позволяет учесть реальную дополнительную деформацию тела, производимую силами сцепления, незначительную на протяжении большей части поверхности трещины, но чрезвычайно существенную вблизи ее края, где силы сцепления коренным образом меняют форму профиля и распределение напряжений. Поскольку силы сцепления очень быстро убывают с расстоянием между поверхностями, практически они действуют только в малой области $\sim d$ около конца трещины, где раскрытие очень мало, так что во всей остальной, «макроскопической», части трещины поверхность остается свободной и профиль разреза здесь не отличается от того, который диктуется теорией, не учитывающей сил сцепления. Все это иллюстрируется рис. 7, на котором показаны как истинные профиль трещины и распределение напряжений, так и те, которые соответствуют полной свободе поверхности и экстраполируются к концу трещины. Истинные напряжения вблизи края равны примерно максимальной поверхностной плотности сил сцепления, т. е. энергетической прочностью идеально хрупкого тела. Конечно, здесь есть превышение точности

теории, так как линейная схема теории упругости распространяется вплоть до весьма больших напряжений, которые уже разрывают материал, но такова модель идеально хрупкого тела, принятого в теории упругости.

Описанный выше «силовой» подход к задаче о теле с трещиной был развит в работах Баренблатта¹⁴⁻¹⁵, которые были стимулированы идеями Христиановича¹⁰ о плавности смыкания берегов трещины и конечности напряжений как условию, с помощью которого можно определить размер равновесной трещины по заданным нагрузкам *).

Силы сцепления эффективны только в очень малой окрестности конца трещины. С другой стороны, в той области, где они фактически действуют, поверхностная плотность сил на несколько порядков больше напряжений, создаваемых в этом месте внешними нагрузками в отсутствие трещины, которые, очевидно, порядка реальной прочности (материал разрывается вследствие концентрирования напряжений вблизи конца трещины до теоретической прочности). Поэтому разрывающие нагрузки мало влияют на профиль конца трещины, который устанавливается под действием гораздо больших сил сцепления и, следовательно, имеет универсальную для данного материала форму, не зависящую от приложенных нагрузок и размеров трещины (автономность края трещины). Это обстоятельство чрезвычайно упрощает математическое воплощение изложенных идей.

Рассмотрим, как и в гл. V, прямоугольную трещину — полосу ширины $2l$ при симметричных нагрузках (рис. 5). Асимптотическое разложение решения уравнений упругого равновесия вблизи конца разреза $x = l$ по-прежнему выражается формулами (3), (4), где $x' = x - l$, а постоянная N в старших членах разложения дается формулой (12). Напряжение $p(x)$ в формуле (12) по определению есть полное напряжение, создаваемое в плоскости разреза всеми внешними силами, когда разреза нет. В данном случае внешними являются как нагрузки, так и силы сцепления. В соответствии с этим припишем полным, суммарным величинам индекс t (N_t , $p_t(x)$), а обозначение $p(x)$ сохраним для напряжений, создаваемых только нагрузками. Обозначим силу сцепления, приходящуюся на единицу площади разреза, через G ($G > 0$) **).

Плотность сил сцепления G зависит от расстояния между берегами трещины, но вследствие предположенной универсальности профиля края G можно рассматривать как функцию расстояния $l - x$ от конца трещины. Напряжения $p(x)$ и $G(l - x)$ действуют в противоположные стороны (нагрузки раскрывают разрез, а силы сцепления сдерживают раскрытие), так что полное напряжение равно.

$$p_t(x) = p(x) - G(l - x). \quad (18)$$

Из всех решений, которые допускают уравнения упругого равновесия и которые характеризуются любыми значениями постоянной N_t , реализуется только то, которое не содержит физически бессмысленных теперь бесконечных напряжений, т. е. то, в котором $N_t = 0$ и исчезают первые члены разложений (3), (4). При этом профиль края имеет вид $v \sim |x'|^{3/2} = (l - x)^{3/2}$ (см. рис. 7). Несколько отступив от края, профиль постепенно превращается в тот, который получается при той же ширине трещины,

*) Эти идеи были использованы Христиановичем при рассмотрении некоторых задач о вертикальных трещинах в горных породах, распираемых изнутри жидкостью, когда силы сцепления несут существенный по сравнению с действием бокового горного давления и давления жидкости.

