

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.9

КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПЛАЗМЫ И ЖИДКОСТИ

А. В. Тимофеев

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем обзоре изложены результаты последних исследований по теории колебаний и устойчивости неоднородных течений плазмы и жидкости. Теория колебаний и устойчивости течений обычной жидкости разрабатывается более полувека.

Однако в последнее время появился ряд работ, в которых эти проблемы рассматриваются на основе новых физических понятий, разработанных в теории колебаний другой сплошной среды — плазмы. К числу таких понятий следует отнести понятие резонансного взаимодействия колебаний с движением частиц сплошной среды. Оно было введено Ландау при рассмотрении задачи об электронных лэнгмюровских колебаниях термодинамически равновесной покоящейся плазмы¹. В такой плазме из-за теплового разброса по скоростям всегда находятся частицы, скорость которых равна фазовой скорости волны. Для них поле волны постоянно во времени, и поэтому они находятся в резонансе с волной. Ландау показал, что резонансные частицы поглощают энергию волны и это ведет к ее затуханию (затухание Ландау). На многочисленных примерах было показано также, что в неравновесной плазме энергия посредством резонансного взаимодействия может передаваться и в обратном направлении — от плазмы к колебаниям. Как правило, в этих задачах резонансные частицы составляли малую долю общего числа частиц в данной точке. Поэтому для выявления резонансных эффектов требовалось кинетическое рассмотрение, и условно подобные резонансы могут быть названы кинетическими.

Однако использование понятия резонанса оказывается полезным и в задачах другого типа, а именно при рассмотрении колебаний сплошной среды, движущейся со скоростью, переменной в пространстве, когда в некоторой точке (резонансной) ее скорость совпадает с фазовой скоростью волны. В этом случае резонансные частицы сконцентрированы в окрестности резонансной точки. Резонансы подобного типа естественно назвать гидродинамическими. Оказывается, например, что известная теорема Рэлея², согласно которой течения несжимаемой жидкости с профилем скорости без точек перегиба устойчивы, обязана тому обстоятельству, что колебания поглощаются в точке резонанса. Другие важнейшие результаты теории колебаний течений несжимаемой жидкости также в той или иной степени связаны с резонансными явлениями.

Резонансные явления играют определяющую роль и в колебаниях движущейся плазмы, если ее скорость меняется достаточно резко в направлении, перпендикулярном к движению. Изучение колебаний движущейся плазмы представляет значительный интерес, поскольку в реальных

¹ УФН, т. 102, вып. 2

условиях плазма редко находится в покое. К ее движению могут, например, приводить электрические поля, с легкостью возникающие в плазме. На первый взгляд кажется, что движение плазмы может вызвать только дополнительные неустойчивости, которыми плазма и без того достаточно богата. Здесь, однако, полезно обратиться к примерам из теории колебаний течений обычной жидкости. Как уже упоминалось, для обычной жидкости справедлива теорема Рэлея, согласно которой определенный тип течений устойчив. Оказывается, что сходная ситуация имеет место и для движущейся плазмы. Так, например, в термоядерных установках «Огра» и «Алиса» устойчивость плазмы существенно улучшалась в тех режимах, когда плазма вращалась со скоростью, резко и монотонно меняющейся по радиусу (эти системы аксиально-симметричны). Теоретическое рассмотрение показывает, что в таких режимах, так же как и в течениях обычной жидкости, стабилизация связана с поглощением колебаний в резонансных точках, где угловая скорость вращения плазмы совпадает с фазовой скоростью волны. Тот же самый эффект должен проявляться в колебаниях электронного облака в магнетроне, а также в колебаниях электронного потока, движущегося вдоль магнитного поля со скоростью, переменной по сечению. Эти два примера в силу их простоты в настоящее время проанализированы особенно подробно.

Настоящий обзор имеет своей целью на простейших примерах показать наиболее общие закономерности, характеризующие колебания движущихся сплошных сред (плазмы и обычной жидкости). Как уже отмечалось, эти закономерности связаны в основном с процессами, развивающимися в резонансных точках, в которых скорость сплошной среды совпадает с фазовой скоростью колебаний.

1. КОЛЕБАНИЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

1.1. Теорема Рэлея

Исследование резонансных эффектов в колебаниях движущихся сплошных сред удобно начать с рассмотрения простейшей и лучше всего изученной задачи о колебаниях плоскопараллельных течений несжимаемой жидкости.

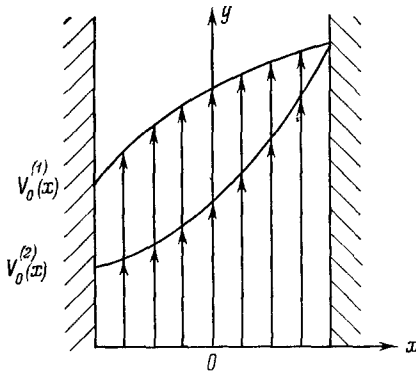


Рис. 1. Профили скорости течений без точек перегиба.

$$d^2 V_0^{(1)} / dx^2 < 0, \quad d^2 V_0^{(2)} / dx^2 > 0.$$

Введем прямоугольную систему координат, ось Oy которой направлена вдоль течения, а ось Ox — по направлению, в котором меняется его скорость (рис. 1). На рисунке изображены также профили скорости простейших течений. Мы предполагаем, что скорость $V_0(x)$ меняется монотонно, причем ее вторая производная $d^2 V_0 / dx^2$ нигде в нуль не обращается (профиль скорости не имеет точек перегиба). Будем считать, что вязкость жидкости мала (число Рейнольдса велико), и первоначально не будем вообще ее учитывать.

Движение идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости описывается уравнением неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1,1)$$

и уравнением движения

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p; \quad (1,2)$$

здесь p — давление жидкости, ρ — ее плотность.

Для двумерных течений уравнение (1,1) позволяет ввести функцию тока φ ($V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $V_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$). Применяя к (1,2) операцию rot_z и выражая скорость через функцию тока, получим

$$d\Delta\varphi/dt = 0. \quad (1,3)$$

Это уравнение выражает закон сохранения ротора скорости в идеальной несжимаемой жидкости:

$$\text{rot}_z V = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

При отсутствии вязкости профиль скорости течения может быть произвольным и соответственно уравнению (1,3) удовлетворяет произвольная функция x :

$$\varphi_0(x) = - \int^x V_{0y}(x) dx.$$

Рассмотрим теперь малые возмущения течения $V_1 \ll V_0$, $\varphi_1 \ll \varphi_0$. Уравнение, описывающее такие возмущения, получается линеаризацией (1,3):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_0(x) \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta \varphi_1 - \frac{d^2 V_0}{dx^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0. \quad (1,4)$$

В силу стационарности течения и его однородности по Oy возмущение $\varphi_1(x, y, t)$ можно выбрать в виде $\varphi_1(x, y, t) = \varphi_1(x) e^{-i\omega t + ik y}$. При этом из (1,4) получаем

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} - k^2 \varphi_1 - \frac{1}{V_0(x) - (\omega/k)} \frac{d^2 V_0}{dx^2} \varphi_1 = 0. \quad (1,5)$$

На поверхностях, ограничивающих течение ($x = x_1, 2$), нормальная компонента скорости обращается в нуль. Поэтому уравнение (1,5) должно быть дополнено граничными условиями $V_{1x}(x_1, 2) = ik\varphi_1(x_1, 2) = 0$. Таким образом, проблема сводится к нахождению собственных функций уравнения (1,5) и определению спектра собственных частот. Если при заданном профиле скорости $V_0(x)$ некоторые из частот будут иметь $\text{Im } \omega > 0$, то соответствующее течение окажется неустойчивым, так как амплитуды собственных (свободных) колебаний будут нарастать во времени.

При рассмотрении устойчивости течений будем следовать Рэлею². Предположим, что неустойчивые колебания существуют и соответственно (1,5) имеет хотя бы одно решение $\tilde{\varphi}_1(x)$ с $\text{Im } \omega > 0$. Помножим (1,5) на $\tilde{\varphi}_1^*(x)$ и проинтегрируем результат по частям:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ - \left| \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dx} \right|^2 - k^2 |\tilde{\varphi}_1|^2 + \frac{i(\text{Im } \omega/k) + [(\text{Re } \omega/k) - V_0(x)]}{|(\omega/k) - V_0(x)|^2} \frac{d^2 V_0}{dx^2} |\tilde{\varphi}_1|^2 \right\} = 0. \quad (1,6)$$

Если профиль скорости течения не имеет точек перегиба (величина $d^2 V_0/dx^2$ не обращается в нуль), то соотношение (1,6) не может быть удовлетворено, так как мнимая часть подынтегрального выражения не меняет знака в интервале интегрирования (x_1, x_2). Поэтому в течениях

с профилем скорости без точек перегиба нарастающие собственные колебания не могут существовать, и, следовательно, такие течения устойчивы. Это утверждение и составляет содержание теоремы Рэлея.

При этом доказательстве использовалось неравенство $\text{Im } \omega \neq 0$; знак же $\text{Im } \omega$ был несуществен. Поэтому, основываясь только на соотношении (1,6), следовало бы заключить, что в течениях с профилем скорости без точек перегиба отсутствуют также и затухающие колебания ($\text{Im } \omega < 0$). Более того, если нейтральные колебания ($\text{Im } \omega = 0$) понимать как предельный случай колебаний с $\text{Im } \omega \neq 0$ при $\text{Im } \omega \rightarrow 0$, то можно показать, что и такие колебания в рассматриваемых течениях невозможны³ (см. также приложение I.1 в конце обзора).

1.2. Правило обхода Ландау и поглощение колебаний в резонансных точках

Мы нашли, что в течениях с профилем скорости без точек перегиба невозможны никакие собственные колебания. Эта необычная ситуация требует более подробного обсуждения. Задача облегчается ввиду того, что распространение возмущений в неоднородных течениях обычной жидкости имеет некоторые общие черты с распространением электромагнитных возмущений в плазме, находящейся в неоднородном магнитном поле (по последнему вопросу см., например, работы⁴⁻⁶, а также раздел 5.1 обзора). Эта аналогия была отмечена и использована в работе⁷, которой мы будем в основном следовать.

Физические процессы, приводящие к устранению собственных колебаний, особенно удобно проанализировать на примере колебаний, характерный пространственный масштаб которых по Ox мал по сравнению с характерным масштабом изменения начальной скорости $V_0(x)$. При их рассмотрении можно использовать квазиклассическое приближение, выбирая возмущения в виде волн, бегущих по Ox :

$$\varphi_1(x, y, t) \approx (k_x)^{-1/2} \exp \left(-i\omega t + iky + i \int^x k_x dx \right).$$

На самом деле пространственные масштабы начальной и возмущенной скоростей по порядку величины оказываются одинаковыми. Поэтому, строго говоря, использование квазиклассического приближения было бы незаконным. Однако нашей целью является физическая интерпретация результатов, полученных в предыдущем разделе, что достигается наиболее просто на «квазиклассическом языке» волн и волновых пакетов, составленных из таких волн. Поэтому мы рассмотрим вместо (1,5) упрощенное модельное уравнение, которое, сохраняя характерные особенности (1,5), в то же время допускает возможность использования квазиклассического приближения. С этой целью заменим последнее слагаемое в левой части (1,5) на $A\varphi_1/(x - x_s)$:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} - k^2\varphi_1 - \frac{A}{x - x_s}\varphi_1 = 0. \quad (1,7)$$

Если определить x_s равенством $\omega/k = V_0(x_s)$ и положить $A = V_0'(x_s)/V_0'(x_s)$, то в окрестности точки x_s уравнения (1,5) и (1,7) будут совпадать. В дальнейшем мы увидим, что именно эта область представляет наибольший интерес, так как в ней развиваются физические явления, приводящие к устранению собственных колебаний. Будем считать величину A достаточно большой: $A \gg \max \{a^{-1}, k^2a\}$, где a — размер течения по Ox . Это позволит в окрестности точки x_s использовать квазиклассическое приближение. В области, где $|A/(x - x_s)| \gg k^2$, квазиклас-

сический волновой вектор равен $k_x \approx \pm [-A/(x - x_s)]^{1/2}$ и соответственно решения (см. далее (1,10)) имеют вид

$$\varphi_1(x) \approx (x_s - x)^{1/4} \exp[\pm 2iA^{1/2}(x_s - x)^{1/2}]. \quad (1,8)$$

Мы положили для определенности $A > 0$.

