1969 г. Сентябрь *Том 99, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

535.23

К ИСТОРИИ СТАТИСТИКИ ФОТОНОВ *)

Д. Тер-Хаар

Исследование излучения черного тела не только привело Планка к открытию кванта действия и Эйнштейна к световым квантам (или фотонам), в результате тех же самых исследований Бозе предложил новый тип статистики. Теперь эту статистику называют статистикой Бозе — Эйнштейна или просто статистикой Бозе. Здесь мне хотелось бы остановиться на основных этапах той деятельности, которая завершилась построением статистики Бозе.

Позвольте мне начать с того, что я просто выпишу две основные формулы, которые нам понадобятся. Первая из них — это планковский закон излучения абсолютно черного тела

$$u(\omega,\ T)=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}, \tag{1}$$

где $u(\omega,\ T)$ — плотность энергии излучения в интервале частот $\omega,\ \omega+d\omega$ при абсолютной температуре T; $\hbar$ — постоянная Планка с дираковской нормировкой; c — скорость света, а $\beta=1/kT$ (где, как обычно, k — постоянная Больцмана).

Вторая формула — это выражение для флуктуаций плотности энергии

$$\langle[u(\omega)\,d\omega-\langle u(\omega)\,d\omega\rangle]^2\rangle=\hbar\omega\langle u(\omega)\rangle\,d\omega+\frac{\pi^2c^3\langle u(\omega)\rangle^2\,d\omega}{\omega^2}, \tag{2}$$

где угловые скобки $\langle\ldots\rangle$ обозначают статистическое среднее. Нам придется рассмотреть также два предельных случая выражений (1) и (2). Для очень высоких частот ($\beta\hbar\omega\gg1$) мы получим из (1)

$$u(\omega,\ T)\sim\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\,e^{-\beta\hbar\omega}\quad(\beta\hbar\omega\gg1), \tag{1a}$$

а из (2)

$$\langle[u(\omega)\,d\omega-\langle u(\omega)\,d\omega\rangle]^2\rangle\sim\hbar\omega\langle u(\omega)\,d\omega\rangle\quad(\beta\hbar\omega\gg1). \tag{2a}$$

С другой стороны, для очень низких частот ($\beta\hbar\omega\ll1$) из тех же самых уравнений (1) и (2) получим

$$u(\omega,\ T)\sim\frac{\omega^2kT}{\pi^2c^3}\quad(\beta\hbar\omega\ll1), \tag{1б}$$

$$\langle[u(\omega)\,d\omega-\langle u(\omega)\,d\omega\rangle]^2\rangle\sim\frac{\pi^2c^3}{\omega^2}\langle u(\omega)\rangle^2\,d\omega\sim\frac{\omega^2k^2T}{\pi^2c^3}\,d\omega\quad(\beta\hbar\omega\ll1). \tag{2б}$$

Выражения (1а) и (1б) представляют собой соответственно законы Вина и Рэлея.

*) D. ter Haar, On the History of Photon Statistics. Лекция в летней школе по квантовой оптике в Варенне, 1967. Перевод В. А. Угарова с препринта, любезно представленного автором.

Последнее десятилетие XIX века ознаменовалось бурным развитием физики: впервые на сцене появился томсоновский электрон, были открыты эффект Зеемана, радиоактивность, рентгеновские лучи. Однако и вопросами, связанными с излучением черного тела, занимались многие физики, как экспериментаторы, так и теоретики. Если большинство теоретиков, самым видным из которых был Рэлей, подходили к проблеме излучения черного тела, сосредоточивая свое внимание на энергии поля излучения, то Планк опирался на свои исследования, связанные со вторым началом термодинамики, и рассматривал энтропию. Планк искал равновесную плотность энергии и в конечном счете (но отнюдь не на первых порах, как это он вспоминает сам *) в своей Нобелевской лекции) воспользовался теоремой Кирхгофа. Эта теорема утверждает, что излучение, находящееся внутри замкнутой оболочки, не зависит от того, из какого материала сделаны стенки этой оболочки, а определяется исключительно их температурой. На этой основе Планк и рассматривал равновесие между полем излучения и системой осцилляторов.

