

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ РЕЖИМ ПРИБЛИЖЕНИЯ К ОСОБОЙ ТОЧКЕ
В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КОСМОЛОГИИ

В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	463
2. Обобщенное решение Казнера	465
3. Колебательный режим приближения к особой точке	469
4. Эволюция модели под влиянием двух возмущений	474
5. Эволюция модели в асимптотической области сколь угодно малых времен	477
6. Статистический анализ эволюции модели при приближении к особой точке	480
7. Построение общего решения для длинной эры с малыми колебаниями	484
8. Заключительные замечания	489
Приложения	
А. Некоторые сведения из теории непрерывных дробей	492
Б. Уточнение расчетов к разделу 4	493
В. Однородные пространства	495
Г. Однородные пространства типов VIII и IX	499
Цитированная литература	500

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросу о существовании особенности по времени в общем космологическом решении уравнений гравитации была уже посвящена более ранняя статья в этом журнале¹. Возвращаясь снова к этому вопросу, прежде всего напомним, в чем заключается существо проблемы.

Как известно, в основе современной космологии лежат впервые найденные А. А. Фридманом решения уравнений Эйнштейна, описывающие полностью однородный и изотропный мир («закрытая» или «открытая» модель, в зависимости от замкнутости или бесконечности пространства). Основным свойством этих решений является их нестационарность. Возникающее отсюда представление о расширяющейся Вселенной полностью подтверждается астрономическими данными, и в настоящее время можно считать, что изотропная модель дает, в общих чертах, адекватное описание современного состояния Вселенной.

Другое важное свойство изотропной модели — наличие в ней особой точки пространственно-временной метрики по отношению ко времени. Присутствие такой точки означает, другими словами, конечность времени.

Но адекватность изотропной модели для описания современного состояния Вселенной сама по себе еще не дает оснований ожидать, что она столь же пригодна и для описания ранних стадий эволюции мира. Более того, возникает вопрос и о том, в какой степени существование особой точки по времени вообще является обязательным свойством релятивистских космологических моделей, и не связано ли оно со специфическими упрощающими предположениями, лежащими в их основе?

Независимость от этих предположений означала бы, что наличие особенности присуще не только частным, но и общему решению уравнений

Эйнштейна. Критерием общности решения является число содержащихся в нем произвольных функций пространственных координат. При этом имеются в виду лишь «физически произвольные» функции, число которых не может быть уменьшено никаким подходящим выбором системы отсчета. В общем решении число таких функций должно быть достаточным для произвольного задания начальных условий (распределения и движения материи, распределения гравитационного поля) в какой-либо момент времени, выбираемый в качестве начального. Это число равно четырем для пустого пространства и восьми для пространства, заполненного материей (см. ¹, § 1, или ², § 95).

Во избежание недоразумений сразу же подчеркнем, что для системы нелинейных дифференциальных уравнений, которую представляют собой уравнения Эйнштейна, понятие общего решения не является однозначным. В принципе может существовать более чем один общий интеграл, каждый из которых охватывает собой не все многообразие мыслимых начальных условий, а лишь его конечную часть. Каждый такой интеграл будет содержать всю требуемую совокупность произвольных функций, которые, однако, могут быть подчинены определенным условиям (например, типа неравенств). Существование общего решения с особенностью не исключает поэтому существования также и других общих решений, не обладающих особенностью *).

Нахождение общего интеграла в точном виде для всего пространства в течение всего времени, разумеется, невозможно. Но для решения поставленного вопроса в этом нет необходимости: достаточно исследовать вид решения вблизи особенности. Тем самым была бы выяснена и другая сторона вопроса — какой характер имеет эволюция метрики пространства-времени в общем решении при приближении к особой точке. Подчеркнем, что, говоря об особой точке, мы имеем в виду физическую особенность — обращение в бесконечность плотности материи и инвариантов тензора четырехмерной кривизны. При этом мы интересуемся вопросом об особенности в космологическом аспекте. Это значит, что речь идет об особой точке, достигаемой всем пространством (а не лишь его ограниченной частью, как при гравитационном коллапсе конечного тела).

Мы увидим, что вопрос о существовании общего решения с физической особенностью по времени имеет положительный ответ. В связи с этим скажем несколько слов о связи этих результатов с предыдущими работами (изложенными в ¹), в которых делалось заключение об отсутствии особенности в общем решении.

Поскольку систематический метод для обследования особенностей решений уравнений Эйнштейна отсутствует, то поиски все более широких классов решений с особенностью должны были вестись, по существу, методом проб и ошибок. Очевидно, что получаемый таким способом отрицательный результат никогда не мог быть вполне убедительным сам по себе; построение решения с требуемой степенью общности отменяет его, оставляя в то же время в силе все получавшиеся позитивные результаты, относящиеся к конкретным рассматривавшимся решениям.

Естественно, однако, думать, что если особенность может присутствовать в общем решении уравнений Эйнштейна, то на это должны существовать уже какие-то указания, основанные лишь на самых общих свойствах самих этих уравнений (хотя эти указания и могут быть сами по себе недостаточны для установления характера особенности). Единственное известное в то время такое указание было связано с формой уравнений

*) Например, нет оснований сомневаться в существовании общего решения без особенности, описывающего изолированное тело с не слишком большой массой.

(в синхронной системе отсчета, т. е. системе, в которой элемент интервала

$$ds^2 = dt^2 - dl^2, \quad dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1,1)$$

(пространственный элемент длины dl отделен от временного интервала dt , а $x^0 = t$ есть синхронизованное по всему пространству собственное время *)). Уравнение $R_0^0 = T_0^0 - 1/2 T$, записанное в этой системе отсчета, приводит к результату, что метрический определитель g должен обратиться в нуль в течение конечного времени, вне зависимости от каких бы то ни было предположений о распределении материи (см. ¹, § 2, или ², § 99).

Но это указание отпало после того как выяснилась его связь с чисто геометрическими свойствами, специфическими для синхронной системы отсчета: пересечением друг с другом координатных линий времени. Пересечение происходит, вообще говоря, на некоторых огибающих гиперповерхностях — четырехмерных аналогах каустических поверхностей геометрической оптики; именно здесь и происходит обращение g в нуль ³. Таким образом, особенность, хотя и имеет общий характер, но оказывается фиктивной, не физической. Она исчезает при изменении системы отсчета. Тем самым, казалось бы, отпадал повод для дальнейших поисков истинной особенности в общем решении.

Ситуация изменилась, однако, после открытия Пенрозом ⁴ теоремы, связывающей существование особенности (неизвестного характера) с некоторыми весьма общими предположениями, не имеющими отношения к выбору системы отсчета. Еще другие теоремы подобного рода были открыты в дальнейшем Хоукингом ⁵, ⁶ и Герочем ⁷. Стало ясно, что поиски общего решения с особенностью должны быть продолжены.

2. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ КАЗНЕРА

Напомним некоторые свойства найденных уже раньше классов решений с особенностью, которые явятся исходными для дальнейшего обобщения.

Само фридмановское решение является частным случаем класса решений, содержащего три произвольные функции координат (см. ¹, § 4). Хотя пространство в нем неоднородно, но его сжатие при приближении к особой точке происходит «квазизотропным» образом — линейные расстояния по всем направлениям убывают с одинаковой степенью времени. Как и в полностью однородном и изотропном случае, этот класс решений существует лишь для пространства, заполненного материей.

Значительно более общий характер имеет класс решений, получающийся как обобщение частного решения (принадлежащего Казнеру ⁸) для поля в пустоте, в котором пространство однородно, а его метрика евклидова, но зависит от времени согласно

$$dl^2 = t^{2p_1} dx^2 + t^{2p_2} dy^2 + t^{2p_3} dz^2 \quad (2,1)$$

(см. ², § 103). Здесь p_1, p_2, p_3 — любые три числа, связанные друг с другом соотношениями

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (2,2)$$

*) Мы следуем обозначениям, принятым в книге ². Латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, греческие — три пространственных значения 1, 2, 3. Метрика g_{ik} имеет сигнатуру $(+---)$; $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$ — пространственный трехмерный метрический тензор. Кроме того, мы будем пользоваться системой единиц, в которой равны единице скорость света и эйнштейновская гравитационная постоянная.

В силу этих соотношений лишь одно из трех чисел является независимым. При этом числа p_1, p_2, p_3 никогда не имеют одинаковых значений, а равенство двух из них имеет место лишь в тройках значений $(-1/3, 2/3, 2/3)$ и $(0, 0, 1)$ *). Во всех других случаях эти числа различны, причем одно из них отрицательно, а два других положительны. Если расположить их в порядке

$$p_1 < p_2 < p_3, \quad (2,3)$$

то интервалы их изменения будут

$$-1/3 \leq p_1 \leq 0, \quad 0 \leq p_2 \leq 2/3, \quad 2/3 \leq p_3 \leq 1. \quad (2,4)$$

Числа p_1, p_2, p_3 могут быть представлены в параметрическом виде как

$$p_1(u) = \frac{-u}{1+u+u^2}, \quad p_2(u) = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3(u) = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2} \quad (2,5)$$

Все различные значения p_1, p_2, p_3 с соблюдением порядка (2,3) получаются, если параметр u пробегает значения в области $u \geq 1$. Значения же $u < 1$ приводятся к той же области согласно

$$p_1(1/u) = p_1(u), \quad p_2(1/u) = p_3(u), \quad p_3(1/u) = p_2(u). \quad (2,6)$$

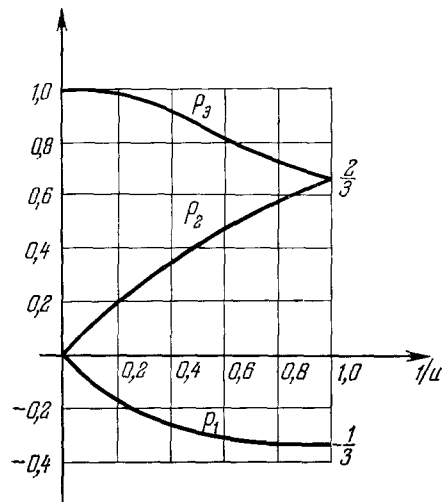


Рис. 1.

На рис. 1 изображены графики p_1, p_2, p_3 в зависимости от $1/u$. Отметим, что $p_1(u)$ и $p_3(u)$ — монотонно возрастающие, а $p_2(u)$ — монотонно убывающая функции параметра u .

В обобщенном решении вид, аналогичный (2,1), относится лишь к предельной (вблизи особой точки $t = 0$) форме метрики, т. е. к главным членам ее разложения по степеням t . В синхронной системе отсчета она записывается в виде (1,1) с пространственным элементом длины

$$dl^2 = (a^2 l_\alpha l_\beta + b^2 m_\alpha m_\beta + c^2 n_\alpha n_\beta) dx^\alpha dx^\beta, \quad (2,7)$$

где

$$a = t^{p_1}, \quad b = t^{p_2}, \quad c = t^{p_3}. \quad (2,8)$$

Трехмерные векторы $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ определяют направления, в которых пространственные расстояния меняются со временем по степенным законам (2,8). Эти векторы, а также и числа p_1, p_2, p_3 (по-прежнему связанные соотношениями (2,2)) — функции пространственных координат. Мы обозначаем здесь показатели степеней как p_1, p_2, p_3 , не предопределяя их последовательности в порядке возрастания; обозначение же p_1, p_2, p_3 сохраняем за числами (2,5), удовлетворяющими неравенствам (2,3). Определитель метрики (2,7) равен

$$-g = a^2 b^2 c^2 v^2 = t^2 v^2, \quad (2,9)$$

где $v = |\mathbf{m} \mathbf{n}|$. Введем также удобные для последующего обозначения **)

$$\lambda = \frac{\mathbf{l} \text{ rot } \mathbf{l}}{v}, \quad \mu = \frac{\mathbf{m} \text{ rot } \mathbf{m}}{v}, \quad \nu = \frac{\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{n}}{v}. \quad (2,10)$$

*) При $(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 1)$ пространственно-временная метрика (1,1) с dl^2 из (2,1) преобразованием $t \operatorname{sh} z = \xi, t \operatorname{ch} z = \tau$ приводится к галилеевой, т. е. особенность фиктивна и мы имеем дело в действительности с плоским пространством-временем.

**) Здесь и ниже все символы векторных операций (векторные произведения, операции $\operatorname{rot}, \operatorname{grad}$ и т. п.) надо понимать чисто формальным образом, как операции над компонентами (ковариантными) векторов $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ — такие, как если бы координаты x^1, x^2, x^3 были декартовыми.

Поскольку показатели степеней в (2,8) не могут иметь одинаковых значений, пространственная метрика в (2,7) принципиально анизотропна. При приближении к особой точке $t = 0$ линейные расстояния в каждом элементе пространства убывают в двух направлениях и возрастают в третьем направлении. Объем же каждого элемента убывает пропорционально t .

Проследим снова (ср. ¹, § 3), каким образом достигается согласие метрики (2,7) с уравнениями гравитации и чем определяется число физически произвольных координатных функций в ней. Уравнения Эйнштейна в пустоте в синхронной системе отсчета имеют вид

$$R_0^0 = -1/2 \partial \kappa_\alpha^\alpha / \partial t - 1/4 \kappa_\alpha^\beta \kappa_\beta^\alpha = 0, \quad (2,11)$$

$$R_\alpha^\beta = - (1/2 \sqrt{-g}) \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{-g} \kappa_\alpha^\beta) - P_\alpha^\beta = 0, \quad (2,12)$$

$$R_\alpha^\alpha = 1/2 (\kappa_{\alpha;\beta}^\beta - \kappa_{\beta;\alpha}^\beta) = 0, \quad (2,13)$$

где $\kappa_{\alpha\beta}$ обозначает трехмерный тензор

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t},$$

а $P_{\alpha\beta}$ — трехмерный тензор Риччи, выражающийся через трехмерный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ так же, как R_{ik} выражается через g_{ik} ; он содержит лишь пространственные (но не временные) производные от $\gamma_{\alpha\beta}$.

Не предопределяя зависимости a, b, c в (2,7) от t , будем иметь (вместо (3,12) в ¹)

$$\kappa_\alpha^\beta = (2\dot{a}/a) l_\alpha l^\beta + (2\dot{b}/b) m_\alpha m^\beta + (2\dot{c}/c) n_\alpha n^\beta,$$

где точка означает дифференцирование по t . Уравнение (2,11) принимает вид

$$-R_0^0 = \dot{a}/a + \dot{b}/b + \dot{c}/c = 0. \quad (2,14)$$

Все члены в нем — второго порядка по большой (при $t \rightarrow 0$) величине $1/t$. Члены такого же порядка в уравнениях (2,12) возникают только от членов с производными по времени. Если компоненты $P_{\alpha\beta}$ не содержат членов еще более высокого порядка, то

$$-R_l^l = (\dot{abc})^*/abc = 0, \quad -R_m^m = (\dot{abc})^*/abc = 0, \quad -R_n^n = (\dot{abc})^*/abc = 0 \quad (2,15)$$

(индексы l, m, n обозначают компоненты тензора по направлениям $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ — см. ¹, § 3). Эти уравнения совместно с (2,14) и приводят к выражениям (2,8) с показателями степеней, удовлетворяющими условиям (2,2).

Но наличие одной отрицательной среди трех степеней p_l, p_m, p_n приводит к появлению в тензоре $P_{\alpha\beta}$ членов более высокого порядка, чем t^{-2} . Если отрицательна степень p_l ($p_l = p_1 < 0$), то эти члены содержат координатную функцию λ и с их учетом уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} -R_l^l &= (\dot{abc})^*/abc + \lambda^2 a^2 / 2b^2 c^2 = 0, \\ -R_m^m &= (\dot{abc})^*/abc - \lambda^2 a^2 / 2b^2 c^2 = 0, \\ -R_n^n &= (\dot{abc})^*/abc - \lambda^2 a^2 / 2b^2 c^2 = 0. \end{aligned} \quad (2,16)$$

Вторые члены здесь $\sim t^{-2(p_m + p_n - p_l)}$, причем $p_m + p_n - p_l = 1 + 2|p_l| > 1^*$). Для устранения этих членов (и тем самым для справедливости

*) Из рассмотрения исключается случай $(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 1)$, в котором особенность в метрике фиктивна.

решения (2,7)) необходимо наложить на координатные функции условие

$$\lambda = 0. \quad (2,17)$$

Что касается трех уравнений (2,13), содержащих лишь первые производные по времени от метрического тензора, то они приводят к трем соотношениям, не содержащим времени, которые должны быть наложены как необходимое условие на координатные функции в (2,7) (равенства (3,24) в ¹). Вместе с (2,17) имеется, таким образом, всего четыре условия. Эти условия связывают между собой 10 различных функций координат: по три компоненты трех векторов \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} и одна функция в показателях степеней t (какая-либо из трех функций p_l , p_m , p_n , связанных соотношениями (2,2)). При определении числа физически произвольных функций надо учесть также, что используемая синхронная система отсчета допускает еще произвольные преобразования трех пространственных координат, не затрагивающие времени. Поэтому рассматриваемое решение содержит всего $10 - 4 - 3 = 3$ физически произвольные функции — на одну меньше, чем требуется для общего решения в пустом пространстве.

