

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ \*)***Л. К. Зарембо, В. А. Красильников***И. ВВЕДЕНИЕ**

Хорошо известно, что твердые тела при достаточно больших напряжениях переходят в область пластического течения, упрочнения и т. д. Нелинейная зависимость деформаций от напряжений в области больших напряжений ( $\geq 10^2 - 10^3 \text{ кг/см}^2$ ), где деформации уже неупруги, нас не будет интересовать. При распространении ультразвуковых или гиперзвуковых волн амплитуда напряжений обычно не превышает нескольких  $\text{кг/см}^2$ , и деформации можно считать вполне упругими. Однако, как показывают результаты многочисленных экспериментальных исследований, при этих условиях четко выражены такие нелинейные эффекты, как генерация акустических гармоник, комбинационное рассеяние звука на звуке, нелинейные акустические резонансы и ряд других, о которых сообщается в этой статье. Согласно нелинейной теории упругости макроскопические нелинейные упругие свойства твердых тел определяются, с одной стороны, нелинейной связью компонент тензора деформации с производными от смещений по координатам. Эта особенность конечных деформаций не зависит от физических свойств деформируемого тела и обычно называется геометрической нелинейностью. Физическая нелинейность — следствие того, что внутренняя энергия деформированного твердого тела является не только квадратичной функцией инвариантов тензора деформации, но и кубической и т. д. Физическая нелинейность определяется модулями упругости третьего, четвертого и более высоких порядков \*\*). Существование как геометрической, так и физической нелинейности приводит к тому, что обобщенный закон Гука (связь напряжений с деформациями) также нелинеен, причем его нелинейность определяется, вообще говоря, геометрической и физической нелинейностью одновременно. Такая феноменологическая модель нелинейного твердого тела, однако, не является в достаточной мере полной. В частности, как показывают экспериментальные результаты, даже в твердых телах с наиболее простой структурой и свойствами (изотропных диэлектриках) величина упомянутых выше нелинейных акустических эффектов зависит от остаточных внутренних напряжений, в кристаллах — от дислокаций. Эти особенности реальных твердых тел приводят к нелинейным взаимодействиям, запрещенным теорией упругости однородного изотропного тела. Еще более сложными

\*) Расширенное изложение доклада на научной сессии Отделения общей физики и астрономии Академии наук СССР 16 января 1969 г.

\*\*\*) По общепринятой терминологии модули упругости в линейном законе Гука (когда внутренняя энергия деформированного твердого тела представляет собой квадратичную функцию инвариантов тензора деформации) называют модулями упругости второго порядка.

становятся нелинейные акустические эффекты в том случае, когда твердое тело таково, что имеется достаточно сильная связь упругих колебаний с возбуждениями другого типа, например в пьезо- и сегнетоэлектриках или в ферромагнетиках и ферродиэлектриках. В этих твердых телах «на акустической стороне» могут наблюдаться, помимо упомянутых выше, еще и нелинейные эффекты, связанные с нелинейностью пьезоэффекта и магнитострикционного эффекта (нелинейной зависимостью механических смещений от напряженности электромагнитного поля). Феноменологически эти свойства могут быть учтены во внутренней энергии.

Выше говорилось о макроскопической нелинейности твердых тел. Микроскопическая нелинейность, естественно, определяется нелинейностью межатомных сил. Потенциальная энергия атома в поле всех остальных атомов кристалла может быть разложена в ряд вблизи положения равновесия атома; помимо квадратичных, в этом разложении будут члены, пропорциональные кубу, четвертой степени и т. д. Эти последние определяют нелинейный (или, как иногда говорят, ангармонический) характер межатомных сил. Часто эту нелинейность называют решеточной. Решеточная нелинейность ответственна за ряд макроскопических, хорошо изученных явлений, таких, например, как тепловое расширение твердых тел (изменение среднего межатомного расстояния при изменении температуры), отклонение от закона Дюлонга и Пти для теплоемкости твердого тела при высоких температурах. Тепловые колебания атомов около положения равновесия можно представить как суперпозицию плоских волн различных частот и с различными волновыми векторами, так называемых тепловых фононов. В приближении линейных межатомных сил фононы не взаимодействуют друг с другом. Ангармонический характер межатомных сил приводит к возможности «рождения» нового фонона (или фононов) в результате взаимодействия двух (или большего числа) фононов. Фонон-фононные взаимодействия играют важную роль в объяснении большого числа кинетических явлений в твердых телах, таких, например, как теплопроводность твердых тел, поглощение звука. Фонон-фононные взаимодействия являются частью более общей проблемы взаимодействия квазичастиц или элементарных возбуждений в твердых телах. Исследованию взаимодействия фононов с фононами, электронами, фотонами, магнонами за последнее время придается большое значение, и работы в этих направлениях ведутся интенсивно.

Понятие фонона как кванта колебаний решетки сначала относилось к области очень высоких частот колебаний, где нельзя было не считаться с дискретностью структуры кристаллической решетки. В настоящее время можно сказать, что за исключением особенностей, определяемых дискретностью структуры решетки, взаимодействие упругих волн гиперзвуковых и даже ультразвуковых частот подчиняется тем же правилам отбора, что и фонон-фононные взаимодействия. Этим можно объяснить то, что под термином фонон-фононные взаимодействия сейчас стали иметь в виду не только взаимодействие тепловых фононов, но и нелинейное взаимодействие искусственно возбуждаемых низкочастотных упругих волн («когерентных» фононов).

Сравнительно недавно фонон-фононное взаимодействие экспериментально наблюдалось при распространении «когерентных» фононов малых энергий — упругих волн ультразвукового диапазона частот<sup>1,2</sup>. Амплитуда звукового давления, при которой четко наблюдается нелинейное искажение синусоидальной упругой волны или генерация гармоник, не более нескольких атмосфер, лежит в той области, которую еще совсем недавно считали областью линейной акустики. Исследование этих эффектов позволяет, с одной стороны, получить сведения о нелинейных упругих

свойствах твердых тел, с другой стороны, «моделировать» процессы фонон-фононного взаимодействия на когерентных фононах. Эти исследования дают ряд полезных сведений для более детального понимания ряда кинетических процессов в твердых телах. Помимо этого, различные нелинейные эффекты могут в дальнейшем иметь некоторые практические приложения.

В жидкостях нелинейные эффекты при распространении упругих волн в настоящее время достаточно хорошо изучены<sup>3</sup>. В изотропных твердых телах из-за возможности распространения как продольных, так и поперечных волн число допустимых нелинейных взаимодействий существенно больше, чем в жидкостях, где плоские волны взаимодействуют только при распространении в одном и том же направлении. Еще более многообразно и сложно нелинейное взаимодействие волн в кристаллах; здесь еще нет более или менее удовлетворительной теории. Малая эффективность нелинейного преобразования во всех исследованных твердых телах ограничивает возможности практического применения различных акустических нелинейных эффектов. В настоящее время, впрочем, известны твердые тела — пьезополупроводники, в которых из-за электрон-фононного взаимодействия эффективная упругая нелинейность по порядку величины сравнима с нелинейностью жидкостей, что позволяет надеяться на использование в будущем нелинейных явлений в этих твердых телах для различных практических целей. Некоторые перспективы практического использования нелинейных явлений, по-видимому, открываются в случае поверхностных рэлеевских волн, где нелинейные эффекты выражены довольно сильно. Наблюдение генерации гармоник и нелинейного взаимодействия волн открывает дополнительные возможности измерения упругих модулей третьего порядка и в конечном счете ангармоничности решетки. Сопоставление экспериментальных результатов с теоретическими, модельными дает аналогично таким параметрам, как равновесный размер кристаллической ячейки и упругие модули второго порядка, дополнительные сведения о характере сил межатомного взаимодействия.

## II. ЭЛЕМЕНТЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В дальнейшем нам понадобятся некоторые результаты нелинейной теории упругости. Остановимся вкратце на этой теории (подробнее см. 4-7).

1. Д е ф о р м а ц и и. Точное выражение для компонент тензора деформации \*)

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right) \eta_s, \quad (1)$$

где  $u_i$  — компоненты вектора смещения,  $i, j = 1, 2, 3$ ;  $s = 1, 2, \dots, 6$ , причем правило перехода от  $i, j$  к  $s$  — обычно применяемое в кристаллографии  $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 = 32 \rightarrow 4, 13 = 31 \rightarrow 5, 12 = 21 \rightarrow 6$ . Инварианты тензора деформации имеют вид

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= u_{il} = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \\ I_2 &= \frac{1}{2} (u_{il}^2 - u_{ik}^2) = \eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_3 - (\eta_4^2 + \eta_5^2 + \eta_6^2), \\ I_3 &= \det |u_{ik}| = \frac{1}{3} \left( u_{ik}u_{il}u_{kl} - \frac{3}{2} u_{ik}^2 u_{il} - \frac{1}{2} u_{il}^2 \right) = \\ &= \eta_1\eta_2\eta_3 + 2\eta_4\eta_5\eta_6 - (\eta_1\eta_4^2 + \eta_2\eta_5^2 + \eta_3\eta_6^2). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

\*) Здесь и далее суммирование ведется по дважды входящим индексам.

2. Внутренняя энергия и модули третьего порядка. Внутренняя энергия деформированного изотропного тела не должна зависеть от выбора системы координат. Она инвариантна относительно вращения и перемещения деформированного тела как целого. Это возможно только в том случае, когда внутренняя энергия является функцией инвариантов тензора деформации  $U = U(I_1, I_2, I_3, S)$ , где  $S$  — энтропия. Поскольку деформации, а следовательно, и инварианты, считаются малыми,  $U$  может быть разложена в ряд вблизи недеформированного состояния. Недеформированное состояние в дальнейшем считается равновесным и  $\partial U / \partial I_1 |_0 = 0$ . Поэтому разложение начинается с квадратичных членов. Модули второго порядка определяются как коэффициенты перед членами второго порядка малости:

$$\mu = -\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial I_2} \Big|_0, \quad K + \frac{4}{3} \mu = \frac{\partial^2 U}{\partial I_1^2} \Big|_0, \quad (3)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига, а  $K$  — модуль объемной упругости. Коэффициенты при величинах третьего порядка малости дают модули третьего порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial I_3} \Big|_0 &= n = A, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial I_1 \partial I_2} = -4m = -2A - 4B, \\ \frac{\partial^3 U}{\partial I_1^3} \Big|_0 &= 4m + 2l = 2A + 6B + 2C, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $n, l, m$  — модули третьего порядка Мэрнагана;  $A, B$  и  $C$  — модули третьего порядка Ландау. Следующие приближения потребовали бы введения четырех модулей четвертого порядка, пяти модулей пятого порядка и т. д. В дальнейшем мы ограничимся только вторым приближением (в разложении внутренней энергии удерживаются только члены третьего порядка малости) и, следовательно, пятиконстантной теорией упругости. Модули третьего порядка некоторых твердых тел приведены в табл. I.

Сложнее обстоит дело с кристаллами, где внутренняя энергия инвариантна относительно только тех преобразований, которые характерны для данного кристаллического класса. В общем случае внутренняя энергия  $U$  кристалла является полиномом от компонент тензора деформаций

$$U = \frac{1}{2} c_{ijpq} u_{ij} u_{pq} + \frac{1}{6} C_{ijpqrs} u_{ij} u_{pq} u_{rs}, \quad (5)$$

где  $c_{ijpq}$  — упругие модули второго, а  $C_{ijpqrs}$  — упругие модули третьего порядка. Это — определение модулей третьего порядка по <sup>13</sup>. Очевидно, что  $C_{ijklmn} = C_{klijmn} = C_{mnikjl} = C_{ijmnhl} = C_{klmni j} = C_{mnklij}$ . Аналогично тому, как это делается в линейной теории упругости, могут быть введены сокращенные обозначения модулей третьего порядка, переходя от двух индексов к одному по правилам, о которых речь была выше. Модули третьего порядка некоторых кристаллов приведены в табл. II. Кубические кристаллы наиболее симметричных подгрупп  $O, O^h$  и  $T^d$  имеют шесть независимых модулей третьего порядка, подгруппы  $T$  и  $T^h$  — восемь независимых модулей. Независимые модули третьего порядка различных кристаллических классов приведены в табл. III. В общем случае анизотропное твердое тело имеет всего 216 модулей третьего порядка. Из условий симметрии, однако, могут быть найдены дополнительные связи между модулями третьего порядка. Для кристаллов с наименьшей симметрией триклинного класса число модулей третьего порядка сокращается до 56. Число модулей более высокого порядка, чем третий, быстро увеличивается по мере роста порядка, например для триклинного кристалла модулей четвертого порядка 126, а пятого порядка 352.

Таблица I

Упругие модули третьего порядка некоторых твердых тел ( $\times 10^{-11}$  н/м<sup>2</sup>)

Материал	Температура	Модули Мэрнагана			Модули Ландау			Примечание *)
		<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	
Полистирол	8	$-0,19 \pm 0,03$	$-0,13 \pm 0,03$	$-0,1 \pm 0,01$	$-0,1 \pm 0,01$	$-0,08 \pm 0,04$	$-0,11 \pm 0,07$	$M^{ST}$
Железо «армко»	8	$-0,35 \pm 0,07$	$-10,3 \pm 0,7$	$11 \pm 11$	$11 \pm 11$	$-15,8 \pm 6,2$	$12,3 \pm 6,9$	$M^{ST}$
Никелевая сталь 535	9	$-0,46$	$-5,9$	$-7,3$	$-7,3$	$-2,3$	$-1,8$	$M^{ST}$
Сталь С1018	10	—	—	$-5,7 \pm 0,3$	$-5,7 \pm 0,3$	—	—	$M^S$
Сталь 60 С2Н2А	11	$-3,4$	$-6,3$	$-7,6$	$-7,6$	$-2,5$	$-0,9$	$M^{ST}$
«        »	12	—	—	$-7,6$	$-7,6$	—	—	$M^{ST}$
Алюминий 6016-Т6	10	—	—	$-3,1 \pm 0,1$	$-3,1 \pm 0,1$	—	—	$M^S$
Алюминий 1100-Ф	10	—	—	$-4,8 \pm 0,4$	$-4,8 \pm 0,4$	—	—	$M^S$
Плавленый кварц	10	—	—	$-2,3 \pm 0,1$	$-2,3 \pm 0,1$	—	—	$M^S$
Стекло (пирекс)	8	$0,14 \pm 0,4$	$0,9 \pm 0,5$	$4,2 \pm 3,5$	$4,2 \pm 3,5$	$-1,18 \pm 2,35$	$-1,32 \pm 2,6$	$M^{ST}$

\*) В таблице приведены как адиабатические модули, отмеченные значком  $M^S$ , так и смешанные модули  $M^{ST}$  (см. далее о методах измерения модулей третьего порядка).