Из общих термодинамических соображений можно узнать довольно много о функции $u(\omega, T)$. Можно, например, выяснить, что общий вид функции $u(\omega, T)$ должен быть таким:

$$u(\omega, T) = \omega^3 f(\omega/T). \tag{3}$$

Однако сказать что-либо конкретное о функции $f(\omega/T)$ невозможно. Заметим мимоходом, что из выражения (3) уже вытекают как закон Стефана — Больцмана, так и закон смещения Вина.

Исходя из этих соображений, Планк занялся исследованием равновесия между излучением и поглощением электромагнитного излучения вибраторами Герца (излучающие гармонические осцилляторы). Излучение осцилляторов пропорционально средней энергии осциллятора $\bar{\varepsilon}$, а поглощение — плотности излучения. При равновесии излучение и поглощение осцилляторов должны быть равны друг другу. Отсюда можно получить, что

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \bar{\varepsilon}. \tag{4}$$

Если принять за среднее значение $\bar{\varepsilon}$, как это сделал Рэлей, классическое значение kT (как это следует из теоремы о равномерном распределении энергии по степеням свободы), мы снова вернемся к (1б). Однако все известные к 1900 г. экспериментальные данные превосходно соответствовали (1а), а не (1б).

Планк вовсе не считал самым важным поиски правильного выражения ε как функции ω, T, т. е. соотношения, которое безусловно привело бы его к (1б). Его в большей степени интересовала связь между ε и плотностью энтропии $s(\omega)$; из последнего выражения $\varepsilon(\omega, T)$ может быть подсчитана с помощью термодинамического соотношения

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \frac{1}{T}, \tag{5}$$

где через S обозначена энтропия.

---

*) Это становится ясным, когда вновь проглядываешь те пять статей, которые были представлены Планком Берлинской Академии наук; только в последней из них, пятой, упоминается теорема Кирхгофа. Вместе с тем впоследствии из пяти этих статей Планк сделал одну для «Annalen der Physik», которая начинается с теоремы Кирхгофа. В своей Нобелевской лекции Планк ссылается именно на эту последнюю статью.

Для скорости изменения энтропии отдельного осциллятора Планк нашел

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{d\varepsilon}{dt}\Delta\varepsilon f(\varepsilon), \qquad f(\varepsilon) = -\frac{3}{5}\frac{d^2S}{d\varepsilon^2}, \tag{6}$$

где $\Delta\varepsilon$ представляет собой избыток энергии по сравнению с равновесным состоянием. Чтобы найти вид функции $f(\varepsilon)$, Планк рассмотрел совокупность n тождественных независимых осцилляторов. Энергия n осцилляторов ε_n равна $n\varepsilon$, а избыток энергии $\Delta\varepsilon_n = n\Delta\varepsilon$, их энтропия $S_n = nS$, а $d\varepsilon_n/dt = n\, d\varepsilon/dt$. Считая, что для рассматриваемых осцилляторов пригодны соотношения (6), мы непосредственно получим ($dS_n = n\, dS/dt$)

$$\frac{d\varepsilon_n}{dt}\Delta\varepsilon_n f(\varepsilon_n) = n\frac{d\varepsilon}{dt}\Delta\varepsilon f(\varepsilon) \tag{7}$$

и, следовательно,

$$f(n\varepsilon) = \frac{1}{n} f(\varepsilon). \tag{8}$$

Решением функционального уравнения (8) будет

$$f(\varepsilon) = \frac{\mathrm{const}}{\varepsilon}. \tag{9}$$

Следовательно,

$$\frac{d^2S}{d\varepsilon^2} = -\frac{\alpha}{\varepsilon}. \tag{10}$$

Комбинируя последнее уравнение с соотношениями (5) и (4), получим

$$u(\omega, T) = Ce^{-\frac{1}{\alpha T}}; \tag{11}$$

это соотношение и дает нам закон Вина (1а).

Сейчас очень поучительно выяснить физический смысл $d^2S/d\bar{\varepsilon}^2$. Вспомним связь

$$S = k\ln P \tag{12}$$

между энтропией данного состояния и вероятностью P для реализации этого состояния. Решив это уравнение относительно P, получим

$$P = Ce^{S/k}, \tag{13}$$

где C — нормировочная константа.

Пусть энтропия S является функцией энергии ε. Так как при $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ энтропия S достигает максимума, то

$$S(\varepsilon) = S(\bar{\varepsilon}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial\bar{\varepsilon}^2}(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 + \ldots, \tag{14}$$

причем $\dfrac{\partial^2 S}{\partial\bar{\varepsilon}^2}$ отрицательно.

