*1970 г. Ноябрь* *Том 102, вып. 3*

*УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК*

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

539.101

# В ЧЕМ СУТЬ ТАК НАЗЫВАЕМОЙ «АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ»? *)

*А. Вайтман*

В настоящее время эта теория не может быть использована для вычисления сечений, и часто говорят, что она излишне математизирована. Однако, развивая аксиоматическую теорию, можно достичь ясности в основных положениях, которая необходима для понимания квантовой механики систем с бесконечным числом степеней свободы.

К квантовой теории поля хорошо подходит характеристика теории бета-распада, данная некогда Р. Оппенгеймером: эта теория жизнестойка. У нее были свои взлеты и падения, но так или иначе она пережила все превратности и продолжает оставаться лучшим из существующих способов описания явлений, связанных с элементарными частицами. Здесь я попытаюсь рассказать о причинах возникновения и целях одного направления в квантовой теории поля, которое обычно называют «аксиоматическим». Этим я попробую ответить на вопрос, стоящий в заглавии статьи.

## ПРЕДЫСТОРИЯ

Чтобы понять, как возникла так называемая «аксиоматическая теория поля», надо вспомнить историю знаменитой проблемы теоретической физики о нуклон-нуклонном рассеянии в зарядово-независимой псевдоскалярной мезонной теории. Эта теория, предложенная Н. Кеммером в 1938 г. [1], описывает взаимодействие мезонов с изоспином 1 и спином 0 (например, $\pi^0$-, $\pi^+$-, $\pi^-$-мезонов) с фермионами с изоспином $^1/_2$ и спином $^1/_2$ (например, с протонами и нейтронами).

Элементарное взаимодействие описывается процессом, в котором один фермион поглощается, один излучается и мезон излучается или поглощается. В первых работах, посвященных этому вопросу, было разработано два различных приближенных метода описания нуклон-нуклонного взаимодействия. Один метод основывался на борновском приближении, и вычислялся только вклад от фейнмановской диаграммы на рис. 1. Во втором методе использовалось адиабатическое приближение и вычисления производились в пределе слабой связи. Эффективный потенциал взаимодействия между нуклонами, возникающий при обмене одним мезоном, вычислялся в предположении неподвижности нуклонов. Затем этот эффективный потенциал вставлялся в уравнение Шрёдингера для нуклонов и определялась волновая функция, описывающая рассеяние нуклонов.

*) A. S. Wightman, What is the point of so-called «axiomatic field theory»? Physics Today 22, № 9, 59 (1969). Статья основана на докладе, сделанном на заседании Американского физического общества в Нью-Йорке в феврале 1969 г. Перевод М. З. Иофа.

С самого начала было понятно, что безразмерная константа взаимодействия $g^2/\hbar c$ (для псевдоскалярного взаимодействия), аналогичная постоянной тонкой структуры $e^2/\hbar c$ в электродинамике, велика: $g^2/\hbar c = 14$, в то время как $e^2/\hbar c = 1/137$. По этой причине вычисления, сделанные в борновском приближении, рассматривались как менее надежные, чем вычисления в адиабатическом приближении, и никого не беспокоило то, что предсказания, полученные этими методами, совершенно различны. Но адиабатическое приближение со слабой связью в дальнейшем само было подвергнуто критике, так как $g^2/\hbar c$ настолько велико, что надо рассматривать разложение адиабатического потенциала не по $g^2/\hbar c$, а по $\hbar c/g^2$. Такие вычисления в так называемом пределе сильной связи были проделаны Г. Вентцелем и другими, и вполне понятно, что предсказания, полученные в адиабатическом приближении с сильной связью, оказались совершенно отличными от предсказаний, полученных в адиабатическом приближении со слабой связью и в борновском приближении. Эти результаты подытожены в книге В. Паули [2] о мезонной теории ядерных сил.

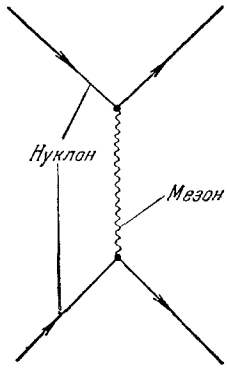


**Рис. 1. Диаграмма Фейнмана для борновского приближения амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния.**

## Новое поколение

После войны новое поколение предприняло серьезный пересмотр теории и было установлено, что старые вычисления ненадежны. В частности, Л. Ван-Хов показал, что само адиабатическое приближение очень плохо подходит для описания псевдоскалярного взаимодействия [3]. В то время не существовало систематического метода вычисления поправок, поэтому дальнейшее выяснение вопроса было на некоторое время отложено. В тот период хватало работы по феноменологической обработке экспериментальных данных, поступавших непрерывным потоком из Беркли. Затем пришло время уравнения Бете — Солпитера, теории перенормировок, и произошла новая смена поколений. На этот раз за проблему взялся М. Леви и, как можно было бы уже заранее ожидать исходя из общей тенденции развития, он получил предсказания, совершенно отличные от тех, которые были получены ранее [4]. Критицизм Ван-Хова был оправдан: неадиабатические поправки действительно были велики. Однако для большинства оставался крайне неясным вопрос: не приведет ли дальнейшее включение диаграмм в уравнение Бете — Солпитера к последующим существенным изменениям?