Упругие модули третьего порядка кристаллов ( $\times 10^{-12}$  дин/см<sup>2</sup>)  
(в обозначениях Браггера)

Кристалл	Литература	$C_{111}$	$C_{112}$	$C_{123}$	$C_{456}$	$C_{144}$	$C_{166}$	$C_{155}$	Примечание
NaCl	2	-8,7	—	—	—	—	—	—	$C^S$
	15	-6,42	—	—	—	—	—	—	$C^S$
	16	-8,80	-0,57	0,28	0,27±0,01	0,26±0,01	-0,61±0,01	—	$C^{ST}$
	17	-8,60	-0,52	0,16	0,25	0,26	-0,57	—	$C^{ST}$
	18	-5,45	-0,69	0,27	0,33	0,33	-0,63	—	Теоретич.
	19	-8,64±0,08	-0,50±0,04	0,09±0,08	0,13±0,02	0,07±0,03	-0,59±0,01	—	$C^{TS}$
	20	-8,3±0,8	—	—	—	—	—	—	$C^S$
NaF	21	-8,43±0,33	-0,50±0,07	0,46±0,09	0,26±0,01	0,29±0,05	-0,60±0,04	—	$C^{TS}$
	22	-8,23±0,20	0,02±0,50	0,53±0,07	0,20±0,01	0,23±0,03	-0,61±0,03	—	$C^{TS}$
KBr	18	-7,14	-1,44	0,658	0,76	0,76	-1,28	—	Теоретич.
KCl	18	-4,64	-0,39	0,111	0,186	0,186	-0,33	—	Теоретич.
	16	-7,01	-0,224	0,133	0,118	0,127	-0,245	—	$C^{TS}$
	20	-7,1±0,7	—	—	—	—	—	—	$C^S$
KJ	21	-7,26±0,39	-0,24±0,04	0,11±0,04	0,16±0,01	0,23±0,04	-0,26±0,02	—	$C^{TS}$
	18	-5,07	-0,458	0,148	0,207	0,207	-0,40	—	Теоретич.
BaF <sub>2</sub>	18	-4,71	-0,314	0,074	0,145	0,145	-0,26	—	Теоретич.
LiF	30	-5,84±0,15	-2,99±0,14	-2,06±0,11	-0,271±0,001	-1,21±0,03	-0,889±0,019	—	$C^{TS}$
	18	-20,7	-2,56	1,11	1,32	1,32	-2,42	—	Теоретич.
Ge	21	-14,23±0,30	-2,64±0,28	1,56±0,28	0,94±0,06	-0,85±0,10	-2,73±0,13	—	$C^{TS}$
	31	-7,16±0,2	-4,03±0,1	-0,18±0,3	-0,47±0,1	-0,53±0,5	-3,15±0,05	—	$C^{TS}$
	32	-6,96±1,08	-3,40±0,62	+0,25±0,43	-0,42±0,06	+0,18±0,21	-2,96±0,22	—	$C^{TS}$
	23	—	-2,9±0,3	-0,22±0,2	-0,41±0,05	-0,08±0,09	-3,03±0,09	—	$C^{TS}$
	24	-7,10±0,06	-3,89±0,03	-0,18±0,06	-0,53±0,07	-0,23±0,16	-2,92±0,08	—	$C^{TS}$
	26	$\frac{1}{6} C_{111}^S + C_{112}^S + 2C_{144}^S + 4C_{166}^S + \frac{1}{3} C_{123}^S + \frac{8}{3} C_{456}^S = 18,69$							

Кристалл	Литература	$C_{111}$	$C_{112}$	$C_{123}$	$C_{456}$	$C_{144}$	$C_{166}$	$C_{155}$	Примечание
Si	24	$-8,25 \pm 0,10$	$-4,51 \pm 0,05$	$-0,64 \pm 0,10$	$-0,64 \pm 0,20$	$0,12 \pm 0,25$	$-3,10 \pm 0,10$	—	$C^{TS}$
	26	$\frac{1}{6} C_{111}^S + C_{112}^S + 2C_{144}^S + 4C_{166}^S + \frac{1}{3} C_{123}^S + \frac{8}{3} C_{456}^S = 19,86$							
InSb	25	$-3,14 \pm 0,2$	$-2,10 \pm 0,2$	$-0,48 \pm 0,1$	$0,002 \pm 0,01$	$0,09 \pm 0,1$	$-1,18 \pm 0,1$	—	$C^{TS}$
	27	$-15,0 \pm 1,5$	$-8,5 \pm 1,0$	$-2,5 \pm 1,0$	$-0,16 \pm 0,1$	$-1,35 \pm 0,15$	$-6,45 \pm 0,1$	—	
Cu	27	$-19,5 \pm 2,0$	$-11,5 \pm 1,5$	$-4,2 \pm 1,5$	$+0,12 \pm 0,1$	$-1,25 \pm 0,25$	$-7,25 \pm 0,3$	—	$C^{TS}$ при $T = 295^\circ \text{K}$ $C^{TS}$ при $T = 77^\circ \text{K}$
	27	$-20,0 \pm 2,0$	$-12,2 \pm 1,5$	$-5,0 \pm 1,5$	$0,25 \pm 0,08$	$-1,32 \pm 0,2$	$-7,05 \pm 0,25$	—	
	26	$\frac{1}{6} C_{111}^S + C_{112}^S + 2C_{144}^S + 4C_{166}^S + \frac{1}{3} C_{123}^S + \frac{8}{3} C_{456}^S = 27,6$							
	29*)	$-14,27 \pm 1,4$	$-7,78 \pm 0,8$	$-2,65 \pm 1,5$	$1,17 \pm 1,6$	$-0,06 \pm 2,3$	$-7,71 \pm 1,1$	—	$C^{TS}$
29*)	$-14,27 \pm 1,4$	$-8,87 \pm 0,8$	$-1,77 \pm 1,5$	$0,66 \pm 1,6$	$-0,63 \pm 2,3$	$-7,44 \pm 1,1$	—		
Ag	33	$-12,71 \pm 0,22$	$-8,14 \pm 0,09$	$-0,50 \pm 0,18$	$-0,95 \pm 0,87$	$-0,03 \pm 0,09$	$-7,80 \pm 0,05$	—	$C^{TS}$
	33	$-8,43 \pm 0,37$	$-5,29 \pm 0,18$	$1,89 \pm 0,37$	$+0,83 \pm 0,08$	$0,56 \pm 0,26$	$-6,37 \pm 0,13$	—	
Au	33	$-17,29 \pm 0,21$	$-9,22 \pm 0,12$	$-2,33 \pm 0,49$	$-0,12 \pm 0,16$	$-0,13 \pm 0,32$	$-6,48 \pm 0,17$	—	$C^{TS}$
MgO	31	$-48,95 \pm 1,5$	$-0,95 \pm 0,9$	$-0,69 \pm 2,2$	$1,47 \pm 0,1$	$1,13 \pm 0,4$	$-6,59 \pm 0,2$	—	$C^{TS}$
$\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ (ЖИГ)	28	$-23,3 \pm 0,8$	$-7,17 \pm 0,6$	$-0,33 \pm 1,3$	$-0,97 \pm 0,16$	$-1,48 \pm 0,29$	—	$-3,06 \pm 0,14$	$C^{TS}$
$\text{SiO}_2$ (кварц)	34	$-2,10$	$-3,45$	$-2,94$	—	$-1,34$	—	$-2,0$	$C^{TS}$
		$C_{113} = +0,12, C_{114} = -1,63, C_{124} = -0,15, C_{133} = -3,12, C_{134} = +0,02, C_{222} = -3,32, C_{333} = -8,15, C_{344} = -1,10, C_{444} = -2,76$							

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН 555

\*) Определены три комбинации адиабатических модулей, для расчета всех шести модулей, использовались результаты измерения смешанных модулей  $C_{ijr}^{TS}$  в 33 (первая строка) и в 27 (вторая строка).

Таблица III

Независимые упругие модули третьего порядка кристаллов

Класс	Независимые модули
Кубический $\left\{ \begin{array}{l} O, Oh, Th \\ T, Th \end{array} \right.$	$C_{111}, C_{112}, C_{123}, C_{456}, C_{144}, C_{166}$ $C_{111}, C_{112}, C_{123}, C_{456}, C_{144}, C_{166}, C_{113}, C_{155}$
Гексагональный	$C_{111}, C_{112}, C_{113}, C_{133}, C_{333}, C_{123}, C_{144}, C_{166}$ $C_{344}, C_{155}, C_{366}, C_{456}$
Тетрагональный	$C_{111}, C_{112}, C_{113}, C_{114}, C_{123}, C_{124}, C_{144}, C_{133}$ $C_{134}, C_{155}, C_{222}, C_{333}, C_{344}$
Тригональный	$C_{111}, C_{112}, C_{113}, C_{114}, C_{123}, C_{124}, C_{144}, C_{133}$ $C_{134}, C_{155}, C_{222}, C_{333}$
Орторомбический	$C_{111}, C_{112}, C_{113}, C_{122}, C_{123}, C_{133}, C_{222}, C_{223}$ $C_{223}, C_{333}, C_{144}, C_{155}, C_{166}, C_{244}, C_{255}$ $C_{266}, C_{344}, C_{355}, C_{366}, C_{456}$

Как видно из данных, приведенных в табл. I и II, в настоящее время большинство модулей третьего порядка определено из измерений зависимости скорости распространения упругих волн от статического давления, т. е. по <sup>13</sup> это смешанные (изотермически-адиабатические модули). Акустические методы измерения различных нелинейных эффектов, как это будет видно далее, принципиально позволяют определить адиабатические модули третьего порядка.

3. Напряжения. По Мэрнагану <sup>4</sup> тензор напряжений

$$\sigma_{ik} = \frac{\rho}{\rho_0} Y \left( \frac{\partial U}{\partial u_{ik}} \right) Y^*, \quad (6)$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$  — плотности в деформированном и недеформированном состоянии соответственно,  $\rho = \rho_0 (1 + I_1)$ ,  $Y = \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \delta_{ik} \right|$ ,  $Y^*$  — транспонированная матрица  $Y$ .

При учете во внутренней энергии кубических членов относительно деформации обобщенный закон Гука (6) имеет, помимо линейных членов, члены, квадратично зависящие от деформаций, которые и определяют упругие нелинейные эффекты твердых тел.

4. Уравнения движения. Уравнение движения имеет обычный вид

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (7)$$

В общем случае для изотропного твердого тела уравнения (7) имеют вид <sup>35</sup>

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} - \left( K + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_l} = \\ = \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \left( \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + 2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + \\ + \left( K + \frac{\mu}{3} + \frac{A}{4} + B \right) \left( \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right) + \\ + \left( K - \frac{2\mu}{3} + B \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \left( \frac{A}{4} + B \right) \times \\ \times \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) + (B + 2C) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}. \end{aligned} \quad (8)$$



Нелинейные члены в правой части (8) не обращаются в нуль при равенстве нулю всех трех модулей третьего порядка, так как связь компонент тензора деформации со смещениями (1) нелинейна. Эта геометрическая нелинейность обусловлена особенностями конечных деформаций в твердом теле.

В кристаллах уравнение (7) слишком громоздко для того, чтобы его приводить здесь (см. <sup>36</sup>).

### III. ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Обычно нелинейное уравнение (8) решается методом последовательных приближений: предполагается, что отношение амплитуды смещения  $u_0$  к длине звуковой волны  $\lambda$  (акустическое число Маха) достаточно мало. Тогда в (8) члены  $\frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ , где  $c_0$  — фазовая скорость волны, имеют порядок  $u_0/\lambda^2$ . Нелинейные члены вида  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_p} \frac{\partial u}{\partial x_p}$ , поскольку отношение модулей упругости третьего к модулям упругости второго порядка не превышает десятков, имеют порядок  $u_0^2/\lambda^3$ , т. е. второй порядок малости по сравнению с линейными членами.

Представим смещение в виде суммы

$$u = u' + u'' + u''' + \dots, \quad (9)$$

причем штрихи означают порядок малости, например  $u'' \sim u' u_0/\lambda$ . Подставляя (9) в (8), получим уравнение первого приближения

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k} - \left( K + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_l \partial x_l} = 0. \quad (10)$$

Уравнение второго приближения имеет вид (8); только в левой части стоят величины второго порядка малости, а в правой — первого порядка малости. Таким образом, задача сводится к решению системы линейных уравнений с соответствующими граничными условиями. В первом приближении это — обычное волновое уравнение (10), во втором приближении — неоднородное волновое уравнение, ибо в правую часть (8) подставляется известное решение уравнения (10).

1. Нелинейное взаимодействие волн, распространяющихся в одном направлении. В дальнейшем будет рассмотрена плоская бегущая волна, распространяющаяся в направлении оси  $Ox$ . Уравнения второго приближения при этом (8) принимают вид <sup>35</sup>

$$\frac{\partial^2 u''_x}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u''_x}{\partial x^2} = \beta_l \frac{\partial^2 u'_x}{\partial x^2} \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \beta_\tau \left( \frac{\partial^2 u'_y}{\partial x^2} \frac{\partial u'_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 u'_z}{\partial x^2} \frac{\partial u'_z}{\partial x} \right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u''_y}{\partial t^2} - c_t^2 \frac{\partial^2 u''_y}{\partial x^2} = \beta_\tau \left( \frac{\partial^2 u'_y}{\partial x^2} \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial x^2} \frac{\partial u'_y}{\partial x} \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 u''_z}{\partial t^2} - c_t^2 \frac{\partial^2 u''_z}{\partial x^2} = \beta_\tau \left( \frac{\partial^2 u'_z}{\partial x^2} \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial x^2} \frac{\partial u'_z}{\partial x} \right), \quad (13)$$

где  $c_l^2 = \left( K + \frac{4}{3} \mu \right) / \rho_0$ ,  $c_t^2 = \mu / \rho_0$ ,  $\beta_l = 3c_l^2 + \frac{1}{\rho_0} (2A + 6B + 2C)$ ,  $\beta_\tau = c_t^2 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{A}{2} + B \right)$ .

Для кубических кристаллов «чистая» продольная волна может распространяться в направлениях [100], [110] и [111]. Если ось направлена вдоль любого из этих направлений, то уравнение второго приближения

может быть записано в виде (11) при  $u_y = u_z = 0$  и значениях  $c_l^2$  и  $\beta_l$ , приведенных в табл. IV<sup>37</sup>. Для направлений, отличающихся от указанных, вид уравнения не меняется, однако коэффициенты в этом случае имеют более сложный вид<sup>38</sup>.

Таблица IV

Коэффициенты уравнения второго приближения для кубических кристаллов

Направление распространения волны	$c_l^2$	$\beta_l - 3c_l^2$
[100]	$c_{11}/\rho_0$	$C_{111}/\rho_0$
[110]	$(c_{11} + c_{12} + 2c_{44})/2\rho_0$	$(C_{111} + 3C_{112} + 12C_{166})/4\rho_0$
[111]	$(c_{11} + 2c_{12} + 4c_{44})/2\rho_0$	$(C_{111} + 6C_{112} + 12C_{144} + 24C_{166} + 2C_{123} + 16C_{456})/9\rho_0$

Из (11) следует, что при распространении плоской продольной волны ( $u_y = u_z = 0$ ), возбуждаемой источником при  $x = 0$ ,  $u_x'(0, t) = = u_0(1 - \cos \omega t)$ , генерируется вторая продольная гармоника

$$u_x'' = -\frac{\beta_l}{c_l^2} \frac{x k_l^2 u_0^2}{8} [1 - \cos 2(\omega t - k_l x)], \quad (14)$$

где  $k_l = \omega/c_l$  — волновое число продольной волны. Решение (14) найдено с граничным условием  $u_x''(0, t) = 0$ . Линейный рост второй гармоники с расстоянием обусловлен тем, что не учитывалось поглощение звука. Если учитывать поглощение звука, то (14) принимает вид<sup>39</sup>

$$u_x'' = \frac{\beta_l k_l^2 u_0^2}{16\alpha_l c_l^2} (e^{-2\alpha_l x} - e^{-4\alpha_l x}) [1 - \cos 2(\omega t - k_l x)], \quad (15)$$

где  $\alpha_l = \left(\frac{4}{3} \eta + \eta'\right) \omega^2 / 2\rho_0 c_l^3$  — коэффициент затухания продольной волны,  $\eta$  и  $\eta'$  — соответственно коэффициенты сдвиговой и объемной вязкостей. При малых  $\alpha_l x$  (15) переходит в (14), т. е. вторая гармоника линейно нарастает с расстоянием; затем скорость роста начинает тормозиться диссипативными потерями. На расстоянии

$$x_s = \ln 2 / 2\alpha_l \quad (16)$$

вторая гармоника достигает максимума и затем убывает. Аналогично может быть рассмотрено возникновение комбинационных (суммарных или разностных) частот при одновременном возбуждении в твердом теле двух продольных волн разных частот, распространяющихся в одном и том же направлении.

Отметим, что, подобно тому как это имеет место в жидкостях, при возбуждении в твердом теле продольной волны достаточно большой интенсивности, помимо второй продольной гармоники, должны возникать продольные гармоники более высоких номеров: третья, четвертая и т. д.; волна, так же как и в жидкости, постепенно переходит в пилообразную. В рамках пятиконстантной теории упругости генерация этих гармоник, так же как процессы формирования пилообразной волны, строго говоря, не могут быть описаны: для этого необходимо учитывать упругие модули более высокого порядка.

В том случае, когда источником возбуждается только поперечная волна, поляризованная, например, вдоль оси  $Oz$  ( $u_x = u_y = 0$ ), уравнение второго приближения (13) — однородное волновое уравнение. С нуле-

выми граничными условиями оно имеет только нулевое решение, т. е. поперечная волна в анизотропном теле не генерирует поперечную же вторую гармонику. Этот результат довольно очевиден, так как генерация гармоники становится возможной тогда, когда напряжение меняется по абсолютной величине при изменении знака смещения на противоположный. Поскольку абсолютная величина сдвиговых напряжений не меняется при изменении направления сдвига на противоположный, вторая гармоника не генерируется. Это справедливо для идеального изотропного твердого тела. Можно показать, что в кубических кристаллах (класс  $m\bar{3}m$ ) при распространении волны только в направлениях  $[100]$ ,  $[010]$ ,  $[001]$  и в направлениях диагоналей граней  $[110]$ ,  $[101]$ ,  $[011]$  поперечная вторая гармоника генерироваться не будет. В реальных твердых телах из-за остаточных внутренних напряжений и дислокаций генерация второй поперечной гармоники экспериментально наблюдается (см. гл. IV)<sup>40</sup>.