Достигнутая степень общности не уменьшается при введении материи: материя «вписывается» в метрику (2,7) со всеми привносимыми ею четырьмя новыми координатными функциями, необходимыми для задания начального распределения ее плотности и трех компонент скорости движения. Именно, эволюцию материи при приближении к особой точке можно определить просто по уравнениям ее движения в заданном гравитационном поле. Этими уравнениями являются гидродинамические уравнения

$$(1/\sqrt{-g}) \partial (\sqrt{-g} \sigma u^i) / \partial x^i = 0, \quad (2,18)$$

$$(p + \varepsilon) u^k \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{1}{2} u^l \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right\} = - \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}, \quad (2,19)$$

где u^i — 4-скорость, ε и σ — плотности энергии и энтропии материи (см., например, ⁹, § 125). Для ультрарелятивистского уравнения состояния $p = \varepsilon/3$ энтропия $\sigma \sim \varepsilon^{3/4}$. Главными в (2,18), (2,19) являются члены с производными по времени. Из (2,18) и пространственных компонент уравнения (2,19) имеем

$$\partial (\sqrt{-g} u_0 \varepsilon^{3/4}) / \partial t = 0, \quad 4\varepsilon \cdot \partial u_\alpha / \partial t + u_\alpha \cdot \partial \varepsilon / \partial t = 0,$$

откуда

$$abc u_0 \varepsilon^{3/4} = \text{const}, \quad u_\alpha \varepsilon^{1/4} = \text{const}, \quad (2,20)$$

где const означают не зависящие от времени величины. Кроме того, из тождества $u_i u^i = 1$ имеем (учитывая, что все ковариантные составляющие u_α одинакового порядка величины)

$$u_0^2 \approx u_n u^n = u_n^2 / c^2,$$

где u_n — составляющая скорости вдоль направления \mathbf{n} , связанного с наиболее высокой (положительной) степенью t (полагаем, что $p_n = p_3$). Из написанных соотношений находим

$$\varepsilon \sim 1/a^2 b^2, \quad u_\alpha \sim \sqrt{ab} \quad (2,21)$$

или

$$\varepsilon \sim t^{-2(p_1+p_2)} = t^{-2(1-p_3)}, \quad u_\alpha \sim t^{(1-p_3)/2}. \quad (2,22)$$

Найдя эти законы, легко убедиться, что компоненты тензора энергии-импульса материи, стоящие в правых сторонах уравнений

$$R_0^0 = T_0^0 - 1/2 T, \quad R_\alpha^\beta = T_\alpha^\beta - 1/2 \delta_\alpha^\beta T,$$

действительно более низкого порядка по $1/t$, чем главные члены в их левых сторонах. В уравнениях же $R_\alpha^0 = T_\alpha^0$ наличие материи ведет лишь к изменению соотношений, накладываемых на входящие в решение координатные функции (см. ¹, § 3).

Обращение ε в бесконечность по закону (2,22) подтверждает, что в решении (2,7) мы имеем дело с физической особенностью при любых значениях показателей (p_1, p_2, p_3) , за исключением лишь $(0, 0, 1)$. Для этих последних значений особенность оказывается не физической и может быть устранена преобразованием системы отсчета.

Фиктивная особенность, отвечающая показателям степеней $(0, 0, 1)$, возникает в результате пересечения координатных линий времени на некоторой двумерной «фокальной поверхности». Как было указано в ¹, § 2, синхронную систему отсчета всегда можно выбрать таким образом, чтобы обязательное в ней пересечение линий времени происходило на такой поверхности (вместо трехмерной каустической гиперповерхности). Поэтому решение с такой одновременной для всего пространства фиктивной особенностью должно существовать с полным набором произвольных функций, требуемых для общего решения. Вблизи точки $t = 0$ оно допускает регулярное разложение по целым степеням t ; его аналитическое построение осуществлено в ¹⁰.

3. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ РЕЖИМ ПРИБЛИЖЕНИЯ К ОСОБОЙ ТОЧКЕ

Из четырех условий, которые требовалось наложить на координатные функции в решении (2,7), три условия, возникающие из уравнений $R_\alpha^0 = 0$, являются «естественными»; они возникают как следствие самой структуры уравнений гравитации. К «потере» же одной производной функции ведет наложение дополнительного условия (2,17).

Общее решение по определению вполне устойчиво. Наложение любого возмущения эквивалентно изменению начальных условий в некоторый момент времени, а поскольку общее решение допускает произвольные начальные условия, то и возмущение не может изменить его характера. Для решения же (2,7) наличие ограничительного условия $\lambda = 0$ означает, другими словами, неустойчивость по отношению к возмущениям, нарушающим это условие. Наложение такого возмущения должно вывести модель на другой режим, который тем самым будет уже вполне общим. При этом, конечно, возмущение отнюдь не должно рассматриваться как малое — переход на новый режим лежит вне области сколь угодно малых возмущений.

Исследование, основанное на таком подходе, действительно может быть произведено. Оно приводит к картине сложного колебательного режима приближения к особой точке ¹¹⁻¹³. В настоящее время нам известны еще не все детали этого режима в наиболее широких рамках общего случая (см. разделы 7, 8). Но его основные свойства и характер можно выяснить уже на частных моделях, допускающих далеко идущее аналитическое исследование.

Речь идет о моделях с однородной пространственной метрикой определенного типа. Как известно, предположение об однородности пространства, без какой-либо дополнительной симметрии, оставляет еще значительную свободу в метрике. Все возможные однородные (но анизотропные) пространства принято классифицировать, следуя Бианки, по девяти типам (см. Приложение В). Из них нас будут интересовать здесь пространства типов VIII и IX.

Если представить пространственную метрику в виде (2,7), то каждому из типов однородных пространств отвечает определенная функциональная

зависимость реперных векторов \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} от пространственных координат. Конкретный вид этой зависимости здесь для нас несуществен. Важно лишь, что для пространства типов VIII и IX величины λ , μ , ν (2,10) сводятся к постоянным, а все «смешанные» произведения вида $\mathbf{l} \text{ rot } \mathbf{m}$, $\mathbf{l} \text{ rot } \mathbf{n}$, $\mathbf{m} \text{ rot } \mathbf{l}$ и т. п. равны нулю. Для пространства типа IX величины λ , μ , ν имеют одинаковый знак и можно положить $\lambda = \mu = \nu = 1$ (одновременное же изменение знака всех трех постоянных вообще ничего не меняет). Для пространства же типа VIII две постоянные имеют знак, обратный знаку третьей; можно положить, например, $\lambda = -1$, $\mu = \nu = 1$ *).

Наша цель состоит в выяснении влияния, оказываемого на «казнеровский режим» возмущением, представляемым в уравнениях Эйнштейна членами, содержащими λ . Именно в этом отношении подходящим объектом исследования являются модели с пространствами типов VIII и IX. Поскольку все три величины λ , μ , ν отличны от нуля, то условие (2,17) заведомо не выполняется, к какому бы из направлений \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} не относилась отрицательная степень времени.

Уравнения Эйнштейна для рассматриваемых моделей легко составить с помощью формул, приведенных в ¹ (Приложение В). Они имеют вид

$$\left. \begin{aligned} -R_l^l &= (\dot{abc})/abc + (1/2a^2b^2c^2) [\lambda^2a^4 - (\mu b^2 - \nu c^2)^2] = 0, \\ -R_m^m &= (\dot{abc})/abc + (1/2a^2b^2c^2) [\mu^2b^4 - (\lambda a^2 - \nu c^2)^2] = 0, \\ -R_n^n &= (\dot{abc})/abc + (1/2a^2b^2c^2) [\nu^2c^4 - (\lambda a^2 - \mu b^2)^2] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3,1)$$

$$-R_0^0 = \ddot{a}/a + \ddot{b}/b + \ddot{c}/c = 0 \quad (3,2)$$

(остальные компоненты R_l^0 , R_m^0 , R_n^0 , R_l^m , R_l^n , R_m^n обращаются в нуль тождественно). Отметим, что уравнения содержат только функции времени; в этом проявляется однородность пространства. Подчеркнем также, что в данном случае уравнения (3,1) — (3,2) — точные уравнения, справедливость которых не связана с близостью к особой точке $t = 0$ **).

Производные по времени в (3,1), (3,2) принимают более простой вид, если ввести вместо a , b , c их логарифмы α , β , γ :

$$e = e^\alpha, \quad b = e^\beta, \quad c = e^\gamma, \quad (3,3)$$

и переменную τ вместо t согласно

$$dt = abc \, d\tau. \quad (3,4)$$

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha_{\tau\tau} &= (\mu b^2 - \nu c^2)^2 - \lambda^2 a^4, \\ 2\beta_{\tau\tau} &= (\lambda a^2 - \nu c^2)^2 - \mu^2 b^4, \\ 2\gamma_{\tau\tau} &= (\lambda a^2 - \mu b^2)^2 - \nu^2 c^4, \end{aligned} \right\} \quad (3,5)$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)_{\tau\tau} = \alpha_\tau \beta_\tau + \alpha_\tau \gamma_\tau + \beta_\tau \gamma_\tau. \quad (3,6)$$

Сложив почленно уравнения (3,5) и заменив в левой стороне сумму $(\alpha + \beta + \gamma)_{\tau\tau}$ согласно (3,6), получим равенство, содержащее только первые

*) Постоянные λ , μ , ν представляют собой так называемые структурные константы группы движений пространства (ср. (B,15)).

**) Уравнения Эйнштейна для однородного пространства в их точном виде содержат, вообще говоря, 6 различных функций времени — функции $\gamma_{ab}(t)$ в метрике (B,2). Тот факт, что мы получили в данном случае непротиворечивую систему точных уравнений для метрики, определяющейся всего тремя функциями времени ($\gamma_{11} = a^2$, $\gamma_{22} = b^2$, $\gamma_{33} = c^2$), связан с симметрией, приводящей к упомянутому тождественному обращению в нуль шести компонент тензора Риччи.

производные и представляющее собой первый интеграл системы (3,5):

$$\alpha_\tau \beta_\tau + \alpha_\tau \gamma_\tau + \beta_\tau \gamma_\tau = \\ = 1/4 (\lambda^2 a^4 + \mu^2 b^4 + \nu^2 c^4 - 2\lambda\mu a^2 b^2 - 2\lambda\nu a^2 c^2 - 2\mu\nu b^2 c^2). \quad (3,7)$$

Это уравнение играет роль связи, налагаемой на начальные условия к уравнениям (3,5).

Казнеровский режим (2,8) является решением уравнений (3,5), когда в них можно пренебречь всеми членами в правых частях. Но такая ситуация не может продолжаться (при $t \rightarrow 0$) неограниченно, так как среди указанных членов всегда имеются возрастающие. Так, если отрицательный показатель степени относится к функции $a(t)$ ($p_l = p_1$), то возмущение казнеровского режима возникает от членов $\lambda^2 a^4$; остальные же члены при уменьшении t будут убывать.

Сохранив в правых частях (3,5) лишь эти члены, получим систему уравнений

$$\alpha_{\tau\tau} = -1/2 \lambda^2 e^{4a}, \quad \beta_{\tau\tau} = \gamma_{\tau\tau} = 1/2 \lambda^2 e^{4a} \quad (3,8)$$

(ср. (2,16); ниже полагаем $\lambda^2 = 1$). Решение этих уравнений должно описывать эволюцию метрики из начального состояния, в котором оно описывается формулами (2,8) с определенным набором показателей (причем $p_l < 0$); пусть $p_l = p_1$, $p_m = p_2$, $p_n = p_3$, так что

$$a \sim t^{p_1}, \quad b \sim t^{p_2}, \quad c \sim t^{p_3}. \quad (3,9)$$

При этом

$$abc = \Lambda t, \quad \tau = \Lambda^{-1} \ln t + \text{const}, \quad (3,10)$$

где Λ — постоянная. Поэтому начальные условия для уравнений (3,8) формулируются в виде *)

$$\alpha_\tau = \Lambda p_1, \quad \beta_\tau = \Lambda p_2, \quad \gamma_\tau = \Lambda p_3 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (3,11)$$

Уравнения (3,8) легко интегрируются; решение, удовлетворяющее условию (3,11), имеет вид

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{2|p_1|\Lambda}{\text{ch}(2|p_1|\Lambda\tau)}, \quad b^2 = b_0^2 e^{2\Lambda(p_2 - |p_1|)\tau} \text{ch}(2|p_1|\Lambda\tau), \\ c^2 &= c_0^2 e^{2\Lambda(p_3 - |p_1|)\tau} \text{ch}(2|p_1|\Lambda\tau), \end{aligned} \right\} \quad (3,12)$$

где b_0, c_0 — еще две постоянные.

Легко убедиться, что асимптотика функций (3,12) при $\tau \rightarrow \infty$ действительно совпадает с (3,9). Асимптотические же выражения этих функций и функции $t(\tau)$ при $\tau \rightarrow -\infty$ **)

$$a \sim e^{-\Lambda p_1 \tau}, \quad b \sim e^{\Lambda(p_2 + 2p_1)\tau}, \quad c \sim e^{\Lambda(p_3 + 2p_1)\tau}, \quad t \sim e^{\Lambda(1 + 2p_1)\tau}.$$

Выразив a, b, c в функции от t , получим

$$a \sim t^{p'_1}, \quad b \sim t^{p'_m}, \quad c \sim t^{p'_n}, \quad (3,13)$$

*) Еще раз напомним, что мы рассматриваем эволюцию модели в направлении $t \rightarrow 0$; поэтому «начальные» условия соответствуют более позднему, а не более раннему времени.

**) Отметим, что асимптотические значения $\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau$ при $\tau \rightarrow -\infty$ можно найти и без полного решения уравнений (3,8). Достаточно заметить, что первое из этих уравнений имеет вид одномерного движения «частицы» в поле экспоненциальной потенциальной стенки, причем α играет роль координаты. В этой аналогии начальному казнеровскому режиму отвечает свободное движение с постоянной скоростью $\alpha_\tau = \Lambda p_1$. Отразившись от стенки, частица будет двигаться свободно со скоростью $\alpha_\tau = -\Lambda p_1$. Заметив также, что в силу уравнений (3,8) $\alpha_\tau + \beta_\tau = \text{const}$ и $\alpha_\tau + \gamma_\tau = \text{const}$, найдем, что β_τ и γ_τ приобретут значения $\beta_\tau = \Lambda(p_2 + 2p_1)$, $\gamma_\tau = \Lambda(p_3 + 2p_1)$.

где

$$p'_i = \frac{|p_1|}{1-2|p_1|}, \quad p'_m = -\frac{2|p_1|-p_2}{1-2|p_1|}, \quad p'_n = \frac{p_3-2|p_1|}{1-2|p_1|}. \quad (3,14)$$

При этом

$$abc = \Lambda' t, \quad \Lambda' = (1-2|p_1|) \Lambda. \quad (3,15)$$

Таким образом, воздействие возмущения приводит к смене одного казнеровского режима другим, причем отрицательная степень t перебрасывается с направления l к направлению m : если было $p_l < 0$, то теперь $p_m < 0$. В процессе смены функция $a(t)$ проходит через максимум, а $b(t)$ — через минимум; убывавшая прежде величина b начинает возрастать, возраставшая a — падать, а функция $c(t)$ продолжает убывать. Само возмущение ($\lambda^2 a^{4a}$ в уравнениях (3,8)), прежде возраставшее, начинает убывать и затухает. Дальнейшая эволюция приведет аналогичным образом к возрастанию возмущения, выражающемуся членами с μ^2 (вместо λ^2) в уравнениях (3,5), следующей смене казнеровского режима, и т. д.

Правило замены показателей (3,14) удобно представить с помощью параметризации (2,5):

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } p_l = p_1(u), \quad p_m = p_2(u), \quad p_n = p_3(u), \\ \text{то } p'_i = p_2(u-1), \quad p'_m = p_1(u-1), \quad p'_n = p_3(u-1). \end{array} \right\} \quad (3,16)$$

Остается положительным больший из двух положительных показателей.

В этом процессе смен «казнеровских эпох» с перебросом показателей p_l, p_m, p_n по правилу (3,16) лежит ключ к пониманию характера эволюции метрики при приближении к особой точке.

Последовательные смены (3,16) с перебросом отрицательного показателя степени (p_l) между направлениями l и m продолжаются до тех пор, пока не исчерпывается целая часть начального значения u и не станет $u < 1$. Значение $u < 1$ преобразуется в $u > 1$ согласно (2,6); в этот момент отрицателен показатель p_l или p_m , а p_n становится меньшим из двух положительных чисел ($p_n = p_2$). Следующая серия смен будет уже перебрасывать отрицательный показатель между направлениями n и l или между n и m . При произвольном (иррациональном) начальном значении u процесс смен продолжается неограниченно*).

При точном решении уравнений показатели p_l, p_m, p_n теряют, конечно, свой буквальный смысл. Отметим, что вносимая этим обстоятельством некоторая «размытость» в определении этих чисел (а с ними и параметра u), хотя она и мала, лишает смысла рассмотрение каких-либо выделенных (например, рациональных) значений u . Именно поэтому реальным смыслом обладают лишь те закономерности, которые свойственны общему случаю произвольных иррациональных значений u .

Таким образом, процесс эволюции модели в направлении особой точки складывается из последовательных периодов (назовем их *эрами*), в течение которых масштабы пространственных расстояний вдоль двух осей осциллируют, а вдоль третьей — монотонно убывают; объемы убывают по закону, близкому к $\sim t$. При переходе от одной эры к следующей направление, вдоль которого происходит монотонное убывание расстояний, перебрасывается с одной оси на другую. Порядок этого перебрасывания приобретает асимптотически характер случайного процесса. Такой же характер приобретает и порядок смен длин последовательных

*) *Примечание при корректуре.* Введение в метрику недиагональных компонент $\gamma_{ab}(t)$ (ср. примечание на стр. 470) приводит к некоторым новым свойствам модели — поворотам осей, к которым относятся показатели казнеровских эпох; этот вопрос исследован в статье авторов в ЖЭТФ 60, № 3 (1971).