Из соотношений (13) и (14) можно найти выражения для флуктуаций энергии $\overline{\Delta\varepsilon^2}$:

$$\overline{\Delta\varepsilon^2} = \langle(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2\rangle = \frac{\int (\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 P(\varepsilon)\, d\varepsilon}{\int P(\varepsilon)\, d\varepsilon} = -k\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\bar{\varepsilon}^2}\right)^{-1}, \tag{15}$$

и с помощью формул (10) и (15) находим, что

$$\overline{\Delta\varepsilon^2} = \mathrm{const}\cdot\bar{\varepsilon}, \tag{16}$$

т. е. выражение, вполне согласующееся с (2а).

Когда из экспериментальных данных, полученных для длинных волн, стало очевидным, что закон Вина вовсе не универсально справедлив, Планк счел возможным, хотя и «не очень понятным и, во всяком случае, трудно поддающимся доказательству», тот факт, что (7) не является правильным. Вместо того, чтобы считать величину $\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \bar{\varepsilon}^2}\right)^{-1}$ пропорциональной энергии $\bar{\varepsilon}$, он стал считать ее пропорциональной $\bar{\varepsilon}+a\bar{\varepsilon}^2$, т. е.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \bar{\varepsilon}^2} = -\frac{b}{\bar{\varepsilon}+a\bar{\varepsilon}^2}, \tag{17}$$

откуда вытекает, что

$$u(\omega, T) = \frac{C\omega^3}{e^{\beta f\omega}-1}, \tag{18}$$

где нам пришлось использовать (3); в (18) входят постоянные C и f. Это выражение для u, которое совпадает с выражением (1), и предшествующее выражение (17), введены Планком ad hoc в качестве замечания в статье Курльбаума, содержащей экспериментальные данные, относящиеся к длинным волнам и полученные им совместно с Рубенсом. Эта работа была доложена в Немецком Физическом обществе 19 октября 1900 г.

Как только Планк обнаружил, что полученный им новый закон излучения соответствует всем экспериментальным данным, он попытался выяснить физический смысл своей формулы. «До этого времени я не беспокоился о связи между энтропией и вероятностью» (на самом же деле Планк отрицательно относился к кинетической теории Больцмана, и М. Клейн предполагает, что именно по этой причине Планк оставил без внимания работу Рэлея, который воспользовался теоремой равнораспределения энергии по степеням свободы, заимствованной из кинетической теории), однако «после нескольких недель самой напряженной в своей жизни работы» он представил 14 декабря 1900 г. в Немецкое Физическое общество вывод, опирающийся на больцмановское соотношение (12).

Чтобы найти величину P, входящую в (12), Планк рассуждает следующим образом. Пусть, как и раньше, через ε_n обозначена энергия n осцилляторов заданной частоты, так что можно написать

$$\varepsilon_n = n\bar{\varepsilon}. \tag{19}$$

Если все эти осцилляторы независимы, то

$$S_n = nS. \tag{20}$$

Допустим теперь, что ε_n можно разбить только на целое *конечное* число N равных частей Δ:

$$\varepsilon_n = N\Delta. \tag{21}$$

Вероятность P определяется тогда числом способов, которым N равных частей можно распределить между n осцилляторами. Общеизвестным приемом мы получим, что число таких способов равно

$$P = \binom{N+n-1}{N}, \tag{22}$$

а используя формулы (22), (12), (5) и (4), придем к закону распределения Планка, если примем, что

$$\Delta = \hbar\omega. \tag{23}$$

Больше всего беспокоило Планка то обстоятельство, что величина Δ должна была оставаться конечной. Фактически, сопоставляя данные эксперимента и формулу (1), Планк смог определить не только величину кванта действия ($=2\pi\hbar$), но также постоянную Больцмана k и число Авогадро N_A. В действительности сам Больцман никогда не вводил величины k, а всегда пользовался газовой постоянной R ($=kN_A$). Мейсснер предложил называть величину k постоянной Больцмана — Планка. Интересно, что Лоренц ту же величину часто называл постоянной Планка.