Из вида уравнения (11) следует, что под действием сдвиговой волны возникают продольные колебания удвоенной частоты. Это, однако, типичный пример несинхронного нелинейного эффекта\*), так как скорость распространения вынужденного процесса (продольной волны) отличается от скорости распространения вынуждающей поперечной волны. Действительно, при  $u'_x = u'_y = 0$  и  $u'_z(0, t) = w_0(1 - \cos \omega t)$  решение уравнения первого приближения имеет вид обычной бегущей волны. Решение уравнения второго приближения (11) имеет вид<sup>35</sup>

$$u''_x = \frac{\beta_\tau k_\tau w_0^2}{4c_\tau(a^2 - 1)} \sin[(k_\tau - k_l)x] \cos[2\omega t - (k_\tau + k_l)x], \quad (17)$$

где  $a = c_l/c_\tau$ . Отсутствие синхронизма приводит к тому, что возникающая гармоника «модулирована» по амплитуде в пространстве, причем период «модуляции»

$$\Delta x = \lambda_l/2(a - 1), \quad (18)$$

где  $\lambda_l$  — длина продольной звуковой волны на частоте  $\omega$ . Поскольку для большинства твердых тел  $a \sim 2$ , период (18)  $\sim \lambda_l/2 \sim \lambda_\tau$ , т. е. период «модуляции» порядка длины поперечной волны. При учете затухания продольные колебания удвоенной частоты имеют вид<sup>39</sup>

$$u''_x = \frac{\beta_\tau k_\tau w_0^2}{8c_\tau^2(a^2 - 1)} [e^{-4\alpha_l x} \sin 2(k_l x - \omega t) - e^{-2\alpha_\tau x} \sin 2(k_\tau x - \omega t)]. \quad (19)$$

Пространственные осцилляции при этом сглаживаются экспоненциальными множителями. В дальнейшем эти «модулированные» гармоники будут называться сложными.

Отметим, что «модулированные» гармоники генерируются при несинхронных нелинейных эффектах также в средах с дисперсией, например в нелинейной оптике<sup>41</sup>, при распространении капиллярных волн на поверхности жидкости<sup>42, 43</sup>. В (17) можно формально устремить  $c_\tau$  к  $c_l$ . Тогда по мере уменьшения различия этих скоростей период осцилляции амплитуды второй гармоники все более и более возрастает и, наконец, при переходе к синхронному возбуждению  $c_\tau = c_l$  (17) переходит при  $\beta_\tau = \beta_l$  и  $w_0 = u_0$  в (14).

При одновременном возбуждении продольных и поперечных волн, распространяющихся в одном направлении, во втором приближении,

\*) При нелинейном взаимодействии волн возможны синхронные процессы, при которых возникающая волна непрерывно усиливается в области взаимодействия. Синхронная генерация при трехволновом взаимодействии определяется условиями (20); если они не выполнены, то процесс несинхронен (непрерывного усиления волны комбинационной частоты при этом нет).

помимо продольной второй гармоники (14), а также сложной продольной волны (17), вызванной поперечной волной, в результате взаимодействия первичных волн генерируется еще и сложная поперечная гармоника<sup>39</sup>, пространственный период «модуляции» которой  $\sim 2\Delta x$ , где  $\Delta x$  дается (18).

Несинхронные нелинейные эффекты в изотропных твердых телах из-за большого различия скоростей  $c_t$  и  $c_l$ , как это видно из (18), имеют очень малый период пространственных осцилляций. Поэтому нет характерного для синхронных эффектов «накопления» генерируемой гармоники в процессе распространения первичной волны. Амплитуда сложных волн в достаточной мере мала. Экспериментальное обнаружение этих волн — весьма сложная задача; до сих пор эти эффекты в бегущих волнах обнаружить не удалось.

2. Нелинейное взаимодействие пересекающихся волн (комбинационное рассеяние звука на звуке). Выше рассматривалось взаимодействие плоских бегущих волн, направление распространения которых было одинаковым. Это, вообще говоря, частный случай взаимодействия. Две скорости распространения и три волны (одна продольная и две поперечные с взаимно перпендикулярными направлениями поляризации), суперпозицией которых может быть представлена любая упругая волна в изотропном твердом теле, открывают широкие возможности для синхронного нелинейного

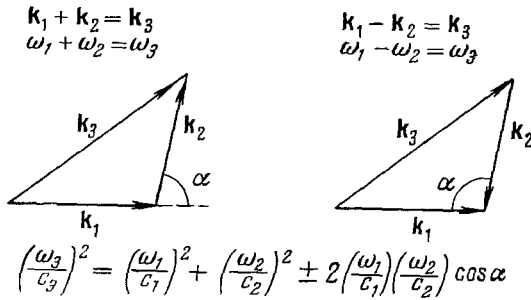


Рис. 1. Трехфононное взаимодействие: закон сохранения энергии квазимульса и фононов.

взаимодействия упругих волн при пересечении под различными углами. Как это следует из теории<sup>5, 44</sup>, условиями синхронного нелинейного возбуждения волны частоты  $\omega_3$  с волновым вектором  $k_3$  под действием двух плоских волн ( $\omega_1, k_1; \omega_2, k_2$ ) будут (рис. 1)

$$\begin{aligned} \omega_1 \pm \omega_2 &\rightleftharpoons \omega_3, \\ k_1 + k_2 &\rightleftharpoons k_3. \end{aligned} \quad (20)$$

При выполнении этих условий передача энергии от взаимодействующих волн в волну комбинационной частоты происходит так, что амплитуда генерируемой волны в области взаимодействия непрерывно нарастает. Теория<sup>44</sup> не учитывает поглощения; однако качественно ясно, что поглощение волн должно ограничивать сверху амплитуду генерируемой волны.

Общая задача о нелинейном взаимодействии двух волн в диссипативной среде до сих пор, насколько нам известно, не рассматривалась. В результате взаимодействия (20) генерируется бегущая волна. Первое из этих условий определяет частоту комбинационной волны, второе — направление ее распространения. Условия (20) получаются также при квантовомеханическом рассмотрении трехфононных процессов, где они интерпретируются соответственно как законы сохранения энергии фононов и их квазимульса\*). Взаимодействие, соответствующее условиям (20), можно было бы назвать по аналогии с комбинационным рассеянием света комбинационным рассеянием звука на звуке, ибо здесь

\*) При рассмотрении тепловых фононов больших энергий (высоких частот) импульс, как известно, сохраняется с точностью до вектора обратной решетки. Для фононов малых энергий, которые интересуют нас, нет необходимости учитывать эти процессы переброта.

также направление и частота рассеянного звука, вообще говоря, отличаются от направлений и частот взаимодействующих звуковых волн.

Отметим, что в средах, где имеется только одна скорость звука (газах и жидкостях), условие (20) допускает взаимодействие только волн, распространяющихся в одном направлении; (20), естественно, справедливо только для плоских монохроматических волн. В случае неплоских волн (например, звуковых пучков) и немонахроматических волн (например, при работе в импульсном режиме) допускается некоторое отклонение от условий (20), степень которого зависит от степени немонахроматичности и неплоскостности волны. В экспериментальных условиях можно создать волны, довольно близкие к плоским монохроматическим; при этом отклонение от (20) определяется условиями эксперимента.

Условия (20) являются необходимыми, но отнюдь не достаточными для нелинейного взаимодействия двух волн с образованием бегущей волны комбинационной частоты. Эти условия, например, допускают генерацию второй поперечной гармоники, которая, как это было показано выше, в изотропном теле не должна возникать.

Решение уравнений нелинейной теории упругости для двух пересекающихся волн было найдено в <sup>44</sup>, <sup>45</sup>. В квантовой трактовке трехфононные взаимодействия были рассмотрены в <sup>46-49</sup>. Как было показано в <sup>45</sup> с учетом трех поляризаций взаимодействующих и рассеянных волн, а также образования как суммарных, так и разностных частот, в изотропном твердом теле мыслимы всего 54 типа взаимодействий (табл. V). Однако

Таблица V

Запрещенные и незапрещенные процессы трехфононного рассеяния для изотропного твердого тела

№	Взаимодействующие волны		Рассеянные волны					
			$\omega_1 + \omega_2$			$\omega_1 - \omega_2$		
			L	T	T'	L	T	T'
1	L ( $\omega_1$ )	L ( $\omega_2$ )	В	А	Б	В	Г	Б
2	L ( $\omega_1$ )	T ( $\omega_2$ )	Г	А	Б	Г	Г	Б
3	T ( $\omega_1$ )	L ( $\omega_2$ )	Г	А	Б	А	А	Б
4	T ( $\omega_1$ )	T ( $\omega_2$ )	Г	В	Б	А	В	Б
5	T' ( $\omega_1$ )	T' ( $\omega_2$ )	Г	В	Б	А	Б	В
6	L ( $\omega_1$ )	T' ( $\omega_2$ )	Б	Б	А	Б	Б	Г
7	T' ( $\omega_1$ )	L ( $\omega_2$ )	Б	Б	А	Б	Б	А
8	T' ( $\omega_1$ )	T ( $\omega_2$ )	Б	Б	В	Б	Б	В
9	T ( $\omega_1$ )	T' ( $\omega_2$ )	Б	Б	В	Б	Б	В

часть из этих взаимодействий запрещена. Причинами запрета могут быть: А) невыполнение условий синхронизма (20) (или, что эквивалентно, невыполнение законов сохранения энергии и квазиимпульса взаимодействующих фононов); Б) невыполнение поляризационных условий. Некоторые из взаимодействий (В) возможны только при распространении волн в одном направлении. Наконец, взаимодействия Г возможны при пересечении волн. В табл. V поперечные волны, поляризованные в плоскости взаимодействия, обозначены буквой T, поляризованные перпендикулярно плоскости взаимодействия — T'. Отметим, что в таблице приведены результаты анализа взаимодействий только с точки зрения выполнения (20) и поляризационных условий, эффективность взаимодействия

(или, пользуясь квантовомеханической терминологией, вероятность взаимодействия) не принималась во внимание. Из табл. V видно, что из 54 типов взаимодействия 36 полностью запрещены, 10 возможны только при распространении волн в одном и том же направлении и, наконец, 8 возможны при пересечении волн. Взаимодействие волн при распространении в одном и том же направлении рассмотрено частично в предыдущем разделе. Подчеркнем здесь, что в среде без потерь взаимодействие волн при распространении в одном и том же направлении принципиально не имеет ограничений на частоты взаимодействующих волн: волны очень низкой частоты могут взаимодействовать с волнами очень высокой частоты, давая комбинационные частоты. При учете поглощения очевидно, что о взаимодействии имеет смысл говорить лишь в том случае, когда длина «свободного» пробега одной из волн, высокочастотной,  $\sim \alpha_1^{-1}$ , где  $\alpha_1$  — коэффициент ее поглощения, больше, чем длина другой (низкочастотной) волны  $\lambda_2$ , т. е.  $\alpha_1 \lambda_2 \ll 1$ . В противном случае первая из волн успеет затухнуть до того, как параметры среды успеют сколько-нибудь существенно измениться под действием второй из волн.

В отличие от взаимодействия волн при распространении в одном и том же направлении, комбинационное рассеяние, вообще говоря, ограничивается целым рядом условий, и при выполнении этих условий возможно для ограниченной области частот взаимодействующих волн.

Как уже говорилось во введении, в этом обзоре мы ограничивались лишь фонон-фононными взаимодействиями и рассматривали выше лишь упругую нелинейность, вызываемую ангармоничностью решетки. При гиперзвуковых исследованиях, однако (см. гл. IV), приходится встречаться с задачей, когда определенную роль может играть (например, при исследовании генерации гармоник в пьезоэлектрических кристаллах) генерация гармоник, происходящая по иным причинам, чем ангармоничность решетки. К таким причинам могут быть отнесены электрострикция и нелинейный пьезоэлектрический эффект, которые могут играть определенную роль, например, при возбуждении гиперзвука на поверхности пьезокристалла, частично помещенного в резонатор. Кроме того, теоретически может оказаться существенной переменная составляющая радиационного давления электромагнитной волны, частота которой совпадает с частотой второй гармоники. В<sup>50, 51</sup> рассмотрены эти вопросы и приведены выражения для амплитуды второй гармоники, в которых, кроме упругой нелинейности, учитываются также электрострикция, давление электромагнитной радиации и нелинейность пьезоэлектрического эффекта. Мы не будем здесь останавливаться на этом, так как по крайней мере для продольных волн даже в таком сильном пьезоэлектрике и сегнетоэлектрике, как ниобат лития (при комнатных температурах), на частотах порядка  $10^9$  гц в наших измерениях мы не смогли обнаружить влияние этих факторов на амплитуду второй гармоники (см. гл. IV). Возможно, впрочем, что в других случаях эти факторы имеют определенное значение.

3. Вынужденные стоячие волны конечной амплитуды в твердых телах. При прочих равных условиях нелинейные акустические эффекты в твердых телах, как правило, на 1—2 порядка более слабые, чем в жидкостях. Для выделения гармоник здесь требуется более чувствительная аппаратура. Об этом подробно будет идти речь в гл. IV, где обсуждаются экспериментальные методы изучения нелинейных волновых явлений в твердых телах. Здесь же следует сказать, что нелинейные эффекты в резонансных акустических системах, особенно при вынужденных колебаниях вблизи резонансных частот и при высоких добротностях резонаторов, проявляются значительно

сильнее, чем в бегущей в неограниченной среде волне<sup>52-55</sup>, что открывает дополнительные возможности исследования нелинейных свойств твердых тел. В<sup>54</sup> было показано, что при числах Рейнольдса  $Re = ku_0 \cdot kL \cdot Q$  (здесь  $u_0$  — амплитуда колебательного смещения, возбуждающего резонатор,  $L$  — его длина,  $Q$  — добротность резонатора), больших единицы, нелинейные эффекты проявляются в генерации гармоники, в возможности резонансного возбуждения на частотах, отличающихся от линейных резонансных частот. Все эти эффекты при  $Re > 1$  выражены достаточно четко. Использование резонансных колебаний является очень чувствительным методом выделения нелинейных эффектов.

В<sup>55</sup> рассмотрена с точностью до величин второго порядка малости задача о продольной и поперечной волне конечной амплитуды в твердом слое, а также нелинейное детектирование амплитудно модулированной звуковой волны твердым стержнем в случае возбуждения его продольной или поперечной волной. В частности, если в твердом стержне, зажато посредине, возбуждать продольные или поперечные стоячие волны высокой частоты  $\omega$ , модулированные низкой частотой  $\Omega$ , являющейся собственной частотой стержня, то в стержне распространяются три волны: несущая  $\omega$  и две боковые  $\omega \pm \Omega$ . Эти волны нелинейно взаимодействуют между собой и на нелинейной упругости стержня происходит акустическое детектирование (выделение низкой частоты  $\Omega$ ). Амплитуда продольных колебаний стержня длины  $L$  на низкой частоте  $\Omega$   $u''_{\Omega} |_{x=L}$  оказывается при этом равной

$$u''_{\Omega} |_{x=L} = \frac{\beta_i u_0^2 m \omega^2 \frac{c_0}{c} \left( \cos \frac{\Omega L}{c} \cos \frac{\Omega L}{c_0} \right)}{8\Omega \left( 1 - \frac{c_0^2}{c^2} \right)} \frac{1}{\sin \frac{\Omega L}{c_0}} \cos \Omega t \times \\ \times \left\{ \frac{\cos k_1 L}{\text{ch } 2\alpha L + \cos 2k_1 L} \left[ \frac{\cos k_2 L}{\text{ch } 2\alpha L + \cos 2k_2 L} - \frac{\cos k_3 L}{\text{ch } 2\alpha L + \cos 2k_3 L} \right] \right\}. \quad (21)$$

Здесь  $\beta_i = \beta_l$ ,  $\alpha = \alpha_l$ , а  $c = c_l$  при возбуждении в стержне продольной высокочастотной волны, и  $\beta_i = \beta_{\tau}$ ,  $\alpha = \alpha_{\tau}$ , а  $c = c_{\tau}$  при возбуждении поперечной волны,  $c_0$  — скорость продольных волн в тонком стержне,  $m$  — глубина модуляции,  $k_1 = \omega/c$ ,  $k_2 = (\omega + \Omega)/c$ ,  $k_3 = (\omega - \Omega)/c$ . При получении этого выражения считалось, что затухание звука основной частоты  $\omega$  мало на длине стержня,  $\alpha L \ll 1$ .

В заключение этой главы обсудим некоторые особенности экспериментального наблюдения нелинейных эффектов в твердых телах, следующие из приведенных выше теоретических результатов. Во-первых, о наблюдении второй продольной гармоники, генерируемой в продольной волне. Из (15) на расстоянии стабилизации амплитуда смещения гармоники достигает максимального значения:

$$(u''_x)_{\max} = \frac{\beta_l k_l^2 u_0^2}{64 \alpha_l c_l^2} = \frac{\epsilon_l \rho c_l u_0^2}{16 \eta} = \frac{\epsilon_l}{32 \pi} Re u_0,$$

где  $\epsilon_l = \beta_l / 2c_l^2$  — безразмерный нелинейный параметр,  $\eta = 2\alpha_l \rho c_l^3 / \omega^2$  — эффективная вязкость,  $Re = \rho \omega u_0 \lambda / \eta$  — акустическое число Рейнольдса,  $\lambda$  — длина волны.