Конечно, Леви и его последователи пытались оценить эти эффекты, однако их смелость, мастерство и настойчивость вызывали скорее восхищение, чем внушали доверие к их предсказаниям. Общее отношение к этому вопросу в резкой форме выразил М. Гольдбергер спустя несколько лет: «В современной теоретической физике мало проблем привлекали к себе больше внимания, чем проблема фундаментального взаимодействия между нуклонами. И, пожалуй, никогда еще физика не знала о столь многочисленных вещах так мало. При обзоре работ по теории поля подавляет невероятная путаница и противоречивость, существующие в этих вопросах в настоящее время» [5].

Третье поколение высказало свое мнение, но на вопрос: «Что предсказывает псевдоскалярная мезонная теория с псевдоскалярным взаимодействием для нуклон-нуклонного рассеяния?»— все еще не было удовлетворительного ответа.

## ПЕРВОЕ ДЕСЯТИЛЕТИЕ: ДОСТИЖЕНИЯ

В этой атмосфере крушения надежд родилась аксиоматическая теория поля. Ответом на вопрос: «Что предсказывает теория поля номер 6?»— был другой вопрос: «Как можно ожидать ответа на этот вопрос, если вы не сказали (и, что хуже,— не знаете), что такое поле, не говоря уже о теории поля?». Поэтому многие стали писать так: «Я понимаю под теорией поля семейство операторно-значных обобщенных функций, удовлетворяющих условиям I . . ., II . . .», или: «Говоря о теории поля, я имею в виду семейство функций Грина, удовлетворяющих условиям I . . ., II . . .». Занумерованные римскими цифрами условия были названы «аксиомами», откуда и пошло название «аксиоматическая теория поля».

Стоит отметить, что сам факт формулировки таких утверждений указывал на некоторые изменения в позиции. Был сделан первый шаг в длинной цепи шагов, необходимых для формулировки проблемы решения уравнений псевдоскалярной мезонной теории как хорошо определенной математической проблемы. Конечно, в то время не было оснований ожидать, что природа полей понята достаточно хорошо, чтобы быть уверенными в том, что аксиомы требуют именно то, что необходимо. Аксиомы были сформулированы только как разумные предположения, сделанные на основе существующих знаний. В самом деле, оказалось, что в случае работы с так называемыми «неперенормируемыми» теориями необходимо сделать естественные изменения первоначально сформулированных аксиом [6].

Одним из наиболее удивительных обстоятельств, выяснившихся после десятилетних усилий, было то, что некоторые самые общие и фундаментальные результаты, которые мы знаем (например, $PCT$-теорема, связь спина и статистики), возникают просто как математические теоремы, вытекающие из сформулированных определений [7]. Оказалось, что этими свойствами обладает любая теория поля, удовлетворяющая некоторым самым общим предположениям, совершенно не зависящим от деталей динамики взаимодействия. По этой причине такая теория может претендовать на название общей теории квантованных полей и именно так называет ее Р. Йост в своей книге по этому вопросу [8]. Йост утверждает, что такая общая теория имеет смысл, даже если она не предсказывает ни одного экспериментального сечения. Эта точка зрения не всегда понятна, поэтому я ее проиллюстрирую несколькими примерами.

### Теория единственности фон Неймана

Типичным примером полезной информации, которую можно извлечь из общей теории полей, является теорема фон Неймана о единственности представления канонических коммутационных соотношений [9]. Грубо говоря, в теореме утверждается, что если имеются два полных набора канонических переменных для $n$ степеней свободы, т. е. два набора эрмитовых операторов $p_1, \ldots, p_n$; $q_1, \ldots, q_n$ и $P_1, \ldots, P_n$; $Q_1, \ldots, Q_n$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям Гейзенберга

$$[q_j, q_k] = [p_j, p_k] = 0, \quad [q_j, p_k] = i\delta_{jk}, \qquad j, k = 1, \ldots, n,$$

то существует унитарное преобразование, такое, что

$$P_j = Ap_jA^{-1}, \quad Q_j = Aq_jA^{-1}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Этот результат был высказан как предположение М. Борном, В. Гейзенбергом и П. Иорданом в их первой работе по квантовой механике и использовался ими как довод в пользу того, что собственные значения