Уравнения (1,5), (1,7) можно рассматривать как уравнения Шрёдингера, описывающие движение частицы с энергией $E = -k^2$ в потенциале $U(x)$, равном $[V_0(x) - (\frac{\omega}{k})]^{-1} d^2 V_0/dx^2$ или $A/(x - x_s)$ соответственно. В точке резонанса x_s , где фазовая скорость колебаний по оси Ox совпадает со скоростью течения $\omega/k = V_0(x_s)$, $U(x)$ обращается в бесконечность, и эта точка является сингулярной точкой поворота (рис. 2)*. Если $\text{Im } \omega \neq 0$, то резонансная точка смещается в комплексную плоскость. При этом оказывается необходимым аналитически продолжить решения (1,5), (1,7) на плоскость комплексного переменного x . Мы рассмотрим случай $\text{Im } \omega = 0$, поскольку при действительных значениях переменного физический смысл решения усматривается значительно проще.

Найдем формулы «спивки» для квазиклассических решений, заданных по разные стороны от сингулярной точки поворота x_s . Из (1,8) следует, что точка x_s одновременно является точкой ветвления. Рассмотрим решение, убывающее при $x > x_s$, т. е. в области непрозрачности: $\varphi_1 \approx (x_s - x)^{1/4} \exp[-2A^{1/2}(x - x_s)^{1/2}]$. Если при аналитическом продолжении этого решения в область свободного распространения колебаний ($x < x_s$) (см. рис. 2) точку x_s обходить в комплексной плоскости сверху, то $\arg(x - x_s)$ получает приращение $+\pi$ и рассматриваемое решение переходит в волну, бегущую налево: $\varphi_1 \approx (x_s - x)^{1/4} \exp[-2iA^{1/2}(x_s - x)^{1/2}]$. При обходе точки x_s снизу $\arg(x - x_s)$ получает приращение $-\pi$ и то же самое решение переходит в волну, бегущую направо: $\varphi_1 \approx (x_s - x)^{1/4} \exp[2iA^{1/2}(x_s - x)^{1/2}]$.

Вопрос о выборе контура обхода особых точек встречается во всех задачах о колебаниях сплошной среды, где колебания могут резонировать с движением среды. Так, например, в задаче о ленгмюровских колебаниях покоящейся плазмы учет резонансных частиц, т. е. частиц, тепловая скорость которых v совпадает с фазовой скоростью колебаний ω/k , приводит к появлению особенности у функций распределения частиц по скоростям $f(v) \sim [(\omega/k) - v]^{-1}$. Для этого случая Ландау было указано, что нейтральные колебания с $\text{Im } \omega = 0$ должны рассматриваться как

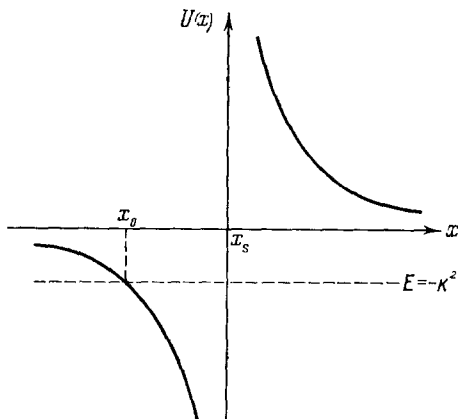


Рис. 2. Эффективный потенциал $U(x)$ для уравнений (1,5), (1,7).

x_s, x_0 — сингулярная и обычная точки поворота.

*) Такую же особенность в начале координат имеет кулоновский потенциал. Однако в задаче о движении электрона в поле ядра одно из граничных условий для ψ -функции электрона ставится в особой точке, причем ему удовлетворяет то из двух линейно независимых решений волнового уравнения, которое является регулярным. Поэтому сингулярное решение отбрасывается. В настоящем случае особенность попадает внутрь рассматриваемого интервала. Поэтому, чтобы удовлетворить граничным условиям на обоих его концах, следует оставить как регулярное, так и сингулярное решения.

предел нарастающих ($\text{Im } \omega > 0$) при $\text{Im } \omega \rightarrow 0$ и поэтому резонансная точка должна обходиться снизу, если $k > 0$, и сверху, если $k < 0$ *). Это правило обхода получается автоматически, если задачу о собственных колебаниях рассматривать как часть более общей задачи о временной эволюции начальных возмущений и решать эту задачу методом преобразования Лапласа. Основываясь на этом соображении, можно было бы попытаться использовать правило обхода Ландау и при рассмотрении колебаний течений несжимаемой жидкости. Однако во всех физических задачах использование сингулярных выражений, вообще говоря, должно быть оправдано результатами более полного исследования с учетом дополнительных факторов, устраняющих сингулярность. В настоящем случае для устранения сингулярности необходимо в окрестности резонансной точки x_s учесть конечную величину вязкости жидкости, т. е. вместо (1,5) рассмотреть следующее уравнение (см., например, ³):

$$-iv \left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \right)^2 \varphi_1 + (\omega - kV_0(x)) \left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \right) \varphi_1 + k \frac{d^2 V_0}{dx^2} \varphi_1 = 0; \quad (1,9)$$

здесь v — кинематический коэффициент вязкости.

В самом деле, общее решение (1,5), (1,7) содержит особенность типа $(x - x_s) \ln(x - x_s)$, поэтому при приближении к x_s высшие производные φ_1 быстро возрастают, $d^n \varphi_1 / dx^n \sim (x - x_s)^{1-n}$, и, следовательно, на достаточно малых расстояниях от резонансной точки x_s мелкомасштабные эффекты типа вязкости становятся существенными. Математически корректное рассмотрение вопроса было дано Вазовым ⁸ (см. приложение II.1). Из его результатов, в частности, следует, что если не интересоваться деталями поведения решения в окрестности резонансной точки, то при исследовании колебаний реальной жидкости можно использовать сингулярное уравнение, описывающее колебания идеальной жидкости. При этом резонансную точку следует обходить по Ландау. По-видимому, аналогичный подход справедлив во всех задачах о колебаниях движущихся сплошных сред, если в окрестности резонансной точки энергия колебаний диссипируется. Однако если диссипация энергии отсутствует, как, например, в случае желобковых колебаний плотной плазмы (см. гл. 4), то использование сингулярного уравнения для нахождения собственных функций оказывается неверным.

Используя в настоящем случае правило обхода Ландау, т. е. рассматривая нейтральные колебания как предельный случай нарастающих при $\text{Im } \omega \rightarrow 0$ ($V_0(x_s) = \omega/k$, $\text{Im } x_s = \text{Im } \omega/kV'_0(x_s)$), находим, что при $kV'_0(x_s) > 0$ точка x_s должна обходиться снизу и при $kV'_0(x_s) < 0$ — сверху. В результате решение, убывающее справа от x_s (область непрозрачности), при $kV'_0(x_s) > 0$ в области слева от x_s переходит в волну, бегущую налево, и при $kV'_0(x_s) < 0$ — в волну, бегущую направо:

$$(x_s - x)^{1/4} \exp \{ -\text{sgn} [kV'_0(x_s)] \cdot 2iA^{1/2} (x_s - x)^{1/2} \} \rightleftharpoons \\ \rightleftharpoons (x_s - x)^{1/4} \exp [-2A^{1/2} (x - x_s)^{1/2}]. \quad ((1,10))$$

Напомним, что временная зависимость возмущений взята в виде $e^{-i\omega t}$.

Рассмотрим теперь физические результаты, к которым приводит использование (1,10). С этой целью получим выражение для скорости распространения волнового пакета, составленного из коротковолновых квазиклассических возмущений. Эта величина, как известно, определяет

*) Квазиклассика дает асимптотическое представление точного решения. Это представление не меняется (явление Стокса отсутствует), если при обходе точки x_s мы не пересекаем линии Стокса (линии мнимой фазы). Легко видеть, что в данном случае это условие выполняется.

скорость переноса энергии. В квазиклассическом приближении из (1,5) находим следующее выражение для частоты колебаний как функции координаты x и волнового вектора k_x :

$$\omega = kV_0(x) + [kV_0''(x)/(k_x^2 + k^2)],$$

откуда для групповой скорости получаем

$$d\omega/dk_x = -2k_x kV_0''/(k_x^2 + k^2)^2.$$

Поблизости от резонансной точки x_s , где $k_x \gg k$, имеем

$$k_x \approx \pm [kV_0''(\omega - kV_0)]^{1/2} \approx \pm (A/|x - x_s|)^{1/2}.$$

Это выражение было использовано при получении (1,8), поскольку фаза экспоненты в (1,8) равна

$$\varphi(x) = \int_{x_s}^x k_x(x) dx.$$

Соотношение (1,10) позволяет определить знак $d\omega/dk_x$ для возмущений, локализованных в жидкости (убывающих в области непрозрачности). Для таких возмущений получаем

$$d\omega/dk_x = 2 \operatorname{sgn}(kV_0'(x_s)) kV_0''(x) |x - x_s|^{3/2} A^{-3/2}. \quad (1,11)$$

Теперь следует вспомнить, что (1,10) было получено для случая $A = V_0''(x_s)/V_0'(x_s) > 0$. Поэтому групповая скорость положительна при обоих знаках величины $kV_0'(x_s)$, и, следовательно, энергия может переноситься только по направлению к резонансной точке. Из (1,11) следует, что по мере приближения волнового пакета к резонансной точке его скорость падает. Так как отражение от резонансной точки отсутствует, энергия возмущения накапливается в окрестности резонансной точки, и, как бы ни была мала вязкость жидкости, через достаточно большой промежуток времени эта энергия будет диссипирована *).

С помощью (1,10) легко показать, что (1,5), (1,7) не имеют квазиклассических собственных функций. Действительно, такие решения должны быть локализованы в потенциальной яме между точками поворота x_s и x_0 (см. рис. 2). Известно, что решение, убывающее за обычной точкой поворота, в которой $k_x(x_0) = 0$, в области прозрачности переходит в стоячую волну. Это правило сопряжения решений вытекает из сохранения энергии при отражении от обычной точки поворота. Действительно, стоячая волна может быть представлена как сумма падающей и отраженной волн с равными амплитудами. В то же время согласно (1,10) решение, убывающее за сингулярной точкой поворота, переходит в бегущую волну. Поэтому спивка решений, убывающих за точками x_0 и x_s , очевидным образом невозможна, и, следовательно, при $\operatorname{Im} \omega = 0$ уравнения (1,5), (1,7) не имеют квазиклассических собственных функций. Колебания с $\operatorname{Im} \omega > 0$ следует рассматривать, основываясь на общих правилах построения асимптотических решений (см., например, ⁹⁻¹¹). При этом доказательство отсутствия собственных функций с $\operatorname{Im} \omega > 0$ практически не отличается от вышеизложенного. В то же время оказывается, что затухающие колебания не могут быть рассмотрены в рамках приближения идеальной жидкости. Поэтому вывод об отсутствии затухающих колебаний

*) Распространение электромагнитных колебаний в плазме, находящейся в неоднородном магнитном поле, описывается уравнением, аналогичным (1,7) (см. ⁴⁻⁶, а также раздел 5.2). В этой задаче использование правила обхода Ландау, обосновываемое обычно наличием малых столкновений (см., однако, ⁴⁶), также привело к выводу о полном поглощении колебаний, набегающих на резонансную точку.

в течениях с профилем скорости без точек перегиба, который можно было бы сделать на основе соотношения (1,6), вообще говоря, неверен. Впрочем, обычно затухающие колебания представляют малый интерес.

Таким образом, на частном и скорее модельном примере коротковолновых — квазиклассических колебаний мы показали, что в течениях с профилем скорости без точек перегиба незатухающие собственные колебания отсутствуют (теорема Рэлея) из-за того, что они поглощаются в резонансных точках. Оказывается (см., например, ³, а также приложение I), что устойчивость таких течений, как пуазейлевское, течения типа пограничного слоя и течения с профилем скорости, имеющим точку перегиба, также определяется явлениями, разыгрывающимися в окрестности резонансных точек.