Из этого соотношения видно, что отношение  $(u''_x)_{\max} / u_0 \sim Re$ , т. е. зависит от величины колебательной скорости, создаваемой источником звука, и от эффективной вязкости твердого тела. В качестве характерного примера приведем значение  $(u''_x)_{\max}$  для такого материала, как магниево-алюминевый сплав на частоте  $\sim 4,5$  Мгц. Для этого сплава  $\epsilon_l \approx 6$ ,  $\alpha_l = 8 \cdot 10^{-3}$  1/см,  $c_l = 6,26 \cdot 10^5$  см/сек. Из (16) расстояние стабилизации  $\sim 44$  см. На этом расстоянии  $(u''_x)_{\max} \approx 4,3 \cdot 10^4 u_0^2$ ; при

напряжении на кварцевом излучателе порядка нескольких сотен вольт  $u_0 \approx 10^{-7}$  см, т. е.  $(u_x)_{\max}/u_0 = 4,3 \cdot 10^{-3}$ . Магниево-алюминиевый сплав на 4,5 Мгц имеет очень небольшое затухание. Проведение измерений в твердых телах с большим затуханием затруднено не только тем, что максимальная амплитуда гармоники мала, но также и тем, что расстояние стабилизации (16) в этом случае мало; практически в этом случае невозможно проводить измерения спектрально-импульсным методом на расстояниях, меньших или равных расстоянию стабилизации. Работа же в области более далекой, чем расстояние стабилизации, приводит к тому, что амплитуда гармоники может быть существенно меньше максимальной. Эти обстоятельства полезно иметь в виду при выборе диапазона частот для исследования гармоник.

Несинхронная генерация гармоники типа (17) из-за отсутствия накапливающихся эффектов приводит к очень слабым искажениям даже в твердых телах с малым затуханием. Оценка  $(u_x)_{\max}$  для этого случая может быть сделана; считая, что расстояние нарастания гармоники  $\sim \Delta x/2$ , где  $\Delta x$  — период пространственной «модуляции» (18), при характерных условиях, рассмотренных выше, и  $u_0 \approx 10^{-7}$  см  $(u_x)_{\max}/u_0 = 10^{-5}$ , что на два порядка меньше, чем соответствующая величина при синхронной генерации второй гармоники.

Несколько слов следует сказать о наблюдении комбинационного рассеяния звука на звуке. Несмотря на то, что это синхронный эффект, амплитуда генерируемой волны комбинационной частоты при этом, как правило, меньше, чем максимальная амплитуда синхронно генерируемой второй гармоники, из-за того, что область взаимодействия волн здесь меньше. Выше уже отмечалось, что теории комбинационного рассеяния с учетом затухания в настоящее время нет. Однако, возможно, из-за того, что амплитуда смещения комбинационной волны  $\sim \omega^3$ , здесь на более высоких частотах можно получить большой эффект. Следует сказать, что, хотя отношение амплитуды комбинационной волны к амплитуде взаимодействующих волн здесь по крайней мере на порядок меньше, чем аналогичная величина при генерации второй гармоники, выделение полезного сигнала здесь несколько проще, так как есть больше возможностей проверки того, что взаимодействие происходит в среде (направление приема, вообще говоря, некратность частот и т. д., см. ниже).

#### IV. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

В настоящее время уже имеется несколько десятков экспериментальных работ по исследованию нелинейных явлений, возникающих при распространении упругих волн в твердых телах. В этой главе мы кратко остановимся на исследовании генерации гармоник и комбинационных частот (как в области ультразвуковых, так и в области гиперзвуковых частот); на генерации поперечных гармоник, возникающих благодаря дефектам кристаллов; на комбинационном рассеянии звука на звуке; на генерации гармоник в рэлеевских волнах; на нелинейных резонансах в акустических резонаторах. Наконец, мы опишем оптико-акустические методы изучения нелинейных явлений при распространении упругих волн, которые появились в последнее время.

1. Изучение генерации гармоник продольных волн импульсным спектральным методом. В первых работах по изучению нелинейных акустических эффектов в твердых телах был применен импульсный спектральный метод<sup>2, 56</sup>. Блок-схема



простейшей установки для наблюдения генерации гармоник таким методом показана на рис. 2. Сама методика измерений на первый взгляд может показаться очень простой. Однако из-за сравнительно малой нелинейности твердых тел возникающие при распространении синусоидальных (у излучателя) упругих волн гармоники малы, и определенную трудность представляет доказательство того, что генерация гармоник происходит именно в твердом теле, а не связана с нелинейностями аппаратуры.

На рис. 2 показано, что на пьезоэлектрическую пластинку 3 через резонансный контур (фильтр-пробку) 2, подавляющий возможную вторую гармонику генератора синусоидального напряжения 1, подается

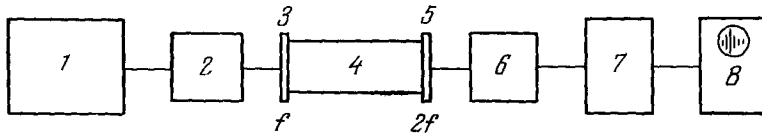


Рис. 2. Блок-схема импульсного спектрального метода измерения гармоник на ультразвуковых частотах.

радиоимпульс. Амплитуда импульса, подаваемого на пьезокварцевую пластинку X-среза, в <sup>2</sup> составляла 1000 в, однако оказывается возможным (при большой чувствительности усилителя) работать при напряжениях порядка всего нескольких десятков вольт. Ультразвуковые импульсы (с несущей частотой в несколько Мгц), проходя через образец твердого тела 4, принимаются далее пьезоэлектрической пластинкой 5, резонансная частота которой соответствует удвоенному значению основной частоты 2f. Принимаемый импульс проходит далее через фильтр-пробку 6, подавляющий сигнал основной частоты f, и подается на резонансный усилитель 7. С выхода этого усилителя, настроенного на частоту второй гармоники 2f, коэффициент усиления которого составлял 1000, возникающие за счет упругой нелинейности в образце импульсы второй гармоники подаются далее на индикатор 8. Характер огибающей серии импульсов, возникающей в результате многократного отражения от торцов образца, зависит от импедансов этих торцов <sup>29, 37, 50</sup>. Наиболее прост случай бесконечного импеданса. При этом фазовые соотношения между первой, второй и более высокими гармониками при отражении не изменяются и вторая гармоника (так же как и более высокие гармоники) нарастает по мере увеличения пути, пройденного импульсом; при этом с увеличением пути все больше сказываются диссипативные потери. В этом случае при длине образца, меньшей расстояния стабилизации, определяемого выражением (18), наблюдается серия сначала нарастающих (до расстояния стабилизации) импульсов, а затем убывающих. Несколько сложнее обстоит дело в том случае, когда импеданс торца, противоположного источнику ультразвука, равен нулю (граница абсолютно свободная). При отражении от границы с нулевым импедансом фазовые соотношения между первой и второй гармониками для продольных волн изменяются так, что после отражения вторая гармоника начинает убывать; если бы затухания не было, к излучателю возвратилась бы чисто синусоидальная волна (с амплитудой второй гармоники, равной нулю). Если прием второй гармоники ведется на границе с нулевым импедансом, то амплитуда импульсов второй гармоники экспоненциально убывает (без затухания амплитуда импульсов была бы постоянной). В случае конечного импеданса отражающего конца огибающая импульсов будет промежуточной между экспоненциально убывающей (нулевой импеданс) и кривой с максимумом (бесконечный

импеданс). В экспериментальных условиях легче реализовать случай свободной границы, особенно при работе в области гиперзвуковых частот (см. ниже).

Отметим, что для поперечных волн при их отражении от свободной границы фаза не изменяется, поэтому для поперечных волн амплитуда второй гармоники должна продолжать возрастать до расстояния стабилизации и после отражения от торцов с импедансами, равными нулю. При приеме второй гармоники так, как это показано на блок-схеме рис. 2, импеданс приемного торца образца в существенной мере зависит от особенностей акустического контакта пластинки 5 с образцом; конец образца здесь соприкасается с пленкой жидкости (при приеме продольных волн) или твердой склейки (при приеме поперечных волн); за пленкой находится резонансная пластинка для второй гармоники (четвертьволновая пластинка для первой гармоники). Последнее, вероятно, при некоторых условиях со-

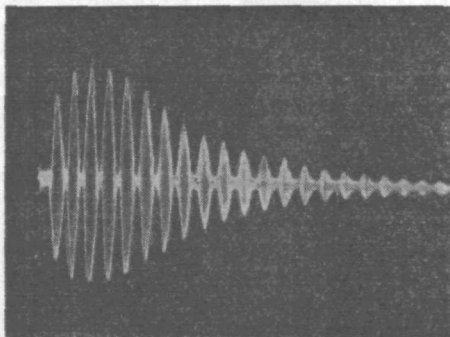


Рис. 3. Серия импульсов второй гармоники (10 Мгц) в магниевом-алюминиевом сплаве.

Длина стержня 7,5 см. Напряжение на излучателе 5 Мгц равно 1000 в (амплитудных).

здает возможность получения достаточно большого импеданса, при котором может наблюдаться нарастающая серия импульсов второй продольной гармоники.

На рис. 3 показана такая серия импульсов второй гармоники (продольные волны) в образце из магниевом-алюминиевого сплава<sup>2\*</sup>). Импульсы второй гармоники по мере прохождения волной расстояния от излучателя возрастают, достигают максимума (расстояние стабилизации, определяемое выражением (16)) и затем вследствие преобладающего влияния диссипативных процессов убывают. Заметим, что в этой работе зависимость амплитуды второй гармоники от расстояния, проходимого волной, определялась также на образцах различной длины (сохраняя условия эксперимента неизменными). На рис. 4 показана эта зависимость в стержнях из магниевом-алюминиевого сплава различной длины (основная частота 5 Мгц).

В обсуждаемой работе<sup>2</sup> по измеренному значению амплитуды второй гармоники и выражению (14) были определены отношения комбинации трех модулей упругости третьего порядка  $\varepsilon_1$  к модулям упругости второго порядка для

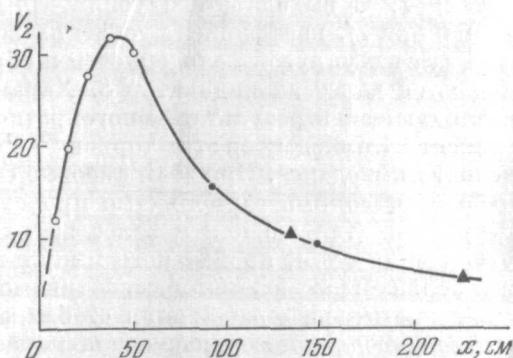


Рис. 4. Зависимость амплитуды (напряжение  $V_2$  на приемной пластинке в мв) второй гармоники (10 Мгц) от расстояния от излучателя в магниевом-алюминиевом сплаве при напряжении на излучателе 1000 в:

○ — по амплитуде первого импульса на стержнях различной длины, ● — второго и третьего импульсов на стержне длиной 30 см, ▲ — второго и третьего импульсов на стержне длиной 45 см.

\*) Расчетная интенсивность звука  $\sim 1$  вт/см<sup>2</sup>, амплитуда звукового давления  $\sim 6$  атм, амплитуда колебательного смещения  $\sim 7 \cdot 10^{-8}$  см.

ряда монокристаллов (Al, NaCl, KCl, LiF), которые оказались в хорошем согласии с данными Бриджмена, полученными им из измерений всесторонней сжимаемости.

В области гиперзвуковых частот ряд косвенных признаков нелинейного искажения и взаимодействия гиперзвуковых волн частоты  $9 \cdot 10^9$  *гц* при гелиевых температурах наблюдался в <sup>57</sup>, например увеличение поглощения при увеличении интенсивности гиперзвука.

Первые эксперименты с импульсной спектральной методикой, аналогичной методике, применявшейся в <sup>1, 2</sup> на ультразвуковых частотах,

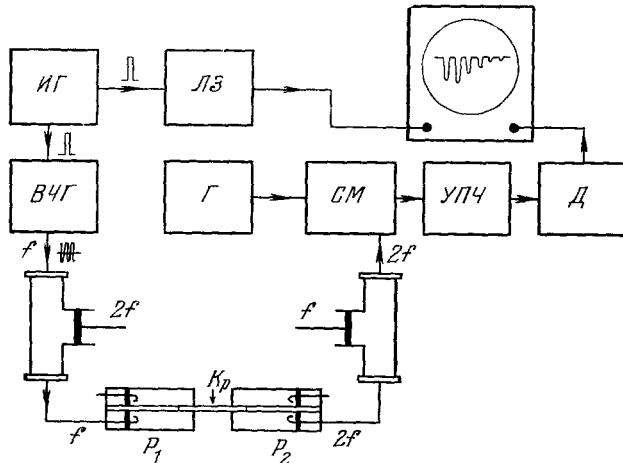


Рис. 5. Блок-схема импульсного спектрального метода измерения гармоник на СВЧ.

на гиперзвуке были выполнены в <sup>58, 59</sup>. В этих работах при гелиевых температурах наблюдалась генерация второй гармоники в кварце X-среза. Возбуждение кварца (как и прием гиперзвука) производилось при помощи помещения кристалла в СВЧ резонатор в пучность высокочастотного электрического поля, т. е. с поверхности кристалла. Этот метод, разработанный К. Н. Баранским <sup>60</sup> и далее развитый в <sup>61</sup> с различными модификациями, получил в настоящее время широкое распространение. В работах <sup>58, 59</sup>, однако, наблюдалась вторая гармоника, происхождение которой связывалось автором с нелинейными явлениями на самой поверхности кристалла при его поверхностном возбуждении. Дальнейшие работы, в том числе и работа самого автора <sup>50</sup>, не подтверждают такого вывода.

Остановимся кратко на экспериментальной методике, применявшейся нами <sup>62</sup>; в других работах <sup>50, 63, 64</sup> применялась подобная методика. На рис. 5 показана блок-схема установки для наблюдения на частоте 400 *Мгц* генерации гармоник в монокристалле ниобата лития при распространении гиперзвука вдоль оси *z*. Здесь ИГ — импульсный генератор, ВЧГ — высокочастотный генератор, ЛЗ — линия задержки. Приемный тракт состоит из Г — гетеродина, СМ — смесителя, УПЧ — усилителя промежуточной частоты и Д — детектора; полоса приемного тракта 4 *Мгц*, максимальная чувствительность  $10^{-12}$  *вт*,  $P_1$  и  $P_2$  — коаксиальные резонаторы,  $K_p$  — монокристаллический образец  $\text{LiNbO}_3$ . Возбуждение и прием волны производились с поверхности в резонаторах  $P_1$  и  $P_2$ , настроенных соответственно на частоту сигнала и двойную частоту. В тракт между ВЧГ и  $P_1$  включен фильтр-пробка (ослабление

48 дб) на частоту второй гармоники с тем, чтобы исключить возбуждение кристалла двойной частотой, появляющейся из-за клирфактора генератора. Между  $P_2$  и  $CM$  включен фильтр-пробка на основную частоту (ослабление 25 дб), чтобы избежать появления ложной второй гармоники в приемном тракте. Монокристалл  $LiNbO_3$  имел диаметр 1,3 см и длину 3,36 см. Торцы кристалла оптически плоскопараллельны и отполированы. Длительность радиоимпульсов составляла 3 мксек, пиковая мощность порядка нескольких ватт.

Осциллограмма серии импульсов второй гармоники приведена на рис. 6. Первый импульс соответствует зондирующему, второй — началу серии импульсов продольной ультразвуковой волны удвоенной

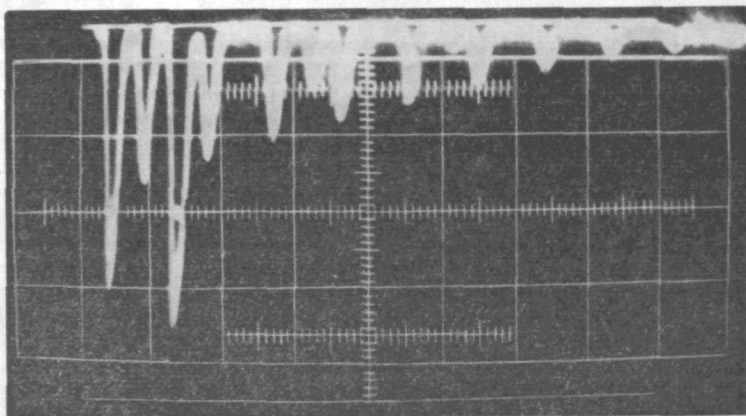


Рис. 6. Осциллограмма продольной и поперечной второй гармоники в  $LiNbO_3$ .

Основная частота  $f_1 = 400$  Мгц. Возбуждение с поверхности, распространение по оси  $z$ . Длина образца 3,36 см, диаметр 1,3 см. Первый импульс — наводка, второй — продольная волна,  $f_2 = 800$  Мгц, третий — поперечная волна,  $f_2 = 800$  Мгц, четвертый и пятый — продольная и шестой — поперечная.