гамильтониана не зависят от того, выражен он как функция $p$ или $q$. В такой форме это предположение неверно: существуют решения коммутационных соотношений, не связанные друг с другом унитарным преобразованием $A$ в уравнениях (1). Однако для несколько усиленной формы коммутационных соотношений, выраженных через экспоненты:

$$U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \exp\left(i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j\right), \quad V(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \exp\left(i \sum_{j=1}^{n} \beta_j p_j\right),$$

свойство единственности имеет место. Уравнения, о которых идет речь, известны как коммутационные соотношения в форме Вейля и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, U(\alpha_1', \ldots, \alpha_n') = U(\alpha_1 + \alpha_1', \ldots, \alpha_n + \alpha_n'), \\ &V(\beta_1, \ldots, \beta_n)\, V(\beta_1', \ldots, \beta_n') = V(\beta_1 + \beta_1', \ldots, \beta_n + \beta_n'), \qquad (2) \\ &U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, V(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \exp\left[i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j\right] V(\beta_1, \ldots, \beta_n)\, U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

В данном случае теоремой единственности фон Неймана устанавливается следующее:

Пусть $U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $V(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — два набора унитарных операторов, определенных в гильбертовом пространстве $H$ и непрерывных по $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ при $-\infty < \alpha_i, \beta_i < \infty$; $i, j = 1, \ldots, n$. Если $U$ и $V$ удовлетворяют уравнениям (2) и если все операторы, коммутирующие со всеми $U$ и $V$, кратны единичному, то существует унитарное преобразование, такое, что

$$AU(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, A^{-1} = U_{\text{Шрёд}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

$$AV(\beta_1, \ldots, \beta_n)\, A^{-1} = V_{\text{Шрёд}}(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

где $U_{\text{Шрёд}}$ и $V_{\text{Шрёд}}$ — стандартные операторы шрёдингеровской теории:

$$[U_{\text{Шрёд}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, \Phi](x_1, \ldots, x_n) = \exp\left[i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right] \Phi(x_1, \ldots, x_n),$$

$$[V_{\text{Шрёд}}(\beta_1, \ldots, \beta_n)\, \Phi](x_1, \ldots, x_n) = \Phi(x_1 + \beta_1, \ldots, x_n + \beta_n).$$

## Смысл теоремы

Выраженная словами, теорема единственности фон Неймана гласит, что любое неприводимое представление коммутационных соотношений в форме Вейля унитарно эквивалентно шрёдингеровскому представлению. Теорема утверждает, что кинематика квантовой механики системы, описываемой конечным числом переменных $p$ и $q$, единственна; без уменьшения общности можно считать, что гамильтониан взят в шрёдингеровской форме. Изучение различных возможных квантовых динамик свелось к изучению дифференциальных операторов с частными производными Это — основной результат, на который опирается теория преобразований в квантовой механике П. А. М. Дирака.

Чтобы увидеть, насколько невообразимо сложнее была бы ситуация, если бы не было теоремы единственности фон Неймана, достаточно обратиться к случаю бесконечного числа степеней свободы, к которому теорема действительно неприменима. Если заменить $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ в коммутационных соотношениях в форме Вейля на коммутационные соотношения с наборами чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$, где только конечное

(но не фиксированное) число $\alpha_i$ и $\beta_i$ отлично от нуля, то существует бесконечное число унитарно неэквивалентных представлений. Здесь кинематика квантовомеханической системы смешивается с ее динамикой. Гамильтониан, выраженный через $p$ и $q$, может иметь ясный смысл для одного представления коммутационных соотношений и не иметь смысла для другого.

Оказывается, что существует так много неэквивалентных представлений и их так трудно классифицировать, что в настоящее время в направлении систематической теории сделаны лишь первые, хотя и интересные, шаги. Здесь мы сталкиваемся с типичным кругом вопросов, которые должна разрешить удовлетворительная общая теория полей. Она должна дать нам принципы, позволяющие внести порядок в описание квантовой механики систем с бесконечным числом степеней свободы.

## Теория матрицы рассеяния

Вторым примером, иллюстрирующим важность общей теории квантованных полей, является полевая теория матрицы рассеяния. Основные результаты в этом направлении получены в работах многих исследователей, из которых я должен назвать по крайней мере имена К. Зиманцика, В. Циммермана, Р. Хаага, Д. Рюэля и К. Хеппа [10]. В общих чертах теория строится следующим образом. Пусть имеется релятивистская теория поля. Первый шаг состоит в нахождении состояний, соответствующих стабильным частицам. Это делается путем исследования закона преобразований состояний относительно группы Пуанкаре. Стабильные частицы соответствуют неприводимым подпредставлениям с определенной массой и спином. Следующий шаг состоит в построении стационарных состояний рассеяния, в которых сталкивается произвольное число пучков стабильных частиц и образуются все предсказываемые теорией продукты реакции (снова стабильные частицы). Эти состояния рассеяния получаются как асимптотические пределы приближенно стационарных состояний, которые выбираются так, что приближенно удовлетворяют условиям локализации как в координатном, так и в импульсном пространствах.