эр (под длиной эры, в отличие от ее длительности по времени, мы будем понимать число сменяющихся в ней казнеровских эпох).

Последовательные эры сгущаются по мере приближения к $t = 0$. Но естественной переменной для описания временного хода этой эволюции является не само мировое время t , а его логарифм, $\ln t$, по которому весь процесс приближения к особой точке растянут до $-\infty$.

Согласно формулам (3,12) та из функций a , b , c , которая проходит при смене казнеровских эпох через максимум, в самом максимуме равна

$$a_{\max} = \sqrt{2\Lambda |p_1(u)|} \quad (3,17)$$

(причем предполагается, что это значение велико по сравнению с b_0 и c_0); в (3,17) u — значение параметра, отвечающее эпохе, предшествующей смене. Отсюда легко заключить, что высота последовательных максимумов в течение каждой эры постепенно снижается. Действительно, в следующей казнеровской эпохе параметр имеет значение $u' = u - 1$, а постоянная Λ заменяется, согласно (3,15), на $\Lambda' = \Lambda (1 - 2 |p_1(u)|)$. Поэтому отношение высот двух последовательных максимумов имеет вид

$$\frac{a'_{\max}}{a_{\max}} = \left[\frac{p_1(u-1)}{p_1(u)} (1 - 2 |p_1(u)|) \right]^{1/2};$$

и окончательно

$$\frac{a'_{\max}}{a_{\max}} = \sqrt{\frac{u-1}{u}} \equiv \sqrt{\frac{u'}{u}}. \quad (3,18)$$

До сих пор мы рассматривали решение уравнений Эйнштейна в пустом пространстве. Как и для чисто казнеровского режима, материя не меняет качественных свойств этого решения и может быть «вписана» в него при пренебрежении ее обратным действием на поле.

Но если сделать это для рассматриваемой модели, понимаемой как точное решение уравнений Эйнштейна, то получающаяся картина эволюции материи не имела бы сколько-нибудь общего характера и была бы специфична именно для той высокой симметрии, которой эта модель обладает. Математически эта специфика связана с тем, что для рассматриваемой однородной пространственной геометрии компоненты R_{α}^0 тензора Риччи равны нулю тождественно, и потому уравнения гравитации не допускали бы движения материи (приводящего к появлению отличных от нуля компонент T_{α}^0 тензора энергии-импульса)*).

Это затруднение отпадает, если рассматривать модель лишь как главные члены предельного (при $t \rightarrow 0$) вида метрики и «вписать» материю с произвольным начальным распределением плотности и скорости. Тогда ход эволюции материи определяется ее общими уравнениями движения (2,18), (2,19), приводящими к формулам (2,22). В течение каждой казнеровской эпохи плотность возрастает по закону

$$\varepsilon \sim t^{-2(1-p_3)}, \quad (3,19)$$

где p_3 , как условлено, наибольшее из чисел p_1 , p_2 , p_3 . Плотность материи монотонно возрастает в течение всей эволюции к особой точке.

Изложенный анализ должен быть еще дополнен в связи со следующим обстоятельством.

Каждый (s -й) эре отвечает серия значений параметра u , начинающаяся от некоторого наибольшего, $u_{\max}^{(s)}$, и через значения $u_{\max}^{(s)} - 1$,

*) Другими словами, синхронная система должна была бы быть также и сопутствующей по отношению к материи. Положив в (2,20) $u^{\alpha} = 0$, $u^0 = 1$, мы получили бы $\varepsilon \sim (abc)^{-4/3} \sim t^{-4/3}$.

$u_{\max}^{(s)} - 2, \dots$, доходящего до наименьшего, $u_{\min}^{(s)} < 1$. Обозначим

$$u_{\min}^{(s)} = x^{(s)}, \quad u_{\max}^{(s)} = k^{(s)} + x^{(s)}, \quad (3,20)$$

т. е. $k^{(s)} = [u_{\max}^{(s)}]$ (квадратные скобки означают целую часть числа). Число $k^{(s)}$ определяет длину эры, измеренную в числе содержащихся в ней казнеровских эпох. Для следующей эры

$$u_{\max}^{(s+1)} = 1/x^{(s)}, \quad k^{(s+1)} = [1/x^{(s)}]. \quad (3,21)$$

В неограниченной последовательности серий чисел u , составляемой по этим правилам, будут наблюдаться сколь угодно малые (но никогда не равные нулю) значения $x^{(s)}$ и соответственно сколь угодно большие длины $k^{(s+1)}$.

Большим значениям параметра u соответствуют казнеровские показатели

$$p_1 \approx -1/u, \quad p_2 \approx 1/u, \quad p_3 = 1 - 1/u^2, \quad (3,22)$$

близкие к значениям $(0, 0, 1)$. Два близких к нулю значения тем самым близки друг к другу, а с ними близки и законы изменения двух из трех типов «возмущений» — членов в правых сторонах уравнений (3,5) (члены с λ , μ и ν). Если в начале такой длинной эры эти члены в момент смены двух казнеровских эпох оказываются близкими друг к другу и по абсолютной величине (или искусственно заданы таковыми по начальным условиям), то они будут продолжать оставаться близкими в течение большей части всей продолжительности эры. В таком случае (который будем называть случаем *малых колебаний*) становится некорректным исследование, основанное на рассмотрении действия возмущения лишь одного типа. Анализ эволюции метрики требует тогда одновременного учета двух «возмущений»; это сделано в гл. 4.

4. ЭВОЛЮЦИЯ МОДЕЛИ ПОД ВЛИЯНИЕМ ДВУХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Итак, рассмотрим длинную эру, в течение которой две из трех функций a , b , c (пусть это будут a и b) испытывают малые колебания, а третья (c) монотонно убывает. Последняя быстро становится малой; рассмотрим решение уравнений именно в той области, где уже можно пренебречь c по сравнению с a и b . Произведем вычисления сначала для модели типа IX, соответственно чему положим $\lambda = \mu = \nu = 1$ ¹².

После пренебрежения функцией c первые два из уравнений (3,4) дают

$$\alpha_{\tau\tau} + \beta_{\tau\tau} = 0, \quad (4,1)$$

$$\alpha_{\tau\tau} - \beta_{\tau\tau} = e^{4\beta} - e^{4\alpha}, \quad (4,2)$$

а в качестве третьего уравнения воспользуемся (3,7), которое принимает вид

$$\gamma_{\tau}(\alpha_{\tau} + \beta_{\tau}) = -\alpha_{\tau}\beta_{\tau} + \frac{1}{4}(e^{2\alpha} - e^{2\beta})^2. \quad (4,3)$$

Решение уравнения (4,1) пишем в виде

$$\alpha + \beta = (2a_0^2/\xi_0)(\tau - \tau_0) + 2 \ln a_0,$$

где a_0 , ξ_0 — положительные постоянные, а под τ_0 будем понимать верхнюю границу эры по переменной τ . Далее будет удобным ввести новую (вместо τ) переменную

$$\xi = \xi_0 \exp \{(2a_0^2/\xi_0)(\tau - \tau_0)\}. \quad (4,4)$$

Тогда

$$\alpha + \beta = \ln(\xi/\xi_0) + 2 \ln a_0. \quad (4,5)$$

Уравнения же (4,2) — (4,3) преобразуем, введя обозначение $\chi = \alpha - \beta$:

$$\chi_{\xi\xi} + \chi_{\xi}/\xi + 1/2 \operatorname{sh} 2\chi = 0, \quad (4,6)$$

$$\gamma_{\xi} = -1/4 \xi + 1/8 \xi (2\chi_{\xi}^2 + \operatorname{ch} 2\chi - 1). \quad (4,7)$$

Убыванию τ от τ_0 до $-\infty$ отвечает убывание ξ от ξ_0 до 0. Интересующая нас длинная эра с близкими a и b (т. е. с малым χ) получается, если ξ_0 — очень большая величина. Действительно, при больших ξ решение уравнения (4,6) в первом (по $1/\xi$) приближении

$$\chi = \alpha - \beta = (2A/\sqrt{\xi}) \sin(\xi - \xi_0), \quad (4,8)$$

где A — постоянная; множитель $1/\sqrt{\xi}$ делает χ малой величиной (в виду чего в (4,6) можно заменить $\operatorname{sh} 2\chi \approx 2\chi$ *).

Из (4,7) находим теперь

$$\gamma_{\xi} = 1/4 \xi (\chi_{\xi}^2 + \chi^2) = A^2, \quad \gamma = A^2 (\xi - \xi_0) + \text{const.}$$

Определив α и β из (4,5) и (4,8) и разложив e^{α} и e^{β} в соответствии с принятым приближением, получим окончательно **):

$$\left. \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\} = a_0 \sqrt{\frac{\xi}{\xi_0}} \left[1 \pm \frac{A}{\sqrt{\xi}} \sin(\xi - \xi_0) \right], \quad (4,9)$$

$$c = c_0 e^{-A^2(\xi_0 - \xi)}. \quad (4,10)$$

Связь же переменной ξ со временем t получается интегрированием определения $dt = abc dt$ и дается формулой

$$t/t_0 = e^{-A^2(\xi_0 - \xi)}. \quad (4,11)$$

Постоянная c_0 (значение c при $\xi = \xi_0$) должна быть уже $c_0 \ll a_0$.

Обратимся к области $\xi \ll 1$. Здесь главные члены в решении уравнения (4,6):

$$\chi = \alpha - \beta = k \ln \xi + \text{const},$$

где k — постоянная, лежащая в интервале $-1 < k < 1$; этим условием обеспечивается малость последнего члена в (4,6) ($\operatorname{sh} 2\chi$ содержит ξ^{2k} и ξ^{-2k}). Определив затем α , β и t , получим

$$a \sim \xi^{(1+k)/2}, \quad b \sim \xi^{(1-k)/2}, \quad c \sim \xi^{-(1-k^2)/4}, \quad t \sim \xi^{(3+k^2)/4}. \quad (4,12)$$

Это снова казнеровский режим, причем отрицательная степень t относится к функции $c(t)$ ***).

Полученные результаты снова приводят к качественно той же картине эволюции модели, что и описанная в разделе 3.

Мы видим, что в течение длительного времени (отвечающего большим убывающим значением ξ) две функции (a и b) осциллируют, оставаясь близкими друг к другу по величине ($(a - b)/a \sim 1/\sqrt{\xi}$); в то же время средние значения функций a и b медленно ($\sim \sqrt{\xi}$) убывают. Осцилляции происходят с постоянным периодом по переменной ξ : $\Delta \xi = 2\pi$ (или, что

*) Постоянная в аргументе синуса не обязана, конечно, совпадать с постоянной ξ_0 в (4,4) — (4,5); положив их одинаковыми, мы, однако, ничего не меняем в характере решения.

**) При более точном вычислении в аргументе синуса появляется медленно меняющийся логарифмический член, а в выражении для $c(\xi)$ — предэкспоненциальный множитель (см. Приложение Б).

***). Заменяя в уравнении (4,6) $\operatorname{sh} 2\chi$ на 2χ , и решая его при всех ξ , получим $\chi = c_1 J_0(\xi) + c_2 N_0(\xi)$, где J_0 , N_0 — функции Бесселя 1-го и 2-го рода. Это решение осуществляет интерполяцию между обоими предельными случаями и позволяет связать по порядку величины постоянные параметры, входящие в (4,9) и (4,12).

то же, с постоянным периодом по логарифмическому времени: $\Delta \ln t = 2\pi A^2$). Третья же функция монотонно убывает по закону, близкому к $c = c_0 t/t_0$.

Такая эволюция продолжается до тех пор, пока не станет $\xi \sim 1$ и формулы (4,9), (4,10) потеряют свою применимость. Ее длительность по времени отвечает изменению t от t_0 до значения t_1 , связанного с ξ_0 согласно

$$A^2 \xi_0 = \ln(t_0/t_1). \quad (4,13)$$

Связь же ξ с t в течение этого времени можно представить в виде

$$\xi/\xi_0 = \ln(t/t_1)/\ln(t_0/t_1). \quad (4,14)$$

После этого, как видно из (4,12), убывавшая функция начинает возрастать, а функции a и b — убывать. Эта казнеровская эпоха будет продолжаться до тех пор, пока члены $c^2/a^2 b^2$ в уравнениях (3,1) не станут $\sim t^{-2}$ и начнется следующая серия колебаний.

Закон изменения плотности материи в течение рассматриваемой длинной эры получится подстановкой (4,9) в (2,21):

$$\varepsilon \sim (\xi_0/\xi)^2. \quad (4,15)$$

За время изменения ξ от ξ_0 до $\xi \sim 1$ плотность возрастает в ξ_0^2 раз.

Подчеркнем, что хотя функция $c(t)$ меняется по закону, близкому к $c \sim t$, метрика (4,9) отнюдь не совпадает с казнеровской метрикой с показателями (0, 0, 1). Последней соответствует в данном случае допускаемое уравнениями (3,5) — (3,6) точное решение (найденное Таубом¹⁵), в котором

$$a^2 = b^2 = \frac{p}{2} \frac{\text{ch}(2p\tau + \delta_1)}{\text{ch}^2(p\tau + \delta_2)}, \quad c^2 = \frac{2p}{\text{ch}(2p\tau + \delta_1)}, \quad (4,16)$$

где p, δ_1, δ_2 — постоянные. В предельной области $\tau \rightarrow -\infty$ после замены $e^{p\tau} = t$ получим отсюда $a = b = \text{const}$, $c = \text{const} \cdot t$. Особенность при $t = 0$ в этой метрике не физична.

Обратимся к аналогичному исследованию для модели типа VIII, положив теперь в уравнениях (3,5) — (3,7) $\lambda = -1$, $\mu = \nu = 1$ ¹³.

Если монотонно убывающей в течение длительной эры является функция a , то в произведенном выше исследовании вообще ничего не меняется: после пренебрежения a^2 в правой стороне уравнений (3,5), (3,7) мы вернемся к тем же уравнениям (4,6) — (4,7) (с соответствующим изменением обозначений). Некоторые изменения возникают, однако, если монотонно убывает функция b или c ; пусть это будет c .

С теми же обозначениями будем иметь по-прежнему уравнение (4,6) и соответственно прежние выражения (4,9) для функций $a(\xi)$ и $b(\xi)$. Уравнение же (4,7) заменяется на

$$\gamma_\xi = -1/4\xi + 1/8\xi(2\chi_\xi^2 + \text{ch } 2\chi + 1). \quad (4,17)$$

Главный член при больших ξ будет теперь

$$\gamma_\xi \approx 1/8\xi \cdot 2, \quad \gamma \approx 1/8(\xi^2 - \xi_0^2),$$

так что

$$c/c_0 = t/t_0 = \exp\{-1/8(\xi_0^2 - \xi^2)\}. \quad (4,18)$$

Величина c как функция времени t будет по-прежнему $c = c_0 t/t_0$, но меняется связь переменной ξ со временем. Продолжительность длинной эры будет связана со значением ξ_0 согласно

$$\xi_0 = \sqrt{8 \ln(t_0/t_1)}. \quad (4,19)$$

С другой стороны, значение ξ_0 определяет собой число осцилляций функций a и b в течение эры (равное $\xi_0/2\pi$). При заданной продолжительности эры по логарифмическому времени (т. е. при заданном отношении t_0/t_1) число осцилляций для модели типа VIII будет, вообще говоря, меньше, чем для модели типа IX. Для периода осцилляций получим теперь $\Delta \ln t = \pi \xi/2$; в противоположность случаю модели типа IX, период не остается теперь постоянным в течение длинной эры, а медленно падает вместе с ξ .

5. ЭВОЛЮЦИЯ МОДЕЛИ В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ СКОЛЬ УГОДНО МАЛЫХ ВРЕМЕН

Длинные эры исследованного в разделе 4 типа нарушают «регулярный» ход эволюции, определяемый установленными в разделе 3 правилами; это обстоятельство затрудняет исследование эволюции за интервалы времени, обнимающие ряд эр. Можно показать, однако, что такие «аномальные» случаи перестают появляться в процессе самопроизвольной эволюции модели к особой точке в асимптотической области сколь угодно малых времен t , на достаточно большом удалении от начального момента, в который задаются произвольные начальные условия. Даже в длинных эрах обе осциллирующие функции в моменты смен казнеровских эпох остаются настолько различными, что самые смены происходят под влиянием лишь одного возмущения. Этот и следующие параграфы посвящены аналитическому и статистическому анализу эволюции однородных моделей в такой асимптотической области¹⁴. Все результаты относятся в равной степени к моделям типов VIII и IX.

В течение каждой казнеровской эпохи имеем $abc = \Lambda t$, т. е. $\alpha + \beta + \gamma = \ln \Lambda + \ln t$. При переходе от одной эпохи к другой постоянная $\ln \Lambda$ меняется на величину порядка 1 (ср. (3,15)). Но в асимптотической области сколь угодно больших значений $|\ln t|$ можно пренебречь не только этими изменениями, но и всей постоянной $\ln \Lambda$. Другими словами, используемое приближение соответствует пренебрежению всеми величинами, отношение которых к $|\ln t|$ стремится к нулю при $t \rightarrow 0$. Тогда будем иметь

$$\alpha + \beta + \gamma = -\Omega, \quad (5,1)$$

где Ω обозначает «логарифмическое время»

$$\Omega = -\ln t. \quad (5,2)$$

В этом же приближении можно рассматривать процессы смен эпох, как мгновенные. Можно также пренебречь и постоянной в правой стороне условия (3,17) $\alpha_{\max} = \frac{1}{2} \ln (2 |p_1| \Lambda)$, определяющего моменты смен, т. е. принять в качестве этого условия равенство $\alpha = 0$ (или такие же равенства для β или γ , если начальный отрицательный показатель относится к функциям b или c *). Таким образом, полагаем

$$\alpha_{\max} = 0, \quad \beta_{\max} = 0, \quad \gamma_{\max} = 0, \quad (5,3)$$

так что величины α, β, γ будут пробегать лишь отрицательные значения, связанные друг с другом в каждый момент времени соотношением (5,2).