1.3. Эволюция начальных возмущений

В предыдущем разделе было показано, что на первом этапе эволюции возмущения с частотой ω и волновым вектором по Oy , равным k , накапливаются в окрестности резонансной точки x_s ($\omega = kV_0(x_s)$). Более полную картину эволюции можно получить с помощью уравнения (1,4). В работах ¹²⁻¹⁴ для этой цели использовался метод преобразования Лапласа:

$$-\frac{d^2\varphi_{p,k}}{dx^2} - k^2\varphi_{p,k} - \frac{V_0''(x)}{V_0(x) - (ip/k)}\varphi_{p,k} = \frac{\Delta\varphi_k(x, 0)}{p + ikV_0(x)}; \quad (1,12)$$

здесь $\varphi_{p,k}(x) = \int_0^\infty dt e^{-pt} \varphi_k(x, t)$, $\Delta\varphi_k(x, 0)$ — начальное возмущение ротора скорости.

Решение (1,12) определялось с помощью функции Грина $G_{p,k}(x, x_0)$:

$$\varphi_{p,k}(x) = \int_{x_1}^{x_2} dx_0 G_{p,k}(x, x_0) \frac{\Delta\varphi_k(x_0, 0)}{p + ikV_0(x_0)}, \quad (1,13)$$

$$G_{p,k}(x, x_0) = W_{p,k}^{-1} \begin{cases} g_{p,k}^+(x) g_{p,k}^-(x_0) & (x > x_0), \\ g_{p,k}^-(x) g_{p,k}^+(x_0) & (x < x_0); \end{cases} \quad (1,14)$$

здесь $g_{p,k}^\pm(x)$ — решения однородного уравнения, соответствующего (1,12), удовлетворяющие граничным условиям на правом (левом) конце интервала (x_1, x_2) ; $W_{p,k} = W(g_{p,k}^+, g_{p,k}^-)$ — функциональный определитель *).

Для того чтобы определить зависимость возмущений от времени, выполним обратное преобразование Лапласа:

$$\varphi_k(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} dp e^{pt} \varphi_{p,k}(x). \quad (1,15)$$

Как известно, асимптотика выражений типа (1,15) должна определяться особенностями подынтегральной функции. Если бы у однородного уравнения имелись собственные функции, т. е. функции, удовлетворяющие граничным условиям на обоих концах интервала (x_1, x_2) , то для соответствующих (собственных) значений частоты ($\omega = ip$) функции $g_{p,k}^\pm$ совпадали бы с точностью до множителя. При этом определитель $W_{p,k}$ обращался бы в нуль, а функция Грина имела бы полюс. В предыдущем разделе

*) При нахождении функции Грина сингулярность в левой части (1, 12) оказывается несущественной (см. ниже); поэтому, чтобы упростить изложение, мы не будем ее учитывать.

было показано, что однородное уравнение (1,5) не имеет собственных функций, соответствующих незатухающим колебаниям ($\text{Re } p \geq 0$). В этом случае основной вклад в асимптотику дают нули резонансного знаменателя $p + ik V_0(x)$. Подставляя (1,13) в (1,15) и беря вычет в точке $p = -ik V_0(x_0)$, получаем

$$\varphi_k(x, t) \approx \int_{x_1}^{x_2} dx_0 \Delta \varphi_k(x_0, 0) e^{-ik V_0(x_0)t} G_{k, -ik V_0(x_0)}(x, x_0). \quad (1,16)$$

Это выражение имеет простой физический смысл, а именно оно означает, что возмущение, модулированное в направлении течения с волновым вектором, равным k , разбивается на отдельные струйки, переносимые вдоль течения с его локальной скоростью $V_0(x_0)$ (рис. 3). В лабораторной системе координат частота возмущения, связанного с такой струйкой, оказывается равной $k V_0(x_0)$. Каждой отдельной струйке жидкости соответствует локальное возмущение ротора скорости $\Delta \varphi_k(x_0, 0) = \delta(x - x_0)$, а ее влияние на течение описывается функцией Грина $G_{k, -ik V_0(x_0)}(x, x_0)$.

Таким образом, метод преобразования Лапласа дает тот же результат, что и рассмотрение волновых пакетов, а именно возмущения с частотой ω и волновым вектором по Oy , равным k , локализируются в окрестности точки x_s ($\omega = k V_0(x_s)$). Асимптотическое выражение (1,16) становится справедливым при $t \gg |k V_0(x_1) - k V_0(x_2)|^{-1}$. Интересно отметить, что это же условие можно получить из формул квазиклассики, если, используя их на границе применимости, оценить время прохождения волновым пакетом характерного пространственного масштаба.

Для того чтобы определить дальнейший ход эволюции возмущений, проинтегрируем (1,16) дважды по частям:

$$\varphi_k(x, t) \approx t^{-2} e^{-ik V_0(x)t} C_k(x, t); \quad (1,17)$$

здесь

$$C_k(x, t) = - \int_{x_1}^{x_2} dx_0 e^{iht[V_0(x) - V_0(x_0)]} \times \\ \times \frac{d}{dx_0} \left\{ \frac{1}{k V_0'(x_0)} \frac{1}{dx_0} \left[\frac{1}{k V_0'(x_0)} \Delta \varphi_k(x_0, 0) G_{k, -ik V_0(x_0)}(x, x_0) \right] \right\}.$$

Асимптотика $C_k(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ определяется особенностями подынтегрального выражения. Так как $G_{k, -ik V_0(x)}(x, x_0)$ является функцией Грина уравнения второго порядка, при $x \rightarrow x_0$ ее вторая производная должна иметь особенность типа $G''(x, x_0) \approx \delta(x - x_0)$. Поэтому приближенно $C_k(x, t) \approx -(k V_0'(x))^{-2} \Delta \varphi_0(x)$, и, следовательно, $\varphi_k(x, t)$ должно затухать со временем как t^{-2} .

*) Эти возмущения впервые рассматривались Кейзом¹², и они аналогичны волнам, введенным Ван-Кампеном при исследовании колебаний горячей покоящейся плазмы¹³ (см. также конец настоящего раздела); поэтому их иногда называют волнами Ван-Кампена — Кейза.

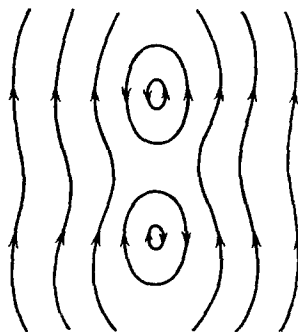


Рис. 3. Элементарное возмущение течения, соответствующее одиночной волне Ван-Кампена — Кейза.

Затухание $\varphi_k(x, t)$ вызывается тем обстоятельством, что размеры области, которая дает вклад в $\varphi_k(x, t)$, с ростом времени сокращаются. Действительно, если элементарные возмущения (струйки) расположены на характерном расстоянии Δx от точки x , то при $t \gg (kV_0\Delta x)^{-1}$ их фазы сдвинутся на величину много больше π , и поэтому совместный вклад возмущений в результате интерференции будет стремиться к нулю.

Более аккуратное вычисление асимптотики¹⁴ показывает, что учет сингулярности в левой части (1,12) может привести к изменению $C_k(x, t)$ в (1,17), так что в нем наряду с постоянным слагаемым появится слагаемое, логарифмически зависящее от времени: $C_k(x, t) \approx C_{1k}(x) + C_{2k}(x) \ln t$. Последнее слагаемое учитывает резонансный отклик течения в точке x на внезапное возникновение элементарного возмущения в точке $x_0 \neq x$. Напомним, что при использовании метода преобразования Лапласа считается, что возмущения возникают мгновенно при $t = 0$. Однако при внезапном включении периодического возмущения в точке x_0 наряду с частотой $\omega = kV_0(x_0)$ возбуждается весь спектр частот от 0 до ∞ , в том числе и частота $\omega = kV_0(x)$, хотя возмущение с $\omega = kV_0(x_0)$ и входит в спектр с наибольшим весом.

Учтем теперь влияние вязкости на асимптотику $\varphi_k(x, t)$. Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости можно привести к виду (ср. с (1,3))

$$\left(\frac{d}{dt} - \nu \Delta_{x,y}\right) (\text{rot } \mathbf{V})_z = 0; \quad (1,18)$$

здесь ν — кинематический коэффициент вязкости.

Из (1,18) следует, что под действием вязкости начальное возмущение ротора скорости за время Δt расплывается на расстояние $\Delta x \approx (\nu \Delta t)^{1/2}$. Ввиду того, что возмущения, расположенные в разных точках по x , движутся с различной скоростью по Oy , их фазы сдвигаются друг относительно друга. Так, например, за время Δt фазовый сдвиг возмущений, расположенных на расстоянии Δx , окажется равным $\Delta \varphi \approx kV'_0 \cdot \Delta x \cdot \Delta t$. Подставляя сюда $\Delta x \approx (\nu \Delta t)^{1/2}$, находим, что за время $\Delta t \gg (kV'_0)^{-2/3} \nu^{-1/3}$ действие вязкости приведет к замазыванию самих элементарных возмущений, так как в одной и той же точке окажутся возмущения с фазой, меняющейся более чем на π .

Интересно сопоставить рассматриваемую задачу с задачей об эволюции возмущений в горячей покоящейся плазме, рассмотренной Ван-Кампеном¹⁵. Им было указано, что для того, чтобы проследить за судьбой произвольного начального возмущения, необходимо наряду с обычными плазменными колебаниями ввести новый класс элементарных возмущений. Эти возмущения представляют собой свободно движущиеся пучки заряженных частиц с плотностью, модулированной в направлении движения. Если скорость пучка равна v и длина волны модуляции $\lambda = 2\pi/k$, такой пучок в лабораторной системе координат будет вызывать волну с частотой $\omega = kv$. Влияние кулоновских столкновений на волны Ван-Кампена было рассмотрено в работе¹⁶, где было получено следующее время затухания:

$$t \approx \nu^{-1/3} (kV_0)^{-2/3}.$$

Это выражение сходно с полученным нами для затухания возмущений в вязкой жидкости. Если считать, как это предполагалось в работе¹⁶, что кулоновские соударения приводят к диффузии в пространстве скоростей, можно представить себе качественную картину затухания, вполне аналогичную приведенной нами выше.

2. ЖЕЛОБКОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАЗРЕЖЕННОЙ НЕСКОМПЕНСИРОВАННОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

2.1. Колебания газа частиц с зарядами одного знака

В предыдущей главе было показано, что колебания течений несжимаемой жидкости в значительной степени определяются физическими процессами, действующими в окрестности резонансных точек, в которых фазовая скорость колебаний совпадает со скоростью течения. Не менее важной может быть роль резонансных процессов и в случае колебаний движущейся плазмы. Для этого необходимо, чтобы скорость плазмы изменялась достаточно круто в направлении поперек движения. В этом случае с движением плазмы будут резонировать колебания, фазовая скорость которых меняется в широких пределах.

Рассмотрение колебаний в движущейся плазме удобно начать с желобковых колебаний разреженной некомпенсированной плазмы в магнитном поле. В такой плазме некомпенсация пространственного заряда вызывает электрические поля, которые приводят к дрейфу плазмы со скоростью $V = c [H \nabla \varphi] / H^2$ (здесь H — магнитное поле, φ — электрический потенциал). Наша задача состоит в исследовании влияния, которое такое движение оказывает на колебания плазмы.

Полезно сначала упростить задачу и считать раскомпенсацию предельной, положив плотность одной из компонент плазмы (электронов или ионов) равной нулю. Предположим также, что магнитное поле однородно, а плотность заряженных частиц вдоль магнитного поля постоянна. В такой системе наибольший интерес представляют колебания, в которых заряженные частицы смещаются поперек магнитного поля и соответственно возбуждаются только поперечные электрические поля. Эти колебания называются желобковыми, так как при их развитии поверхности равной плотности образуют желобки, вытянутые вдоль магнитного поля. Исследование желобковых колебаний газа заряженных частиц в магнитном поле представляет интерес главным образом в связи с проблемой устойчивости облака электронов (ионов) в магнетроне и сходных с ним системах.