частоты; третий, шестой, девятый — серии импульсов поперечной волны удвоенной частоты, так как в кристалле одновременно возбуждаются оба типа волн. Ряд контрольных измерений показал, что наблюдаемая вторая гармоника не обусловлена различными аппаратурными нелинейностями. Потери на двойное электромеханическое преобразование в данной работе составляли около 50 дб на основной частоте и около 65 дб на двойной частоте. Оценка мощности радиосигнала второй гармоники продольной волны на входе приемника дает для разных условий величину  $10^{-9} - 10^{-10}$  вт. При этом мощность первой гармоники имеет порядок  $10^{-6}$  вт, т. е. амплитуда второй гармоники составляла  $(0,35 \div 0,12)\%$  амплитуды первой гармоники. По электромагнитной мощности и потерям на однократное электромеханическое преобразование можно приближенно рассчитать интенсивность звука и другие параметры звукового поля. Действительно, если электромагнитная мощность  $P_{эм}$ , а потери на преобразование  $\gamma$ , то  $P_{зв} = \gamma P_{эм}$ . Для плоской волны интенсивность, как известно,  $Y = 2\pi^2 \rho c^3 (u_0/\lambda)^2$ , где  $\rho$  — плотность,  $c$  — скорость звука,  $\xi = u_0/\lambda$  — амплитуда деформации в звуковом поле. Из этих соотношений  $\xi^2 = P_{зв}/2\pi^2 \rho c^3 S$  ( $S$  — площадь сечения пучка) и

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \left[ \frac{2\pi^2 \rho c^3 S P_2}{P_1^2} \right]^{-1/2},$$

где индексами 1 и 2 отмечены соответствующие величины для первой и второй гармоник. Эта формула по измеренной электромагнитной мощности первой и второй гармоник позволяет оценить величину звуковых деформаций и смещений. В рассматриваемом случае при  $P_{эм}$  порядка нескольких ватт амплитуды колебательного смещения на основной частоте были порядка  $10^{-10}$  см; амплитуда колебательного смещения второй гармоники имела порядок  $10^{-13}$  см. Измерение абсолютных параметров звукового поля производилось путем подачи в приемный тракт сначала принимаемого сигнала, а затем калиброванного по амплитуде сигнала от отдельного генератора. Из приведенной выше формулы можно определить  $\xi_2/\xi_1^2$  по первому принимаемому импульсу. Амплитуда деформации для второй гармоники, распространяющейся по оси  $z$  образца, из (14) на расстояниях, много меньших расстояния стабилизации, имеет вид

$$\xi_2 = \frac{1}{8} \Gamma_l \xi_0^2 x k^2 \lambda,$$

где  $\Gamma_l = 3 + (C_{333}^D/c_{33}^D) = -\beta_l/c_l^2$  — эффективный нелинейный параметр (здесь  $c_{33}^D$  — упругий модуль второго порядка и  $C_{333}^D$  — упругий модуль третьего порядка при постоянной индукции  $D$ ). Пользуясь этим соотношением, можно определить эффективное значение нелинейного параметра для  $\text{LiNbO}_3$  вдоль оси  $z$ :  $\Gamma_l = 1,4 \pm 0,9$ .

Отметим, что в других работах по генерации гармоник в области гиперзвуковых частот не было указания на возбуждение поперечной второй гармоники. На осциллограмме (см. рис. 6) убывающая серия второй поперечной гармоники четко видна. Генерация поперечной второй гармоники под действием поперечной волны в анизотропном твердом теле или в кубическом кристалле (при распространении в направлениях [100], [010], [001] и [111]) возможна, как уже указывалось в гл. III, только при наличии несовершенств в кристалле (дислокаций, внутренних напряжений и т. д.). В условиях эксперимента этой работы поперечная гармоника могла возникать также и из-за анизотропии.

При увеличении мощности электромагнитного импульса до 10 вт можно было наблюдать также третью продольную гармонику на частоте 1200 Мгц.

Измеряемое  $\Gamma$  для пьезо- и сегнетоэлектриков, вообще говоря, может включать в себя, согласно <sup>50</sup>, как решеточную нелинейность, так и нелинейность, которая может возникнуть при поверхностном возбуждении гиперзвука. Поэтому выделение решеточной второй гармоники при поверхностном возбуждении пьезоэлектриков представляет определенные трудности. Поскольку, как уже отмечалось, нелинейные эффекты малы, приходится считаться с целым рядом других причин возникновения второй гармоники на поверхности кристалла, не связанных с агармоничностью решетки.

Назовем эту гармонику поверхностной. Одной из причин возникновения поверхностной гармоники является давление электромагнитного излучения (поскольку оно пропорционально квадрату напряженности поля, то, помимо постоянной составляющей, есть и меняющаяся с удвоенной частотой компонента давления). Эту вторую гармонику, возникающую из-за давления электромагнитной радиации, удалось экспериментально наблюдать, помещая в резонатор один конец пьезоэлектрического диэлектрика (корунда), на другом конце которого была напылена пленка сульфида кадмия, используемая в качестве приемника второй гармоники <sup>65</sup>. Другой причиной генерации поверхностной второй гармоники может быть электрострикционный эффект. С этой второй причиной следует особенно считаться при возбуждении гиперзвука в сегнетоэлектриках, в частности таких, как ниобат или танталат лития. Наконец,

третьей причиной возбуждения второй гармоники на поверхности пьезоэлектрического кристалла, помещенного в резонатор, может быть нелинейность пьезоэлектрического эффекта. Разделение второй гармоники, возникающей из-за агармоничности решетки, и по другим, указанным выше причинам значительно осложняется.

Возвращаясь к работе <sup>62</sup>, следует сказать, что поправка на радиационное давление электромагнитных волн, как показывает оценка на основании <sup>50</sup>, на три порядка меньше для  $\xi_2/\xi_0$ , чем среднее ее экспериментальное значение. Таким образом, радиационное давление, хотя оно в принципе и приводит к появлению акустической второй гармоники и экспериментально было обнаружено в корунде <sup>65</sup>, в описываемых экспериментах не вносит сколько-нибудь существенного вклада в  $\Gamma_1$ . Что же касается электрострикционного эффекта и нелинейности пьезоэлектрических свойств, то, поскольку ниобат лития — сегнетоэлектрик, можно ожидать, что поверхностная вторая гармоника дает определенный вклад в общую амплитуду второй гармоники.

Определение величины поверхностной второй гармоники оказывается возможным для пьезоэлектрического образца при изучении поведения суммарной или разностной частот, появляющихся при взаимодействии двух продольных или поперечных волн, которые распространяются в одном и том же направлении. Как было предложено в работе <sup>66</sup>, для этой цели можно поступать следующим образом. После того как на преобразователь в момент времени  $t_0$  подан импульс частоты  $f_1$ , вводится задержка  $2\tau$  на время, затрачиваемое упругим импульсом, для прохождения длины образца и возвращения его после отражения обратно к излучателю. В момент  $t_0 + 2\tau$  подается электромагнитный импульс частоты  $f_2$ . С этого момента оба импульса — частоты  $f_1$ , излученный в момент времени  $t_0$ , и частоты  $f_2$ , излученный в момент времени  $t_0 + 2\tau$ , — распространяются по кристаллу вместе, и между волнами частот  $f_1$  и  $f_2$  происходит нелинейное взаимодействие. Таким путем исключается возможное нелинейное взаимодействие и образование гармоник при электромагнитном возбуждении поверхности пьезоэлектрического образца, поскольку электромагнитные импульсы частот  $f_1$  и  $f_2$  на поверхности пьезоэлектрика действуют уже одновременно. При помощи такой методики в ниобате лития вдоль оси  $z$  нами вместе с К. К. Ермилиным на установке, описанной выше <sup>62</sup> (см. рис. 5), наблюдалось образование продольной и поперечной волн разностной частоты  $805 \text{ Мгц}$  при взаимодействии двух коллинеарных гиперзвуковых пучков с частотами  $f_1 = 1205 \text{ Мгц}$  и  $f_2 = 400 \text{ Мгц}$ .

Обратим внимание на то, что при возбуждении кристалла генерировались одновременно как продольные, так и поперечные волны. При этом оказалось, что в пределах ошибки измерений не более 5—7% для продольных волн нет генерации волны разностной частоты при поверхностном возбуждении, которая могла бы произойти вследствие электрострикции или нелинейности пьезоэффекта.

**2. Генерация поперечной гармоники.** Согласно нелинейной теории упругости, как это было показано в гл. III, в изотропных телах во втором приближении не должна наблюдаться генерация второй поперечной гармоники в поперечной волне. Это связано с тем, что в нелинейном законе Гука для деформации сдвига нет квадратичных членов из-за эквивалентности сдвига в прямом и обратном направлениях. Отметим, что законы сохранения энергии и квазиимпульса фононов (20), как уже указывалось, допускают возможность «слияния» двух поперечных фононов при одинаковых направлениях квазиимпульса, однако из-за вида упругой энергии вероятность такого взаимодействия равна

нулю. В кристаллах при произвольном направлении распространения такого рода взаимодействия, вообще говоря, не запрещены. Можно, однако, показать, что, например, для кристаллов кубической системы класса  $m\bar{3}m$  есть определенные направления  $[100]$  и  $[110]$  (в этих направлениях распространение «чистой» сдвиговой волны возможно), где генерации второй поперечной гармоники не будет. Ее генерация становится возможной при распространении помимо сдвиговой волны еще и продольной (см. гл. III). Это, однако, случай несинхронной генерации, и для бегущих плоских волн нет нарастающей в пространстве второй поперечной гармоники; ее амплитуда периодически меняется в пространстве, причем период изменения порядка длины продольной волны. Несинхронная генерация в твердых телах, где различие в скоростях продольных и поперечных волн велико, приводит к очень малым нелинейным эффектам.

Как показали эксперименты <sup>40</sup>, в твердых телах с относительно небольшим затуханием (поликристаллический магниево-алюминиевый сплав, алюминий, дюралюминий), а также в чистых монокристаллах алюминия (99,95% Al), кадмия и цинка при распространении звука в направлении оси  $[100]$ , сравнительно просто может быть выделена вторая сдвиговая гармоника. Величина этой гармоники на один-два порядка меньше, чем величина продольной гармоники, генерируемой в продольной волне. В монокристаллах металлов амплитуда генерируемой гармоники в <sup>40</sup> сильно зависела от сравнительно слабых внешних воздействий — локального действия силы или небольшого локального нагревания.

Влияние внешней силы на монокристалл алюминия показано на рис. 7. Величина внешней силы слишком мала для того, чтобы можно было предположить какое-то изменение решеточной нелинейности. Кроме того, зависимость эффекта от места приложения силы, характерные релаксационные эффекты (увеличение амплитуды сдвиговой гармоники при изгибе монокристаллов кадмия и цинка, а затем постепенное, медленное возвращение гармоники к прежнему значению после снятия силы) — все это является характерным для дефектной структуры кристаллов. Отметим, что прикладываемые к образцу напряжения, как это видно из рис. 8, были меньшими, чем напряжения легкого скольжения, составляющие для Al величину порядка нескольких  $\kappa\Gamma/мм^2$ . Еще меньшими (не более нескольких  $\kappa\Gamma/см^2$ ) были переменные напряжения сдвига в ультразвуковой волне.

В поликристаллических металлах хотя и генерировалась вторая сдвиговая гармоника, однако изменить ее амплитуду слабыми внешними

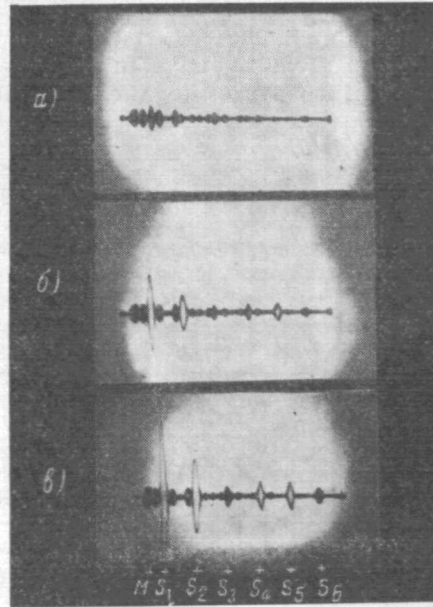


Рис. 7. Осциллограммы второй сдвиговой гармоники в монокристалле алюминия при разных нагрузках: а) без нагрузки, б) нагрузка 1  $\kappa\Gamma$ , в) нагрузка 5  $\kappa\Gamma$ .

Направление силы, создаваемой нагрузкой, совпадает с направлением поляризации волны. Импульсы второй поперечной гармоники отмечены индексами  $s_i$  ( $i$  — номер импульса);  $M$  — электрическая наводка. Импульсы, амплитуда которых не меняется под нагрузкой, — вторая гармоника продольной волны, вызванная побочным излучением продольной волны пластинкой кварца ВТ-среза.

воздействиями не удалось, что указывает, вероятно, на то, что в монокристаллических зернах металл в достаточной степени упрочен и напряжения, создаваемые внешними силами, малы по сравнению с внутренними напряжениями.

Микроскопическая роль дефектов для рассеяния фононов очевидна: вблизи дефектов появляются возможности запрещенных фонон-фононных взаимодействий. Макроскопически (для длинных волн, длина которых намного больше размера дислокаций) влияние дефектов кристаллов тоже сказывается. Возможная причина этого — остаточные внутренние напряжения, создаваемые дислокациями. Качественно их влияние очевидно;

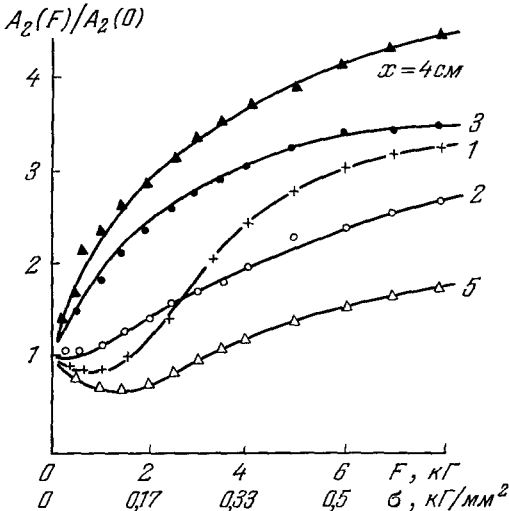


Рис. 8. Отношение амплитуды второй сдвиговой гармоники (при действии силы  $F$ )  $A_2(F)$  к величине гармоники в отсутствие силы  $A_2(0)$  в зависимости от величины  $F$  на различных расстояниях от источника звука.

рицательном) не равно числу областей противоположного знака \*). При распространении упругой волны последняя «пересчитывает» все области; в положительных областях фаза гармоники противоположна фазе гармоники в отрицательных областях. Качественно этот механизм генерации сдвиговой гармоники подтверждается и экспериментально: 1) действие внешней силы сказывается наиболее эффективно тогда, когда направление силы совпадает с направлением поляризации волны; действие внешней силы практически не сказывается тогда, когда ее направление перпендикулярно направлению поляризации сдвиговой волны; 2) интегральный характер эффекта виден из того, что величина наблюдаемой второй гармоники зависит не от напряжения, создаваемого внешней силой, а от величины силы (размеры контакта давящего стержня с кристаллом не играют роли, важна только величина нагрузки).

Нужно сказать, что влияние внешнего статического давления естественно зависит от числа и расположения положительных и отрицательных областей для данного направления силы и поляризации сдвиговой волны. Поэтому приложение внешней статической силы в различных точ-

оно приводит к тому, что закон Гука для сдвиговых деформаций, помимо членов с нечетными степенями деформаций, имеет еще и члены с четными степенями, т. е. деформация сдвига под действием одного и того же по абсолютной величине напряжения происходит различно в зависимости от направления действия напряжения. При этом положение становится аналогичным тому, которое имеет место в случае продольных волн, когда одинаковые по абсолютной величине сжатие и разрежение требуют приложения различных напряжений.

Возникновение второй сдвиговой гармоники может происходить только тогда, когда в среднем по кристаллу число областей (где сдвиг в положительном направлении требует больших напряжений, чем в отрицательном)

\*) В дальнейшем для упрощения мы будем называть эти области положительными и отрицательными.



ках может как увеличивать, так и уменьшать величину генерируемой второй гармоники (см. рис. 8).

В дальнейшем аналогичный эффект наблюдался при распространении продольных волн в монокристаллах и поликристаллах алюминия; растяжение (или сжатие) кристалла в направлении распространения продольной ультразвуковой волны приводило к тому, что величина второй продольной гармоники изменяется<sup>67</sup>. Здесь также статические напряжения недостаточно велики для того, чтобы объяснить наблюдаемые явления изменением решеточной нелинейности. Они, так же как и в случае сдвиговых волн, объясняются влиянием дефектной структуры на упругую нелинейность твердых тел.

Следует отметить двойную роль дислокаций в искажении волн конечной амплитуды. При малых внешних статических напряжениях, до отрыва дислокаций, внешние напряжения сильнее «выгибают» дислокационные петли и приводят к увеличению эффективной нелинейности и, следовательно, к увеличению амплитуды генерируемой гармоники. Дальнейшее увеличение статического напряжения приводит к отрыву дислокаций в точке слабого закрепления, к удлинению дислокационных петель и к возникновению новых дислокаций. Это увеличивает не только эффективную нелинейность, но и затухание упругой волны. Затухание при прочих равных условиях (амплитуде волны, частоте и др.) уменьшает величину генерируемой второй гармоники.