Рассматривая смены эпох как мгновенные, мы пренебрегаем ширинами переходных областей по сравнению с длительностями самих эпох; это условие действительно выполняется (см. ниже, примечание на стр. 479).

*) Тем самым мы пренебрегаем и эффектом постепенного понижения максимумов осциллирующих функций в течение эры, описываемым формулой (3,18).

Замена же равенств (3,17) на (5,3) требует малости величины $\ln(|p_1|/\Lambda)$ по сравнению с амплитудами осцилляций соответствующих функций α , β , γ . Но при переходе от одной эры к следующей могут появиться, как было отмечено в разделе 3, очень малые значения $|p_1|$, причем величина этих значений и вероятность их появления никак не связаны с достигнутой к этому моменту величиной амплитуд осцилляций. Поэтому не исключено в принципе появление и столь малых значений $|p_1|$, для которых требуемое условие будет нарушено. Такое сильное понижение α_{\max} может привести к различным специфическим ситуациям, в которых сшивка казнеровских эпох по правилу (3,16) становится некорректной (в том числе

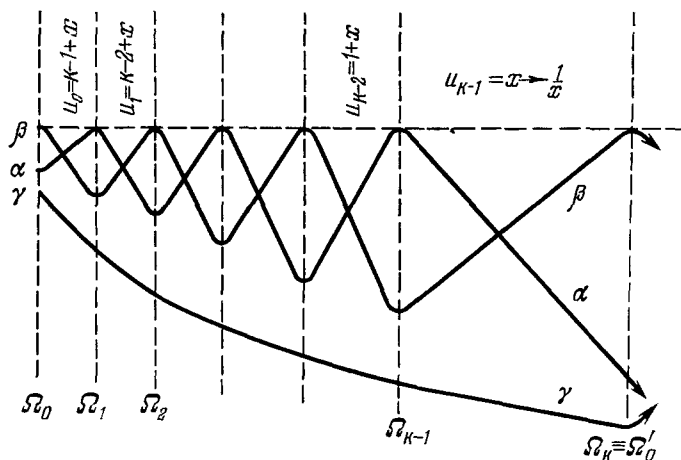


Рис. 2.

к ситуации, исследованной в разделе 4). Этот вопрос исследовался также в работе ²². Эти «опасные» ситуации нарушили бы закономерности, используемые ниже для статистического анализа в разделе 6. Но, как уже упоминалось, вероятность таких нарушений асимптотически стремится к нулю; мы вернемся к этому вопросу в конце раздела 6.

Рассмотрим эру, содержащую в себе k казнеровских эпох, соответствующих параметру u , пробегающему значения

$$u_n = k + x - 1 - n, \quad n = 0, 1, \dots, k-1, \quad (5,4)$$

и пусть осциллирующими в течение этой эры функциями будут α и β (рис. 2) *).

Обозначим моменты начала казнеровских эпох с параметрами u_n через Ω_n . В каждый из этих моментов одна из величин α или β равна нулю, а другая имеет минимум. Значения α или β в последовательных минимумах, т. е. в моменты Ω_n , обозначим как

$$\alpha_n = -\delta_n \Omega_n \quad (5,5)$$

(не делая различия между минимумами α и β). Величины δ_n , измеряющие эти минимумы в единицах соответствующих Ω_n , могут иметь значения между 0 и 1. Функция же γ в течение данной эры монотонно убывает;

* Определение границ эры согласно (5,4) естественно в том отношении, что оно объединяет в себе все эпохи, в течение которых третья функция, $\gamma(t)$, монотонно убывает. Если же определять эру по последовательности значений u от $k+x$ до $1+x$, то монотонное убывание $\gamma(t)$ продолжалось бы и в течение первой эпохи следующей эры.

согласно (5,1) ее значение в момент Ω_n есть

$$\gamma_n = -\Omega_n (1 - \delta_n). \quad (5,6)$$

В течение эпохи, начинающейся в момент Ω_n и заканчивающейся в момент Ω_{n+1} , одна из функций α или β возрастает от $-\delta_n \Omega_n$ до нуля, а другая падает от 0 до $-\delta_{n+1} \Omega_{n+1}$ по линейным законам соответственно:

$$\text{const} + |p_1(u_n)| \Omega \quad \text{и} \quad \text{const} - p_2(u_n) \Omega.$$

Отсюда находим рекуррентное соотношение

$$\delta_{n+1} \Omega_{n+1} = [(1 + u_n)/u_n] \delta_n \Omega_n = [(1 + u_0)/u_n] \delta_0 \Omega_0 \quad (5,7)$$

и для логарифмической длительности эпохи

$$\Delta_{n+1} \equiv \Omega_{n+1} - \Omega_n = \frac{f(u_n)}{u_n} \delta_n \Omega_n = \frac{f(u_n)(1 + u_{n-1})}{f(u_{n-1}) u_n} \Delta_n, \quad (5,8)$$

где для краткости обозначено $f(u) = 1 + u + u^2$. Для суммарной продолжительности n эпох можно получить формулу

$$\Omega_n - \Omega_0 = \left[n(n-1) + \frac{nf(u_{n-1})}{u_{n-1}} \right] \delta_0 \Omega_0. \quad (5,9)$$

Из (5,7) видно, что $|\alpha_{n+1}| > |\alpha_n|$, т. е. размах осцилляций функций α и β возрастает в течение всей эры, между тем как коэффициенты δ_n могут быть и малыми. Если глубина минимума в начале эры была велика, то она уже не станет малой и в последующих минимумах; другими словами, разность $|\alpha - \beta|$ в моменты смен казнеровских эпох остается большой. Подчеркнем, что это утверждение не зависит от длины эры k , так что и для длинных эр смены эпох будут определяться обычным правилом (3,16).

Амплитуда последней осцилляции функций α или β в данной эре связана с амплитудой первой осцилляции соотношением $|\alpha_{k-1}| = |\alpha_0| (k+x)/(1+x)$. Уже при длинах k , составляющих всего несколько единиц, можно пренебречь x по сравнению с k , так что возрастание амплитуды осцилляций функций α и β будет пропорционально длине эры. Для функций $a = e^\alpha$ и $b = e^\beta$ это значит, что если амплитуда их осцилляций в начале эры была A_0 , то в конце эры она будет равна $A_0^{k/(1+x)}$.

В течение эры возрастает также и продолжительность (в логарифмическом времени) последовательных казнеровских эпох; из (5,8) легко заключить, что $\Delta_{n+1} > \Delta_n$ *). Общая продолжительность эры

$$\Omega'_0 - \Omega_0 \equiv \Omega_k - \Omega_0 = k \left(k + x + \frac{1}{x} \right) \delta_0 \Omega_0 \quad (5,10)$$

(член с $1/x$ возникает от последней, k -й, эпохи, длительность которой велика при малом x ; ср. рис. 2). Момент Ω_k окончания k -й эпохи данной эры есть в то же время момент Ω'_0 начала следующей эры.

В первой казнеровской эпохе новой эры впервые начинает возрастать функция γ от достигнутого ею в предыдущей эре минимального значения $\gamma_k = -\Omega_k (1 - \delta_k)$; это значение и будет играть роль начальной амплитуды $\delta'_0 \Omega'_0$ новой серии осцилляций. Легко получить для нее:

$$\delta'_0 \Omega'_0 = (\delta_0^{-1} + k^2 + kx - 1) \delta_0 \Omega_0. \quad (5,11)$$

Очевидно, что $\delta'_0 \Omega'_0 > \delta_0 \Omega_0$. Уже при не очень больших длинах k , возрастание амплитуды очень значительно: функция $c = e^\gamma$ начинает

*) Отметим также, что эти продолжительности велики по сравнению с ширинами переходных областей между эпохами. Согласно (3,12) эти ширины велики при малых $|p_1|$ (т. е. больших u) и составляют $\sim 1/|p_1| \sim u$. Но даже в этом случае $\Delta_n \sim u_n |\alpha_n| \gg u_n$.

осциллировать от амплитуды $A'_0 \sim A_0^{k^2}$. (Мы оставляем в стороне упомянутые выше «опасные» случаи очень сильного понижения верхней границы осцилляций.)

Согласно (3,19) возрастание плотности материи в течение каждой из первых $(k-1)$ -й эпох дается формулой

$$\ln(\epsilon_{n+1}/\epsilon_n) = 2[1 - p_3(u_n)] \Delta_{n+1}.$$

Для последней же k -й эпохи данной эры надо учесть, что при $u = x < 1$ наибольшим является показатель $p_2(x)$ (а не $p_3(x)$). В результате для возрастания плотности в течение всей эры получается

$$\ln(\epsilon_k/\epsilon_0) \equiv \ln(\epsilon'_0/\epsilon_0) = 2(k-1+x)\delta_0\Omega_0. \quad (5,12)$$

Уже при не очень больших значениях k имеем, следовательно, $\epsilon'_0/\epsilon_0 \sim A_0^{2k}$. В течение следующей эры (с длиной k') возрастание плотности будет еще более быстрым в силу увеличения начальной амплитуды A'_0 : $\epsilon'_0/\epsilon'_0 \sim A_0'^{2k'} \sim A_0^{2k^2k'}$ и т. д. Этими формулами иллюстрируется бурный характер возрастания плотности материи.

6. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИИ МОДЕЛИ ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ К ОСОБОЙ ТОЧКЕ

Порядок следования длин $k^{(s)}$ последовательных эр (измеренных в числе содержащихся в них казнеровских эпох) приобретает асимптотически характер случайного процесса. Источником этой статистичности является правило (3,20) — (3,24), по которому в бесконечной числовой последовательности значений параметра u определяется переход от одной эры к следующей.

К статистическому описанию такой последовательности можно перейти, если вместо определенного начального значения $u_{\max} = k^{(0)} + x^{(0)}$ рассматривать значения, в которых $x^{(0)}$ распределены в интервале от 0 до 1 по некоторому вероятностному закону. Тогда будут распределены по некоторым законам также и значения $x^{(s)}$, оканчивающие каждую (s) -ю серию чисел. Можно показать (см. Приложение А), что при увеличении s эти распределения стремятся к определенному стационарному (не зависящему от s) распределению вероятностей $w(x)$, в котором начальные условия уже полностью «забыты»:

$$w(x) = \frac{1}{(1+x) \ln 2}. \quad (6,1)$$

Отсюда можно найти распределение вероятностей длин серий k :

$$W(k) = (\ln 2)^{-1} \ln [(k+1)^2/k(k+2)]. \quad (6,2)$$

Эти формулы дают основу для исследования статистических свойств эволюции модели ¹⁴.

Осложняющим обстоятельством в таком исследовании является медленность убывания функции распределения (6,2) при больших k :

$$W(k) \approx 1/k^2 \ln 2. \quad (6,3)$$

Среднее значение \bar{k} , вычисленное по этому распределению, логарифмически расходится. Для последовательности, обрезанной на очень большом, но конечном числе чисел N , мы получили бы $\bar{k} \sim \ln N$. Однако смысл среднего значения в данном случае весьма ограничен ввиду его неустойчивости: медленность убывания $W(k)$ приводит к тому, что флуктуации числа k расходятся еще быстрее, чем его среднее значение. Более адекватной характеристикой свойств рассматриваемой последовательности является вероятность того, что случайно выбранное из нее число окажется

принадлежащим серии с длиной K , где K велико. Эта вероятность равна $\ln K / \ln N$. Она мала, если $1 \ll K \ll N$. В этом смысле можно сказать, что случайно выбранное из последовательности число с большой вероятностью окажется принадлежащим длинной серии.

Выпишем снова рекуррентные формулы, определяющие правила перехода от одной эры к следующей. Индекс s нумерует последовательные эры (а не казнеровские эпохи в одной эре!), начиная от некоторой эры ($s = 0$), принимаемой за начальную. $\Omega^{(s)}$ и $e^{(s)}$ обозначают соответственно начальный момент времени и начальную плотность материи в s -й эре; $\delta_s \Omega_s$ есть начальная амплитуда осцилляций той пары из функций α , β , γ , которая испытывает колебания в данной эре; $k^{(s)}$ есть длина s -й эры, а величина $x^{(s)}$ определяет длину следующей эры согласно $k^{(s+1)} = [1/x^{(s)}]$. Согласно (5,10) — (5,12) имеем

$$\Omega^{(s+1)}/\Omega^{(s)} = 1 + \delta^{(s)} k^{(s)} (k^{(s)} + x^{(s)} + 1/x^{(s)}) \equiv e^{\xi_s}, \quad (6,4)$$

$$\delta^{(s+1)} = 1 - \frac{(k^{(s)}/x^{(s)} + 1) \delta^{(s)}}{1 + \delta^{(s)} k^{(s)} (1 + x^{(s)} + 1/x^{(s)})}, \quad (6,5)$$

$$\ln(e^{(s+1)}/e^{(s)}) = 2(k^{(s)} + x^{(s)} - 1) \delta^{(s)} \Omega^{(s)} \quad (6,6)$$

(в (6,4) введено для дальнейшего использования обозначение ξ_s).

Величины $\delta^{(s)}$ (пробегающие значения от 0 до 1) тоже имеют свое стационарное статистическое распределение. Оно удовлетворяет интегральному уравнению, которое выражает собой тот факт, что величины $\delta^{(s)}$ и $\delta^{(s+1)}$, связанные соотношением (6,5), имеют одинаковое распределение; это уравнение может быть решено численным образом (см. ¹⁴). Ввиду отсутствия каких-либо особенностей в соотношении (6,5), распределение имеет вполне устойчивый характер; вычисленные по нему средние значения величины δ или ее степеней являются определенными конечными числами. В частности, среднее значение δ оказывается равным $\bar{\delta} = 0,52$.

Поставим вопрос о статистической связи между большими интервалами времени Ω и числом s сменившихся за это время эр.

Повторное применение формулы (6,4) дает

$$\Omega^{(s)}/\Omega^{(0)} = \exp \left(\sum_{p=0}^{s-1} \xi_p \right). \quad (6,7)$$

Прямое усреднение этого равенства, однако, не имело бы смысла: ввиду медленного убывания функции $W(k)$ средние значения величин e^{ξ_s} неустойчивы в указанном выше смысле. Эта неустойчивость устраняется логарифмированием: «дважды-логарифмический» интервал времени

$$\tau_s \equiv \ln(\Omega^{(s)}/\Omega^{(0)}) = \sum_{p=0}^{s-1} \xi_p \quad (6,8)$$

выражается суммой величин ξ_p , имеющих устойчивое статистическое распределение. Средние значения величин ξ_s , а также их степеней (вычисленные по распределениям величин x , k и δ) конечны; численное вычисление дает $\bar{\xi} = 2,1$, $\bar{\xi}^2 = 6,8$.

Усреднив равенство (6,8) при заданном s , получим

$$\bar{\tau}_s = 2,1s, \quad (6,9)$$

чем определяется средний дважды логарифмический интервал времени, необходимый для протекания s последовательных эр.

Для вычисления же среднего квадрата флуктуации этой величины пишем

$$\overline{(\tau_s - \bar{\tau}_s)^2} = \sum_{p, q=0}^{s-1} (\bar{\xi}_p \bar{\xi}_q - \bar{\xi}_p \bar{\xi}_q) = s \sum_{p=0}^{s-1} (\bar{\xi}_0 \bar{\xi}_p - \bar{\xi}^2).$$

В последнем равенстве учтено, что в стационарном пределе статистическая корреляция между $\xi^{(s)}$ и $\xi^{(s')}$ зависит только от разности $|s - s'|$. Ввиду наличия рекуррентной связи между $x^{(s)}$, $k^{(s)}$, $\delta^{(s)}$ и $x^{(s+1)}$, $k^{(s+1)}$, $\delta^{(s+1)}$ эта корреляция, строго говоря, отлична от нуля. Она, однако, очень быстро убывает с увеличением $|s - s'|$, а численный расчет показывает, что уже при $|s - s'| = 1$ $\bar{\xi}_{s+1} \bar{\xi}_s - \bar{\xi}^2 = -0,4$. Оставив в сумме по p два первых члена, получим

$$[(\tau_s - \bar{\tau}_s)^2]^{1/2} = 1,4\sqrt{s}. \quad (6,10)$$

При $s \rightarrow \infty$ относительная флуктуация (т. е. отношение среднеквадратичной флуктуации (6,10) к среднему значению (6,9)) стремится, следовательно, к нулю как $s^{-1/2}$. Другими словами, статистическая связь (6,9) приобретает при больших s почти достоверный характер. Разумеется, эта достоверность является следствием того, что согласно (6,8) τ_s может быть представлено суммой большого числа квазинезависимых слагаемых (т. е. имеет такое же происхождение, что и достоверность значений аддитивных термодинамических величин макроскопического тела). Отсюда же следует, что вероятности различных значений τ_s (при заданном s) распределены по Гауссу:

$$\rho(\tau_s) \propto \exp\{-(\tau_s - 2,1s)^2/4s\}. \quad (6,11)$$

Достоверный характер связи (6,9) позволяет также и обратить ее, т. е. представить как зависимость среднего числа эр \bar{s}_τ , сменяющихся в заданном интервале дважды логарифмического времени τ :

$$\bar{s}_\tau = 0,47\tau. \quad (6,12)$$

Соответствующее статистическое распределение дается тем же распределением Гаусса, в котором случайной величиной является теперь s_τ при заданном τ :

$$\rho(s_\tau) \propto \exp\{-(s_\tau - 0,47\tau)^2/0,43\tau\}. \quad (6,13)$$

Обращаясь к плотности материи, перепишем (6,6) с учетом (6,7) в виде

$$\ln \ln \frac{\varepsilon^{(s+1)}}{\varepsilon^{(s)}} = \eta_s + \sum_{p=0}^{s-1} \xi_p, \quad \eta_s = \ln [2\delta^{(s)}(k^{(s)} + x^{(s)} - 1)\Omega^{(0)}]$$

и затем, для полного изменения энергии в течение s эр,

$$\ln \ln \frac{\varepsilon^{(s)}}{\varepsilon^{(0)}} = \ln \sum_{p=0}^{s-1} \exp \left\{ \sum_{q=0}^p \xi_q + \eta_p \right\}. \quad (6,14)$$

Основной вклад в это выражение дает последний член суммы по p , содержащий экспоненту с наибольшим показателем. Оставив лишь этот член и усреднив равенство (6,14), получим в его правой стороне выражение $s\bar{\xi}$, совпадающее с (6,9); все остальные члены в сумме (а также и члены η_p в показателях) приводят лишь к поправкам относительного порядка $1/s$.