**) Напоминаем, что в соответствии с общей схемой линейной теории упругости при формулировании граничных условий внешние силы задаются на недеформированной границе, в данном случае в плоскости еще не раскрытого разреза.

но без учета сил сцепления. Условие конечности напряжений $N_t = 0$ дает уравнение, определяющее размер трещины. В самом деле, подставим (18) в (12), отделим слагаемые, соответствующие нагрузкам и силам сцепления и приравняем интеграл нулю:

$$N_t = N + N_G = 0; \quad (19)$$

здесь N — величина, определяемая формулой (12), т. е. коэффициент интенсивности напряжений, вычисленный без учета сил сцепления, а

$$N_G = -\frac{(2l)^{1/2}}{\pi} \int_0^l \frac{G(l-x) dx}{(l^2-x^2)^{1/2}}.$$

Благодаря быстрому убыванию функции $G(l-x)$ на расстояниях $l-x \sim d \ll l$ этот интеграл упрощается и величина N_G оказывается независимой от l : $N_G = -K/\pi$, где K — константа, характерная для данного материала и интегральным образом зависящая от сил сцепления:

$$K = \int_0^\infty \frac{G(t) dt}{t^{1/2}}, \quad t = l-x. \quad (20)$$

Уравнение (19) принимает вид

$$N = \frac{(2l)^{1/2}}{\pi} \int_0^l \frac{p(x) dx}{(l^2-x^2)^{1/2}} = \frac{K}{\pi}. \quad (21)$$

Оно и дает размер равновесной трещины. Сравнивая основные уравнения (21) и (13), получаемые при помощи силового и энергетического подходов, мы видим, что эти уравнения тождественны, если тождественны материальные константы K , определяемые формулами (20) и (14). Очевидно, что доказательство тождественности этих величин явится доказательством полной эквивалентности обоих подходов, когда дело касается определения размеров трещин по заданным нагрузкам.

Поверхностное натяжение γ , входящее в формулу (14), определяется работой, которую нужно произвести против сил сцепления, если расщепить тело плоскостью и развести два куска на бесконечность, не производя при этом никаких деформаций в объеме. Иными словами, если y — нормальное расстояние между параллельными поверхностями обоих кусков, а сила сцепления на единицу площади $G(y)$, то для двух поверхностей *)

$$2\gamma = \int_0^\infty G(y) dy. \quad (22)$$

В силу универсальности профиля трещины расстояние между берегами $y = 2v$ есть универсальная функция расстояния $t = l-x$ от конца: $v = v(t)$. Следовательно,

$$\gamma = \int_0^\infty G[v(t)] \frac{dv}{dt} dt. \quad (22')$$

*) Строго говоря, нижним пределом интеграла является не нуль, а расстояние порядка атомных размеров, то самое, которое условно разграничивает понятие упруго растянутой сплошной среды и разорванного материала.

Если подставить сюда профиль конца трещины $v = \text{const} \cdot t^{3/2}$ с фактическим значением константы и произвести некоторые математические преобразования, то можно увидеть, что интегралы (20) и (22) действительно связаны между собой соотношением (14) (это вычисление сделано в работе Уиллиса²¹).

Зависимость размера трещин от нагрузок содержит единственную материальную константу K , определяемую силами сцепления по формуле (20). Она характеризует сопротивляемость вещества разрыву при хрупком растрескивании (чем больше K , тем больше нужны нагрузки, чтобы сделать трещину данного размера), и ее естественно называть модулем сцепления. Для опытного определения K может служить любая формула, выражающая размер трещины через нагрузки, например формула (17).