Замечательно, что используя только самые общие предположения о спектре энергии-импульса (щель над вакуумом) и коммутативность операторов поля в точках, разделенных пространственноподобным интервалом, можно доказать существование и единственность состояний рассеяния. Матрица рассеяния определяется непосредственно в терминах состояний рассеяния. Таким образом, в любой локальной теории поля со щелью в спектре масс неявно содержится единственная теория рассеяния. Для того чтобы теория давала унитарную матрицу рассеяния, необходимо сделать только одно дополнительное предположение о полноте асимптотических состояний, обеспечивающее представимость всех состояний в теории в виде суперпозиции состояний рассеяния.

Позвольте мне сделать два замечания относительно этой полевой теории матрицы рассеяния. Во-первых, она ясно показывает, что не должно быть взаимно однозначного соответствия между полями в теории и стабильными частицами. Эта идея теперь становится общеизвестной, так как она нужна для понимания связи между частично сохраняющимися аксиально-векторным током и пионным полем. Во-вторых, в данном случае впервые «аксиоматы» не плетутся в хвосте. Когда они начали работать над этой проблемой, физический механизм асимптотической сходимости к состояниям рассеяния был не ясен как с эвристической, так и с любой другой точки зрения.

## Классы Борхерса

В качестве последнего примера той пользы, которую можно извлечь из общей теории полей, позвольте мне указать на результаты Г. Борхерса, касающиеся взаимной локальности полей [11]. Пусть $A$ — неприводимое поле, удовлетворяющее условию

$$[A(x), A(y)] = 0,$$

где $x - y$ — пространственноподобный вектор (в этом случае говорят, что $A$ — локальное поле), и пусть $B$ и $C$ — поля, локальные относительно $A$, т. е. если $x$ и $y$ пространственноподобно разделены, то

$$[A(x), B(y)] = 0, \quad [A(x), C(y)] = 0.$$

Тогда Борхерс показывает, что $B$ и $C$ локальны, т. е.

$$[B(x), B(y)] = 0, \quad [C(x), C(y)] = 0,$$

и локальны друг относительно друга

$$[B(x), C(y)] = 0.$$

Таким образом, взаимная локальность определяет соотношения эквивалентности между полями. Локальные поля разделяются на классы эквивалентности (классы Борхерса) локальных полей.

Эвристически этот результат не удивителен, так как обычно считают, что если $B$ локально относительно $A$, то оно должно быть полиномом по $A$ и его производным. Два таких полинома будут коммутировать из-за свойств локальности $A$. Однако это рассуждение игнорирует тот факт, что величины типа $[A(x)]^n$ плохо определены.

Борхерс доказал второй результат, определяющий важность классов эквивалентности: все поля из одного класса эквивалентности дают одну и ту же матрицу рассеяния. Поэтому, чтобы найти теории поля с нетривиальной матрицей рассеяния, надо выйти за пределы класса эквивалентности невзаимодействующих полей. По-видимому, популярные теперь нелинейные преобразования в киральной динамике являются отображениями внутри класса Борхерса. Однако до сих пор никому не удалось разобраться в структуре класса Борхерса такой нетривиальной теории.

## Выводы

Подытоживая мораль, вытекающую из приведенных выше примеров, и формулируя в двух словах точку зрения Йоста, можно сказать: «Общая теория квантованных полей, несмотря на то, что с ее помощью не вычислено ни одного сечения, имеет свои достоинства, потому что ясность в основных положениях необходима, если мы хотим продвинуться в сложной квантовой механике систем с бесконечным числом степеней свободы».

Теперь я выскажусь против этой теории. Хотя общая теория квантованных полей полезна, невозможность с ее помощью вычислить ни одного сечения не относится к ее достоинствам. Как я подчеркивал, одной из главных причин, приведших к созданию общей теории полей, было желание иметь возможность делать надежные предсказания в конкретных теориях. Насколько далеко мы продвинулись в этом направлении? Не слишком далеко, но были получены интересные результаты. В последние семь лет возникло новое направление, которое было названо «конструктивной теорией поля». Идея была в том, чтобы вернуться к стандартной формальной лагранжевой теории взаимодействующих полей и изучать ее любыми методами, лишь бы они были эффективны. Цель заключается

в доказательстве того, что с помощью этих методов теория может быть развита в духе общей теории полей, а затем исследована качественно и количественно. Эта деятельность ведется под лозунгом Л. Больцмана «элегантность для портных», и ее стиль совершенно не похож на стиль общей теории квантованных полей. Доказывается существование решений в моделях возрастающей степени сложности в надежде на то, что после того, как будет решено достаточное количество «малых» проблем и будет накоплен достаточный опыт, возникнут общие идеи.