При продолжении работы<sup>40</sup> в нашей лаборатории было показано, что в кристаллах алюминия, подвергнутых предварительно пластической деформации, вторая гармоника более сильно зависела от малых статических напряжений, чем до приложения пластической деформации. Этот результат естествен, так как предварительная пластическая деформация увеличивает плотность дислокаций. Следует сказать, что хотя пластическая деформация значительно увеличивает число дислокаций, вероятно, все же не происходит резкого увеличения числа напряженных микрорегионов одного и того же знака, так как амплитуда гармоники при этом увеличивается не более чем в 2—3 раза.

В этом отношении характерны также результаты, полученные в нашей лаборатории на образцах кристаллов фтористого лития. В щелочно-галлоидных кристаллах дислокации закреплены более жестко, и эти кристаллы, как известно, существенно менее пластичны. Поэтому действие внешней статической силы (даже существенно большей, чем в случае кристаллов алюминия) в этих кристаллах не приводит к изменению амплитуды поперечной гармоники. Влияние дислокаций на генерацию поперечной гармоники здесь может быть определено на образцах с различной плотностью дислокаций. Одна из основных трудностей проведения такого рода экспериментов заключается в создании одинаковых условий излучения и приема для возможности сравнения получаемых результатов.

В этих экспериментах более или менее равные условия достигались благодаря тому, что прием осуществлялся через буфер из плавленого кварца, а контакт излучателя с образцами и образцов с буфером осуществлялся с помощью вакуумной смазки (это вносило ошибку в измерения ~5—7%). Определялась величина второй поперечной гармоники в незакаленном монокристалле LiF с плотностью дислокаций  $10^3$  —  $10^4$ , в образце LiF средней закалки с плотностью дислокаций  $10^4$  —  $10^5$  и сильно закаленном образце LiF с  $10^7$  дислокаций на  $1 \text{ см}^2$ . Плотность дислокаций определялась подсчетом ямок травления на поверхности скола монокристалла \*). Как показали результаты измерений, несмотря на различие

\*) Кристаллы были подготовлены Б. А. Резниковым, которому авторы, пользуясь случаем, выражают благодарность.

плотностей дислокаций на четыре порядка, амплитуда поперечной гармоники в последнем из образцов была только в два раза большей.

Из-за очень малого количества экспериментов здесь еще рано делать какие-либо окончательные заключения, однако очевидно, что компенсация положительных и отрицательных напряженных микрообластей, получающихся в результате того, что с помощью ультразвука наблюдается средний эффект, приводит к генерации сравнительно слабой поперечной гармоники, меньшей, чем в случае продольных волн.

3. Комбинационное рассеяние звука на звуке. Выше описаны экспериментальные методы и результаты по нелинейному искажению волн, распространяющихся в одном направлении. В твердых телах, как об этом шла речь в гл. III, в отличие от жидкостей (без дисперсии), при выполнении законов сохранения энергии и квазиимпульса для плоских бегущих волн возможно так называемое комбина-

ционное рассеяние звука на звуке с образованием плоских бегущих волн комбинационных частот. При выполнении этих законов или резонансных условий (20) возможны взаимодействия при пересечении волн под некоторым углом. Как следует из табл. на стр. 561, таких взаимодействий в случае трехволновых процессов может быть достаточно много.

Экспериментально комбинационное взаимодействие звука на звуке изучалось в ряде работ<sup>68-71</sup>.

Блок-схема установки для изучения такого рассеяния изображена на рис. 9<sup>71</sup>. Два преобразователя (например, пьезокварцевые пластинки соответствующего среза)  $I_1$  и  $I_2$  возбуждаются переменным напряжением генераторов  $G_1$  и  $G_2$  ( $B_1$  и  $B_2$  — вольтметры). Эти преобразователи излу-

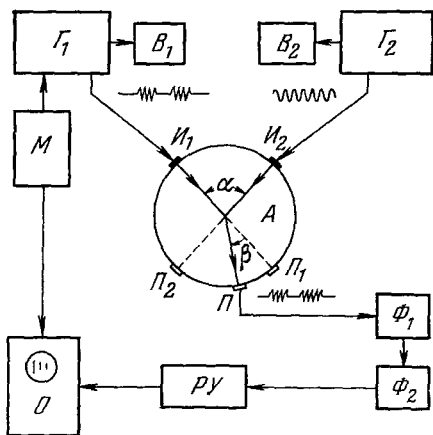


Рис. 9. Блок-схема установки для изучения комбинационного рассеяния звука на звуке.

чают продольные или поперечные волны различной частоты в блок твердого тела  $A$ ; в<sup>70, 71</sup> измерения проводились в блоке из поликристаллического алюминия. Эти волны в виде ультразвуковых пучков пересекаются под углом  $\alpha$ . Рассеянная под углом  $\beta$  волна комбинационной частоты принимается далее приемником  $P$ , резонансная частота которого равна комбинационной частоте. На блок-схеме  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — фильтры-пробки, не пропускающие каждую из взаимодействующих частот,  $RU$  — резонансный усилитель, настраиваемый на комбинационную частоту,  $O$  — индикатор и  $M$  — импульсный модулятор. Генератор  $G_2$  работает в непрерывном режиме и генератор  $G_1$  — в импульсном. Естественно, что принимаемый рассеянный сигнал остается импульсно-модулированным. Возможно использовать импульсный режим и для генератора  $G_2$ . В этом случае, однако, необходимо выполнение условия одновременного прихода импульсов от  $G_1$  и  $G_2$  в область взаимодействия. На рис. 9  $P_1$  и  $P_2$  — контрольные приемники. В<sup>71</sup> при изучении взаимодействия  $T(\omega) + T(\omega) = L(2\omega)$  на частоте  $3 \text{ Мгц}$  рассеянный сигнал создавал на резонансном пьезокварцевом приемнике  $X$ -среза напряжения порядка долей милливольт при подаче на излучатели  $I_1$  и  $I_2$  напряжения  $750 \text{ в}$ . Это составляет  $10^{-3} - 10^{-4}$  от напряжения на одном из контрольных приемников.

Эксперименты по комбинационному рассеянию звука на звуке в общем согласуются с теорией, изложенной в гл. III. Обратим внимание на то, что эксперименты по комбинационному рассеянию звука на звуке можно рассматривать как модулирование нелинейных взаимодействий между тепловыми фононами или между когерентными и тепловыми фононами, которые проводятся на когерентных фононах сравнительно малых энергий.

Во введении к этой статье уже указывалось на то, что нелинейные взаимодействия между тепловыми фононами имеют важное значение в явлении теплопроводности, а нелинейное взаимодействие между когерентными фононами и тепловыми фононами объясняет явление поглощения звука в диэлектрических кристаллах.

Еще в 1935 г. на основе предположения о нелинейном взаимодействии звуковой волны (когерентных фононов) и дебаевских волн (тепловых фононов) из-за ангармоничности решетки Л. Д. Ландау и Ю. Б. Румер<sup>46</sup> развили теорию поглощения звука высоких частот в твердом теле (теория «ЛР»). Согласно этой теории в результате взаимодействия когерентного и теплового фононов рождается третий фонон и часть энергии от когерентного фонона передается возникшему тепловому фонону; происходит потеря энергии звуковой волны.

Такие прямые или непосредственные нелинейные взаимодействия между когерентными и тепловыми фононами могут происходить, однако, лишь в том случае, когда длина звуковой волны  $\lambda_{зв}$  существенно меньше, чем длина свободного пробега теплового фонона  $l_{\phi}$ . Лишь в этом случае может сколько-нибудь заметно накопиться результат этого взаимодействия. Отсюда возникает условие применимости теории «ЛР»:  $\lambda_{зв} \ll l_{\phi}$ . Такие условия выполняются при низких температурах и гиперзвуковых частотах. Так как  $l_{\phi} = c\tau_{\phi}$ , где  $c$  — скорость фонона и  $\tau_{\phi}$  — время релаксации (время жизни фонона), то это условие можно записать также в виде:  $\omega\tau_{\phi} \gg 1$  ( $\omega$  — частота звука), поскольку рассматриваются нормальные или  $N$ -процессы и дисперсия отсутствует.

В предполагаемом трехфононом процессе должны выполняться условия сохранения энергии и квазиимпульса (20). Так как в твердых телах скорость продольных волн  $c_l$  всегда больше скорости поперечных волн  $c_t$ , то из условий (20) в теории «ЛР» делается заключение, что в изотропной среде без дисперсии низкочастотная звуковая продольная волна может взаимодействовать только с высокочастотной продольной волной теплового происхождения и породить в результате взаимодействия третью продольную волну лишь в том случае, если все три волны коллинеарны\*). Для поперечных же звуковых волн такого сильного ограничения нет; в этом случае оказываются возможными неколлинеарные взаимодействия с тепловыми волнами. По этой причине коэффициент поглощения продольных волн  $\alpha_l$  должен быть гораздо меньшим, чем коэффициент поглощения поперечных волн  $\alpha_t$ . Попытка объяснения фононного поглощения продольных волн на основе учета четырех фононных процессов была сделана в<sup>72</sup>. Как позже показали эксперименты, вклад таких процессов в поглощение продольных волн, однако, незначителен. Что же касается зависимости  $\alpha_t$  от частоты  $\omega$  и температуры  $T$ , то согласно теории «ЛР», при условии  $\lambda_{зв} \ll l_{\phi}$   $\alpha_t \sim \omega T^4$ \*\*).

Другой предельный случай  $\lambda_{зв} \gg l_{\phi}$  был рассмотрен А. И. Ахиезером<sup>73</sup>. В этом случае не происходит прямого нелинейного взаимодействия

\*) Строго говоря, следует учесть также другие незапрещенные взаимодействия (см. табл. V). Полного теоретического рассмотрения этой задачи пока не проведено.

\*\*) В ряде кристаллов это условие выполняется при частотах порядка нескольких гигагерц при температуре около 10° К.

между когерентными и тепловыми фононами. Звуковые волны меняют равновесное состояние тепловых фононов, которые затем, опять таки благодаря нелинейному взаимодействию, но уже между самими тепловыми фононами, релаксируют снова к своему равновесному состоянию. В <sup>74</sup> сделана попытка развить теорию, которая охватывала бы как случай  $\lambda_{зв} \gg l_{\phi}$ , так и случай  $\lambda_{зв} \ll l_{\phi}$ .

Развитие экспериментальной техники гиперзвуковых измерений после работы К.Н. Баранского <sup>60</sup> позволило выполнить целый ряд исследований по поглощению продольных и поперечных волн в ряде монокристаллов (кварц, рубин, сапфир, рубиновый шпатель и т. д.) на высоких гиперзвуковых частотах в широком диапазоне температур — от температуры жидкого гелия до комнатных температур <sup>61, 75-79</sup>. Эти исследования показали, что в образцах диэлектрических кристаллов высокого качества при низких температурах поглощение как продольных, так и поперечных гиперзвуковых волн очень мало и, по-видимому, определяется лишь дефектами кристаллов (так называемое остаточное затухание). При повышении температуры, начиная от температуры, близкой к температуре жидкого гелия, поглощение поперечных волн возрастает и в области  $\omega\tau_{\phi} \gg 1$  в общем удовлетворительно согласуется с выводами теории «ЛР». Для случая же продольных волн  $\alpha_l$  при этих условиях, в противоречии с выводами теории «ЛР», имеет тот же порядок величины, что и  $\alpha_{\tau}$  и тот же характер зависимости от  $\omega$  и  $T$  \*).

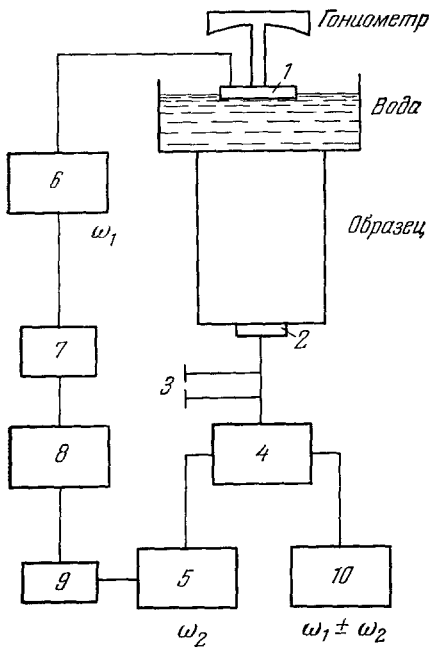


Рис. 10. Блок-схема измерений зависимости амплитуды разностной или суммарной частоты продольной волны от угла между двумя продольными волнами низкой и высокой частоты.

1 — низкочастотная пластинка пьезокварца X-среза с собственной частотой  $\omega_1 = 7$  МГц, 2 — высокочастотный излучатель  $\omega_2$ , 3 — настройка, 4 — гибридное соединение, 5 — генератор высокой частоты, 6 — генератор низкой частоты, 7 — задержка, 8 — синхронизатор, 9 — задержка, 10 — приемник комбинационных частот.

тепловыми фононами, если все три волны не точно, а лишь приближенно коллинеарны. Учет почти коллинеарного взаимодействия позволил качественно объяснить поглощение продольных волн. Согласно этим работам коэффициент поглощения продольных волн, так же как и  $\alpha_{\tau}$ , пропорционален  $\omega T^4$ .

Для того чтобы проверить теорию взаимодействия почти коллинеарных продольных фононов, в <sup>85</sup> был выполнен такой эксперимент. Две

\* ) Подробное обсуждение всей этой сложной проблемы фононного поглощения звука см., например, в обзорах <sup>80, 81</sup>.

продольные плоские волны — одна сравнительно низкой частоты (7—50 Мгц) и другая высокой частоты (200—1000 Мгц) — могли распространяться в блоке из плавленного кварца так, что угол между направлением распространения этих волн мог меняться. В то же время условие теории «ЛР»  $\omega t_{\phi} \gg 1$  в эксперименте выполнялось, если считать, что высокочастотная волна представляла собой тепловой продольный фонon, а низкочастотная волна — продольный когерентный фонon. Эксперименты эти проводились при комнатных температурах и выполнялись по следующей

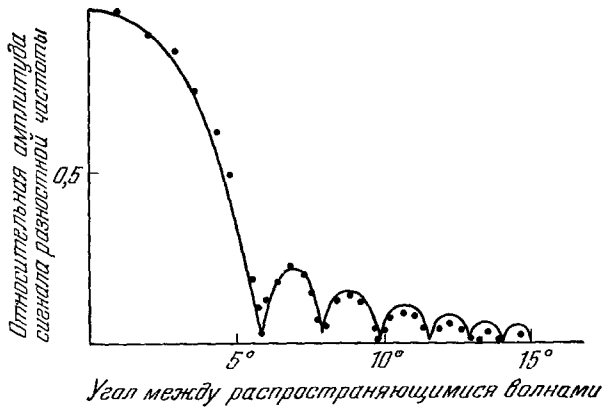


Рис. 11. Угловая зависимость амплитуды разностной частоты в плавленном кварце. Входные частоты 300 и 20,6 Мгц.

Жирная линия — теоретическая кривая. Образец — цилиндр длиной 5,08 см и диаметром 2,44 см.

методике (рис. 10). Низкочастотный излучатель прикреплен к гониометру и может наклоняться на известный угол, находясь в сосуде с водой. Часть низкочастотного импульсного сигнала (применялся импульсный метод) проходит в образец. Высокочастотный импульс от преобразователя, прикрепленного к нижней части образца, подается в такой момент времени, чтобы после отражения от верхней поверхности оба импульса: низкой и высокой частоты — распространялись вместе и между ними происходило взаимодействие. Такая схема эксперимента позволяет производить измерения амплитуды суммарной или разностной частот в зависимости от угла между направлением распространения продольных волн. Теория, которая развита для этого случая в этой же работе, как видно из рис. 11, достаточно хорошо согласуется с проведенными экспериментами \*).

Таким образом, результаты работы <sup>85</sup> в целом согласуются с выводами о том, что почти коллинеарные взаимодействия продольных волн могут играть существенную роль в объяснении поглощения продольных волн при выполнении условия  $\omega t_{\phi} \gg 1$ .

Подводя итог, можно сказать, что эксперименты по комбинационному рассеянию звука на звуке имеют существенное значение в расширении наших представлений о фонon-фононных взаимодействиях.

#### 4. Генерация гармоник в волнах Рэля. Поскольку поверхностная волна Рэля локализуется лишь в тонком

\*) Отметим, что качественно аналогичная зависимость амплитуды комбинационной частоты должна получиться из-за того, что исследование взаимодействия проводилось с ограниченными звуковыми пучками. Оценку периодичности осцилляций амплитуды комбинационной частоты, происходящих из-за того, что пучки ограничены, провести невозможно, так как в <sup>85</sup> не приведены полностью данные эксперимента.