VII. КОНЕЧНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ И СТАЦИОНАРНОСТЬ УПРУГОГО ПОТЕНЦИАЛА

Статические уравнения теории упругости, которые представляют собой уравнения равновесия сил (внутренних напряжений и приложенных извне) в объеме и на поверхностях тела, являются вполне замкнутыми и для корректно поставленной задачи не нуждаются в каких-либо дополнениях. Задача о теле с трещиной при учете сил сцепления в уравнениях равновесия сил поставлена вполне корректно, и отсутствие расходимостей в решении для нее также естественно, как и для любой другой физической задачи, где нет причин для возникновения бесконечностей. Условие конечности не является гипотезой и не нуждается в доказательстве, так же как и в десятках других физических задач, где из возможных частных решений уравнений отбрасываются те, которые содержат нефизические бесконечности, или, что то же самое, произвольные постоянные при этих частных решениях полагаются равными нулю. Условие конечности напряжений, как условие, отбирающее истинную равновесную трещину из множества решений, допускаемых уравнениями равновесия сил, по причине внутренней замкнутости уравнений теории упругости, должно вытекать и из энергетических принципов равновесия упругого тела, из которых вытекают сами уравнения равновесия сил. Убедимся в этом непосредственно.

В данном случае условием равновесия тела служит условие стационарности термодинамического потенциала при неизменных силах, поскольку варьируемая поверхность трещины не свободна. Однако, как специально подчеркивалось выше, при учете сил сцепления в уравнениях равновесия, как внешних сил, приложенных к части поверхности тела, поверхностная энергия приписывается источнику сил и не принадлежит самой упругой среде. Поэтому в свободной энергии F или термодинамическом потенциале Φ упругой среды поверхностная энергия Π не содержится. С точностью до констант, зависящих от температуры, $F = U$, $\Phi = -2U$, и условие стационарности термодинамического потенциала при варьировании площади трещины с неизменными силами (9) принимает форму стационарности упругого потенциала U

$$(\delta U)_{p=\text{const}} = 0. \quad (23)$$

Общая формула (10), в которой под N следует понимать полную величину N_t , соответствующую всем силам, нагрузкам и силам сцепления, немедленно дает условие конечности напряжений (19) $N_t = 0$.

Подчеркнем, что понятие вариации площади трещины при неизменных силах имеет вполне точный смысл, не допускающий никакого произвола в толковании. Так, если полуширина прямоугольной трещины l

виртуально увеличивается на δl , то силы сцепления, действующие до вариации, скажем, на участке от $x = l - d$ до $x = l$, при сдвиге конца трещины остаются на этом участке теми же самыми, что и до сдвига, а на новом раскрывающемся участке разреза от $x = l$ до $x = l + \delta l$ сил сцепления как не было до вариации, так нет и после.

Условие стационарности упругого потенциала $(\delta U)_p = 0$ физически означает, что при бесконечно малом виртуальном расширении равновесной трещины на δl работа, производимая нагрузками, с точностью до малых величин более высокого порядка, чем δl , затрачивается на преодоление сил сцепления, препятствующих смещению поверхности трещины, а упругая энергия тела при этом не приобретает и не освобождается (опять же с точностью до малых более высокого порядка).

Именно этот момент теории — вопрос о стационарности упругого потенциала — почему-то был не понят и на него обрушился главный удар критики, который распространился и на условие конечности напряжений^{25–28} (по этому поводу см. также²⁹).

Ясному пониманию внутренних свойств и макроскопической эквивалентности теорий, основанных на энергетическом и силовом подходах, способствует статья Ишлинского²², в которой на простейшем примере прямолинейной трещины при постоянных нагрузках, приложенных изнутри к более узкой полосе, и постоянных силах сцепления G , действующих на малом участке d у конца трещины, доводятся в явном виде и до конца все вычисления. Приводятся полные формулы для профиля трещины и распределения напряжений, вычисляется упругая энергия тела и все делается без использования, так сказать, «теорем»: формулы Ирвина для скорости освобождения энергии или условия стационарности упругого потенциала при силовом подходе, путем непосредственного вычисления упругой энергии тела до и после вариации трещины и устремления вариации к нулю.