Предположим, что плотность заряженных частиц n_j ($j = e, i$) достаточно мала, так что плазменная частота $\omega_{pj} = (4\pi e_j^2 n_j / m_j)^{1/2}$ много меньше циклотронной $\omega_j = |e_j| H / m_j c$. В этом случае частота желобковых колебаний оказывается малой по сравнению с циклотронной, и поэтому при их рассмотрении можно не учитывать инерцию частиц. Низкочастотные желобковые колебания описываются уравнением (1,3) (см. выше), если в нем функцию тока заменить на $c\varphi/H^2$, ^{17, 18}. В этом легко убедиться, если в уравнении непрерывности

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \operatorname{div} n_j \mathbf{V}_j = 0 \quad (2,1)$$

плотность заряженных частиц выразить через электрический потенциал из уравнения Пуассона

$$\Delta \varphi = -4\pi e_j n_j$$

и учесть равенство $\operatorname{div} \mathbf{V}_j = \operatorname{div} (cH^{-2} [H \nabla \varphi]) = 0$. Интересно отметить, что ротор скорости определяет плотность пространственного заряда: $(\operatorname{rot} \mathbf{V}_j)_H = c\Delta \varphi / H = -4\pi e_j n_j / H$ (здесь $(\operatorname{rot} \mathbf{V}_j)_H$ — проекция ротора скорости на направление магнитного поля). Напомним, что в желобковых колебаниях заряженные частицы движутся в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, поэтому выполняется условие $\operatorname{rot} \mathbf{V}_j \parallel H$.

Предположим, что в начальном состоянии плотность заряженных частиц меняется в одном направлении. Введем прямоугольную систему координат, направив ось Ox по градиенту плотности и ось Oz вдоль магнитного поля. Начальное электрическое поле параллельно градиенту плотности заряженных частиц, и, следовательно, частицы, дрейфуя в скрещенных полях, будут двигаться вдоль Oy . Линеаризуя (1,3) по малым возмущениям электрического потенциала, приходим к уравнениям (1,4), (1,5).

Система, колебания которой описываются уравнением (1,5), устойчива: в ней невозможны колебания с $\text{Im } \omega \geq 0$, если профиль скорости $V_{0y}(x)$ не имеет точек перегиба (теорема Рэлея). Из невозмущенного уравнения Пуассона, записанного в форме

$$(c/H) d^2\phi_0/dx^2 = dV_{0y}/dx = -4\pi \frac{c}{H} e_j n_j,$$

следует, что точки перегиба в профиле скорости одновременно являются точками экстремума для плотности заряженных частиц. Поэтому для желобковых колебаний теорема Рэлея может быть переформулирована следующим образом: газ заряженных частиц в магнитном поле устойчив

по отношению к желобковым колебаниям, если плотность заряженных частиц меняется монотонно^{7, 18} (см., например, рис. 4).

Аналогия между желобковыми колебаниями и колебаниями течений несжимаемой жидкости позволяет заключить, что возмущения электрического потенциала будут эволюционировать в соответствии с (1,17): $\phi_k(x, t) \approx t^{-2} e^{-ikV_0(x)t} C(x)$ *). В несжимаемой жидкости действие вязкости через достаточно большой промежуток времени приводило к более быстрому затуханию. На желобковые колебания аналогичное влияние оказывают эффекты, связанные с конечной величиной ларморовского радиуса заряженных частиц¹⁹. Эти эффекты необходимо также учитывать при установлении правила обхода резонансных точек в уравнении (1,5) (см.¹⁸). Оказывается, что в разреженной плазме в окрестности резонансных точек действует механизм бесстолкновительного поглощения Ландау. В этой обла-

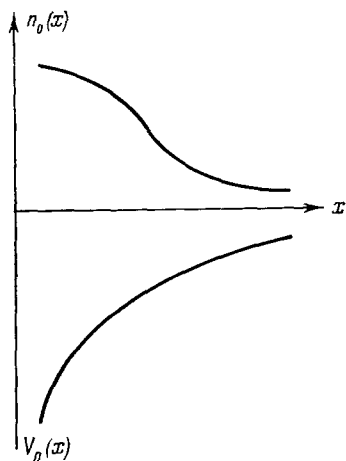


Рис. 4. Профиль плотности (и скорости) газа заряженных частиц, при котором выполняется теорема Рэлея.

сти заряженные частицы движутся со скоростью, близкой к фазовой скорости волны. Поле волны для таких частиц постоянно во времени, и поэтому волна может производить над ними работу, отдавая свою энергию. Как и в случае несжимаемой жидкости, это поглощение можно учесть в рамках уравнения (1,5), если при построении решений резонансную точку обходить в комплексной плоскости по Ландау¹⁸.

В заключение этого раздела сделаем ряд замечаний. Реальные системы типа магнетрона, как правило, обладают аксиальной симметрией. В них магнитное поле параллельно оси симметрии, электрическое поле направлено по радиусу, а заряженные частицы дрейфуют по азимуту. В работе¹⁸ показано, что приведенная выше формулировка теоремы Рэлея

*) В настоящем случае роль элементарных возмущений (волн Ван-Кампена — Кейза) играют плоские слои заряженных частиц, параллельные yOz , с плотностью, модулированной по Oy .

сохраняет свою силу и для аксиально-симметричных систем, а именно такие системы устойчивы по отношению к желобковым колебаниям, если плотность заряженных частиц меняется по радиусу монотонно.

Обычно аксиально-симметричные системы окружены металлическим кожухом, потенциал которого задан, — на нем возмущение потенциала обращается в нуль. Оказывается (см. ²⁰), что даже при монотонном профиле плотности существуют незатухающие собственные колебания ($\text{Im } \omega = 0$) с азимутальным волновым числом $m = 1$, для которых условие резонанса $\omega = \omega_E(r)$ выполняется на поверхности кожуха (здесь $\omega_E = (c/Hr) d\phi_0/dr$ — угловая скорость дрейфа в скрещенных полях). Эти колебания сходны с колебаниями пуазейлевского течения (см. приложение I.3), которые также резонируют с движением у самой границы и раскачиваются под действием вязкости. Возможно, что в случае желобковых колебаний к аналогичному результату приведет влияние эффектов конечного ларморовского радиуса.

Если плазма отделена от кожуха областью вакуума, то становятся возможными нейтральные колебания ($\text{Im } \omega = 0$) с $m > 1$. Интересно отметить, что условие резонанса, которое в случае аксиально-симметричных систем имеет вид $\omega/m = \omega_E(r)$, для таких колебаний должно обязательно выполняться в области, свободной от плазмы ¹⁸.

Если плотность заряженных частиц меняется немонотонно, то такая система неустойчива, и эта неустойчивость вполне аналогична неустойчивости течений с профилем скорости с точкой перегиба ³. Пример такой неустойчивости для систем с плоской симметрией был рассмотрен в работе ²¹. В случае аксиально-симметричных систем в основном исследовалась неустойчивость распределения плотности заряженных частиц в виде ступеньки: $n(r) = n_0$ ($r_1 < r < r_2$), $n(r) = 0$ ($0 < r < r_1$, $r > r_2$) (рис. 5). Эта неустойчивость была названа диокотронной (см., например, ^{17, 22}). Желобковые колебания при сравнительно большой плотности заряженных частиц ($\omega_{pj} \approx \omega_j$) рассматривались в работах ^{23, 24}. Исследовалась устойчивость состояния, при котором все частицы движутся с одинаковым значением обобщенного импульса (в аксиально-симметричных системах такое состояние называется бриллюэновским). В обеих работах сделан вывод о неустойчивости системы. Заметим, что работа ²³, по-видимому, явилась первой, где исследовалась устойчивость течений плазмы со скоростью, меняющейся в поперечном направлении, т. е. течений, в которых слои плазмы скользят относительно друг друга. Поэтому неустойчивость, обнаруженная в работе ²³, получила название «slip-ring»-неустойчивости.

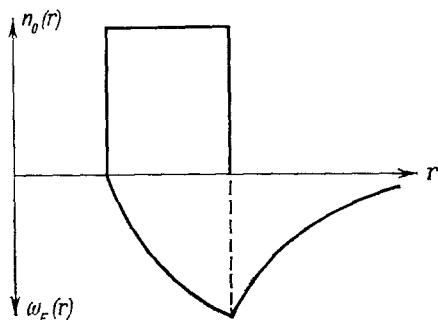


Рис. 5. Профиль плотности (и скорости) вращения газа заряженных частиц, при котором раскачивается диокотронная неустойчивость.

2.2. Колебания разреженной плазмы

Исследование желобковых колебаний представляет интерес также в связи с проблемой устойчивости горячей (термоядерной) плазмы в магнитных ловушках. Магнитные ловушки представляют собой аксиально-симметричные системы с магнитным полем, параллельным оси. Величина

магнитного поля возрастает по направлению к торцам системы, поэтому у торцов образуются так называемые магнитные пробки, препятствующие уходу заряженных частиц из ловушки. Одновременно с этим неоднородность магнитного поля приводит к дрейфу частиц по азимуту, причем электроны и ионы дрейфуют в разные стороны с угловой скоростью

$$\omega_{Hj} = \frac{c}{H} \frac{T_j}{e_j} \frac{1}{r} \frac{dH}{dr},$$

где e_j — заряд частиц сорта j ($j = e, i$), T_j — температура.

Самосогласованные желобковые колебания, рассмотренные в предыдущем разделе, были связаны со смещениями пространственного заряда в поле волны. Этот заряд, смещаясь, в свою очередь возбуждал переменные электрические поля. Если магнитное поле неоднородно, то желобковые колебания могут поддерживаться даже в нейтральной плазме. Действительно, предположим, что из цилиндра плазмы «высунулся язык», образовав желобок, вытянутый вдоль магнитного поля (на рис. 6 дана

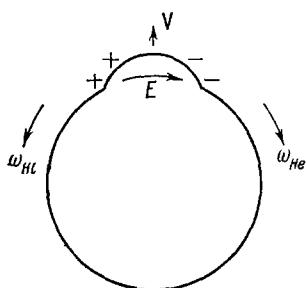


Рис. 6.

проекция на плоскость, перпендикулярную к магнитному полю). Электрические заряды, дрейфуя в неоднородном магнитном поле в противоположных направлениях, разделяются. В результате возникают электрические поля, которые приводят к дальнейшему движению плазмы со скоростью $V = c [H \nabla \Phi] / H^2$.

Желобковые колебания нейтральной плазмы становятся неустойчивыми при плотности больше критической, которая определяется из условия $r_{di}^2 \approx a_n a_H$, где $r_{di} = (T_i / m_i)^{1/2} \omega_{pi}^{-1}$ — средний дебаевский радиус ионов, a_n и a_H — характерные масштабы изменения плотности

плазмы и магнитного поля соответственно²⁵. В эксперименте эта неустойчивость приводит к значительным потерям частиц из магнитной ловушки. В то же время было замечено, что если плотность пространственного заряда достаточно велика ($[(n_{oi} - n_{oe}) / n_0]^2 \gtrsim r_{di}^2 / a_n a_H$), устойчивость плазмы улучшается²⁶ (см. также²⁷). Теоретическое рассмотрение показывает, что при выполнении этого условия эффект смещения начального заряда в поле колебаний преобладает над эффектом разделения зарядов*). В предельном же случае, когда $[(n_{oi} - n_{oe}) / n_0]^2 \gg r_{di}^2 / a_n a_H$, желобковые колебания разреженной плазмы, по существу, ничем не отличаются от колебаний газа заряженных частиц, рассмотренных в предыдущем разделе. Поэтому и для желобковых колебаний разреженной плазмы должна выполняться теорема Рэля, согласно которой плазма устойчива, если плотность пространственного заряда меняется монотонно^{7, 18}. Влияние раскомпенсации на желобковые колебания разреженной плазмы рассматривалось также в работах²⁷⁻³³. В большинстве работ авторы пришли к выводу о стабилизирующем воздействии пространственного заряда. Однако в этих работах использовались методы, развитые для исследования колебаний покоящейся плазмы, которые не позволяют рассмотреть характерные (резонансные) явления, возникающие в результате дрейфа плазмы. Поэтому, хотя в некоторых из них^{27, 28} и получены правильные по порядку величины условия стабилизации, область применимости этих результатов ограничена малыми значениями плотности пространственного заряда, когда скорость дрейфа плазмы много меньше фазовой скорости колебаний.

*) С другой стороны, это условие означает, что скорость дрейфа в скрещенных полях превышает фазовую скорость желобковых колебаний.

В заключение подчеркнем, что в настоящем разделе мы ограничились случаем разреженной плазмы с $\omega_{pi} \ll \omega_i$. Корректное рассмотрение вопроса о влиянии электрических полей на желобковые колебания более плотной плазмы встречается со значительными математическими трудностями и поэтому к настоящему времени не проведено.

3. КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Пример желобковых колебаний показывает, что движение плазмы может явиться стабилизирующим фактором, причем, как и в случае обычной жидкости, стабилизация обязана поглощению колебаний в резонансных точках. В силу этого утверждение об устойчивости течений плазмы и жидкости с простейшими профилями скорости (типа профиля скорости без точек перегиба) может быть названо обобщенной теоремой Рэлея *). Доказательство этого утверждения для желобковых колебаний (см. предыдущий раздел) облегчалось ввиду сходства между поведением идеальной жидкости и поведением разреженного газа заряженных частиц в магнитном поле. В настоящей главе будет показано, что обобщенная теорема Рэлея справедлива также для колебаний электронного потока в сильном продольном магнитном поле. Колебания такой системы представляют простейший, но в то же время весьма характерный пример колебаний в движущейся плазме.

Введем прямоугольную систему координат, ось Oz которой параллельна направлению движения электронов, ось Ox — направлению, в котором меняется скорость электронов (рис. 7). Будем считать, что вдоль оси Oz направлено сильное магнитное поле, которое препятствует поперечным смещениям электронов, не влияя в то же время на продольные. Наличие магнитного поля существенно упрощает задачу. Плотность электронов будем считать постоянной. Предположим, что скорость электронов меняется по линейному закону $V_{0z}(x) = V_0 x/a$ ($-a \leq x \leq a$) и что при $x = \pm a$ система ограничена металлическими поверхностями, на которых обращается в нуль возмущение электрического потенциала.

Колебания рассматриваемой системы следует описывать с помощью уравнения Пуассона, уравнения непрерывности (см. (2,1)) и z -компоненты уравнения движения:

$$\frac{dV_{ze}}{dt} = \frac{e}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (3,1)$$

Из этих уравнений, линеаризованных по малым возмущениям, получаем, что самосогласованные возмущения потенциала Φ_1 должны удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} + \left[\frac{\omega_p^2}{(\omega - k_z V_0(x))^2} k_z^2 - k_z^2 - k_y^2 \right] \Phi_1 = 0. \quad (3,2)$$

*) Для стабилизации, как правило, необходимы достаточно большие градиенты скорости, чтобы изменение скорости в пределах системы значительно превышало фазовую скорость неустойчивых колебаний в покоящейся плазме.

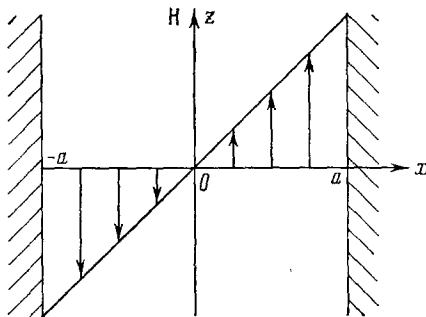


Рис. 7.

Здесь в силу стационарности системы и ее однородности по y и z возмущения потенциала выбраны в виде $\phi_1(\mathbf{r}, t) = \phi_1(x) e^{-i\omega t + ik_y y + ik_z z}$. Основное отличие уравнений, исследовавшихся в предыдущих разделах, от (3,2) состоит в том, что последнее в резонансной точке имеет полюс второго порядка.

Если электроны покоятся ($V_0 = 0$), то решения (3,2) имеют вид $\phi_1(x) = C \sin(k_x x)$, где $k_x^2 = k_z^2 [(\omega_p^2/\omega^2) - 1] - k_y^2$. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям $\phi_1(\pm a) = 0$, положим $k_x = n\pi/a$. Это условие определяет спектр частот собственных колебаний $\omega = \omega_{pe} k_z/k$, или в другом виде $\omega = \omega_{pe} \cos \theta$, где $\cos \theta = k_z/k$, $k^2 = k_z^2 + k_y^2 + (n\pi/a)^2$. Напомним, что в однородной и изотропной плазме частота лэнгмюровских колебаний равна ω_{pe} . Таким образом, влияние магнитного поля сводится к уменьшению частоты колебаний, распространяющихся под углом к магнитному полю.

Если $V_0 \neq 0$ ($V_0(x) = V_0 x/a$), то решения уравнения (3,1) имеют вид $\phi_1(x) = C_1 x^{1/2} J_\nu(x_1) + C_2 x_1^{1/2} J_{-\nu}(x_1)$, где $x_1 = ik_1 [x - (\omega a/k_z V_0)]$, $k_1^2 = k_z^2 + k_y^2$, $\nu^2 = (1/4) - (\omega_{pe}^2 a^2/V_0^2)$, $C_{1,2}$ — произвольные постоянные.

Значения частот собственных колебаний также определяются граничными условиями $\phi_1(\pm a) = 0$. Исследование этих условий показывает, что при любой величине градиента скорости $dV_0/dx = V_0/a$ колебания устойчивы, причем если $V_0/a > 2\omega_{pe}$, незатухающие колебания ($\text{Im } \omega \geq 0$) отсутствуют ³⁴ *). То есть в этом случае осуществляется та же ситуация, что и в течениях несжимаемой жидкости с профилем скорости без точек перегиба (см. гл. 1).

Колебания рассматриваемого течения исследовались также в работе ³⁵, где был сделан вывод о его неустойчивости при выполнении условия $V_0/a > 2\omega_{pe}$. В работе ³⁴, однако, показано, что этот результат связан с математическими ошибками, допущенными в работе ³⁵.

Уравнение (3,2) имеет особенность в точке x_s , где фазовая скорость волны по Oz совпадает со скоростью потока $V_0(x_s) = \omega/k$. В настоящем случае, так же как и в случае желобковых колебаний, в резонансных точках действует механизм бесстолкновительного поглощения Ландау, приводящий к поглощению энергии колебаний. Корректное рассмотрение этого процесса требует учета теплового разброса электронов по скоростям. Однако, если, как и ранее, не интересоваться деталями поведения решения в окрестности резонансной точки, можно пользоваться упрощенным уравнением (3,2), дополненным правилом обхода Ландау резонансной точки (см. ³⁴).

При выполнении условия $V_0/a > 2\omega_{pe}$ собственные колебания не образуют полной системы, так как по ним невозможно разложить возмущение потенциала, произвольным образом зависящее от x . Для этого случая в работе ³⁴ методом преобразования Лапласа непосредственно рассматривалась эволюция первоначальных возмущений во времени. Оказалось, что возмущения затухают по степенному закону — как t^α . Причем показатель α зависит от того, была ли возмущена при $t = 0$ плотность плазмы или ее скорость. В первом случае $\alpha = \nu - (3/2)$, во втором $\alpha = 2\nu - 1$ (здесь $\nu = [(1/4) - (\omega_{pe}^2 a^2/V_0^2)]^{1/2}$). Вклад во временную асимптотику обусловлен частично пучками электронов с плотностью, модулированной в направлении движения, а частично связан с резонансным откликом течения на возникновение возмущений (см.

*) Говоря точнее, даже при выполнении условия $V_0/a > 2\omega_{pe}$ для каждого значения k_z остаются по два собственных колебания, резонирующих с потоком у металлических стенок ($\omega/k_z = \pm V_0$, $\text{Im } \omega = 0$). Эти колебания аналогичны первой моде желобковых колебаний в аксиально-симметричных системах (см. раздел 2.1), а также колебаниям Пуазейлевского течения (см. приложение 1.3).

раздел 1.3). При достаточно большом времени ($t \gg (k_z v_T)^{-1}$), когда становятся существенными эффекты теплового разброса по скоростям, возмущения затухают более быстро (сравнить с затуханием возмущений в течениях несжимаемой жидкости под действием вязкости).

Такое рассмотрение справедливо при достаточно большой величине магнитного поля, когда $k_y V_0 / k_z a \omega_e \ll 1$, где ω_e — циклотронная частота электронов. Если это условие не выполняется, что часто бывает в эксперименте, необходимо учитывать поперечные смещения электронов в колебаниях. Этот случай исследовался в работах ^{36, 38, 39}, а также В. М. Костиным (дипломная работа). Общий результат этих исследований таков: течение неустойчиво, если выполняется условие $\omega_{pe}^2 a k_y / V_0 \omega_e k_z \gg 1$. Из этого критерия следует, что при достаточно большом градиенте скорости течение все же остается устойчивым.

Колебания электронного потока в отсутствие магнитного поля рассматривались в работах ^{37, 38}. Было показано, что при достаточно малом градиенте скорости ($k_z V_0(x) \ll \omega_{pe}$), когда эффекты резонансного взаимодействия колебаний с течением несущественны, колебания неустойчивы. Случай большого градиента скорости к настоящему времени еще не рассмотрен.

4. ЖЕЛОБКОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

В задачах, рассмотренных в предыдущих главах, резонанс колебаний с движением сплошной среды (плазмы или жидкости) приводил к поглощению энергии колебаний. В неоднородной плазме в магнитном поле возникает особый тип движения — так называемый ларморовский или градиентный дрейф, резонанс с которым должен привести к иному результату. Ларморовский дрейф возможен даже в однородном магнитном поле, когда каждая заряженная частица вращается по ларморовской окружности, центр которой покоится. Однако если плотность ларморовских центров или средняя энергия ларморовского вращения меняются поперек магнитного поля, возникает макроскопическое движение со скоростью $V_j = (c/n_j e_j H^2) [\nabla p_j]$, где p_j — давление частиц сорта j (e, i) (см., например, ^{40, 41}). Это выражение для скорости можно получить из гидродинамического уравнения движения

$$-\nabla p_j + (en_j/c) [\mathbf{V}_j \mathbf{H}] = 0. \quad (4.1)$$

Если волна резонирует с таким движением, ее фаза для каждой отдельной частицы меняется со временем, и поэтому механизм бесстолкновительного поглощения Ландау перестает действовать. Ввиду этого представляется особенно интересным вопрос о влиянии резонансов с ларморовским дрейфом на колебания не слишком плотной плазмы, когда столкновительная диссипация также отсутствует.

Оказывается, что если выполняется условие $\omega_{pi} \gg \omega_i$, то эффекты, связанные с ларморовским дрейфом ионов, необходимо учитывать при рассмотрении желобковых колебаний. В этом случае уравнение желобковых колебаний имеет следующий вид (см., например, ⁴²):

$$\frac{d}{dx} n_0 [\omega - kV_{\text{дт}}(x)] \frac{d\varphi_1}{dx} - k^2 n_0 [\omega - kV_{\text{дт}}(x)] \varphi_1 = 0. \quad (4.2)$$

Нами используется та же система координат, что и в гл. 2 (ось Oz параллельна магнитному полю, ось Ox направлена вдоль градиента плотности), возмущения электрического потенциала выбраны в виде $\varphi_1(x)e^{-i\omega t + ik_y y}$.

Напомним, что в гл. 2 рассматривалась плазма низкой плотности ($\omega_{pj} \ll \omega_j$) с нескомпенсированным пространственным зарядом ($n_{0e} \neq n_{0i}$). Теперь же мы считаем, что в начальном состоянии плазма нейтральна и что плотность ее достаточно высока ($\omega_{pj} \gg \omega_j$). В этом случае и возмущения плотности заряженных частиц в нулевом приближении по $(\omega_i/\omega_{pi})^2$ компенсируют друг друга. Такая плазма называется квазинейтральной. Будем считать также, что магнитное поле однородно. Последнее

предположение справедливо при выполнении условия

$$(kV_{pi})^2 \gg \frac{1}{H} \frac{dH}{dx} \frac{1}{nm_i} \frac{dp_i}{dx}.$$

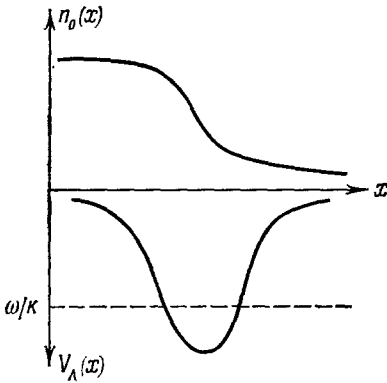


Рис. 8.

Влияние кулоновских соударений можно не учитывать, если $kV_{pi} \gg e^4 n_0 / m_j^{1/2} T_j^{3/2}$. Распределение плотности плазмы, характерное для экспериментальных условий, приведено на рис. 8. Температура (средняя энергия) для простоты считается не зависящей от координат.