До настоящего времени рассматривались весьма идеализированные модели (двумерное и трехмерное пространство-время), мало пригодные для вычисления сечений, и надо еще преодолеть ряд затруднений, прежде чем модели можно будет использовать для описания природы (пока рассматривались только суперренормируемые теории). Однако если темпы прогресса не снизятся, то через несколько лет мы сможем вычислять сечения, предсказываемые теориями, имеющими физический интерес. И я, действительно, имею в виду вычисление сечений. Мы, правда, знаем, что настоящее поколение рассматривает эту возможность как наивно оптимистическую и устаревшую. Современная теория заключается в предсказании правил сумм. Я не против правил сумм. Я бы гордился, если бы под буквой В в правиле сумм А — В стоял Вайтман, а не Вайсбергер. Но, мне кажется, не будет проявлением дурного вкуса заметить, что теория может совершенно неправильно описывать эксперимент, но тем не менее предсказывать ряд подтверждающихся на опыте правил сумм. Теория квантованных полей не должна отказываться от цели предсказать сечения в конкретных теориях.

Я не ставлю перед собой задачу дать здесь полный обзор недавних героических исследований конструктивной теории поля. Работа Дж. Глимма и А. Джаффе производит очень сильное впечатление, но о ней трудно вкратце рассказать. (Обзор состояния вопроса, включающий результаты Глимма, Зиманцика и Джаффе, можно найти в материалах курсов в Варенне [12].)

Вместо этого я хотел бы здесь обрисовать перспективы, возникающие при соединении общей теории полей и конструктивной теории поля, считая, что все сегодняшние туманные соображения обрели форму теорем.

## ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Позвольте мне в качестве исходного пункта обсуждения рассмотреть следующий вопрос: какими свойствами обладает множество всех асимптотически полных квантовых теорий поля? Глубокий ответ на этот вопрос дается структурным анализом Зиманцика [13]. Утверждается, что теории поля образуют иерархическую лестницу в соответствии с числом неисчезающих неприводимых вершин, которыми они обладают. Я не буду надоедать вам определениями неприводимой вершины. Достаточно сказать, что все теории с конечным числом неприводимых вершин оказываются обычными лагранжевыми теориями поля с полиномиальным лагранжианом взаимодействия. Теории с бесконечным числом неприводимых вершин пока слишком сложны для рассмотрения (кроме, возможно, случая двумерного пространства-времени), поэтому мы их не будем рассматривать. Таким образом, проблема свелась к описанию всех теорий поля с полиномиальными лагранжианами.

Ожидаем ли мы получить единственную теорию поля для каждого набора значений констант взаимодействия? (Константы взаимодействия являются коэффициентами полиномов.) Конечно,— нет. По аналогии со статистической механикой можно ожидать, что единственность теории

типична для всех значений констант взаимодействия, кроме некоторых специальных значений, при которых возникает динамическая нестабильность (т. е. фазовый переход) и при которых может существовать несколько теорий с заданными константами взаимодействия. Аналогия может быть сделана вполне точной, если допустить, что интересующие нас теории поля могут быть получены из теорий с обрезанием в пределе, когда обрезание снимается. Необходимо сделать два обрезания: во-первых, ультрафиолетовое обрезание и, во-вторых, поместить систему в ящик конечных размеров с периодическими граничными условиями.

Поскольку усложнения, возникающие при ультрафиолетовом обрезании, оказываются несущественными для обсуждаемого явления, мы их будем игнорировать. Тогда теория, представляющая действительный интерес, получается переходом к пределу бесконечного ящика. Это называется «термодинамическим пределом», так как в статистической механике только в этом пределе появляются резкие границы между фазами.