слое вблизи поверхности, плотность упругой энергии в такой волне при прочих равных условиях больше, чем в объемной волне. Дисперсии волн Рэлея не имеют поэтому нелинейные явления, в том числе генерации гармоник <sup>86-88</sup> заметно проявляются при распространении этих волн.

В работе <sup>89</sup> генерация гармоник в поверхностной волне исследовалась в кварце X-среза в направлении оси Y. Образец имел форму прямоугольной пластинки  $160 \times 60 \times 5$  мм с осью Y вдоль большой стороны. Воз-

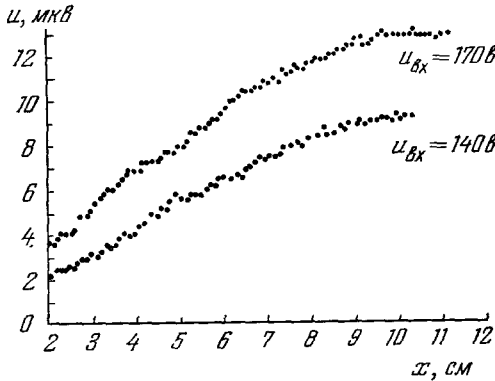


Рис. 12. Зависимость выходного напряжения второй гармоники волны Рэлея в пластинке пьезокварца (распространяющейся вдоль оси Y) от расстояния между преобразователями.

Основная частота 11 Мгц.

буждение поверхностной волны основной частоты 11 Мгц производилось с применением клина; на кварцевую пластинку подавалось напряжение до 200 в с двухтактного усилителя мощности 20 вт. В качестве приемника поверхностных волн использовался переменного-фазовый преобразователь (металлическая решетка), период которого соответствовал длине поверхностной волны и составлял  $3 \cdot 10^{-2}$  см на основной частоте 11 Мгц и соответственно в два раза меньше на частоте второй гармоники. Преобразователи-приемники были сделаны на стеклянной пластинке и могли свободно передвигаться по поверхности кварца. Потери на преобразование для клина с кварцевой пластинкой составляли около 40 дб, для переменного-фазовых преобразователей на частотах 11 и 22 Мгц — 40 и 45 дб соответственно. Пучок поверхностных волн, излучаемых в направлении оси Y в плоскости YZ, отклонялся от этой оси на  $11^\circ$ , поскольку направление вдоль оси Y в кварце X-среза не является основным и угол между фазовой и групповой скоростями для поверхностной волны, распространяющейся по направлению Y, составляет, согласно теории,  $10^\circ 90'$ .

Согласно <sup>88</sup> для  $\alpha$ -кварца при распространении вдоль оси Y амплитуда второй гармоники волны Рэлея определяется выражением  $u_x' = 0,18u_0'^2 k^2 x$ , где  $u_0'$  — амплитуда волны основной частоты у излучателя и  $k$  — ее волновое число \*). Полученные в <sup>89</sup> результаты для зависимости амплитуды второй гармоники от расстояния между преобразователем под углом  $11^\circ$  к оси Y приведены на рис. 12. Как видно из этого рисунка, амплитуда второй гармоники растет пропорционально расстоянию и достигает максимума при  $x \approx 10$  см. Оценки, проведенные в этой работе, показывают, что на расстояниях, близких к расстоянию стабилизации ( $\sim 10$  см), при максимальной плотности потока акустической энергии в поверхностной волне  $\sim 0,5$  вт/см<sup>2</sup>, отношение амплитуды смещения на второй гармонике к амплитуде смещения на основной частоте составляет  $\sim 0,5\%$ .

Так же как и для объемных упругих волн, исследования нелинейных явлений при распространении поверхностных волн имеют существенное значение для понимания механизма поглощения этих волн. В <sup>91</sup> экспериментально исследовалось затухание рэлеевских волн в кристалле квар-

\*) В этой формуле численный коэффициент был получен в <sup>88</sup> с учетом известных данных для модулей упругости второго и третьего порядков для кварца (см. табл. II).

ца на частотах около гигагерца при низких температурах. Было найдено, что коэффициент поглощения рэлеевских волн  $\alpha_p \sim \omega T^4$ , т. е. приблизительно следует той же зависимости от  $\omega$  и  $T$ , что и для объемных упругих волн. Теоретическое рассмотрение задачи о поглощении рэлеевских волн, которое вызвано механизмом нелинейного взаимодействия этих волн с тепловыми поверхностными волнами из-за ангармоничности решетки, было проведено в <sup>92</sup>.

5. **Нелинейные резонансы в акустических резонаторах с большой добротностью.** В гл. III шла речь о том, что при вынужденных колебаниях нелинейных резонаторов, если одна из возникающих в результате нелинейности частот совпадает с одной из собственных частот резонатора, можно ожидать возникновения некоторых особенностей, «нелинейных резонансов».

На рис. 13 приведена блок-схема для наблюдения явления детектирования модулированного акустического сигнала нелинейной упругостью резонатора в виде металлического стержня <sup>52</sup>. Модуляционный метод наблюдения нелинейностей в образцах из твердых тел в виде стержней с большой акустической добротностью весьма чувствителен и позволяет наблюдать нелинейное взаимодействие упругих волн при таких интенсивностях звука и ультразвука, которые еще недавно считались исключительно областью линейной акустики. На приведенной блок-схеме 1 — низкочастотный модулятор-генератор с высокой стабильностью частоты. Сигнал модулятора подается на генератор высокой частоты 2. Модулированный сигнал далее проходит через фильтр-пробку 3, настроенный на частоту модуляции. После этого фильтра сигнал подается на пьезопреобразователь 5 (кварцевая пластинка X-среза), прикрепленный к стержню 6. В стержне, таким образом, распространяются волны с частотами, соответствующими компонентам спектра модулированного сигнала  $\omega$ ,  $\omega \pm \Omega$ . В результате нелинейного взаимодействия этих волн между собой выделяется волна низкой частоты (частоты модуляции), т. е. происходит детектирование на нелинейной упругости стержня. Если частота модуляции совпадает с одной из собственных частот стержня, имеет место резонанс. На блок-схеме 7 — ферромагнитная тонкая пластинка, приклеенная к стержню (если этот стержень немагнитен), 8 — бесконтактный магнитоэлектрический приемник, 9 — усилитель, 10 — осциллограф, 4 и 11 — вольтметры.

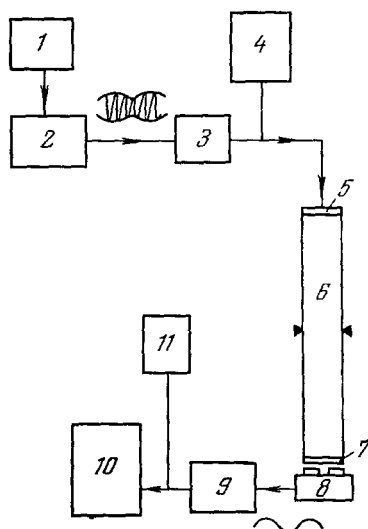


Рис. 13. Блок-схема модуляционного метода исследования нелинейной упругости твердых тел.

При большой добротности стержня детектированный сигнал достаточно велик. Амплитуда акустически детектированного сигнала зависит не только от совпадения частоты модуляции с собственной частотой стержня, но в случае, если затухание несущей частоты на длине стержня мало, также и от этой несущей частоты. На рис. 14 показана зависимость амплитуды продольных колебаний стержня на резонансной частоте  $\Omega$  от несущей частоты  $\omega$  <sup>55</sup>. Виден характерный тройной «резонанс», что связано с тем, что в спектре излучения есть три частоты — несущая и две боковые; максимумы соответствуют условию, когда стержень, кроме резонанса

на частоте  $\Omega$ , резонирует еще на несущей или на одной из боковых частот. На этом же рисунке приведены расчетные кривые для выражения в фигурных скобках в формуле (21). Расчетные кривые нормировались на один из максимумов экспериментальных кривых, взятых для  $\alpha L = 0,05$  и  $\alpha L = 0,15$ , где  $\alpha$  — коэффициент затухания и  $L$  — длины первого и второго стержня соответственно. По оси абсцисс отложена расстройка в единицах  $\omega L/c_1$  относительно частоты  $\omega_0$ , при которой  $\cos k_1 L = 0$ . Приведенные здесь результаты соответствуют числу Рейнольдса  $Re = u_0 k^2 / \alpha \sim 0,05$ .

Обнаружение нелинейных эффектов при такой малой нелинейности оказывается возможным благодаря резонансному методу измерений

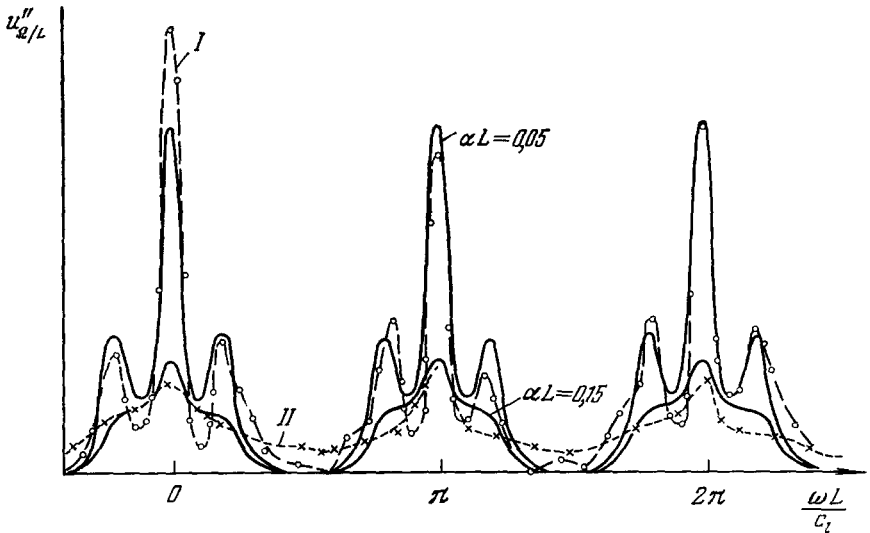


Рис. 14. Зависимость от частоты несущей амплитуды низкочастотных колебаний алюминиевых стержней при возбуждении модулированными колебаниями. Сплошные кривые — по формуле (21); точками отмечены экспериментальные результаты для стержня длиной 25 см, крестиками — для стержня 75 см.

и высокой добротности стержня ( $\sim 10^5$ ). В <sup>53</sup> подобные измерения были сделаны на поперечных волнах. Следует думать, что изложенная выше методика благодаря своей простоте и высокой чувствительности найдет применение для исследования нелинейных акустических эффектов.

Отметим, что эксперимент, принципиально аналогичный описанному, проводился в <sup>93</sup>, где кварцевая пластинка X-среза помещалась в СВЧ резонатор. Электромагнитное поле возбуждало в пластинке упругие колебания. Из-за решеточной нелинейности, а в данном случае также из-за нелинейности пьезоэлектрических свойств, на обкладках пластинки должно было возникнуть постоянное напряжение. В этой работе СВЧ излучение 3 Гц модулировалось импульсами и кварцевая пластинка, добротность которой на несущей частоте была  $\sim 6 \cdot 10^3$ , детектировала импульсы. Эффект детектирования был, естественно, максимален при условии совпадения несущей частоты с одной из собственных частот колебания пьезопластинки (при низшей собственной частоте около 20 Мгц, это был примерно сотый обертоном пластинки). Произведенная в работе оценка вклада различного рода нелинейностей показывает, что нелинейность пьезоэлектрических свойств оказывает на детектирование примерно на порядок большее влияние, чем решеточная нелинейность.



6. Оптические методы изучения нелинейных акустических явлений. Газовые лазеры с их большой спектральной плотностью светового потока открыли новые возможности изучения нелинейных акустических эффектов в твердых телах, используя явление дифракции света на ультразвуковых и в особенности на гиперзвуковых волнах.

Есть, однако, ряд трудностей исследования малых нелинейных искажений упругой волны методом дифракции света. Казалось бы, что при дифракции на упругой волне сложной формы можно по появлению спектров более высокого порядка, чем первый, судить о спектре упругой волны. Однако это не так, поскольку при раман-натовской дифракции даже на синусоидальной фазовой решетке возникают спектры более высокого порядка, чем первый. При наблюдении дифракции со стандартными гелий-неоновыми лазерами доля светового потока в спектрах более высокого порядка, чем первый, вызванная раман-натовской дифракцией, по крайней мере на два порядка больше, чем доля светового потока, вызванная дифракцией на акустических гармониках. Аналогичные трудности возникают и при выделении комбинационных частот, если при этом не производится пространственная и временная селекция. В этом отношении могут быть высказаны определенные сомнения к результатам работы<sup>94</sup>, где на частоте 21,4 Мгц в кристалле NaCl длиной 15 см в области дифракции Рамана — Ната авторы наблюдали вторую гармонику.

В<sup>95</sup> в плавленном кварце исследовалось нелинейное взаимодействие двух бегущих навстречу друг другу сдвиговых ультразвуковых импульсов с частотами 265 и 60 Мгц. Согласно условиям синхронизма (20) в этом случае должна возникать продольная волна с частотой, равной сумме частот взаимодействующих волн. Импульс комбинационной частоты наблюдался по брэгговской дифракции луча гелий-неонового лазера; для наблюдения сигнала применялись электронные схемы с накоплением. Интенсивность взаимодействующих волн составляла несколько  $\text{вт/см}^2$ . Рядом контрольных опытов было установлено, что импульс комбинационной частоты возникает именно вследствие нелинейного взаимодействия двух  $T$ -импульсов.

Следует заметить, что в случае брэгговской дифракции тех трудностей, о которых было сказано выше, в применении к дифракции Рамана — Ната не возникает\*). Наиболее обстоятельная работа по оптическому методу наблюдения гармоник опубликована в 1968 г.<sup>97\*\*</sup>). Схема экспериментальной установки изображена на рис. 15. Свет от неподвижного гелий-неонового лазера падает на исследуемый прозрачный кристалл, который может передвигаться вдоль направления распространения звука, сохраняя брэгговский угол  $\theta_B$  неизменным. Этот свет дифрагирует на продольной гиперзвуковой волне (использовались частоты от 500 Мгц и выше) под углом  $\theta_B$ , удовлетворяющим условию Брэгга  $\sin \theta_B = \lambda/2\Lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны света и  $\Lambda$  — длина волны звука. Поскольку угол  $\theta_B$  зависит от  $\Lambda$ , возникающие при распространении гиперзвуковой волны гармоники могут быть исследованы независимо, если производить измерения под углами  $\theta_B(\omega)$ ,  $\theta_B(2\omega)$ , . . .

Такая методика позволяет проследить за возрастанием и убыванием гармоник с расстоянием в кристалле, если передвигать кристалл относи-

\*) Отметим, что теоретическое рассмотрение и экспериментальное изучение брэгговской дифракции света на ультразвуке было проведено С. М. Рытовым<sup>96</sup> еще в 1937 г. Хотя эта работа была проделана для случая ультразвука, распространяющегося в жидкости, ее результаты в существенной мере относятся и к брэгговской дифракции света на упругих волнах в твердых телах.

\*\*\*) См. также<sup>98</sup>.

тельно луча лазера. В этом состоит существенное преимущество этого метода по сравнению с методом пьезоэлектрического приема гармоник, о котором шла речь выше, хотя оптический метод и имеет свои недостатки. Удобство этого метода состоит также и в том, что при малом отношении интенсивности дифрагированного света к интенсивности падающего интенсивность дифрагированного света пропорциональна интенсивности звука

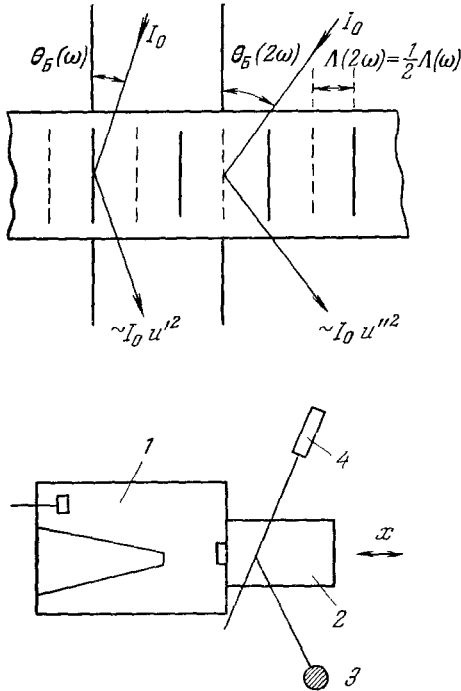


Рис. 15. Схема установки для гармонического анализа при помощи дифракции Брэгга. Изменение амплитуды гармоники с расстоянием  $x$  находится путем передвижения резонатора 1 с кристаллом 2 относительно неподвижных источника света 4 и фотоумножителя 3

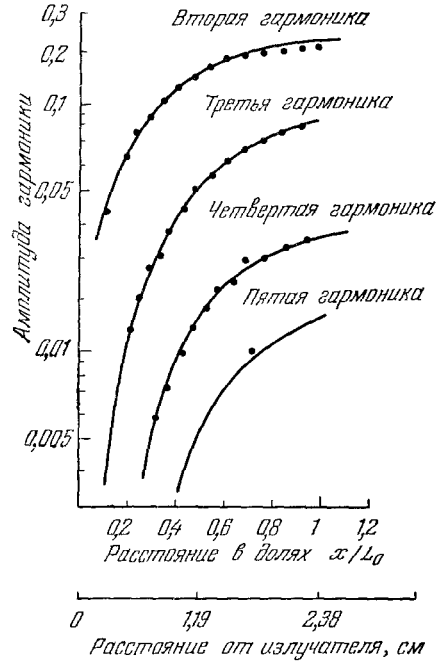


Рис. 16. Относительные (по отношению к амплитуде первой гармоники) амплитуды гармоник при распространении продольных волн.