Таким образом, имеем

$$\ln \ln (\varepsilon^{(s)}/\varepsilon^{(0)}) = \ln (\Omega^{(s)}/\Omega^{(0)}). \quad (6,15)$$

В силу установленного выше почти достоверного характера связи между τ_s и s соотношение (6,15) можно писать в виде

$$\overline{\ln \ln (\varepsilon_\tau / \varepsilon^{(0)})} = \tau \quad \text{или} \quad \overline{\ln \ln (\varepsilon^{(s)} / \varepsilon^{(0)})} = 2,1s,$$

в которых оно определяет значение двойного логарифма возрастания плотности, усредненное по заданному дважды логарифмическому интервалу времени τ или по заданному числу эр s .

Снова подчеркнем, что устойчивые статистические соотношения существуют именно для дважды логарифмических интервалов времени и приращений плотности. Для величины же, например, $\ln (\varepsilon^{(s)} / \varepsilon^{(0)})$ относительная флуктуация экспоненциально возрастает с увеличением области усреднения, тем самым лишая устойчивого смысла понятие средних значений.

Остается показать, что в асимптотическом предельном режиме действительно не возникают упомянутые в п. 5 опасные случаи, нарушающие регулярный ход эволюции, выражаемый рекуррентными соотношениями (6,4) — (6,6).

Опасными являются случаи появления в конце эры слишком малых значений параметра $u = x$ (а с ними и $|p_1| \approx x$). Примем в качестве критерия отбора таких случаев неравенства

$$x^{(s)} \exp |\alpha^{(s)}| \leq 1, \quad (6,16)$$

где $|\alpha^{(s)}|$ — начальная глубина минимумов осциллирующих в s -й эре функций (скорее следовало бы взять конечную амплитуду, но это лишь усилило бы критерий отбора).

Значение $x^{(0)}$ в начальной эре задается начальными условиями. Опасными являются значения в интервале $\delta x^{(0)} \sim \exp (-|\alpha^{(0)}|)$, а также в тех интервалах, которые приведут к опасному случаю в дальнейших эрах. Для того чтобы $x^{(s)}$ попало в опасный интервал $\delta x^{(s)} \sim \exp (-|\alpha^{(s)}|)$, начальное значение $x^{(0)}$ должно лежать, согласно (A,7), в интервале ширины $\delta x^{(0)} \sim \delta x^{(s)} / k^{(1)2} \dots k^{(s)2}$. Всего, следовательно, из начального единичного интервала всех возможных значений $x^{(0)}$ приведут к появлению опасного случая значения в доле λ этого интервала, равной

$$\lambda = \exp (-|\alpha^{(0)}|) + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_k \frac{\exp (-|\alpha^{(s)}|)}{k^{(1)2} k^{(2)2} \dots k^{(s)2}} \quad (6,17)$$

(внутренняя сумма берется по всем значениям $k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(s)}$ от 1 до ∞). Легко видеть, что этот ряд сходится к значению $\lambda \ll 1$, порядок величины которого определяется уже первым членом в (6,17).

Достаточно показать это путем сильной мажорации ряда, для чего положим $|\alpha^{(s)}| = (s+1)|\alpha^{(0)}|$, независимо от длин эр $k^{(1)}, k^{(2)}, \dots$ (В действительности $|\alpha^{(s)}|$ растут значительно быстрее; даже в наиболее невыгодном случае $k^{(1)} = k^{(2)} = \dots = 1$ значения $|\alpha^{(s)}|$ возрастают скорее как $q^s |\alpha^{(0)}|$ с $q > 1$.) Заметив, что

$$\sum_k 1/k^{(1)2} k^{(2)2} \dots k^{(s)2} = (\pi^2/6)^s,$$

получим тогда

$$\lambda = \exp (-|\alpha^{(0)}|) \sum_{s=0}^{\infty} [(\pi^2/6) \exp (-|\alpha^{(0)}|)]^s \approx \exp (-|\alpha^{(0)}|),$$

что и требовалось.

Если начальное значение $x^{(0)}$ лежит вне опасного участка λ , то опасные случаи вообще не возникнут. Если же оно лежит в этом участке, то опасный случай возникает, но после выхода из него модель начинает «регулярную» эволюцию с новым начальным значением, которое лишь случайно (с вероятностью λ) может снова оказаться в опасном интервале. Повторения таких случаев могут привести к опасной ситуации лишь с вероятностями $\lambda^2, \lambda^3, \dots$, асимптотически стремящимися к нулю. Этими рассуждениями и доказывается сделанное выше утверждение.

7. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДЛИННОЙ ЭРЫ С МАЛЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

В разделах 3—6 исследование эволюции метрики вблизи особой точки произведено на примере пространственно-однородных моделей. Из характера этой эволюции ясно, что аналитическое построение общего решения с особенностью такого типа должно производиться по отдельности для каждого из основных элементов эволюции: для казнеровских эпох, для процесса смены эпох под влиянием «возмущения», для длинной эры с одновременно действующими возмущениями двух типов. Ответ на первый вопрос очевиден: в течение казнеровской эпохи (т. е. пока возмущения малы) метрика дается выражением (2,7) без дополнительного условия (2,17). В этом параграфе дается ответ на третий из поставленных вопросов: построение решения для длинной эры с малыми колебаниями осциллирующих функций, рассмотренными в разделе 4 для частного случая однородных моделей. Мы увидим, что временная зависимость такого решения оказывается в далеко идущей аналогии с той, которая имеет место в частных случаях однородных моделей, причем последние получаются из общего решения при специальном выборе входящих в него произвольных функций *).

Построение общего решения удобно, однако, проводить в системе отсчета, несколько отличающейся от синхронной. Именно, полагаем по-прежнему $g_{0\alpha} = 0$, но вместо условия $g_{00} = 1$ выбираем $g_{00} = -g_{33}$. Введя снова пространственный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$, имеем, таким образом,

$$g_{00} = \gamma_{33}, \quad g_{0\alpha} = 0. \quad (7,1)$$

Выделенную пространственную координату обозначим как $x^3 = z$, а временную переменную будем обозначать через $x^0 = \xi$ (в отличие от собственного времени t); мы увидим, что ξ как раз соответствует переменной, введенной в разделе 4 для однородных моделей. Дифференцирование по ξ и z будем обозначать соответственно точкой и штрихом. Латинские индексы a, b, c в этом параграфе принимают значения 1, 2, соответствующие пространственным координатам x^1, x^2 , которые будем обозначать также через x, y . Таким образом, метрика имеет вид

$$ds^2 = \gamma_{33}(d\xi^2 - dz^2) - \gamma_{ab} dx^a dx^b - 2\gamma_{a3} dx^a dz. \quad (7,2)$$

Как мы увидим, решение, отвечающее поставленной задаче, получается в предположении неравенств

$$\gamma_{33} \ll \gamma_{ab}, \quad (7,3)$$

$$\gamma_{a3}^2 \ll \gamma_{aa}\gamma_{33} \quad (7,4)$$

(эти условия обобщают условие малости одной из функций a^2, b^2, c^2 по сравнению с другими двумя, которое имело место в однородных моделях).

*) Содержание этого раздела основано на работах ^{15, 16}.

Неравенство (7,4) означает, что компоненты γ_{a3} малы в том смысле, что при любом соотношении между величинами смещений dx^a и dz в квадрате пространственного элемента длины dl^2 можно опустить члены с произведениями $dx^a dz$. Таким образом, первым приближением к решению будет метрика (7,2) с $\gamma_{a3} = 0$ *):

$$ds^2 = \gamma_{33} (d\xi^2 - dz^2) - \gamma_{ab} dx^a dx^b. \quad (7,5)$$

Вычислив по метрике (7,5) компоненты тензора Риччи $R_0^0, R_3^0, R_3^3, R_a^b$, легко убедиться в том, что в силу условия (7,3) все члены в них, содержащие дифференцирования по координатам x^a , малы по сравнению с членами, содержащими производные по ξ и z (отношение первых к последним как раз $\sim \gamma_{33}/\gamma_{ab}$). Другими словами, для получения уравнений главного приближения следует дифференцировать γ_{33} и γ_{ab} в (7,5) так, как если бы они не зависели от x^a . Обозначив

$$\gamma_{33} = e^\psi, \quad \dot{\gamma}_{ab} = \kappa_{ab}, \quad \gamma'_{ab} = \lambda_{ab}, \quad |\gamma_{ab}| = G^2, \quad (7,6)$$

получим следующие уравнения **):

$$2e^\psi R_a^b = G^{-1} (G\lambda_a^b)' - G^{-1} (G\kappa_a^b)' = 0, \quad (7,7)$$

$$2e^\psi R_3^0 = \frac{1}{2} \kappa\psi' + \frac{1}{2} \lambda\dot{\psi} - \kappa' - \frac{1}{2} \kappa_a^a \lambda_b^a = 0, \quad (7,8)$$

$$2e^\psi (R_0^0 - R_3^3) = \lambda\psi' + \kappa\dot{\psi} - \kappa - \lambda' - \frac{1}{2} \kappa_b^a \lambda_b^a - \frac{1}{2} \lambda_a^b \lambda_b^a = 0. \quad (7,9)$$

Поднятие и опускание] двумерных индексов производится здесь при помощи γ_{ab} . Величины κ и λ — свертки κ_a^a и λ_a^a , причем

$$\kappa = 2\dot{G}/G, \quad \lambda = 2G'/G. \quad (7,10)$$

Что касается компонент тензора Риччи R_a^0, R_a^3 , то при таком же вычислении они тождественно обратятся в нуль. В следующем же приближении (т. е. с учетом малых γ_{a3} и производных по x, y) они определяют величины γ_{a3} по известным уже γ_{33} и γ_{ab} .

Свертка уравнений (7,7) дает $G'' - \ddot{G} = 0$, откуда

$$G = f_1(x, y, \xi + z) + f_2(x, y, \xi - z). \quad (7,11)$$

Здесь могут представиться различные случаи в зависимости от значения величины $N = g^{ik} G_{,i} G_{,k}$, т. е. в зависимости от характера переменной G . В рассматриваемом приближении $g^{00} = \gamma^{33} \gg \gamma^{ab}$, и поэтому $N \approx g^{00} (\dot{G})^2 - \gamma^{33} (G')^2 = 4\gamma^{33} \dot{f}_1 \dot{f}_2$. К интересующим нас особенностям по времени приводит случай $N > 0$ (величина G времениподобна). Положив в (7,11) $f_1 = \frac{1}{2} (\xi + z) \sin y$, $f_2 = \frac{1}{2} (\xi - z) \sin y$, представим G в виде

$$G = \xi \sin y. \quad (7,12)$$

*) Обратим внимание на то, что эта метрика допускает еще произвольные преобразования вида $\xi' + z' = f_1(\xi + z)$, $\xi' - z' = f_2(\xi - z)$, $x'^a = f^a(x^1, x^2)$.

**) Уравнение же $R_0^0 + R_3^3 = 0$ оказывается прямым следствием системы (7,7) — (7,9), если $\dot{G} \neq 0$ или $\dot{\kappa} \neq 0$. Случай же $\dot{G} = G' = 0$ не требует особого рассмотрения: можно показать, что пространственно-временная метрика в этом случае сводится (в первом приближении) к галилеевой.

Такой выбор не уменьшает общности рассмотрения; можно показать, что он возможен (в рассматриваемом главном приближении!) просто за счет оставшихся еще допустимыми преобразований переменных *). Множитель $\sin y$ введен в (7,12) для удобства дальнейшего сравнения с однородными моделями. С учетом (7,12), уравнения (7,7) — (7,9) принимают вид

$$\dot{\kappa}_a^b + \xi^{-1} \kappa_a^b - \lambda_a^{b'} = 0, \quad (7,13)$$

$$\dot{\psi} = -\xi^{-1} + \frac{1}{4} \xi (\kappa_a^b \kappa_b^a + \lambda_a^b \lambda_b^a), \quad (7,14)$$

$$\psi' = \frac{1}{2} \xi \kappa_a^b \lambda_b^a. \quad (7,15)$$

Основными здесь являются уравнения (7,13), определяющие компоненты γ_{ab} ; функция же ψ находится затем простым интегрированием уравнений (7,14) — (7,15).

Переменная ξ пробегает значения от 0 до ∞ . Рассмотрим решение уравнений (7,13) в двух предельных областях, $\xi \gg 1$ и $\xi \ll 1$.

В области больших значений ξ можно (как это подтверждается результатом) искать решение в виде разложения по $1/\sqrt{\xi}$:

$$\gamma_{ab} = \xi [a_{ab}(x, y, z) + O(1/\sqrt{\xi})], \quad (7,16)$$

причем

$$|a_{ab}| = \sin^2 y \quad (7,17)$$

(равенство (7,17) требуется для выполнения условия (7,12)). Подставив (7,16) в уравнение (7,13), получим в главном порядке

$$(a^{ac'} a_{bc})' = 0, \quad (7,18)$$

где величины a^{ac} образуют матрицу, обратную матрице a_{ac} . Решение уравнений (7,18) запишем в виде

$$a_{ab} = l_a l_b e^{-2\rho z} + m_a m_b e^{2\rho z}, \quad (7,19)$$

$$l_1 m_2 - l_2 m_1 = \sin y, \quad (7,20)$$

где l_a , m_a , ρ — произвольные функции координат x , y , связанные условием (7,20), возникающим из (7,17).

Для нахождения дальнейших членов разложения удобно представить матрицу искомых величин γ_{ab} в форме

$$\gamma_{ab} = \xi (\tilde{L} e^H L)_{ab}, \quad (7,21)$$

где

$$L = \begin{pmatrix} l_1 e^{-\rho z} & l_2 e^{-\rho z} \\ m_1 e^{\rho z} & m_2 e^{\rho z} \end{pmatrix}, \quad (7,22)$$

а знак \sim означает транспонирование. Матрица H симметрична, и ее след равен нулю. Представление (7,21) обеспечивает симметрию γ_{ab} и выполнение условия (7,12). Если заменить $\exp H$ единицей, то из (7,21) получится $\gamma_{ab} = \xi a_{ab}$ с a_{ab} из (7,19). Другими словами, главному члену разложения γ_{ab} отвечает $H = 0$; дальнейшие члены получаются разложением по степеням матрицы H , компоненты которой рассматриваются как малые величины.

*) При $N < 0$ (величина G пространственноподобна) можно положить $G = z$, что приводит к обобщению известной метрики Эйнштейна — Розена¹⁷. При $N = 0$ приходим к волновой метрике Робинсона — Бонди, зависящей только от $\xi + z$ или только от $\xi - z$ (см. ², § 103).

Обозначим независимые компоненты матрицы H через σ и φ , написав

$$H = \begin{pmatrix} \sigma & \varphi \\ \varphi & -\sigma \end{pmatrix}. \quad (7,23)$$

Подставив (7,21) в (7,13) и сохранив лишь линейные по H члены, получим для σ и φ уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} + \xi^{-1} \dot{\sigma} - \sigma'' &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \xi^{-1} \dot{\varphi} - \varphi'' + 4\rho^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (7,24)$$

Если искать решение этих уравнений в виде рядов Фурье по координате z , то для коэффициентов ряда, как функций от ξ , получаются уравнения Бесселя. Главные асимптотические члены решения при больших ξ имеют вид *)

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{V\xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{1n} e^{in\omega\xi} + B_{1n} e^{-in\omega\xi}) e^{in\omega z}, \\ \varphi &= \frac{1}{V\xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{2n} e^{i\omega n\xi} + B_{2n} e^{-i\omega n\xi}) e^{in\omega z}, \\ \omega_n^2 &= n^2 \omega^2 + 4\rho^2. \end{aligned} \quad (7,25)$$

Коэффициенты A , B являются произвольными комплексными функциями координат x , y и удовлетворяют необходимым условиям вещественности σ и φ ; основная частота ω — произвольная вещественная функция x , y . Из уравнений (7,14) — (7,15) легко получить теперь первый член разложения функции ψ :

$$\psi = \rho^2 \xi^2 \quad (7,26)$$

(этот член исчезает, если $\rho \equiv 0$; в этом случае главным оказывается линейный по ξ член разложения: $\psi = \xi q(x, y)$, где q — положительная функция; см. ¹⁵⁾).