## Современное понятие состояния

Основными величинами, пределы которых приходится изучать, являются вакуумные ожидания (ожидания по основному состоянию) наблюдаемых или каких-либо других операторов, ассоциируемых с системой. В принятой в настоящее время в математике и математической физике терминологии такая функция ожидания называется «состоянием». (Общее определение состояния $\omega$ на алгебре операторов $\mathcal{U}$ таково: $\omega$ есть линейная комплекснозначная функция, принимающая положительные значения на операторах вида $AA^*$ для всех $A$, принадлежащих $\mathcal{U}$. Состояние называется нормированным, если $\omega(\mathbf{1}) = 1$, где $\mathbf{1}$ — единичный оператор.) Конечно, в ограниченном объеме $V$ вакуумное состояние $\omega_V$ является векторным состоянием, т. е. оно представляется при помощи вектора состояния $\psi_{0V}$ следующим образом:

$$\omega_V(A) = (\psi_{0V}, A\psi_{0V}).$$

В общем случае состояние в термодинамическом пределе, определяемое согласно формуле

$$\omega(A) = \lim_{V\to\infty} \omega_V(A),$$

не является векторным состоянием. Однако существует фундаментальная конструкция, так называемая конструкция Гельфанда — Наймарка — Сигала (ГНС), позволяющая по заданной алгебре $\mathcal{U}$ операторов $A$ и состоянию $\omega$ построить представление $\mathcal{U}$: $A \to r(A)$, новое гильбертово пространство $H_\omega$ и вектор состояния $\Omega$ в $H_\omega$, так что

$$\omega(A) = (\Omega, r(A)\Omega),$$

где $H_\omega$, $\Omega$ и $r$ определяют теорию в бесконечном объеме. Хорошее изложение конструкции ГНС можно найти в лекциях Кадисона [14].

Состояние, полученное в термодинамическом пределе, в теориях, инвариантных относительно трансляций, будет инвариантно относительно трансляций в том смысле, что $\omega(A) = \omega(A_x)$, где $A_x$ есть $A$, транслированное на $x$, и определяет унитарное представление группы трансляций, оставляющее $\Omega$ инвариантным:

$$x \longrightarrow U(x), \quad U(x)\Omega = \Omega. \tag{3}$$

Поэтому $\Omega$ действительно является вакуумным состоянием теории.

Является ли $\Omega$ единственным вакуумным вектором в $H_\omega$, т. е. единственным решением уравнения (3)? Чтобы дать аккуратный ответ на этот вопрос, мне надо будет ввести еще два понятия. Состояние $\omega$ является экстремальным или чистым, если оно не является суперпозицией

$$\omega = \alpha\omega_1 + (1-\alpha)\,\omega_2 \qquad (0<\alpha<1)$$

двух разных состояний $\omega_1$ и $\omega_2$. Оказывается, что вакуум единствен, если $\omega$ экстремально относительно разложения по трансляционно-инвариантным состояниям. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\omega$ было неразложимо таким способом, является выполнение кластерного условия:

$$\lim_{x\to\infty} \omega\,(AB_x) = \omega\,(A)\,\omega\,(B)$$

для всех $A$, $B$ в $\mathcal{U}$. Если $\omega$ не обладает кластерным свойством, то оно может быть единственным образом разложено по экстремальным состояниям. В случае нетривиального разложения имеется набор констант взаимодействия, соответствующий динамически нестабильному случаю. В работах С. Доплихера, Д. Кастлера, Д. Робинсона, О. Лэнфорда, Д. Рюэля и других была развита изящная теория разложения инвариантных состояний по экстремальным инвариантным состояниям и выяснена связь этой теории с кластерными свойствами.

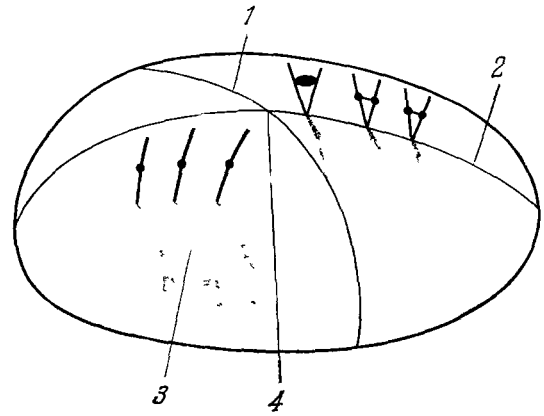


Рис. 2. Пространство теорий представляет собой пучок вакуумных состояний над пространством констант взаимодействия. Теория определяется парой, состоящей из точки пространства констант взаимодействия и вакуумного состояния. Для произвольного значения константы взаимодействия существует единственная теория, вакуумное состояние которой изображено на диаграмме линией, проходящей через точку в пространстве констант взаимодействия. Для специальных значений констант взаимодействия из множества точек, при которых имеет место динамическая нестабильность, теория не определяется полностью значениями констант взаимодействия. В этом случае конус вакуумных состояний имеет размерность два и более.

На диаграмме нормированные вакуумные состояния изображены точками на линиях, отрезками на двумерных конусах и кругами — на трехмерных конусах *1* — множество точек симметрии $S$, *2* — множество точек динамической нестабильности, *3* — пространство констант взаимодействия, *4* — множество точек нарушенной симметрии $DnS$.