В области, где $n_0 = \text{const}$, уравнение (4,2) имеет вид $(d^2\varphi_1/dx^2) - k^2\varphi_1 = 0$. Его решениями являются функции $\varphi_1(x) = e^{\pm kx}$. Поэтому собственные функции (4,2), если они существуют, должны

быть локализованы в области, где $dp_i/dx \neq 0$, и экспоненциально убывать вне ее $\varphi_1 \sim e^{-k|x|}$. Предположим, что такое решение $\tilde{\varphi}_1(x)$ существует. Помножим (4,2) на $\tilde{\varphi}_1^*(x)$ и проинтегрируем по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx n_0(x) (\omega - kV_{pi}(x)) \left(\left| \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dx} \right|^2 + k^2 |\tilde{\varphi}_1|^2 \right) dx = 0. \quad (4,3)$$

Из (4,3) следует, что мнимая часть частоты собственных колебаний должна обращаться в нуль и что в какой-то точке x_s должно выполняться резонансное условие $\omega/k = V_{pi}(x)$.

Уравнение (4,2) было получено разложением по безразмерному параметру $(r_{pi}V)$ и учитывает два первых члена разложения (длина волны колебаний считается большой по сравнению с ларморовским радиусом). Однако в окрестности резонансной точки высшие производные $\varphi_1(x)$ резко возрастают: $\varphi_1 \sim \ln(x - x_s)$, $d^m\varphi_1/dx^m \sim (x - x_s)^{-m}$. В этой области необходим учет следующих членов разложения. Если учесть только первую поправку, что возможно при распределении ионов по скоростям (перпендикулярным к магнитному полю), близком к δ -функции ($f_0(v_{\perp}, x) \approx n_0(x) \frac{1}{2\pi v_{\perp}} \delta(v_{\perp} - v_{\perp 0})$), то уравнение желобковых колебаний примет следующий вид ⁴²:

$$\frac{p_{0i}}{m_i \omega_i^2} (\omega - k\tilde{V}_{pi}(x)) \frac{d^4\varphi_1}{dx^4} + \frac{d}{dx} n_0 (\omega - kV_{pi}(x)) \frac{d\varphi_1}{dx} - k^2 n_0 (\omega - kV_{pi}(x)) \varphi_1 = 0, \quad (4,4)$$

где

$$\tilde{V}_{pi}(x) = -\frac{c}{H e p_{0i}} \frac{d\pi_{0i}}{dx}, \quad \pi_{0i} = 2\pi m_i \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp}^5 f_0(v_{\perp}, x).$$

Уравнение (4,4) напоминает уравнение колебаний несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса, когда мелкомасштабные эффекты, вызываемые вязкостью, также оказывались существенными в окрестности резонансной точки. Вязкость приводила к поглощению энергии колебаний, что учитывалось в рамках приближения идеальной гидродинамики использованием правила обхода Ландау резонансных точек. При резонансе с ларморовским дрейфом, как уже отмечалось выше, энергия колебаний не может поглотиться. Поэтому правило обхода Ландау оказывается неприменимым, а учет мелкомасштабных эффектов конечного ларморовского радиуса приводит к изменению характера решения в резонансной точке x_s , а именно: решение, медленно меняющееся в пространстве с одной стороны от x_s , которое хорошо описывалось в рамках уравнения (4,2), с другой стороны от точки x_s становится мелкомасштабным, требующим для своего рассмотрения уравнения (4,4).

В работе ⁴² было показано, что в простейших случаях уравнение (4,4) не имеет собственных функций. Поэтому, как и в аналогичной ситуации в гл. 1, в работе ⁴² с помощью метода преобразования Лапласа непосредственно рассматривалась задача об эволюции начальных возмущений. Распределение ионов по скоростям предполагалось максвелловским. Эффекты конечного ларморовского радиуса учитывались полностью. Было найдено, что при $k (dV_{Li}/dx) at \gg 1$ (здесь a — характерный масштаб изменения скорости ларморовского дрейфа) асимптотика возмущения, периодического по y ($\phi_1 \sim e^{ikh y}$), имеет вид

$$\phi_k(x, t) \approx [1 - I_0(\zeta) e^{-\zeta}]^{-1} e^{-ikh V_{Li}(x)t}, \quad (4,5)$$

где I_0 — функция Бесселя от мнимого аргумента, $\zeta = k (dV_{Li}/dx) r_{Li} t$. Если время не слишком велико, $\zeta \ll 1$ ($I_0 e^{-\zeta} \approx 1 - \zeta$), то $\phi_k \approx t^{-2} e^{-ikh V_{Li} t}$. Напомним, что в несжимаемой жидкости возмущения затухали по такому же закону (см. раздел 1.2). Это сходство не случайно, но связано с тем обстоятельством, что при $\zeta \ll 1$, когда эффекты конечного ларморовского радиуса несущественны, для описания желобковых колебаний можно использовать упрощенное уравнение (4,2), имеющее ту же структуру, что и уравнение (1,5), описывающее колебания несжимаемой жидкости (оба уравнения второго порядка, и их решения имеют логарифмическую особенность).

При $\zeta \gg 1$ ($I_0 e^{-\zeta} \approx (2\pi\zeta)^{1/2} \ll 1$) амплитуда $\phi_k(x, t)$ перестает зависеть от времени. В этом случае возмущение разбивается на совокупность невзаимодействующих модулированных пучков, переносимых вдоль Oy с локальной скоростью ларморовского дрейфа. Это означает, что элементарное возмущение, зависящее от времени как $e^{-ikh V_{Li}(x_1)t}$, должно включать в себя сингулярную часть типа $\phi_k(x) \sim \delta(x - x_1)$. Это подтверждается при рассмотрении пространственной зависимости возмущений.

Задача о желобковых колебаниях в ином аспекте рассматривалась в ряде других работ (см., например, ^{43, 44}). В них основное внимание было обращено на установление условий стабилизации колебаний при переходе от разреженной плазмы (см. раздел 2.2) к квазинейтральной. Предполагалось, что пространственный заряд скомпенсирован. Влияние резонансных эффектов на желобковые колебания изучалось в работе ⁴⁵. В качестве основного средства для устранения сингулярности в соответствующем дифференциальном уравнении предлагался переход к комплексным значениям частоты с $\text{Im } \omega > 0$, что, по существу, эквивалентно использованию правила обхода Ландау. Мы видим, что в настоящем случае это было бы неверным.

5. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОКОЯЩЕЙСЯ ПЛАЗМЕ

5.1. Циклотронный резонанс в неоднородном магнитном поле

Плазма, а тем более плазма в магнитном поле, может проявлять качественно новые свойства по сравнению с обычной жидкостью. В частности, в плазме колебания могут резонировать с движением заряженных частиц даже в том случае, если плазма покоится. В качестве простейшего примера рассмотрим задачу о распространении вдоль неоднородного магнитного поля электромагнитных колебаний с круговой поляризацией и частотой, близкой к электронной циклотронной. Если движение электронов в поле волны описывать с помощью гидродинамических уравнений, то для амплитуды электрического поля $E(z)$ нетрудно получить следующее уравнение (см., например, ⁴⁻⁶):

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E - \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{c^2 [\omega - \omega_e(z)]} E = 0; \quad (5,1)$$

здесь ось Oz направлена вдоль магнитного поля. Рассматриваются колебания, электрический вектор которых вращается в ту же сторону, что и электроны в магнитном поле: $E = (1/\sqrt{2}) \{E(z); iE(z); 0\}e^{-i\omega t}$.

В точке z_s , где электронная циклотронная частота совпадает с частотой колебаний, уравнение (5,1) имеет особенность. Для ее устранения

необходимо рассмотреть резонансное взаимодействие колебаний с движением электронов, вращающихся по ларморовским окружностям ⁴⁶⁻⁴⁹. Оказывается, что это взаимодействие приводит к поглощению энергии колебаний и что его влияние на колебания можно учесть в рамках упрощенного уравнения (5,1), если резонансную точку обходить в комплексной плоскости по Ландау ⁴⁶. При этом (5,1) становится близким к уравнению (1,5) (см. гл. 1). Если по аналогии с рассмотрением, проведенным в гл. 1, подходить к уравнению (5,1) как к уравнению Шрёдингера, то оно будет отличаться от (1,5) лишь знаком «полной энергии» (рис. 9). Это различие приводит к возможности существования колебаний, свободно распространяющихся при $z \rightarrow \pm\infty$.

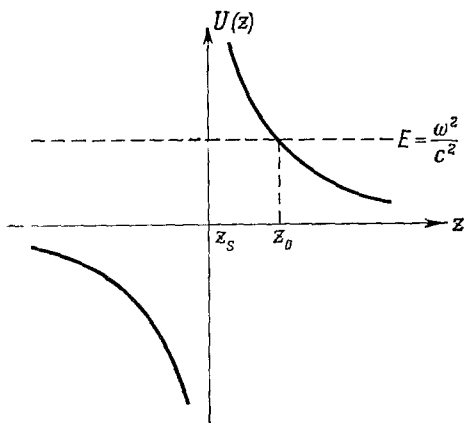


Рис. 9. Эффективный потенциал $U(z)$ для уравнения (5,1).

z_s, z_0 — сингулярная и обычная точки поворота.

Это различие приводит к возможности существования колебаний, свободно распространяющихся при $z \rightarrow \pm\infty$.

Рассмотрим волну, излучаемую при $z = -\infty$ и падающую на резонансную точку слева. При $\omega_{pe}^2 \gg c |d\omega_e/dz|$, когда законно использование квазиклассического приближения, рассмотрение, аналогичное проведенному в разделе 1.2, приводит к выводу о полном поглощении колебаний ^{4-6, 46, 48}. Если плотность плазмы мала: $\omega_{pe}^2 \ll c |d\omega_e/dz|$, так что плазма оказывает малое воздействие на распространение колебаний, то и коэффициент поглощения η оказывается малым: $\eta \approx \pi \omega_{pe}^2 / c |d\omega_e/dz|$ (см. ^{48, 49}). Общее выражение для коэффициента поглощения, охватывающее оба предельных случая, имеет вид $\eta = 1 - \exp[-\pi \omega_{pe}^2 / c |d\omega_e/dz|]$. Интересно отметить, что для волны, распространяющейся с $z =$

$= -\infty$, коэффициент поглощения имеет меньшее значение: $\eta' = \exp[-\pi\omega_{pe}^2/c \mid d\omega_e/dz \mid] \eta^4$. Действительно, такая волна сначала набегают на обычную точку поворота, от которой частично отражается. Поэтому к резонансной точке, где происходит поглощение колебаний, проникает лишь некоторая часть энергии волны порядка $\exp[-\pi\omega_{pe}^2/c \mid d\omega_e/dz \mid]$.

5.2. Циклотронная неустойчивость в неоднородном магнитном поле

В предыдущем разделе рассматривались колебания с частотой, близкой к циклотронной, излучаемые внешним источником. В то же время известно, что в плазме с термодинамически неравновесным распределением частиц по скоростям циклотронные колебания могут возникать самопроизвольно. Если магнитное поле неоднородно, то область резонансного циклотронного взаимодействия сокращается. В этом случае по аналогии с задачами, рассмотренными в гл. 1—3 обзора, естественно ожидать появления стабилизирующего эффекта. Такой результат и был получен в работе ⁵⁰, где рассматривались ионные циклотронные колебания в термодинамически неравновесной плазме. В ионных циклотронных колебаниях наряду с ионами участвуют и электроны, причем свойства колебаний существенно зависят от температуры электронов. В работе ⁵⁰ было показано, что если электроны горячие ($\epsilon_{||e}\omega_i^2/\epsilon_{\perp i}\omega_{pi}^2 \gg 1$), то при достаточно большой неоднородности магнитного поля ($a/L \gg \omega_{pi}^2/\omega_i^2$) циклотронная неустойчивость может быть застabilизирована (здесь a — размер системы, L — характерный масштаб изменения магнитного поля, $\epsilon_{||j}(\epsilon_{\perp j})$ — средняя энергия теплового движения заряженных частиц вдоль (поперек) магнитного поля). Если электроны холодные ($\epsilon_{||e}\omega_i^2/\epsilon_{\perp i}\omega_{pi}^2 \ll 1$), то, как показано в работе ⁵⁰, неоднородность магнитного поля лишь уменьшает инкремент неустойчивости.