Таким образом, в области больших ξ компоненты метрического тензора γ_{ab} при уменьшении ξ осциллируют на фоне медленного убывания, обязанного множителю ξ в (7,21). Компонента же $\gamma_{zz} = e^\psi$ быстро уменьшается по закону, близкому к $\exp(\rho^2 \xi^2)$; тем самым обеспечивается возможность выполнения условия (7,3) **).

Рассмотрим теперь область $\xi \ll 1$. Главное приближение к решению уравнений (7,13) находится из предположения (подтверждаемого результатом), что в этих уравнениях можно опустить члены с производными по координатам:

$$\dot{\kappa}_a^b + \xi^{-1} \kappa_a^b = 0. \quad (7,27)$$

Это уравнение вместе с условием (7,12) дает

$$\gamma_{ab} = \lambda_a \lambda_b \xi^{2s_1} + \mu_a \mu_b \xi^{2s_2}, \quad (7,28)$$

*) Возможно, что решение можно было бы искать и в виде интегралов Фурье; этот вопрос не исследован до конца. Поэтому мы не утверждаем, что разложимость в ряды Фурье является обязательным требованием, налагаемым на координатную зависимость функций σ и φ .

**) Квадратичные по H члены в уравнениях (7,13) приводят лишь к малым ($\sim 1/\xi$) поправкам в σ и φ . Учет же кубических членов приводит к появлению слабой зависимости амплитуд A , B от ξ , которую можно представить как появление логарифмических фаз в осциллирующих множителях в (7, 25). Соответствующие вычисления для случая $\rho \equiv 0$ приведены в ¹⁵ (ср. также аналогичную ситуацию для однородных моделей; Приложение Б).

где $\lambda_a, \mu_a, s_1, s_2$ — произвольные функции всех трех координат x, y, z , связанные друг с другом условиями

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = \sin y, \quad s_1 + s_2 = 1. \quad (7,29)$$

Уравнения же (7,14) — (7,15) дают теперь

$$\gamma_{33} = e^\psi \sim \xi^{-(1-s_1^2-s_2^2)}. \quad (7,30)$$

Производные $\lambda_a^{b'}$, вычисленные по (7,28), содержат члены $\sim \xi^{4s_1-2}$ и $\sim \xi^{4s_2-2}$, между тем как оставленные в (7,27) члены $\sim \xi^{-2}$. Поэтому допустимость перехода от (7,13) к (7,27) требует, чтобы было $s_1 > 0, s_2 > 0$; при этом $1 - s_1^2 - s_2^2 > 0$.

Таким образом, в области малых ξ осцилляции функций γ_{ab} прекращаются, а функция γ_{33} начинает возрастать при уменьшении ξ . Это — казнеровский режим, и когда γ_{33} сравнивается с γ_{ab} , условия применимости рассмотренного приближения нарушаются.

Для выяснения самосогласованности проведенного анализа следует еще рассмотреть уравнения $R_a^0 = 0, R_a^3 = 0$ и, вычислив из них компоненты γ_{az} , убедиться в выполнении предположенного неравенства (7,4). Такое исследование (см. ¹⁶) показывает, что в обоих асимптотических областях компоненты γ_{az} оказываются $\sim \gamma_{33}$. Поэтому выполнение неравенства (7,3) автоматически обеспечивает справедливость также и неравенства (7,4).

Полученное решение содержит, как и должно быть для общего случая поля в пустоте, четыре произвольные функции трех пространственных координат x, y, z . В области $\xi \ll 1$ этими функциями являются, например, $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, s_1$. В области же $\xi \gg 1$ четыре функции задаются фигурирующими в (7,25) четырьмя рядами Фурье по координате z с коэффициентами, являющимися функциями x, y ; хотя разложение в ряд (или интеграл?) Фурье и выделяет некоторый специальный класс функций, но этот класс достаточно широк, чтобы обнимать собой конечную долю всего многообразия мыслимых начальных условий.

Решение содержит также некоторое число еще и других произвольных функций двух координат x, y . Такие «двумерные» произвольные функции появляются, вообще говоря, в результате того, что возникающие при решении уравнений Эйнштейна связи между трехмерными функциями являются дифференциальными (а не алгебраическими); мы оставляем в стороне более глубокий вопрос о геометрическом смысле таких функций. Мы не станем заниматься так же и подсчетом числа независимых двумерных функций, тем более, что в данном случае этому вопросу трудно придать однозначный смысл, поскольку и трехмерные функции задаются через совокупности двумерных *). (Более подробно о числе двумерных функций в рассматриваемом решении см. ¹⁶).

Покажем, наконец, что в полученном общем решении содержатся рассмотренные в разделе 4 частные решения для однородных моделей.

Взяв реперные векторы для пространства типа IX из (Г,2) и подставив в (2,7), запишем пространственно-временную метрику этой модели в виде

$$ds_{IX}^2 = dt^2 - [(a^2 \sin^2 z + b^2 \cos^2 z) \sin^2 y + c^2 \cos^2 y] dx^2 - \\ - [a^2 \cos^2 z + b^2 \sin^2 z] dy^2 - c^2 dz^2 + \\ + (b^2 - a^2) \sin 2z \sin y dx dy - 2c^2 \cos y dx dz. \quad (7,31)$$

*) В регулярном разложении общего решения уравнений Эйнштейна содержится (помимо четырех трехмерных функций) три независимые функции двух координат (см. ¹⁸, § 40, а также Приложение А' в работе ¹).

В случае, когда $c^2 \ll a^2, b^2$, можно пренебречь c^2 везде, кроме члена $c^2 dz^2$. Для перехода от синхронной системы отсчета, в которой написано (7,31), к системе, подчиненной условиям (7,1), совершим преобразование $dt = c d\xi/2$ и заменим $z \rightarrow z/2$. Предполагая также, что $\chi \equiv \ln(a/b) \ll 1$, получим из (7,31) в главном приближении:

$$ds_{IX}^2 = \frac{1}{4} c^2 (d\xi^2 - dz^2) - ab \{ \sin^2 y (1 - \chi \cos z) dx^2 + (1 + \chi \cos z) dy^2 + 2\chi \sin z \sin y dx dy \}. \quad (7,32)$$

Аналогичным образом, для модели типа VIII с реперными векторами из (Г,14) получим

$$ds_{VIII}^2 = \frac{1}{4} c^2 (d\xi^2 - dz^2) - ab \{ \sin^2 y (\chi z - \chi) dx^2 + (\chi z + \chi) dy^2 - 2\sin z \sin y dx dy \}. \quad (7,33)$$

Согласно п. 4 имеем при этом в обоих случаях $ab = \xi$ (полагаем для упрощения $a_0^2 = \xi_0$) и формулу (4,8) для χ ; функция же $c(\xi)$ дается формулами (4,10) или (4,18) соответственно для моделей типов IX и VIII.

Такую же метрику типа VIII мы получим из (7,22), (7,25), (7,26), выбрав двумерные векторы l_a и m_a в форме

$$l_1 = -m_1 = (1/\sqrt{2}) \sin y, \quad l_2 = m_2 = 1/\sqrt{2} \quad (7,34)$$

и положив

$$\rho = 1/2, \quad A_{20}^* = B_{20} = iAe^{i\xi_0}, \quad A_{1n} = A_{2n} = B_{1n} = B_{2n} = 0 \quad (n \neq 0).$$

Для получения же метрики типа IX надо положить

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 0, \quad \omega = 1, \\ A_{11} &= -B_{11}^* = A_{1,-1}^* = -B_{1,-1} = -\frac{1}{2} Ae^{-i\xi_0}, \\ A_{21} &= B_{21}^* = A_{2,-1}^* = B_{2,-1} = -\frac{1}{2} iAe^{-i\xi_0}, \\ A_{1n} &= A_{2n} = B_{1n} = B_{2n} = 0 \quad (n \neq \pm 1) \end{aligned} \right\} \quad (7,36)$$

(для вычисления $c(\xi)$ приближение (7,26) в этом случае недостаточно и должен быть вычислен линейный по ξ член в ψ : это сделано в ¹⁵).

В изложенном исследовании пространство предполагалось пустым. Включение материи не нарушает степени общности решения и не меняет его качественных свойств (см. ^{15, 16}).

8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Итак, в предыдущих параграфах описан новый тип особенностей в космологических решениях уравнений Эйнштейна; эти особенности имеют сложный колебательный характер. Хотя изучение этих особенностей проведено главным образом на примере специальных однородных моделей, но существуют убедительные основания полагать, что таков же характер особенности и в общем решении уравнений гравитации; именно это обстоятельство придает ему особое значение для космологии.

Основание для такого утверждения дает, прежде всего, уже тот подход к вопросу, который был указан в начале п. 3: колебательный режим приближения к особой точке возникает в результате действия именно того единственного типа возмущений, по отношению к которому неустойчиво обобщенное решение Казнера. Подтверждением общности решения является также и осуществленное в разделе 7 аналитическое построение

для длинной эры с малыми колебаниями. Хотя этот случай и не является (в свете результатов разделов 5,6) обязательным элементом эволюции метрики в асимптотической близости к особой точке, но он несет в себе все основные качественные черты: осцилляция метрики в двух пространственных измерениях при монотонном изменении в третьем измерении, с обязательным нарушением такого режима в конце определенного интервала времени. Остаются, однако, пока еще не выясненными детали однократной смены казнеровских эпох в общем случае пространственно-неоднородной метрики.

Особого исследования требует вопрос о том, накладывает ли существование особой точки какие-либо ограничения на свойства пространственной геометрии. Пока можно лишь утверждать, что нет прямой связи с конечностью или бесконечностью пространства; об этом свидетельствует существование как закрытой, так и открытой однородной модели с осцилляционной особой точкой.

Колебательный режим приближения к особой точке придает новый аспект самому понятию конечности времени. Между любым конечным моментом мирового времени t и моментом $t = 0$ заключено бесконечное множество колебаний. В этом смысле процесс приобретает бесконечный характер. Более естественной переменной для его описания вместо самого времени t оказывается его логарифм $\ln t$, по которому процесс растянут до $-\infty$.

Мы везде говорили о направлении приближения к особой точке, как о направлении уменьшения времени. Но ввиду симметрии уравнений гравитации по отношению к изменению знака времени, с тем же правом могла бы идти речь о приближении к особенности в направлении увеличения времени. В действительности, однако, ввиду физической неэквивалентности будущего и прошедшего, между этими двумя случаями имеется существенное отличие в отношении самой постановки вопроса. Особенности в будущем может иметь физический смысл лишь, если она допустима при произвольных начальных условиях, задаваемых в какой-либо предшествующий момент времени. Ясно, что нет никаких оснований для того, чтобы распределение материи и поля, достигаемое в какой-либо момент в процессе эволюции Вселенной, соответствовало бы специфическим условиям, требуемым для осуществления того или иного частного решения уравнений гравитации.

На вопрос же о типе особенности в прошлом исследование, основанное на одних лишь уравнениях гравитации, вряд ли вообще может дать однозначный ответ. Естественно думать, что отбор решения, отвечающего реальному миру, связан с какими-то глубокими физическими требованиями, установление которых на основании одной лишь существующей теории гравитации невозможно и которые смогут быть выяснены только в результате дальнейшего синтеза физических теорий. В этом смысле в принципе могло бы оказаться, что этому отбору соответствует какой-либо частный (например, изотропный) тип особенности. Тем не менее *априори* более естественным представляется думать, что в силу общего характера колебательного режима именно им должны описываться начальные стадии эволюции мира.

В этой связи может представлять существенный интерес указанное Мизнером¹⁹ свойство модели, относящееся к распространению световых сигналов. Напомним предварительно ситуацию, имеющую место в этом отношении в модели Фридмана.

В изотропной модели существует «световой горизонт» для распространения сигналов. Это значит, что для каждого заданного момента времени существует некоторое наибольшее расстояние, за которым невозможен

обмен световыми сигналами, а потому и причинная связь событий: сигнал не может успеть распространиться на такие расстояния за время, протекающее от особой точки $t = 0$. Действительно, распространение сигнала определяется уравнением $ds = 0$. В изотропной модели вблизи особой точки $t = 0$ элемент интервала имеет вид $ds^2 = dt^2 - 2t d\bar{l}^2$, где $d\bar{l}^2$ обозначает пространственную дифференциальную форму, не содержащую времени (см. ², §§ 107—109). Заменой $t = \eta^2/2$ он приводится к виду

$$ds^2 = \eta^2 (d\eta^2 - d\bar{l}^2). \quad (8,1)$$

Отсюда получается для «расстояния» $\Delta\bar{l}$, пройденного сигналом, выражение

$$\Delta\bar{l} = \Delta\eta. \quad (8,2)$$

Поскольку переменная η вместе со временем t пробегает лишь значения, начиная от нуля, к «моменту» η сигналы могут распространиться лишь на расстояния $\Delta\bar{l} \leq \eta$, чем и устанавливается дальность горизонта.

Существование светового горизонта в изотропной модели создает определенные трудности в вопросе о происхождении наблюдаемой в настоящее время изотропии реликтового черного радиоизлучения. Действительно, с точки зрения этой модели наблюдаемая изотропия означала бы одинаковость свойств излучения, приходящего к наблюдателю и из таких областей пространства, история которых не могла бы находиться в причинной связи друг с другом. Ситуация же в модели с колебательным режимом эволюции вблизи особой точки может оказаться иной. Покажем это на примере однородной модели типа IX.

Именно, рассмотрим распространение сигнала в том направлении, в котором в течение длинной эры масштабы меняются по закону, близкому к $\sim t$. Квадрат элемента длины в этом направлении имеет вид $dl^2 = t^2 d\bar{l}^2$, а соответствующий элемент четырехмерного интервала: $ds^2 = dt^2 - t^2 d\bar{l}^2$. Подстановкой $t = e^\eta$ он приводится к виду

$$ds^2 = e^{2\eta} (d\eta^2 - d\bar{l}^2), \quad (8,3)$$

откуда для распространения сигнала снова получается уравнение вида (8,2). Но существенное отличие состоит в том, что переменная η пробегает теперь значения от $-\infty$ (если бы метрика (8,3) имела место при всех t , начиная от $t = 0$). Поэтому для каждого заданного «момента» η найдутся предшествующие промежутки $\Delta\eta$, достаточные для покрытия сигналом любого конечного расстояния.

Таким образом, в течение длинной эры открывается световой горизонт в определенном направлении в пространстве. Хотя продолжительность каждой из длинных эр все же конечна, но в течение хода эволюции мира они сменяются бесконечное число раз в различных направлениях в пространстве. Это обстоятельство позволяет ожидать, что в рассматриваемой модели оказывается возможной причинная связь событий во всем объеме пространства *). Исчерпывающее исследование этого вопроса в настоящее время еще отсутствует; отсутствует также и исследование вопроса для аналогичной открытой модели.

С течением времени, по мере удаления от особой точки, влияние материи на эволюцию метрики, не существенное на ранних этапах эволюции, постепенно возрастает и в конце концов становится преобладающим. Можно ожидать, что это влияние будет приводить к постепенной «изотропизации» пространства, в результате чего его свойства

*) Это свойство дало основание Мизнеру назвать модель «mixmaster universe» — от слова mixmaster, означающего машинку для перемешивания теста.

приближаются к модели Фридмана, удовлетворительно описывающей современное состояние Вселенной. Разумеется, этот вопрос требует еще специального исследования. Остается также пока открытым вопрос о связывании параметров теории со шкалой времени реального мира.

Наконец, последнее замечание — о том, насколько вообще законно рассмотрение вопроса об «особом состоянии» мира со сколь угодно большими плотностями материи на основе существующей теории гравитации. Разумеется, физическая применимость уравнений Эйнштейна в их настоящем виде в указанных условиях сможет быть выяснена лишь в процессе будущего синтеза физических теорий, и в этом смысле вопрос не может быть сейчас разрешен. Но существенно, что сама по себе теория гравитации не теряет логической связности (т. е. не приводит к внутренним противоречиям) ни при каких плотностях материи. Другими словами, эта теория не ограничена, как таковая, никакими следующими из нее самой условиями, которые могли бы сделать логически незаконным и противоречивым ее применение при очень больших плотностях; ограничения могли бы в принципе возникнуть лишь как результат факторов, «посторонних» по отношению к самой теории гравитации. Это обстоятельство делает во всяком случае формально законным и необходимым рассмотрение вопроса об особенностях в космологических моделях уже в рамках существующей теории.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Некоторые сведения из теории непрерывных дробей

Рассмотрим бесконечную последовательность положительных чисел u , состоящую из серий, каждая (s -я) из которых начинается с некоторого (иррационального) числа $u_{\max}^{(s)} = k^{(s)} + x^{(s)}$ и через значения $k^{(s)} + x^{(s)} - 1$, $k^{(s)} + x^{(s)} - 2$, ... доходит до $x^{(s)} < 1$; переход к следующей серии происходит по правилу

$$u_{\max}^{(s+1)} \equiv k^{(s+1)} + x^{(s+1)} = 1/x^{(s)}. \quad (\text{A}, 1)$$

Целые числа $k^{(s)}$ определяют длины серий.