VIII. РЕАЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ. КВАЗИХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ

Теория, основанная на введении сил сцепления в уравнения упругого равновесия тела, в любом случае является более совершенной и физической, чем теория, в которой просто вводится поверхностное натяжение, так как силовой подход приводит к тем же макроскопическим результатам, что и энергетический, но, кроме того, в качественном отношении правильно описывает окрестность края трещины и позволяет устранить нереальные особенности энергетического подхода. Некоторый скепсис в отношении буквального понимания результатов силовой теории могла бы вызвать правомерность включения в грубую схему линейной теории упругости короткодействующих сил молекулярной природы. Однако значение теории гораздо шире указанного, и результаты ее, касающиеся строения конца трещины и его окрестности, имеют вполне реальный физический смысл для целого класса практически важных материалов. Как показывают численные оценки, в таких материалах, как силикатное и органическое стекла, размер концевой области трещины d , где действуют силы сцепления, оказывается большим по сравнению с межатомными расстояниями, что собственно и обосновывает возможность макроскопического рассмотрения этой области.

Оценка размера концевой области получается из выражения (20) для модуля сцепления K . Очевидно, что по порядку величины

$$K = \int_0^{\infty} \frac{G(t) dt}{t^{1/2}} \sim G_m d^{1/2},$$

где G_m — характерный масштаб сил сцепления, который порядка максимального значения этих сил и заведомо не превосходит разрушающего напряжения для идеального (бездефектного) материала. Для силикатного стекла, например, идеальная прочность составляет примерно $\alpha \approx 0,05$ от модуля Юнга $E = 6,7 \cdot 10^{11}$ дин/см². На основании экспериментальных данных, полученных путем измерения размеров трещин при данных нагрузках, поверхностное натяжение $\gamma = 2,1 \cdot 10^3$ эрг/см², $\nu = 0,24$. Воспользовавшись формулой (14), связывающей K и γ , найдем

$$d \sim \pi E \gamma / G_m^2 (1 - \nu^2) \sim \pi \gamma / \alpha^2 E (1 - \nu^2) \sim 4 \cdot 10^{-6} \text{ см},$$

что на два порядка превосходит межатомные расстояния.

Еще больше размеры концевой области в материалах типа органического стекла. Так, в полиметилметакрилате, по данным измерений размеров трещин — полос ширины $2l$ под действием сосредоточенных нагрузок Q на единицу длины, приложенных в середине полосы, модуль сцепления получился равным $K = Q (2l)^{-1/2} = 1,1 \cdot 10^8$ дин/см^{3/2} в диапазоне $l \approx 16-49$ см, $Q \approx (1,7-2,2) \cdot 10^8$ дин/см^{3/2} ²³. Для этого материала $E = 2,45 \cdot 10^{11}$ дин/см² и по формуле (14) $\gamma_{\text{эфф}} = 1,5 \cdot 10^5$ эрг/см². Величину G_m можно считать порядка предела текучести: $G_m \sim 7 \cdot 10^8$ дин/см². Отсюда $d \sim K^2 / G_m^2 \sim 10^{-2}$ см. И действительно, микрофотография трещин показывает, что берега трещины сходятся плавно и размеры концевой области составляют десятки микрон.

Опыт показывает, что структура концевой области трещин в органическом стекле имеет очень интересный характер: берега трещины стянуты какими-то тонкими нитями, волокнами материала, плотность числа которых убывает по мере удаления от конца, как если бы сцепление берегов осуществлялось натяжением этих нитей. Поскольку при силовом подходе нигде не оговорена природа сил сцепления, теорию можно непосредственно применять и к случаю сцепления, осуществляемого «натянутыми нитями». Использование такой модели позволило рассмотреть кинетику роста трещин в подобных материалах ²⁴. Отметим, что природа нитей еще не объяснена.