5.3. Преобразование колебаний в плазме

В плазме существует множество различных типов колебаний. Нередко одну и ту же частоту имеют колебания с различной длиной волны (крупно- и мелкомасштабные). Если среда однородна, то такие колебания никак не связаны друг с другом. Однако в неоднородной среде колебания с различными пространственным масштабом перестают быть независимыми. Связь между ними осуществляется особенно эффективно в точках, в которых показатель преломления (волновое число) крупномасштабных колебаний обращается в бесконечность. Действительно, по мере приближения к таким точкам характерная длина волны крупномасштабных колебаний уменьшается, так что в конце концов разделение колебаний на крупно- и мелкомасштабные теряет смысл.

Имеется значительное число работ, в которых рассматривалось преобразование различных типов колебаний (см., например, ^{5, 6, 51-54}). В качестве простейшего примера мы рассмотрим задачу о преобразовании длинноволновых электронных лэнгмюровских колебаний в коротковолновые ⁵³. Если плазма находится в магнитном поле, то такие колебания описываются уравнением

$$\frac{3}{2} \frac{\omega_{pe}^2 v_{Te}^2}{\omega^4} \frac{d^4 \varphi_1}{dz^4} + \frac{d}{dz} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \frac{d\varphi_1}{dz} - k_{\perp}^2 \varphi_1 = 0; \quad (5,2)$$

здесь v_{Te} — тепловая скорость электронов. Предполагается, что магнитное поле направлено по Oz и что в том же направлении меняется плотность плазмы $\omega_{pe}^2(z) = 4\pi e^2 n_0(z)/m_e$. Возмущения потенциала выбраны в виде

$\varphi_1(\mathbf{r}, t) = \varphi_1(z) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp}$ (\mathbf{k}_\perp — компонента волнового вектора, перпендикулярная к магнитному полю). Уравнение (5,2) является приближенным, так как влияние конечной температуры электронов учтено в нем лишь частично (оставлен член с наименьшей степенью по v_{Te}). Однако для наших целей такой учет вполне достаточен. Если характерный пространственный масштаб колебаний по Oz существенно превышает дебаевский радиус $r_{de} = v_{Te}/\omega_{pe}$, то в (5,2) можно опустить первое слагаемое:

$$\frac{d}{dz} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2(z)}{\omega^2} \right) \frac{d\varphi_1}{dz} - k_\perp^2 \varphi_1 = 0. \quad (5,3)$$

Если в то же время пространственный масштаб мал по сравнению с расстоянием, на котором меняется плотность плазмы, то для описания колебаний можно использовать квазиклассическое приближение, полагая

$\varphi_1(z) \approx k_\parallel^{-1/2} \exp \left(i \int^z k_\parallel dz \right)$. При этом из (5,3) получаем $k_\parallel^2 = k_\perp^2 / [(\omega_{pe}^2/\omega^2) - 1]$, или в другом виде: $\omega^2 = \omega_{pe}^2 k_\parallel^2 / k^2$. Таким образом, в пренебрежении

тепловыми эффектами мы получили замагниченные электронные ленгмюровские колебания, в ином аспекте рассматривавшиеся в гл. 3.

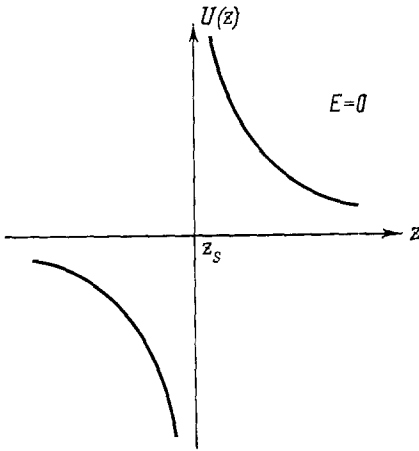
Предположим, что плотность спадает слева направо. Тогда в области, где плотность достаточно низка ($\omega_{pe} < \omega$), могут распространяться коротковолновые колебания, для которых в квазиклассическом приближении имеем $k_\parallel^4 = 2\omega^4 k^2 / 3\omega_{pe}^2 v_{Te}^2$. Это соотношение получено из (5,2) в пренебрежении последним слагаемым.

Пусть колебания излучаются при $z = -\infty$ и распространяются по плазме слева направо. В области, где применимо квазиклассическое приближение, уравнение (5,3) можно рассматривать как уравнение Шрёдингера, описывающее движение частицы с нулевой полной энергией

Рис. 10. Эффективный потенциал $U(z)$ для уравнения (5,3).

z_s — сингулярная точка поворота.

в потенциале $U(z) = k_\perp^2 / [1 - (\omega_{pe}^2(z)/\omega^2)]$ (рис. 10). В точке z_s , где $\omega = \omega_{pe}(z_s)$, эффективный потенциал обращается в бесконечность. Сходные уравнения рассматривались в гл. 1 и разделе 5.1, где было показано, что в точке, в которой потенциал обращается в бесконечность, колебания полностью поглощаются. Анализ полного уравнения (5,2) показывает, что в настоящем случае в точке z_s энергия длинноволновых колебаний целиком переходит в энергию коротковолновых. (Напомним, что коротковолновые колебания как раз могут распространяться в области $z > z_s$. Для них точка z_s является обычной точкой поворота.) Сходство между настоящей задачей и рассмотренными ранее увеличивается в силу того обстоятельства, что, как отмечено в работе ⁵⁴, при нахождении длинноволновых решений (5,2) можно использовать некоторую модификацию правила обхода Ландау. А именно, если не интересоваться коротковолновым решением, то точку z_s можно обходить в комплексной плоскости. Правило обхода получается добавлением к частоте малой положительной мнимой части ν ; при этом точка z_s смещается с действительной оси на $\delta z_s = \nu (d\omega_{pe}/dz)^{-1}$.



6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, устойчивость и колебательные свойства течений плазмы и обычной жидкости в значительной степени определяются физическими процессами, действующими в малой окрестности резонансных точек. В частности, устойчивость течений с простейшими профилями скорости обеспечивается резонансным поглощением колебаний. Однако естественно предположить, что эти результаты справедливы только для колебаний с достаточно малой амплитудой. Действительно, если амплитуда смещения частиц в колебаниях значительно превысит ширину слоя поглощения, то физические процессы, действующие в этом слое, не смогут оказать сколько-нибудь значительного воздействия на эволюцию колебаний. В этом случае в окрестности резонансных точек станет необходимым учет нелинейных эффектов. Таким образом, на очередь встает разработка нелинейной теории резонансных явлений в неоднородных течениях плазмы и обычной жидкости. Возможно, в частности, что на этом пути удастся вскрыть механизм, приводящий к неустойчивости куэттовского течения.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. КОЛЕБАНИЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ТЕЧЕНИЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

1. Следуя работе ³, покажем, что в течениях с профилем скорости без точек перегиба наряду с нарастающими собственными колебаниями ($\text{Im} \omega > 0$) отсутствуют и нейтральные ($\text{Im} \omega = 0$). Произведем в (1,5) замену $\varphi_1 = (\omega/k - V_0(x)) \psi_1$:

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{\omega}{k} - V_0(x) \right)^2 \frac{d\psi_1}{dx} \right] - k^2 \left(\frac{\omega}{k} - V_0(x) \right)^2 \psi_1 = 0. \quad (1,1)$$

Предположим, что это уравнение имеет решение $\Psi_1(x)$, удовлетворяющее граничным условиям $\tilde{\varphi}_1(x) = \left(\frac{\omega}{k} - V_0(x) \right) \tilde{\psi}_1(x) = 0$ на обоих концах интервала (x_1, x_2) . Помножим (1,1) на $\tilde{\psi}_1^*(x)$ и проинтегрируем по частям:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\omega}{k} - V_0(x) \right)^2 \left[\left| \frac{d\tilde{\psi}_1}{dx} \right|^2 + k^2 |\tilde{\psi}_1|^2 \right] dx = 0. \quad (1,2)$$

Если $\text{Im} \omega = 0$, $\omega/k \neq V_0(x)$ ($x_1 < x < x_2$), то (1,2) не может быть удовлетворено, и поэтому колебания с таким значением частоты отсутствуют. Легко видеть, что (1,2) остается в силе и в том случае, когда резонансная точка x_s , в которой выполняется условие $\omega/k = V_0(x_s)$, совпадает с одним из концов интервала (x_1, x_2) . Если точка x_s попадает внутрь этого интервала, то соотношение (1,2) теряет смысл, так как интеграл расходится. Возвращаясь в этом случае к (1,6) и вспоминая определение $\lim_{\alpha \rightarrow 0} [\alpha/(x^2 + \alpha^2)] = \delta(x)$ ($\alpha = \text{Im} \omega/[k V_0'(x_s)]$), для мнимой части интеграла в (1,6) получаем

$$\pi \text{sgn}(\text{Im} \omega) |\tilde{\psi}_1(x_s)|^2 V_0''(x_s) |V_0'(x_s)|^{-1} \neq 0. \quad (1,3)$$

Таким образом, соотношение (1,6), которое должно выполняться для всех собственных функций уравнения (1,5), не удовлетворяется при $\text{Im} \omega \rightarrow 0$. Если $\tilde{\varphi}_1(x_s) = 0$, то следует рассмотреть один из интервалов (x_1, x_s) или (x_s, x_2) . При этом нам не удастся удовлетворить условию, аналогичному (1,2).

2. Если профиль скорости имеет точку перегиба x_0 ($V_0''(x_0) = 0$), то особый интерес представляют колебания, резонирующие с течением в этой же точке, для которых $V_0(x_0) = \omega/k$ (см., например, ³). Для таких колебаний (рис. 11) уравнение (1,5) является регулярным. Перепишем его в виде

$$\varphi_1'' - \lambda \varphi_1 + K(x) \varphi_1 = 0; \quad (1,4)$$

здесь $\lambda = k^2$, $k(x) = -V_0''(x) / (V_0(x) - V_0(x_0))$. Если $(V_0'''(x_0)/V_0'(x_0)) < 0$, то $K(x) > 0$ по крайней мере в окрестности точки x_0 , где $K(x) \approx -V_0'''(x_0)/V_0'(x_0)$. В этом случае по теореме Штурма — Лиувилля у уравнения (1,4) должны существовать собственные функции φ_{1n} с соответствующими собственными значениями $\lambda_n = k_n^2$. Для таких

колебаний $\omega_n = k_n V_0(x_0)$, $\text{Im} \omega_n = 0$. Можно показать (см., например, ³), что колебания с меньшими значениями k^2 оказываются неустойчивыми. Вообще, по-видимому, с уменьшением k устойчивость течений ухудшается. Наиболее неустойчивые колебания, с $k = 0$, рассматривались в работе ⁵⁵, где показано, что условие обращения в нуль величины V_0' является необходимым и достаточным для неустойчивости течений идеальной жидкости.

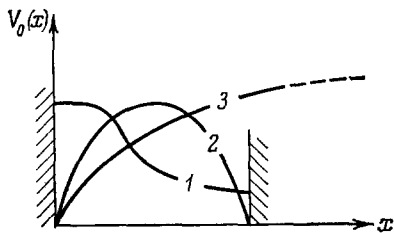


Рис. 11. Профили скорости течений: 1 — с точкой перегиба, 2 — Пуазейлевского, 3 — течения типа пограничного слоя.

3. Анализ, проведенный в приложении I.1, не совсем полон. Действительно, предположим, что скорость течения по Ox меняется монотонно и на границах (x_1, x_2) обращается в нуль. Легко видеть, что в этом случае уравнения (I.1) и (I.2) удовлетворяются при $k = 0$, $\omega/k = 0$, $\varphi_1 = C V_0(x)$. Такие «колебания» резонируют с течением у его границ; поэтому при их рассмотрении правило обхода Ландау оказывается неприменимым и вязкость жидкости необходимо учитывать, как бы ни была она мала. Гейзенбергом было показано, что под влиянием вязкости колебания становятся неустойчивыми. Причем с уменьшением вязкости инкремент колебаний и их частота стремятся к нулю, так что в предельном

случае мы действительно получаем описанное выше решение. Анализ «вязкого» уравнения (I.9) громоздок и требует привлечения численных методов (см., например, ³), поэтому он здесь не приводится. Аналогичная неустойчивость была обнаружена для течения типа пограничного слоя, когда $V_0(x) \rightarrow \text{const}$

В этом случае граничное условие на бесконечности имеет вид $V_1(\infty) = 0$.

II. УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПЕРЕД СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

1. К уравнениям подобного типа относится уравнение (1.9), если вязкость жидкости достаточно мала. Ввиду наличия малого параметра перед четвертой производной его решения можно разделить на быстро и медленно меняющиеся. При рассмотрении медленно меняющихся решений можно не учитывать вязкости, ограничиваясь приближением идеальной гидродинамики. Для быстро меняющихся решений вязкость является существенной. Однако такое разделение оказывается несправедливым в окрестности резонансной точки, где решения с различным пространственным масштабом «завязываются» друг с другом. Для исследования свойств решений в этой области Вазов ⁸ ввел семь функций: A_k , U_k , V_k ($k = 1, 2, 3$), связав их тремя соотношениями:

$$A_i = e_{ikl} U_l + \delta_{i2} V; \quad (\text{II.1})$$

здесь e_{ikl} — абсолютно антисимметричный тензор, δ_{i2} — символ Кронекера.

Оказалось, что разделение решений на быстро меняющиеся (A_k) и медленно меняющиеся (U_k , V) происходит уже в малой окрестности точки x_s : $|z| \gtrsim \max(|\Lambda|^{-1}, |\Lambda|^{-3})$ (здесь $z = (x_s - x) V_0'(x_s)/V_0(x_s)$, $\Lambda = ik V_0'^4(x_s)/v V_0'^3(x_s) \approx ika \cdot \text{Re}$, где $\text{Re} = V_0 a/v$ — число Рейнольдса невозмущенного течения, a — характерный масштаб изменения V_0). Следуя работе ⁸, рассмотрим аналитическое продолжение этих решений на плоскость комплексного переменного z и в области $|z| \ll 1$ разобьем ее на секторы S_k (рис. 12). Для определенности считается $k V_0'(x_s) > 0$, $V_0''(x_s) > 0$.

Для A_k всюду, кроме линий C_k ($\arg C_k = 11/6\pi - 2lk/3$), оказывается справедливым асимптотическое представление

$$A_k = \alpha_k \pi^{1/2} \Lambda^{-3/4} z^{-5/4} \exp \{ \beta_k [(2i/3) \Lambda^{1/2} z^{3/2} + (i\pi/4)] \}; \quad (\text{II.2})$$

здесь $-\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha_3 = -\beta_1 = \beta_2 = -\beta_3 = 1$.

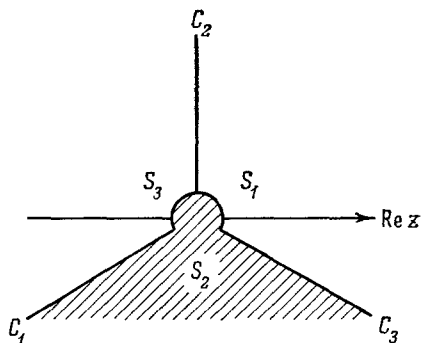


Рис. 12. Плоскость комплексного переменного для уравнения (1.9) в окрестности точки x_s .

Область, в которой необходимо учитывать вязкость, заштрихована.

U_h в секторах $S-S_k$ выражаются через функции Ханкеля:

$$U_h = \pi i \sqrt{z} H_1(2\sqrt{z}) \underset{|z| \rightarrow 0}{\approx} 1 + z \ln z + \dots \quad (\text{II},3)$$

И, наконец, функция V во всей плоскости z выражается через функцию Бесселя:

$$V = 2\pi i \sqrt{z} J_1(2\sqrt{z}) \underset{|z| \rightarrow 0}{\approx} 2\pi i \left(z - \frac{z^2}{2} + \dots \right). \quad (\text{II},4)$$

В тех областях, где (II,2), (II,3) несправедливы, для определения A_h, U_h следует воспользоваться соотношением (II,1).

Выражения (II,3), (II,4) можно было бы получить, полагая вязкость равной нулю, т. е. в приближении идеальной гидродинамики (см. (1,5)). Однако из (II,1) следует, что в секторах S_k пространственный масштаб U_h меняется — эти решения становятся «вязкими». Таким образом, использование приближения идеальной гидродинамики во всей плоскости комплексного переменного z оказывается невозможным. Тем не менее, если в качестве линейно независимых решений уравнения (1,5) выбрать V, U_2 и обходить резонансную точку $x_s (z=0)$ в плоскости комплексного переменного z сверху, то всюду на действительной оси, кроме малой окрестности точки $x_s (|z| \leq \min(|\Lambda|^{-1}, |\Lambda|^{-3}))$, приближение идеальной гидродинамики будет справедливым (см. рис. 12). Нетрудно видеть, что это правило обхода совпадает с правилом обхода Ландау.

2. Уравнение желобковых колебаний квазинейтральной плазмы (4,4) по своим свойствам близко к уравнению (1,9). В частности, его решения также разделяются на быстро меняющиеся A_h и медленно меняющиеся U_h, V . Существенно, однако, что в этом случае секторы S_k , в которых меняется пространственный масштаб решений U_h , повернуты на угол $\pi/6$ (рис. 13). На рисунке изображена окрестность точки x_{s1} (см. рис. 7). Для того чтобы получить соответствующую картину для крестности x_{s2} (см. рис. 13), следует сделать отражение в точке резонанса. Из рисунка следует, что, какую бы функцию из U_h мы ни взяли, решение будет медленно меняющимся на действительной оси только по одну сторону от x_s . Причем решение, медленно меняющееся слева от x_s , справа от x_s становится быстро меняющимся, а решение, медленно меняющееся справа от x_s , слева от x_s становится быстро меняющимся и нарастающим. Напомним, что на линиях C_h фаза A_h действительна (см. (II,2)).

3. В случае электронных лэнгмюровских колебаний, описываемых уравнением (5,2), расположение секторов S_h дается рис. 13. В области $x < 0$ волна, бегущая направо, дается решением $U_3 - V \sim e^{-2ix^{1/2}} (|x| \gg 1, x = (z_s - z) k_{\perp}^2 \omega / \omega_{pe}^2)$. Согласно (II,4) при $x > 0$ она переходит в быстро осциллирующее решение, описывающее волну, бегущую направо, и в медленно меняющееся решение, убывающее направо от $x = 0$. Последнее можно было бы получить с помощью упрощенного уравнения (5,3), используя правило обхода, приведенное в конце раздела 5.3.

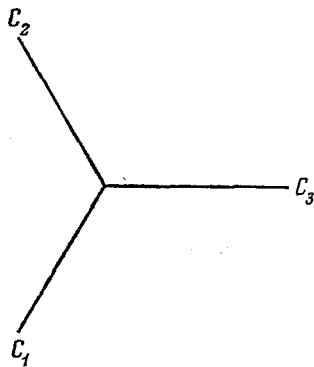


Рис. 13.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 16, 574 (1946).
2. R a y l e i g h (J. W. Strutt), Scientific Papers, Cambridge Univ. Press, m. 1, 1880, стр. 474; m. 3, 1887, стр. 17; 1892, стр. 575; m. 4, 1895, стр. 203.
3. Л и н ь Ц з я - ц з я о, Теория гидродинамической устойчивости, М., ИЛ, 1958.
4. K. G. B u d d e n, Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge Univ. Press, 1961.
5. Т. С т и к с, Теория плазменных волн, М., Атомиздат, 1965.
6. В. Л. Г и н з б у р г, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., «Наука», 1967.
7. А. В. Т и м о ф е е в, ЖТФ 38, 14 (1968).
8. W. W a s o w, Ann. Math. 49, 852 (1948).
9. Д. Х е д и н г, Введение в метод фазовых интегралов, М., «Мир», 1965.
10. Г. М. З а с л а в с к и й, Лекции по применению метода ВКБ в физике, Новосибирск Изд-во НГУ, 1965.

11. Н. Фрёман, П. У. Фрёман, ВКБ-приближение, М., «Мир», 1967.
 12. К. М. Сасе, *Phys. Fluids* **3**, 143, 149 (1960).
 13. Л. А. Диккий, *ДАН СССР* **135**, 1068 (1960).
 14. А. В. Тимофеев, *Резонансные явления в течениях плазмы и жидкости*, Препринт ИАЭ-1570 (1968).
 15. N. G. Van Kampen, *Physica* **21**, 949 (1955) (см. перевод в сб. «Колебания сверхвысоких частот в плазме», М., ИЛ, 1961).
 16. В. И. Карпман, *ЖЭТФ* **51**, 907 (1966).
 17. R. H. Levy, *Phys. Fluids* **8**, 1288 (1965).
 18. A. V. Timofeev, *Plasma Phys.* **10**, 235 (1968).
 19. А. В. Тимофеев, *ЖТФ* **36**, 1787 (1966).
 20. R. H. Levy, *Phys. Fluids* **11**, 920 (1968).
 21. В. В. Арсенин, *Ядерный синтез* **5**, 152 (1965).
 22. W. Knauper, *J. Appl. Phys.* **37**, 602 (1966).
 23. G. G. Masfargane, H. G. Nau, *Proc. Phys. Soc.* **B63**, 409 (1950).
 24. В. П. Тychинский, Ю. Т. Деркач, *Радиотехника и электроника* **1**, 233, 344 (1956).
 25. Б. Б. Кадомцев, *ЖЭТФ* **40**, 328 (1961).
 26. Г. Ф. Богданов, И. Н. Головин, Ю. А. Кучеряев, Д. А. Панов, *Ядерный синтез*, приложение **1**, 215 (1962).
 27. C. C. Damm et al., *Phys. Fluids* **8**, 1472 (1965).
 28. Б. Б. Кадомцев, *Ядерный синтез* **1**, 296 (1961).
 29. А. А. Рухадзе, И. С. Шпигель, *ЖЭТФ* **48**, 151 (1965).
 30. M. N. Rosenbluth, A. Simon, *Phys. Fluids* **9**, 726 (1966).
 31. T. E. Stringer, G. Schmidt, *Plasma Phys.* **9**, 53 (1967).
 32. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, А. А. Чечина, *ЖТФ* **38**, 1205 (1968).
 33. Y. N. Dnestrovsky, D. P. Kostomarov, L. F. Suzdaltseva, *Nucl. Fusion* **8**, 341 (1968).
 34. В. М. Костин, А. В. Тимофеев, *ЖЭТФ* **53**, 1378 (1967).
 35. E. R. Harrison, *Proc. Phys. Soc.* **B82**, 689 (1963).
 36. А. Б. Михайловский, А. А. Рухадзе, *ЖТФ* **35**, №12 (1965).
 37. Е. Е. Ловецкий, А. А. Рухадзе, *Ядерный синтез* **6**, 9 (1966).
 38. L. S. Bogdankevich, I. I. Zhelyazkov, A. A. Rukhadze, *Nucl. Fusion* **9**, 239 (1969).
 39. И. И. Желязков, А. А. Рухадзе, *ЖТФ* **40**, № 2 (1970).
 40. И. Е. Тамм, в сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 1, М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 3.
 41. С. И. Брагинский, в сб. «Вопросы теории плазмы», т. 1, М., Госатомиздат, 1963.
 42. A. V. Timofeev, *Nucl. Fusion* **8**, 99 (1968).
 43. M. N. Rosenbluth, N. A. Krall, N. Rostoker, *Nucl. Fusion, Suppl.* **1**, 143 (1962).
 44. А. Б. Михайловский, *ЖЭТФ* **43**, 509 (1962).
 45. M. N. Rosenbluth, A. Simon, *Phys. Fluids* **8**, 1300 (1965).
 46. A. V. Timofeev, A. K. Nekrasov, *Nucl. Fusion* **10** (1970).
 47. А. Д. Пилия, *ЖТФ* **34**, 93 (1964).
 48. A. F. Kuckes, *Plasma Phys.* **10**, 367 (1968).
 49. M. Grambilla, *Plasma Phys.* **10**, 359 (1968).
 50. A. V. Timofeev, K. S. Klorowsky, *Plasma Phys.* **12** (1970).
 51. С. С. Моисеев, Доклад на 7-й Международной конференции по ионизованным газам, Белград, 1965.
 52. T. Stix, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 878 (1965).
 53. V. Кореску, J. Preinhalter, *Plasma Phys.* **11**, 333 (1969).
 54. А. Д. Пилия, Федоров, *ЖЭТФ* **57**, 1198 (1969).
 55. M. N. Rosenbluth, A. Simon, *Phys. Fluids* **7**, 557 (1964).
-