и не зависит от частоты. Поэтому такой метод дает прямое и точное определение относительной интенсивности гармоники и отпадают многие трудности, связанные с калибровкой преобразователей для абсолютного измерения звукового поля.

Продольные волны излучались пластинкой ZnO с примесью лития, имеющей резонансную частоту 25 Мгц. Эта пластинка помещалась в коаксиальный настраиваемый резонатор и возбуждалась на гармониках; потери на преобразование составляли около 10 дб. Продолжительность импульса 0,5—2,5 мксек, мощность (пиковая) в импульсе 1—10 вт. Использовался гелий-неоновый лазер мощностью 2 Мвт с диаметром светового пятна 1 мм. Амплитуда колебательного смещения была на частотах 500 Мгц почти на два порядка больше, чем в работах <sup>50, 62, 63</sup>.

На рис. 16 представлены результаты измерения гармоник при распространении продольной волны частоты 562 Мгц в кристалле кварца по оси  $z$  в зависимости от расстояния. Сплошные линии соответствуют теоретическим значениям, построенным при условии, что расстояние образования разрыва  $L_0 = 2c^2/\beta_1\omega v_0$  (здесь  $c$  — скорость продольной волны,  $\omega$  — круговая частота,  $v_0$  — амплитуда скорости первой гармони-

ки у излучателя и  $\beta_1$  — комбинация нелинейных модулей третьего порядка) взято равным  $2,38 \text{ см}$  и коэффициент поглощения  $\alpha = 0,0866 \text{ см}^{-1}$ . Как видно из приведенных экспериментальных данных, амплитуда второй гармоники достигает 20% амплитуды основной частоты, т. е. форма волны существенно искажена.

На рис. 17 приведены результаты измерения гармоник на частоте  $708 \text{ Мгц}$  при распространении волны по оси  $z$  кварца. По оси абсцисс отложено безразмерное расстояние; вертикальной штрих-пунктирной линией отмечен размер кристалла. Сплошные кривые теоретические; они построены при  $L_0 = 1,45$ ,  $\alpha = 0,138 \text{ см}^{-1}$ . При этом  $d/\Lambda = 70$  ( $d$  — радиус излучающей пластинки), и можно считать, что измерения производятся в плоской волне. Как видно из рис. 17, после отражения от свободной поверхности кристалла, амплитуда второй гармоники убывает, достигает минимума и затем снова возрастает, что стоит в согласии с тем, что при отражении продольной волны от свободной границы фаза изменяет знак на противоположный.

Выше мы рассматривали нелинейные волновые процессы в упругих волнах, когда эти волны возбуждались при помощи тел или иных электромеханических преобразователей.

Генерация высокочастотного гиперзвука с частотами порядка  $10^{10} \text{ гц}$  возникает в явлении вынужденного рассеяния Мандельштама—Бриллюэна (ВРМБ). Рассеяние света, которое получается при фокусировке гигантского импульса лазера в прозрачной среде, сопровождается усилением упругой (гиперзвуковой) волны, на которой происходит это рассеяние<sup>99</sup>. Теоретическая оценка и эксперимент<sup>100, 101</sup> показывают, что при комнатных температурах интенсивности возникающего гиперзвука при этом, однако, невелики. Так, при комнатных температурах в плавленом кварце при мощности света от рубинового лазера с модулированной добротностью  $80 \text{ Мвт/см}^2$  максимальная мощность возникающего гиперзвука составляет  $10^{-3} \text{ вт}$ . Естественно, что при такой небольшой мощности гиперзвука нелинейные явления, которые могли бы при этом возникать, невелики. Вместе с тем при низких гелиевых температурах, когда поглощение гиперзвука в таких монокристаллах, как кварц, рубин, сапфир и т. д., очень мало и интенсивности гиперзвука, возникающего при ВРМБ, становятся значительными, нелинейные явления могут оказаться существенными. В ряде работ<sup>99, 102, 103</sup> указывалось, в частности, на то, что нелинейные акустические явления, приводящие к формированию пилообразных волн, могут оказаться одной из причин разрушения прозрачных кристаллов при низких температурах под действием мощного лазерного излучения. Кроме косвенных данных и ряда теоретических оценок, нет, однако, до настоящего времени прямых измерений интенсивности гиперзвука, который генерируется при ВРМБ в области низких

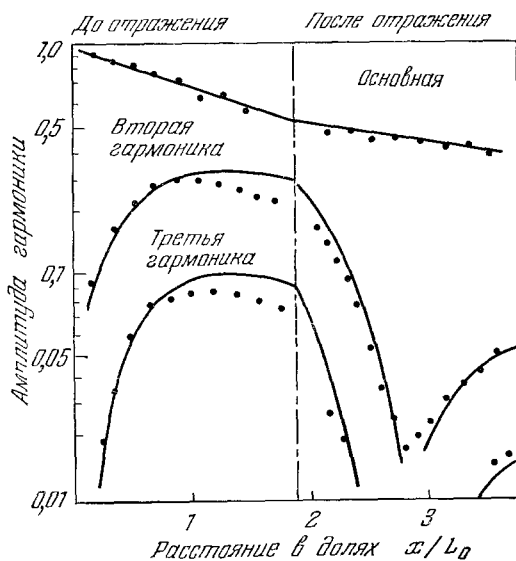


Рис. 17. Поведение гармоник продольной волны.

температур. Тем более нет экспериментов по прямым наблюдениям генерации гармоник в гиперзвуковой волне при ВРМБ. К настоящему времени имеется пока только один эксперимент<sup>104</sup>, в котором при ВРМБ в воде наблюдалось появление второй гармоники, возникающей от гиперзвуковой волны основной частоты  $5 \cdot 10^9$  гц. В этой работе ВРМБ возбуждалось фокусированным лучом рубинового лазера мощностью 1—5 Мвт; вторая гиперзвуковая гармоника наблюдалась по рассеянию под углом Брэгга  $180^\circ$  второй гармоники света  $\lambda = 3470 \text{ \AA}$ , генерируемой при помощи кристалла АДП.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Красильников, А. А. Гедройц, Вестн. МГУ, сер. 3, № 2, 92 (1962).
2. А. А. Гедройц, В. А. Красильников, ЖЭТФ 43, 1592 (1962).
3. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, УФН 68, 687 (1959).
4. F. Murtaghan, Finite Deformation of an Elastic Solid, New York, John Wiley, 1951.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория упругости, М., «Наука», 1965.
6. В. В. Новожилов, Основы нелинейной теории упругости, М., Гостехиздат, 1948.
7. А. Грин, Дж. Адкинс, Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды, М., «Мир», 1965.
8. D. S. Hughes, J. L. Kelly, Phys. Rev. 92, 1145 (1953).
9. D. J. Sreaght, Nature 195 (№ 4847), 1193 (1962).
10. R. T. Smith, Ultrasonics 1, 135 (1963).
11. С. С. Секоян, А. Е. Еремеев, Измерительная техника, № 7, 25 (1966).
12. С. С. Секоян, А. Е. Еремеев, Измерительная техника, № 10, 20 (1966).
13. K. Brugger, Phys. Rev. 133, A1611 (1964).
14. А. А. Нраньян, ФТТ 6, 2124 (1964).
15. J. H. Parker, E. F. Kelly, D. F. Volef, Appl. Phys. Lett. 5, 7 (1964).
16. Z. P. Chang, Phys. Rev. 140, A1788 (1965).
17. P. B. Gate, Phys. Rev. 139, A1666 (1965).
18. А. А. Нраньян, ФТТ 5, 177 (1963).
19. K. D. Swartz, J. Acoust. Soc. Am. 41, 1083 (1967).
20. A. L. Stanford, S. P. Zehner, Phys. Rev. 153, 1025 (1967).
21. J. R. Drubble, R. E. Strathern, Proc. Phys. Soc. 92, 1090 (1967).
22. M. Gluyas, Brit. J. Appl. Phys. 18, 913 (1967).
23. T. Bateman, W. P. Mason, H. J. McSkimin, J. Appl. Phys. 32, 928 (1961).
24. H. J. McSkimin, P. Andreadh, J. Appl. Phys. 35, 3312 (1964).
25. J. R. Drubble, A. J. Grammer, Proc. Phys. Soc. 91, 959 (1967).
26. W. B. Gauster, M. A. Breazeal, Naturwiss., Heft 15, 448 (1965).
27. K. Salama, G. A. Alers, Phys. Rev. 161, 673 (1967).
28. D. E. Eastman, J. Appl. Phys. 37, 2312 (1966).
29. W. B. Gauster, M. A. Breazeal, Phys. Rev. 168, 665 (1968).
30. D. Gerlich, Phys. Rev. 168, 947 (1968).
31. E. H. Bogardus, J. Appl. Phys. 36, 2504 (1965).
32. J. R. Drubble, M. Gluyas, In «Lattice Dynamics» (ed. by R. F. Wallis), Pergamon Press, London, 1965.
33. Y. Hiki, A. V. Granato, Phys. Rev. 144, 411 (1966).
34. R. N. Thurston, H. J. McSkimin, P. Andreadh, J. Appl. Phys. 37, 267 (1966).
35. З. А. Гольдберг, Акуст. ж. 4, 307 (1960).
36. Е. З. Говорова, О нелинейных взаимодействиях упругих волн в монокристаллах, Кандидатская диссертация (МГУ, 1966).
37. M. A. Breazeal, J. Ford, J. Appl. Phys. 36, 3486 (1965).
38. A. C. Holt, J. Ford, J. Appl. Phys. 38, 42 (1967).
39. А. Л. Полякова, ФТТ 6, 65 (1964).
40. А. А. Гедройц, Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, ДАН СССР 150, 515 (1963).

41. Н. Бломберг, *Нелинейная оптика*, М., «Мир», 1966.
42. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, Тхай-Тхань Лонг, *Вестн. МГУ, сер. физ. и астр.*, № 5, 132 (1969).
43. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, Тхай-Тхань Лонг, *Вестн. МГУ, сер. физ. и астр.*, № 6, 121 (1969).
44. G. L. Jones, D. R. Kobett, *J. Acoust. Soc. Am.* 35, 5 (1963).
45. J. D. Childress, C. G. Hambrick, *Phys. Rev.* 136, A411 (1964).
46. L. Landau, G. Rumer, *Phys. Zs. Sowjet union* 11, 18 (1937).
47. Г. Л. Слонимский, *ЖЭТФ* 12, 1457 (1937).
48. L. N. Taylor, F. R. Rollins, *Phys. Rev.* 136, A591 (1964).
49. J. D. Childress, Z. Fried, *Bull. Am. Phys. Soc.* 8, 16 (1963).
50. P. H. Carr, *Phys. Rev.* 169, 719 (1968).
51. D. H. McMahon, *J. Acoust. Soc. Am.* 44, 1007 (1968).
52. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, В. Н. Случ, О. Ю. Сухаревская, *Акуст. ж.* 12, 486 (1966).
53. О. Ю. Сухаревская, *Вестн. МГУ, сер. физ. и астр.*, № 2, 96 (1967).
54. Л. К. Зарембо, *Акуст. ж.* 16, 58 (1970).
55. Л. К. Зарембо, О. Ю. Сердобольская, *Вестн. МГУ, сер. физ. и астр.*, № 1, 62 (1970).
56. M. A. Breazeale, D. O. Thompson, *J. Appl. Phys. Lett.* 3, 77 (1963).
57. N. S. Shiren, *Phys. Rev. Lett.* 11, 3 (1963).
58. P. H. Carr, *Phys. Rev. Lett.* 13, 332 (1964).
59. P. H. Carr, *IEEE Trans. Sonics Ultrasonics* SU-13, 103 (1966).
60. К. Н. Баранский, *ДАН СССР* 114, 517 (1957).
61. H. Vommel, K. Dransfeld, *Phys. Rev.* 117, 1245 (1960).
62. К. К. Ермилин, Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, *ФТТ* 12, 1329 (1970).
63. M. Moriametz, P. Thery, E. Bridoux, M. Martin, *C.r. Acad. Sci.* 267 (22), B1195 (1968).
64. P. Thery, E. Bridoux, F. Haine, M. Moriametz, *C.r. Acad. Sci.* 268 (4), B285 (1969).
65. E. Bridoux, P. Thery, C. Moriametz, M. Martin, *C.r. Acad. Sci.* 267 (23), B1260 (1968).
66. M. Moriametz, E. Bridoux, P. Thery, F. Haine, *C.r. Acad. Sci.* 286 (8), B589 (1968).
67. Akira Hikata, V. V. Chick, C. Elbaum, *J. Appl. Phys.* 36, 229 (1965).
68. F. R. Rollins, *Appl. Phys. Lett.* 2, 147 (1963).
69. F. R. Rollins, L. H. Taylor, P. H. Todd, *Phys. Rev.* 136, A597 (1964).
70. Гунь Сю-фэнь, Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, *Акуст. ж.* 11, 112 (1965).
71. Гунь Сю-фэнь, Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, *ЖЭТФ* 48, 1598 (1965).
72. I. J. Romeranchuk, *J. Phys. USSR* 6, 237 (1942).
73. A. Akhieser, *J. Phys. USSR* 1, 4, 277 (1939).
74. R. O. Woodruff, H. Ehrenreich, *Phys. Rev.* 123, 1553 (1961).
75. I. S. Ciccariello, K. Dransfeld, *Phys. Rev.* 134, A1517 (1964).
76. Е. М. Гонопольский, А. Н. Чернец, *ЖЭТФ* 51, 383 (1966).
77. M. F. Lewis, E. Patterson, *Phys. Rev.* 159, 703 (1967).
78. M. F. Lewis, E. Patterson, *J. Appl. Phys.* 39, 3420 (1968).
79. M. Romerantz, *Phys. Rev.* 139, A501 (1965).
80. П. Клеменс, в сб. «Физическая акустика», под ред. У. Мэзона, т. 3, часть Б, гл. 5, М., «Мир», 1968.
81. У. Мэзон, там же, гл. 6.
82. S. Simons, *Proc. Phys. Soc. (London)* 82, 401 (1963).
83. A. J. Maris, *Nature* 198, 876 (1963).
84. A. J. Maris, *Phil. Mag.* 9, 901 (1964).
85. H. H. Barrett, J. H. Masinger, *Phys. Rev.* 154, 877 (1967).
86. F. Rischbieter, *Acoustics* 16, 75 (1965/1966).
87. F. Rischbieter, *Acoustics* 18, 109 (1967).
88. P. O. Loren, *J. Appl. Phys.* 39, 5400 (1968).
89. В. А. Красильников, В. Е. Лямов, И. Ю. Солодов, *Вестн. МГУ, сер. физ. и астр.*, № 4, 470 (1970).
90. G. A. Coquin, H. F. Tiersten, *JASA* 41 (part 2), 921 (1967).
91. E. Salzman, T. Plieninger, K. Dransfeld, *Appl. Phys. Lett.* 13, № 1, 14 (1968).
92. A. A. Maradudin, D. L. Mills, *Phys. Rev.* 177, 881 (1968).

93. P. H. Carr, A. J. Slobodnik, *J. Appl. Phys.* **38**, 5153 (1967).
  94. J. H. Parker, E. F. Kelly, D. I. Bolef, *Appl. Phys. Lett.* **5**, 7 (1969).
  95. R. W. Dixon, *Appl. Phys. Lett.* **11**, 340 (1967).
  96. С. М. Рытов, *Изв. АН СССР, сер. физ.* № 2, 223 (1937).
  97. B. A. Richardson, R. B. Thompson, C. D. W. Wilkinson, *J. Acoust. Soc. Am.* **44**, 1608 (1968).
  98. M. G. Cohen, *IEEE J. Quantum Electronics QE-6* (1), 25 (1970).
  99. В. С. Старунов, И. Л. Фабелинский, *УФН* **98** (3), 441 (1969).
  100. С. Л. Танг, *J. Appl. Phys.* **37**, 2945 (1966).
  101. J. Walder, С. L. Tang, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 623 (1967).
  102. А. Л. Полякова, *Письма ЖЭТФ* **4**, 132 (1966).
  103. А. Л. Полякова, *Письма ЖЭТФ* **7**, 76 (1968).
  104. R. G. Brewer, *Appl. Phys. Lett.* **6**, 165 (1965).
-