Вообще, поскольку разрыв материала происходит как раз в концевой области трещин, для любого рассмотрения механизма и деталей процесса разрушения необходимо иметь правильные представления о структуре концевой области, профиле трещины, распределении напряжений, что невозможно получить без учета сил сцепления. Представления о структуре концевой области необходимы для изучения механизма распространения трещин под действием нагрузки (кинетики роста трещин), рассмотрения усталостной прочности материалов (оказывается, что даже при постоянной нагрузке теоретически устойчивые трещины очень медленно растут и материал в конце концов разрушается). Все это придает особое значение полученным силовым методом результатам, касающимся структуры концов трещины.

Возможности применения теории хрупкого разрушения далеко выходят за пределы того сравнительно узкого класса материалов, которые являются действительно хрупкими (силикатное стекло, плавленный кварц и некоторые другие). Экспериментальные исследования показали, что при образовании трещин отдельные материалы, которые при обычных испытаниях на растяжение ведут себя как вполне пластические, разрушаются так, что пластические деформации сосредоточиваются в тонком слое около поверхности трещины. Результаты опытов с такими материалами подтверждают формулу Гриффитса для критического напряжения $p_0 l^{1/2} = \text{const}$. Однако величина эффективной энергии $\gamma_{\text{эфф}}$, определенная из этих измерений по значению const , оказывается гораздо больше поверхностного

натяжения, которое, конечно, неизвестно, но которое можно оценить исходя из данных о силах сцепления. Так, например, для углеродистой стали У8 ($E = 2,06 \cdot 10^{12}$ дин/см²) опыт дает $\gamma_{\text{эфф}} = 7,5 \cdot 10^5$ эрг/см², что в несколько сотен раз больше поверхностного натяжения.

Таким образом, все формулы, описывающие трещины в идеально хрупких телах, можно распространить и на «квасихрупкие», если входящие в эти формулы константы γ или K рассматривать как обобщенные, учитывающие эффект пластических деформаций в приповерхностном слое (идеи о «квасихрупком» разрушении, как говорилось в гл. I, были выдвинуты в работах Ирвина и Орована^{4, 5}). Измерения равновесных трещин в металлах дали следующие значения модулей сцепления, на основании которых можно оценить размеры концевой области: для стали 4330 $K = 2,5 \cdot 10^{10}$ дин/см^{3/2}, для алюминиевого сплава 2219 — Т87 $K = 10^{10}$ дин/см^{3/2}²³. Для этих материалов $E = 2 \cdot 10^{12}$ дин/см², предел текучести $\sigma_t = 1,5 \cdot 10^{10}$ дин/см² и $E = 0,8 \cdot 10^{12}$ дин/см², $\sigma_t = 0,4 \times 10^{10}$ дин/см² соответственно. Оценка по формуле $d \sim K^2/\sigma_t^2$ показывает, что размер концевой области порядка нескольких миллиметров, так что теория квазихрупкого разрушения применима только к трещинам гораздо большим, чем эта величина.

Надо сказать, что теории, принимающей во внимание пластические деформации, которая позволила бы объяснить величину эффективной затраты энергии $\gamma_{\text{эфф}}$, пока нет. Подчеркнем, что порядок величины $\gamma_{\text{эфф}}$ нельзя определить из соображений размерности, как, скажем, примерный порядок величины поверхностного натяжения: $\gamma \sim Ea$, где a — атомный размер (точнее, $\gamma \approx 0,1 Ea$). Помимо E , a или γ материал характеризуется другими величинами той же размерности, что и E : модулем сдвига $\mu \approx E$ и пределом текучести σ_t . Следовательно, в теории эффективная энергия $\gamma_{\text{эфф}}$ может быть представлена только в виде $\gamma_{\text{эфф}} = \gamma f(E/\sigma_t)$, где f — какая-то функция безразмерного отношения E/σ_t или μ/σ_t , причем заранее предсказать, что f имеет величину 10^2 — 10^3 , как это следует из опыта, очевидно, невозможно.