Если вся последовательность начинается с числа $k^{(0)} + x^{(0)}$, то длинами $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, ... являются числа, входящие в разложение $x^{(0)}$ в бесконечную непрерывную дробь:

$$x^{(0)} = \frac{1}{k^{(1)} + \frac{1}{k^{(2)} + \frac{1}{k^{(3)} + \dots}}}. \quad (\text{A}, 2)$$

Поэтому для изучения свойств интересующей нас последовательности можно воспользоваться рядом известных результатов теории непрерывных дробей (см., например, ²⁰).

Как было отмечено в разделе 3, нас могут интересовать лишь те свойства последовательности, которые присущи общему случаю произвольного иррационального числа $x^{(0)} < 1$. Именно по этой причине нет необходимости рассматривать случай рациональных чисел $x^{(0)}$ (для которых разложение в непрерывную дробь конечно). Не представляют также интереса специфические свойства, присущие периодическим непрерывным дробям (в такие дроби разлагаются квадратичные иррациональности, т. е. числа, являющиеся корнями квадратных уравнений с целыми коэффициентами *). Заметим, что в обоих этих случаях все элементы разложения (числа $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, ...) очевидным образом ограничены по величине. Это свойство тоже является исключительным: множество всех вообще чисел $x^{(0)} < 1$, разложение которых обладает этим свойством, имеет меру нуль по сравнению с множеством всех чисел отрезка $(0, 1)$.

*) Простейший пример разложения в периодическую непрерывную дробь дает число

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}.$$

Для перехода к вероятностному описанию будем вместо определенного значения $x^{(0)}$ рассматривать значения $x^{(0)} = x$, распределенные в интервале от 0 до 1 по некоторому заданному вероятностному закону $w_0(x)$. Тогда будут распределены по некоторым законам также и значения $x^{(s)}$, оканчивающие каждую серию. Пусть $w_s(x) dx$ — вероятность того, что s -я серия закончится значением $x^{(s)} = x$, лежащим в заданном интервале dx .

Для того чтобы s -я серия имела длину k , предыдущая серия должна закончиться числом в интервале между $1/(k+1)$ и $1/k$. Поэтому вероятность серии иметь длину k

$$W_s(k) = \int_{1/(k+1)}^{1/k} w_{s-1}(x) dx. \quad (\text{A},3)$$

Значение $x^{(s+1)} = x$, заканчивающее $(s+1)$ -ю серию, может возникнуть из начальных (для этой серии) значений $u_{\max}^{(s+1)} = x + k$, где $k=1, 2, \dots$; им отвечают значения $x^{(s)} = 1/(k+x)$ для предыдущей серии. Заметив это, мы можем написать следующее рекуррентное соотношение, выражающее распределение вероятностей $w_{s+1}(x)$ через распределение $w_s(x)$:

$$w_{s+1}(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} w_s\left(\frac{1}{k+x}\right) \left| d \frac{1}{k+x} \right|,$$

или

$$w_{s+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} w_s\left(\frac{1}{k+x}\right). \quad (\text{A},4)$$

Если при увеличении s распределения $w_s(x)$ стремятся к стационарному (не зависящему от s) предельному распределению $w(x)$, то последнее должно удовлетворять уравнению

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} w\left(\frac{1}{k+x}\right). \quad (\text{A},5)$$

Это уравнение действительно имеет решение *)

$$w(x) = [(1+x) \ln 2]^{-1} \quad (\text{A},6)$$

(нормировано на единицу). В этом легко убедиться, заметив, что с этой функцией сумма в правой стороне уравнения (A,5) становится равной

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x+k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x+k+1} = \frac{1}{x+1}.$$

Соответствующее стационарное распределение вероятностей длин серий получается подстановкой (A,6) в (A,3); оно выписано в тексте (формула (6,2)).

Представление о скорости, с которой происходит установление стационарного распределения (A,6), дает следующий пример. Пусть начальные значения $x^{(0)}$ распределены в узком интервале ширины $\delta x^{(0)}$ вокруг некоторого определенного числа. Из рекуррентного соотношения (A,4) (или прямо из разложения (A,2)) легко заключить, что ширины распределений $w_s(x)$ (вокруг определенных других чисел) будут тогда равны

$$\delta x^{(s)} = k^{(1)} 2 k^{(2) 2} \dots k^{(s) 2} \delta x^{(0)} \quad (\text{A},7)$$

(это выражение справедливо лишь постольку, поскольку определяемые им $\delta x^{(s)} \ll 1$).

Б. Уточнение расчетов к разделу 4

При получении в п. 4 решения, описывающего малые колебания в области больших значений переменной ξ , мы ограничились первым членом разложения $\text{sh } 2\xi$ в уравнении (4,11). Такое приближение равносильно оставлению в решении лишь члена наиболее низкого порядка по малой величине $1/\sqrt{\xi}$.

*) Этот результат был известен еще Гауссу.

Приведем здесь более точные вычисления с учетом следующих членов разложения по степеням $1/\sqrt{\xi}$.

После замены

$$\chi = \varphi / \sqrt{\xi} \quad (\text{Б}, 1)$$

уравнение (4,6) принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \varphi = -2/3 \xi^{-1} \varphi^3 - \xi^{-2} (1/4 \varphi + 2/15 \varphi^5). \quad (\text{Б}, 2)$$

Здесь оставлены три первых члена разложения $\text{sh } 2\chi$; опущенные члены $\sim \varphi^7/\xi^3$ (точка над буквой обозначает в этом разделе дифференцирование по ξ).

Первым приближением к решению, которое ищется в виде разложения по степеням $1/\xi$, является решение уравнения без правой части, имеющее вид

$$\varphi_0 = 2A \sin(\xi - \xi_0). \quad (\text{Б}, 3)$$

Следующий член разложения в φ должен быть $\sim 1/\xi$ и должен был бы находиться из (Б,2) с учетом члена $-2\varphi^3/3\xi$ в правой части. Написав $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ и предполагая, что $\varphi_1 \sim 1/\xi$, получим для φ_1 уравнение

$$\ddot{\varphi}_1 + \varphi_1 = -\frac{2}{3\xi} \varphi_0^3 = \frac{4A^3}{3\xi} \sin(3\xi - 3\xi_0) - \frac{4A^3}{\xi} \sin(\xi - \xi_0). \quad (\text{Б}, 4)$$

Однако второй член в правой части этого уравнения обладает резонансной частотой (совпадающей с частотой решения однородного уравнения $\ddot{\varphi}_1 + \varphi_1 = 0$), что приводит к появлению в φ_1 логарифмически расходящихся членов и тем самым нарушает исходное предположение о порядке малости φ_1 . Появление резонанса в действительности означает слабое изменение фазы синуса в функции первого приближения φ_0 . В соответствии с этим запишем его в виде

$$\varphi_0 = 2A \sin(\xi - \xi_0 + \psi) \quad (\text{Б}, 5)$$

вместо (Б,3), где $\psi(\xi)$ предполагается медленно меняющейся функцией в том смысле, что $\dot{\psi} \ll \psi \ll 1$. Выражение $\ddot{\varphi}_0 + \varphi_0$ теперь не обратится строго в нуль, но будет малой величиной $\sim \dot{\psi}$:

$$\ddot{\varphi}_0 + \varphi_0 = -4A\dot{\psi} \sin(\xi - \xi_0 + \psi) \quad (\text{Б}, 6)$$

(опущены члены $\sim \ddot{\psi}$ и $\sim \dot{\psi}^2$). Соответственно для поправки φ_1 получим теперь вместо (Б,4) уравнение

$$\ddot{\varphi}_1 + \varphi_1 = \frac{4A^3}{3\xi} \sin(3\xi - 3\xi_0 + 3\psi) + 4A \left(\dot{\psi} - \frac{A^2}{\xi} \right) \sin(\xi - \xi_0 + \psi), \quad (\text{Б}, 7)$$

и ψ находится как раз из условия выпадения в правой части резонансных членов. Отсюда (с определенным выбором константы интегрирования)

$$\psi = A^2 \ln(\xi/\xi_0). \quad (\text{Б}, 8)$$

После этого поправку φ_1 можно представить в виде

$$\varphi_1 = \frac{1}{\xi} (C_1 \sin \Delta + C_2 \cos \Delta) - \frac{A^3}{6\xi} \sin 3\Delta, \quad (\text{Б}, 9)$$

$$\Delta = \xi - \xi_0 + A^2 \ln(\xi/\xi_0). \quad (\text{Б}, 10)$$

Здесь C_1, C_2 — пока произвольные постоянные. Легко проверить, что выражение (Б,9) удовлетворяет уравнению (Б,7) в порядке $1/\xi$. Что же касается членов $\sim \xi^{-2}$ и т. д., появляющихся из $\ddot{\varphi}_1$ за счет дифференцирования множителя $1/\xi$ и логарифмической фазы, то они скажутся только при нахождении поправок $\sim 1/\xi^2$ и т. д.

Постоянные C_1, C_2 находятся из условия отсутствия резонансных членов в правой части уравнения, определяющего поправку $\varphi_2 \sim 1/\xi^2$. Написав $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$ с φ_0 и φ_1 из (Б,5) и (Б,9) и подставив в (Б,2), получим в порядке $1/\xi^2$ уравнение для φ_2

$$\ddot{\varphi}_2 + \varphi_2 = \xi^{-2} [2(C_1 + A^3) \cos \Delta - (2C_2 + 4C_1 A^2 + A^5 + 1/2 A) \sin \Delta + (2A^2 C_1 - A^5) \sin 3\Delta + (2A^2 C_2 - A^3) \cos 3\Delta - 3/5 A^5 \sin 5\Delta]. \quad (\text{Б}, 11)$$

Члены, пропорциональные $\cos \Delta$ и $\sin \Delta$ в квадратной скобке, дали бы вклад в φ_2 порядка $1/\xi$, что противоречило бы исходному предположению $\varphi_2 \sim 1/\xi^2$, следствием которого является само уравнение (Б,11). Требование равенства этих членов нулю дает

$$C_1 = -A^3, \quad C_2 = 1/4 (6A^5 - A).$$

Действуя аналогичным образом далее, можно было бы получить решение для φ с точностью до любого порядка по $1/\xi$.

Таким образом, с точностью до $\xi^{-3/2}$ включительно, имеем окончательно

$$\chi = \frac{2A}{\sqrt{\xi}} \left[\sin \Delta - \frac{A^2}{12\xi} (6 \sin \Delta + \sin 3\Delta) + \frac{6A^4 - 1}{8\xi} \cos \Delta + O\left(\frac{1}{\xi}\right) \right]. \quad (\text{Б},12)$$

Соответствующие функции $a(\xi)$ и $b(\xi)$:

$$a = a_0 \sqrt{\xi/\xi_0} e^{\chi/2}, \quad b = a_0 \sqrt{\xi/\xi_0} e^{-\chi/2}. \quad (\text{Б},13)$$

Эти формулы относятся к однородным моделям обоих типов — IX и VIII. Подставив (Б,12) в уравнение (4,7) или (4,17), получим

$$\gamma = \frac{1}{16} (1 \mp 1) (\xi^2 - \xi_0^2) + A^2 (\xi - \xi_0) + \left(\frac{1}{2} A^4 - \frac{1}{4}\right) \ln (\xi/\xi_0) + \\ + \ln c_0 + \frac{1}{4} A^2 \xi^{-1} \cos 2\Delta + O(\xi^{-2}), \quad (\text{Б},14)$$

где верхний и нижний знаки в первом члене относятся соответственно к метрике типа IX и типа VIII. Отсюда для функции $c(\xi)$ имеем

$$\left. \begin{aligned} c(\xi) &= c_0 (\xi/\xi_0)^{(2A^4-1)/4} e^{-A^2(\xi_0-\xi)} & (\text{тип IX}), \\ c(\xi) &= c_0 (\xi/\xi_0)^{(2A^4-1)/4} e^{-\frac{1}{8}(\xi_0^2-\xi^2)-A^2(\xi_0-\xi)} & (\text{тип VIII}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б},15)$$

(в предэкспоненциальных множителях оставлен лишь член с наиболее высокой степенью ξ). Наконец, для связи мирового времени t с переменной ξ получим

$$\left. \begin{aligned} t/t_0 &= c(\xi)/c_0 & (\text{тип IX}), \\ t/t_0 &= c(\xi) \xi_0/c_0 \xi & (\text{тип VIII}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б},16)$$

с той же точностью, с которой справедливы формулы (Б,15).

В. Однородные пространства

Для удобства читателей дадим здесь краткое изложение теории однородных пространств.

Однородность означает одинаковость метрических свойств во всех точках пространства. Точное определение этого понятия связано с рассмотрением совокупности преобразований координат, которые совмещают пространство само с собой, т. е. оставляют его метрику неизменной: если до преобразования элемент длины

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} (x^1, x^2, x^3) dx^\alpha dx^\beta,$$

то после преобразования тот же элемент имеет вид

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} (x'^1, x'^2, x'^3) dx'^\alpha dx'^\beta$$

с той же функциональной зависимостью $\gamma_{\alpha\beta}$ от новых координат. Пространство однородно, если оно допускает совокупность преобразований (или, как говорят, группу движений), позволяющих совместить любую заданную его точку с любой другой точкой. В силу трехмерности пространства очевидно, что для этого различные преобразования группы должны определяться значениями трех параметров.

Так, в евклидовом пространстве однородность выражается инвариантностью метрики по отношению к параллельным переносам (трансляциям) декартовой системы координат. Каждая трансляция определяется тремя параметрами — компонентами вектора смещения начала координат. Все эти преобразования оставляют инвариантными три независимых дифференциала (dx , dy , dz), из которых и строится элемент длины. В общем случае неевклидова однородного пространства преобразования его группы движений тоже оставляют инвариантными три независимых дифференциальных формы, не сводящиеся, однако, к полным дифференциалам каких-либо координатных функций. Напишем эти формы в виде

$$e_\alpha^a dx^\alpha, \quad (\text{Б},1)$$

где латинский индекс a нумерует три независимых вектора (функции координат); мы будем называть эти векторы реперными.

С помощью форм (Б,1) инвариантная по отношению к данной группе движений пространственная метрика строится как

$$dl^2 = \gamma_{ab} (e_\alpha^a dx^\alpha) (e_\beta^b dx^\beta),$$

т. е. метрический тензор

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{ab} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (B,2)$$

где симметричные по индексам a, b коэффициенты γ_{ab} — функции времени *). Контравариантные же компоненты метрического тензора записываются в виде

$$\gamma^{\alpha\beta} = \gamma^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (B,3)$$

где коэффициенты γ^{ab} образуют матрицу, обратную матрице γ_{ab} ($\gamma_{ac}\gamma^{bc} = \delta_a^b$), а величины e_a^α образуют три вектора, «обратные» векторам e_α^a :

$$e_a^\alpha e_\alpha^b = \delta_a^b, \quad e_a^\alpha e_\beta^a = \delta_\beta^\alpha \quad (B,4)$$

(каждое из этих равенств автоматически следует из другого). Отметим, что связь между e_a^α и e_α^a может быть записана в явном виде как

$$e_1 = (1/v) [e^2 e^3], \quad e_2 = (1/v) [e^3 e^1], \quad e_3 = (1/v) [e^1 e^2], \quad (B,5)$$

где $v = (e^1 [e^2 e^3])$, а e_a и e^a надо понимать как декартовы векторы с компонентами соответственно e_a^α и e_α^a **). Определитель метрического тензора (B,2)

$$\gamma = |\gamma_{ab}| |e_\alpha^a|^2 = |\gamma_{ab}| v^2, \quad (B,6)$$

где $|\gamma_{ab}|$ — определитель матрицы γ_{ab} ***).

Инвариантность дифференциальных форм (B,1) означает, что

$$e_\alpha^a(x) dx^\alpha = e_\alpha^a(x') dx'^\alpha, \quad (B,7)$$

причем e_α^a в обеих сторонах равенства — одни и те же функции соответственно от старых и новых координат. Умножив это равенство на $e_\beta^b(x')$, заменив $dx'^\beta = (\partial_\alpha x'^\beta) dx^\alpha$ и сравнив коэффициенты при одинаковых дифференциалах dx^α , получим

$$\partial_\alpha x'^\beta = e_\alpha^b(x') e_\beta^a(x). \quad (B,8)$$

Эти равенства представляют собой систему дифференциальных уравнений, определяющих функции $x'^\beta(x)$ по заданным реперным векторам ****). Для того чтобы быть интегрируемыми, уравнения (B,8) должны тождественно удовлетворять условиям

$$\partial_\alpha \partial_\gamma x'^\beta = \partial_\gamma \partial_\alpha x'^\beta.$$

Вычислив производные, получим

$$[\partial_\delta e_\alpha^b(x') \cdot e_b^\delta(x') - \partial_\delta e_b^\beta(x') \cdot e_\alpha^\delta(x')] e_\gamma^b(x) e_\alpha^a(x) = e_\alpha^b(x') [\partial_\alpha e_\gamma^a(x) - \partial_\gamma e_\alpha^a(x)].$$

Умножив обе стороны равенства на $e_\alpha^d(x) e_c^\gamma(x) e_\beta^f(x')$ и перенеся дифференцирования с одних множителей на другие с учетом (B, 4), получим в левой стороне

$$e_\beta^f(x') [e_c^\delta(x') \cdot \partial'_\delta e_d^\beta(x') - e_d^\delta(x') \cdot \partial'_\delta e_c^\beta(x')] = e_c^\beta(x') e_\alpha^\delta(x') [\partial'_\delta e_\beta^f(x') - \partial'_\beta e_\delta^f(x')],$$

*) Здесь и ниже в этом разделе суммирование подразумевается по дважды повторяющимся как греческим, так и латинским индексам (a, b, c, \dots), нумерующим реперные векторы.