## ОБЩИЙ ВЗГЛЯД НА МНОЖЕСТВО ВОЗМОЖНЫХ ТЕОРИЙ

На рис. 2 сделана попытка наглядно изобразить тот круг вопросов, который мы обсуждали в пяти предыдущих параграфах. К каждой точке пространства констант взаимодействия присоединен «конус», изображающий вакуумные состояния, поставленные в соответствие множеству констант взаимодействия. Вне множества точек динамической нестабильности $D$ конус одномерен и, по-видимому, аналитически зависит от констант взаимодействия. Очевидно, что если это предположение окажется неверным из-за разрывов каких-нибудь производных $\omega$ по константам взаимодействия (фазовые переходы высших порядков?), картину легко усовершенствовать. Предполагается также, что $D$ распадается на два подмножества, на каждом из которых экстремальные инвариантные состояния

имеют одинаковую структуру, и на одном из этих подмножеств экстремальные инвариантные состояния аналитически зависят от констант взаимодействия. На подмножестве $S$ группа симметрии лагранжиана нетривиальна. Подмножество точек $S$ также можно разделить на части в соответствии со структурой группы инвариантности. Наконец, пересечение множеств $D$ и $S$ есть геометрическое место констант взаимодействия, при которых имеет место явление нарушенной симметрии. Лагранжиан имеет нетривиальную группу инвариантности, но может существовать много экстремальных состояний, которые переходят друг в друга под действием преобразований из группы инвариантности.

Такова перспектива, возникающая при комбинации теорем, которые мы надеемся доказать в конструктивной теории поля и в общей теории полей. Осталось только доказать, что проблема решается описанным выше образом. То, что мы стоим на пороге практической реализации такой программы, является одной из причин, делающих сейчас квантовую теорию поля такой привлекательной.

## Заключительные замечания

Позвольте мне обсудить обвинения в том, что существуют два типа квантовой теории поля: просто квантовая теория поля и аксиоматическая квантовая теория поля, причем последняя навязчива, неприятна, излишне математизирована и абстрактна.

### *CPT*-симметрия

Говорят, что теория обладает *CPT*-симметрией, если существует действующий на волновые функции оператор $\Theta$ такой, что:

1а. $\Theta$ антилинеен, т. е.

$$\Theta(\alpha\Phi+\beta\Psi)=\alpha^*\Theta\Phi+\beta^*\Theta\Psi.$$

1б. $\Theta$ антиунитарен, т. е.

$$(\Theta\Phi,\Theta\Psi)=(\Phi,\Psi)^*.$$

1в. $\Theta^2=1$.

Здесь $\Phi$ и $\Psi$—две любые волновые функции, $\alpha$ и $\beta$—два произвольных комплексных скаляра, знак * означает комплексное сопряжение, а $(\Phi,\Psi)$—скалярное произведение волновых функций $\Phi$ и $\Psi$.

2. $\Theta$ отображает стационарные состояния рассеяния, отвечающие граничному условию в виде расходящейся волны, в стационарные состояния соответствующих античастиц с противоположными спинами и импульсами с граничным условием типа сходящейся волны

$$\Theta\Psi_{\text{in}}(p_1,\ldots,p_n)=\Psi_{\text{out}}(\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_n).$$

Здесь $p_j$ является сокращенным обозначением импульса $\mathbf{p}_j$ и спина $j$-й частицы из сталкивающихся пучков, а $\bar{p}_j$ обозначает $-\mathbf{p}_j$ и противоположный спин для античастицы.

Немедленным следствием условий 1 и 2 является соотношение

3. $[\Psi_{\text{out}}(p'_1,\ldots,p'_n),\ \Psi_{\text{in}}(p_1,\ldots,p_k)]=(\Theta\Psi_{\text{out}}(p'_1,\ldots,p'_l),$
$\Theta\Psi_{\text{in}}(p_1,\ldots,p_k))^*=[\Psi_{\text{out}}(\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_k),\ \Psi_{\text{in}}(\bar{p}'_1,\ldots,\bar{p}'_l)]$.

Поскольку первый член равенства есть матричный элемент $S$-матрицы (амплитуда рассеяния) для реакции $p_1,\ldots,p_k\to p'_1,\ldots,p'_l$, а последний член—матричный элемент $S$-матрицы для процесса $\bar{p}'_1,\ldots,\bar{p}'_l\to\bar{p}_1,\ldots,\bar{p}_k$, то соотношение 3 дает нетривиальные экспериментальные предсказания. Заметим, что частью определения *CPT*-симметрии является разделение всех частиц на пары частица—античастица и частицы, совпадающие со своими античастицами.