Институт проблем механики
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С. Е. Inglis, Trans. Inst. Nav. Arch. 55, 219 (1913).
2. Н. И. Мусхелишвили, Изв. Российской. Акад. наук 13, сер. 6, 663 (1919).
3. А. А. Griffith, Phil. Trans. Roy. Soc. A221, 163 (1920).
4. G. R. Irwin, Fracturing of Metals, ASM, Cleveland, 1948, стр. 147.
5. E. O. Orowan, Fatigue and Fracture of Metals, Wiley, N. Y., 1950, стр. 139.
6. П. А. Ребиндер, в «Юбилейном сборнике, посвященном XXX-летию Великой Октябрьской социалистической революции», т. 1, М., Изд-во АН СССР, 1947, стр. 533.
7. N. F. Mott, Engineering 165, 16 (1948).
8. И. М. Лифшиц, ЖЭТФ 18, 1134 (1948); Уч. зап. Харьк. ун-та, Тр. физ.-матем. ф-та 3 (1952).
9. Я. И. Френкель, ЖТФ 22, 1857 (1952).
10. Ю. П. Желтов, С. А. Христианович, Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 3 (1955).
11. G. R. Irwin, J. Appl. Mech. 24, 361 (1957).
12. Г. И. Баренблатт, С. А. Христианович, Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 73 (1955).
13. Г. И. Баренблатт, ПММ 20, 475 (1956).
14. Г. И. Баренблатт, ПММ 23, 434, 706, 893 (1956).
15. Г. И. Баренблатт, ПМТФ, № 4, 3 (1961).
16. М. Я. Леонов, В. В. Панасюк, Прикл. механика (Киев) 5 (4), 391 (1959).
17. А. М. Косевич, Л. А. Пастур, ФТТ 3, 1291, 1871, 2890, 3263 (1961).

18. Д. Д. И в л е в, ПМТФ, № 6, 88 (1967).
 19. Н. И. М у с х е л и ш в и л и, Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 4-е, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1954.
 20. Г. И. Б а р е н б л а т т, Н. Н. В с е в о л о д о в, Л. И. М и р к и н, Н. Ф. П и - л и п е ц к и й, Ю. П. Р а й з е р, Письма ЖЭТФ 5 (3), 85 (1967).
 21. J. R. Willis, J. Mech. Phys. Solids 15 (3), 151 1967.
 22. А. Ю. И ш л и н с к и й, Инж. ж., «Механика твердого тела», № 6, 168 (1968).
 23. Г. И. Б а р е н б л а т т, С. А. Х р и с т и а н о в и ч, Инж. ж., «Механика твердого тела», № 2, 70 (1968).
 24. Г. И. Б а р е н б л а т т, В. М. Е н т о в, Р. Л. С а л г а н и к, Инж. ж. «Меха-ника твердого тела», № 5, 82; № 6, 76 (1966); № 2, 148 (1967).
 25. Г. П. Ч е р е п а н о в, Инж. ж., «Механика твердого тела», № 6, 86 (1967).
 26. Д. Д. И в л е в, Инж. ж., «Механика твердого тела», № 6, 91 (1967).
 27. Е. М. М о р о з о в, В. З. П а р т о н, Инж. ж., «Механика твердого тела», № 6, 147 (1969).
 28. Л. И. С е д о в, Инж. ж., «Механика твердого тела», № 6, 164 (1969).
 29. Г. И. Б а р е н б л а т т, Инж. ж., «Механика твердого тела», № 6, 153 (1969).
 30. Л. Д. Л а н д а у, Е. М. Л и ф ш и ц, Теория упругости, М., «Наука», 1967.
 31. Treatise on Fracture (H. Liebowitz, Ed.), Acad. Press, N. Y., 1968.
-