**) Не путать e_α^a с контравариантными компонентами векторов e_α^a ! Последние равны: $e_\alpha^a = \gamma^{\alpha\beta} e_\beta^a = \gamma^{ab} e_b^\alpha$.

***). Использованное в разделе 4 представление пространственной метрики в виде $\gamma_{\alpha\beta} = a^2 l_\alpha l_\beta + b^2 m_\alpha m_\beta + c^2 n_\alpha n_\beta$ соответствует диагональной матрице γ_{ab} с компонентами $\gamma_{11} = a^2$, $\gamma_{22} = b^2$, $\gamma_{33} = c^2$; векторы l, m, n соответствуют векторам e^1, e^2, e^3 .

****) Для преобразований вида $x'^\beta = x^\beta + \xi^\beta$, где ξ^β — малые величины, из (B,8) получаются уравнения

$$\partial_\alpha \xi^\beta = \xi^\gamma e_\alpha^a \partial_\gamma e_\beta^a.$$

Три линейно независимых решения этих уравнений, ξ_b^β ($b = 1, 2, 3$) определяют бесконечно малые преобразования группы движений пространства. Векторы ξ_b^β называют векторами Киллинга.

а в правой — такое же выражение, как функцию от x . Поскольку x и x' произвольны, то эти выражения должны сводиться к постоянным:

$$e_a^\alpha e_b^\beta (\partial_\beta e_\alpha^c - \partial_\alpha e_\beta^c) = C_{ab}^c. \quad (B,9)$$

Постоянные C_{ab}^c называются структурными константами группы. Умножив на e_c^γ , можно переписать (B,9) в виде

$$e_a^\alpha \partial_\alpha e_b^\gamma - e_b^\beta \partial_\beta e_a^\gamma = C_{ab}^c e_c^\gamma. \quad (B,10)$$

Как видно из их определения, структурные константы антисимметричны по нижним индексам:

$$C_{ab}^c = -C_{ba}^c. \quad (B,11)$$

Еще одно условие для них можно получить, заметив, что равенство (B,10) можно записать в виде правила коммутации

$$[X_a X_b] \equiv X_a X_b - X_b X_a = C_{ab}^c X_c \quad (B,12)$$

для линейных дифференциальных операторов *)

$$X_a = e_a^\alpha \partial_\alpha. \quad (B,13)$$

Тогда упомянутое условие возникает из тождества

$$[[X_a X_b] X_c] + [[X_b X_c] X_a] + [[X_c X_a] X_b] = 0$$

(так называемое тождество Якоби) и имеет вид

$$C_{ab}^f C_{fc}^d + C_{bc}^f C_{fa}^d + C_{ca}^f C_{fb}^d = 0. \quad (B,14)$$

Отметим, что равенства (B,9) можно записать в векторном виде как

$$[e_a e_b] \text{ rot } e^c = -C_{ab}^c,$$

где снова векторные операции производятся так, как если бы координаты x^a были декартовы. С помощью (B,5) имеем отсюда

$$\frac{1}{v} (e^1 \text{ rot } e^1) = C_{32}^1, \quad \frac{1}{v} (e^2 \text{ rot } e^1) = C_{13}^2, \quad \frac{1}{v} (e^3 \text{ rot } e^1) = C_{21}^3 \quad (B,15)$$

и еще шесть равенств, получающихся циклической перестановкой индексов 1, 2, 3.

Уравнения Эйнштейна для мира с однородным пространством могут быть представлены в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих только функции времени. Для этого все трехмерные векторы и тензоры надо разложить по тройке реперных векторов данного пространства. Обозначая компоненты таких разложений индексами a, b, \dots , имеем, по определению,

$$R_{ab} = R_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad R_{0a} = R_{0\alpha} e_a^\alpha, \quad u^a = u^\alpha e_\alpha^a,$$

причем все эти величины являются уже функциями только от t (функциями времени являются также и скалярные величины — плотность ε и давление материи p). Дальнейшее поднятие или опускание индексов производится с помощью величин γ^{ab} : $R_a^b = \gamma^{cb} R_{ac}$, $u_a = \gamma_{ab} u^b$ и т. п.

Уравнения Эйнштейна в синхронной системе отсчета выражаются через трехмерные тензоры γ_{ab} и P_{ab} (ср. (2,11) — (2,13)). Для первого из них имеем просто

$$\gamma_{ab} = \dot{\gamma}_{ab} \quad (B,16)$$

(точка означает дифференцирование по t). Компоненты же P_{ab} оказываются возможным выразить через величины γ_{ab} и структурные константы группы:

$$\left. \begin{aligned} P_{ab} &= -a_{\alpha\beta}^c a_{bc}^d - C_{ac}^d a_{ab}^c, \\ a_{ab}^c &= 1/2 (C_{ab}^c + C_{ba}^c \gamma_{fa}^d \gamma^{dc} - C_{fa}^c \gamma_{fb}^d \gamma^{dc}). \end{aligned} \right\} \quad (B,17)$$

*) Во избежание недоразумений при сравнении с другими изложениями отметим, что систематическая теория непрерывных групп строится обычно, исходя из операторов (генераторов группы), определенных по векторам Киллинга: $X_a = \xi_a^\alpha \partial_\alpha$.

Через те же величины выражаются и ковариантные производные $\kappa_{\alpha}^{\beta}; \gamma$, и для R_a^0 получается

$$R_a^0 = -1/2 \dot{\gamma}_{bc} \gamma^{bd} (C_{da}^c - \delta_a^c C_{fd}^f). \quad (B,18)$$

Подчеркнем, что для составления уравнений Эйнштейна нет необходимости в использовании явных выражений для реперных векторов как функций координат *).

Выбор трех реперных векторов в дифференциальных формах (B,1) (а с ними и операторов (B,13)), разумеется, не однозначен. Они могут быть подвергнуты любому линейному преобразованию с постоянными (вещественными) коэффициентами:

$$e'_a{}^\alpha = A_a^b e_b{}^\alpha. \quad (B,19)$$

По отношению к таким преобразованиям величины γ_{ab} ведут себя как ковариантный тензор, а константы C_{ab}^c — как тензор, ковариантный по индексам a, b и контравариантный по индексу c .

Условия (B,11) и (B,14) — единственные, которым должны удовлетворять структурные константы. Но среди допускаемых этими условиями наборов констант есть эквивалентные — в том смысле, что их различие связано лишь с преобразованиями (B,19). Вопрос о классификации однородных пространств сводится к определению всех неэквивалентных наборов структурных констант.

Простой способ сделать это (следуя Беру) состоит в том, чтобы, воспользовавшись «тензорными» свойствами констант C_{ab}^c , выразить эти девять величин через шесть компонент симметричного «тензора» n^{ab} и три компоненты «вектора» a_c согласно

$$C_{ab}^c = e_{abd} n^{dc} + \delta_{ab}^c a_c, \quad (B,20)$$

где e_{abd} — единичный антисимметричный «тензор». Условие антисимметричности (B,11) здесь уже учтено, а тождество Якоби (B,14) приводит к условию

$$n^{ab} a_b = 0. \quad (B,21)$$

Преобразованиями (B,19) симметричный «тензор» n^{ab} может быть приведен к диагональному виду; пусть $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}$ — его главные значения. Равенство (B,21) показывает, что «вектор» a_b (если он существует) лежит в одном из главных направлений «тензора» n^{ab} , в том, которое отвечает нулевому главному значению. Не уменьшая общности, можно поэтому положить $a_b = (a, 0, 0)$. Тогда (B,21) сводится к $a n^{(1)} = 0$, т. е. одна из величин a или $n^{(1)}$ должна быть нулем. Правила же коммутации (B,12) примут вид

$$[X_1 X_2] = a X_2 + n^{(3)} X_3, \quad [X_2 X_3] = n^{(1)} X_1, \quad [X_3 X_1] = n^{(2)} X_2 - a X_3. \quad (B,22)$$

После этого остается еще свобода в изменении знака операторов X_a и в произвольных их масштабных преобразованиях (умножениях на постоянные). Это позволяет одновременно изменить знак всех $n^{(a)}$, а также сделать величину a положительной (если она отлична от нуля). Можно также обратить все структурные константы в ± 1 , если по крайней мере одна из величин $a, n^{(2)}, n^{(3)}$ равна нулю. Если же все эти три величины отличны от нуля, то масштабные преобразования оставляют инвариантным отношение $a^2/n^{(2)}n^{(3)}$.

Таким образом, мы приходим к следующему перечислению возможных типов однородных пространств; в первом столбце таблицы римской цифрой указан номер, которым принято обозначать типы по классификации Бианки:

Тип пространства	a	$n^{(1)}$	$n^{(2)}$	$n^{(3)}$	Тип пространства	a	$n^{(1)}$	$n^{(2)}$	$n^{(3)}$
I	0	0	0	0	V	1	0	0	0
II	0	1	0	0	IV	1	0	0	1
VII	0	1	1	0	VII	a	0	1	1
VI	0	1	-1	0	III ($a=1$)	a	0	1	-1
IX	0	1	1	1	VI ($a \neq 1$)				
VIII	0	1	1	-1					

Параметр a пробегает все положительные значения. Соответствующие типы представляют собой однопараметрические семейства различных групп.

*) Вывод формул (B,17), (B,18) можно найти в статье Шюкинга в книге ²¹.

Тип I — евклидово пространство (все компоненты пространственного тензора кривизны обращаются в нуль). Помимо тривиального случая галилеевой метрики сюда относятся метрика (2,1).

Если для пространства типа IX положить в метрическом тензоре (B,2) $\gamma_{ab} = -\frac{1}{4} a^2 \delta_{ab}$, то для тензора Риччи с помощью (B, 17) получим

$$P_{ab} = \frac{1}{2} \delta_{ab}, \quad P_{\alpha\beta} = P_{ab} e_{\alpha}^a e_{\beta}^b = \frac{2}{a^2} \gamma_{\alpha\beta},$$

что соответствует пространству постоянной положительной кривизны (с радиусом кривизны a ; ср. ², § 107); это пространство содержится, таким образом, в типе IX как частный случай.

Аналогичным образом, пространство постоянной отрицательной кривизны содержится как частный случай в типе V. В этом легко убедиться, преобразовав сначала структурные константы этой группы заменой $X_2 + X_3 = X'_2$, $X_2 - X_3 = X'_3$, $X_1 = X'_1$. Тогда будет $[X'_1 X'_2] = X'_2$, $[X'_2 X'_3] = 0$, $[X'_3 X'_1] = -X'_3$. Положив затем $\gamma_{ab} = a^2 \delta_{ab}$, получим тензор Риччи $P_{\alpha\beta} = -2\delta_{\alpha\beta}/a^2$, отвечающий пространству постоянной отрицательной кривизны.

Г. Однородные пространства типов VIII и IX

Для пространства типа IX правила коммутации операторов X_a :

$$[X_1 X_2] = -X_3, \quad [X_2 X_3] = -X_1, \quad [X_3 X_1] = -X_2,$$

т. е. отличные от нуля структурные константы *):

$$C_{32}^1 = C_{13}^2 = C_{21}^3 = 1. \quad (\Gamma, 1)$$

Согласно (B,15) эти константы совпадают соответственно с величинами λ , μ , ν (2,10).

Соответствующие константам (Г,1) реперные векторы:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{l} &\equiv \mathbf{e}^1 = (\sin z \sin y, \cos z, 0), \\ \mathbf{m} &\equiv \mathbf{e}^2 = (-\cos z \sin y, \sin z, 0), \\ \mathbf{n} &\equiv \mathbf{e}^3 = (\cos y, 0, 1), \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma, 2)$$

где координаты обозначены как $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Согласно (B,6) элемент объема равен

$$dV = \sqrt{\gamma} dx dy dz = \sqrt{|\gamma_{ab}|} \sin y dx dy dz. \quad (\Gamma, 3)$$

Координаты пробегает значения в интервалах

$$0 \leq x \leq 4\pi, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq 2\pi \quad (\Gamma, 4)$$

(см. ниже). Пространство замкнуто и его объем

$$V = 16\pi^2 \sqrt{|\gamma_{ab}|}. \quad (\Gamma, 5)$$

Как уже было указано, частному случаю $\gamma_{ab} = 1/4 a^2 \delta_{ab}$ соответствует пространство постоянной положительной кривизны. С этими значениями γ_{ab} и с реперными векторами (Г,2) элемент длины

$$dl^2 = 1/4 a^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2 \cos y dx dz). \quad (\Gamma, 6)$$

Покажем, каким образом он может быть преобразован к виду, обычному для пространства постоянной положительной кривизны:

$$dl^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + \frac{(X dX + Y dY + Z dZ)^2}{a^2 - X^2 - Y^2 - Z^2}, \quad (\Gamma, 7)$$

или

$$dl^2 = a^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2), \quad (\Gamma, 8)$$

где χ , θ , φ — углы четырехмерной сферической системы координат, связанные с X , Y , Z в (Г,7) согласно

$$X = a \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \quad Y = a \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, \quad Z = a \sin \chi \cos \theta$$

(см. ² § 107). Заменой

$$X = \rho \cos (\beta/2), \quad Y = \rho \sin (\beta/2), \quad Z = \sqrt{a^2 - \rho^2} \sin (\alpha/2)$$

*) Общий знак структурных констант изменен здесь на обратный по сравнению с приведенной выше таблицей.

и затем $\rho = a \sin(y/2)$ элемент (Г,7) преобразуется к виду

$$dl^2 = \frac{1}{4} (a^2 - \rho^2) d\alpha^2 + \frac{1}{4} \rho^2 d\beta^2 + (1 - \rho^2/a^2)^{-1} d\rho^2 = \\ = \frac{1}{4} a^2 (\cos^2(y/2) d\alpha^2 + \sin^2(y/2) d\beta^2 + dy^2).$$

К такому же виду преобразуется (Г,6) заменой $z+x=\alpha$, $z-x=\beta$. Сводя теперь вместе все последовательные замены, найдем, что преобразование от (Г,6) к (Г,8) осуществляется формулами

$$\left. \begin{aligned} \sin(y/2) \cos[(z-x)/2] &= \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \\ \sin(y/2) \sin[(z-x)/2] &= \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, \\ \cos(y/2) \sin[(z+x)/2] &= \sin \chi \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Г,9})$$

Изменению координат χ , θ , φ в интервалах $0 \leq \chi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ соответствует изменение координат x , y , z в интервалах (Г,4).

Для однородного пространства типа VIII правила коммутации:

$$[X_1 X_2] = -X_3, \quad [X_2 X_3] = X_1, \quad [X_3 X_1] = -X_2, \quad (\text{Г,10})$$

т. е. структурные константы $C_{32}^1 = -1$, $C_{13}^2 = C_{21}^3 = 1$.

Соответствующие реперные векторы:

$$\mathbf{l} = (-\operatorname{sh} z \sin y, \operatorname{ch} z, 0), \quad \mathbf{m} = (-\operatorname{ch} z \sin y, \operatorname{sh} z, 0), \quad \mathbf{n} = (\cos y, 0, 1). \quad (\text{Г,11})$$

Координата z пробегает теперь значения от 0 до ∞ , и объем пространства бесконечен.

Институт физических проблем им. С. И. Вавилова

АН СССР

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау

АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, УФН 80, 391 (1963); Adv. Phys. 12, 185 (1963).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. 5-е, М., «Наука», 1967.
3. Е. М. Лифшиц, В. В. Судakov, И. М. Халатников, ЖЭТФ 40, 1847 (1961).
4. R. Penrose, Phys. Rev. Lett. 14, 57 (1965).
5. S. W. Hawking, Phys. Rev. Lett. 15, 689 (1965).
6. S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, Astrophys. J. 152, 25 (1968).
7. R. P. Geroch, Phys. Rev. Lett. 17, 445 (1966).
8. E. Kasner, Amer. J. Mathem. 43 (1921).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1954.
10. В. А. Белинский, И. М. Халатников, ЖЭТФ 49, 1000 (1965).
11. I. M. Khalatnikov, E. M. Lifshitz, Phys. Rev. Lett. 24, 76 (1970).
12. В. А. Белинский, И. М. Халатников, ЖЭТФ 56, 1700 (1969).
13. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, Письма ЖЭТФ 11, 200 (1970).
14. Е. М. Лифшиц, И. М. Лифшиц, И. М. Халатников, ЖЭТФ 59, 322 (1970).
15. В. А. Белинский, И. М. Халатников, ЖЭТФ 57, 2163 (1969).
16. В. А. Белинский, И. М. Халатников, ЖЭТФ 59, 314 (1970).
17. A. Einstein, N. Rosen, J. Franklin Inst. 223, 43 (1937); А. Эйнштейн, Собрание трудов, т. 2, стр. 438.
18. А. Э. Петров, Пространства Эйнштейна, М., Физматгиз, 1961.
19. Ch. W. Misner, Phys. Rev. Lett. 22, 1071 (1969).
20. А. Я. Хинчин, Цепные дроби, М., Физматгиз, 1961.
21. E. Schücking, в кн. «Gravitation, an introduction to modern research», Ed. L. Witten, Wiley & Sons, N.Y., 1962, стр. 454.
22. А. Г. Дорошкевич, И. Д. Новиков, Астрон. ж. 47, № 5 (1970).