Если теория симметрична относительно преобразования $P$ (пространственного отражения), преобразования $T$ (отражения времени) и $C$-преобразования (перехода от частицы к античастице), то $\Theta=CPT$, но преобразование $\Theta$ может быть симметрией и в том случае, если какое-либо из преобразований $C$, $P$, или $T$ симметрией не является.

*CPT*-теорема

В квантовой теории поля доказано, что если существует оператор $\Theta$, удовлетворяющий условиям 1 и 4 (сформулировано далее), то он также удовлетворяет условию 2. Условием 4 является требование, чтобы оператор $\Theta$ генерировал *CPT*-преобразование полей теории. Например, для скалярного поля $\varphi$ это означает

4. $\Theta\varphi(x)\Theta^{-1}=\varphi(-x)$ *.

Кроме того, в квантовой теории поля показано, что существование оператора $\Theta$, удовлетворяющего условию 4, эквивалентно некоторым соотношениям между вакуумными ожиданиями произведений полей. Например, для скалярного поля такими соотношениями являются

5. $(\Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)\Psi_0)=(\Psi_0, \varphi(-x_n) \ldots \varphi(-x_1)\Psi_0)$.

Доказательство соотношения 5 использует тот факт, что вакуумные ожидания являются граничными значениями аналитических функций и что пространственно-временна́я инверсия $x \longrightarrow -x$ может быть связана с тождественным преобразованием $x \longrightarrow x$ комплексными преобразованиями Лоренца. Окончательный результат таков:

*CPT-теорема.* Любая локальная релятивистская теория спинорных и тензорных полей обладает *CPT*-симметрией (см. ссылку [7], стр. 200 и ссылку [8], стр. 142).

Сначала я хочу заметить, что в 1920 г. точно такое же отношение было к применению теории групп в квантовой механике. Старшее поколение физиков-теоретиков почти всегда считает младшее поколение «слишком математичным». Если внимательно посмотреть на определение целого числа, то оно вам тоже покажется очень абстрактным. Вопрос в том, полезно ли оно для рассматриваемого круга задач. «Аксиоматы» писали бы работы белыми стихами, если бы обнаружили, что таким способом можно достичь лучшего понимания квантовой теории поля. Я осмелюсь утверждать, что понятия $C^*$-алгебры, состояния и конструкции ГНС оказались столь полезными, что через пять лет займут свое место в любом хорошем современном курсе квантовой механики.

Далее, выражение «излишняя математизация» возникло потому, что «аксиоматы» настаивают на том, что их результаты должны формулироваться в виде математических теорем. Почему они настаивают на теоремах? Оправдание их стремления содержится в знаменитом изречении Пуанкаре, который сказал, что проблема никогда не бывает решена, но может быть только более или менее решена. Здоровые традиции теоретической физики поощряют исследования, в которых рассматривают проблему, не пытаясь сделать точные утверждения, которые могли бы быть сформулированы как математические теоремы. Однако приходит время, когда для дальнейшего развития вопроса требуется, чтобы проблема была решена «более», а не «менее». Если вы хотите получить надежный ответ на вопрос о том, не является ли ситуация, изображенная на рис. 2, вымыслом, то вам просто надо рассмотреть теоремы о существовании и свойствах термодинамического предела.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. N. Kemmer, Proc. Cambridge Phil. Soc. **34**, 354 (1938).
2. В. Паули, Мезонная теория ядерных сил, М., ИЛ, 1947.
3. L. Van Hove, Phys. Rev. **75**, 1519 (1949).
4. M. Levy, Phys. Rev. **88**, 72 and 725 (1952).
5. M. L. Goldberger, In Proceedings of the Midwest Conference on Theoretical Physics, Purdue University, April 1960. Quoted in Ann. Rev. Nucl. Sci. **11**, 95 (1961).

6. A. M. Jaffe, Phys. Rev. **158**, 1454 (1967).
7. Р. Стритер, А. Вайтман, *PCT*, спин, статистика и все такое. М., «Наука», 1966.
8. Р. Йост. Общая теория квантованных полей, М., «Мир», 1967.
9. J. von Neumann, Math. Ann. **104**, 570 (1931).
10. Библиография в ссылке [8].
11. H. J. Borchers, Nuovo Cimento **15**, 184 (1960).
12. Proceedings of the 45th Varenna course, 12—24 August 1968, Academic Press, New York.
13. K. Symanzik, «Many-particle Structure of Green's Functions», in Symposium on Theoretical Physics, vol. 3, стр. 121, Plenum Press, New York (1967).
14. R. Kadison, «Operator Algebras», in Cargèse Lectures in Theoretical Physics 1965 (F. Lurçat, ed.), Gordon and Breach, New York (1967).
15. S. Doplicher, D. Kastler, Comments in Math. Phys. **7**, 1 (1968) and references cited therein.