Конечно, уравнение (12) вовсе не исчерпывает вопроса о физическом смысле рассуждений Планка. Вот что писал сам Планк много лет спустя: «Именно теперь вставал самый трудный теоретический вопрос, чтобы придать физический смысл этой странной константе h, поскольку ее появление означало разрыв с классической теорией, который оказался куда более фундаментальным, чем это мне казалось сначала... В течение многих лет снова и снова я пытался вставить квант действия в рамки классической физики».

Работа Планка, по-видимому, осталась почти незамеченной *), а ее следствия оставались в тени еще несколько лет спустя после ее появления. В 1905 г. Эйнштейн занялся вопросом об излучении черного тела. Он отметил, что если бы закон Рэлея имел универсальную применимость, это привело бы к бесконечной плотности энергии. Поэтому Эйнштейн обратился к закону Вина. Рассмотрим энергию E в объеме V в заданном интервале частот ω, $\omega+d\omega$ и соответствующую энтропию S. Из закона Вина (1а) вытекает, что

$$E=\frac{\hbar\omega^3V}{c^3\pi^2}e^{-\hbar\omega/kT}, \tag{24}$$

или

$$\frac{1}{T}=-\frac{k}{\hbar\omega}\ln\left(\frac{\pi^2c^3E}{\hbar\omega^3V}\right). \tag{25}$$

Используя (5) и интегрируя, мы получим

$$S=-\frac{kE}{\hbar\omega}\left[\ln\left(\frac{\pi^2c^3E}{\hbar\omega^3V}\right)-1\right] \tag{26}$$

или, сопоставляя энтропию S с энтропией S_0 того же самого излучения с энергией E и в том же интервале частот, в объеме V_0 получим

$$S-S_0=\frac{kE}{\hbar\omega}\ln\left(\frac{V}{V_0}\right). \tag{27}$$

Можно сравнить полученное выражение (27) с термодинамическим уравнением для энтропии идеального газа из N материальных точек:

$$S-S_0=kN\ln\left(\frac{V}{V_0}\right). \tag{28}$$

Из этого сравнения вытекает, что излучение можно интерпретировать — *в области, где справедлив закон Вина*, — таким образом, как будто оно состоит из N «частиц», причем

$$E=N\hbar\omega. \tag{29}$$

Эйнштейн сделал вывод, что «монохроматическое излучение ведет себя (до тех пор, пока формула Вина остается справедливой) так, как если бы оно состояло из взаимно независимых квантов энергии величиной $\hbar\omega$».

Чтобы показать допустимость корпускулярного подхода к электромагнитному излучению, Эйнштейн рассмотрел экспериментальные данные по фотолюминесценции, ионизации газов ультрафиолетовым светом и фотоэлектрический эффект. Любопытно процитировать, что пишет сам

*) Исключением, возможно, был лишь Эренфест (см. ниже).

Эйнштейн по поводу фотоэффекта: «Насколько я могу судить, наши идеи не противоречат наблюдаемым закономерностям фотоэффекта».

Годом позже Эйнштейн сообщает, что теперь он пришел к выводу о том, что кванты энергии Планка и его собственные световые кванты — это одно и то же. Эйнштейн сформулировал основные положения, использованные Планком (ср. ниже замечания Эренфеста в связи с этими предположениями):

1) энергия резонатора принимает лишь целые кратные значения $\hbar\omega$;

2) энергия резонатора при получении и поглощении меняется скачками на величину, которая является целым кратным $\hbar\omega$;

3) при вычислении испускаемого резонатором излучения используют электромагнитную теорию Максвелла: хотя ее нельзя применять к резонатору, можно принять среднюю энергию резонатора равной энергии, вычисляемой согласно теории Максвелла (перед вами пример применения принципа соответствия).

Вопрос, на котором мы хотим остановиться, таков. Следует ли из представления о световых квантах, введенных Эйнштейном, закон излучения Планка? Ответ заключается в том, что от световых квантов можно прийти к закону Вина. Это, конечно, не удивительно, потому что световые кванты были введены, исходя из закона Вина. Однако этот вопрос приводит нас к статистике фотонов. Мы будем следовать Эренфесту, которому принадлежит выдающаяся роль в разъяснении всей проблемы, и поставим вопрос в следующей форме: являются ли фотоны независимыми частицами? Интересно отметить, что из записных книжек Эренфеста видно, что уже в 1903 г. он занялся серьезным исследованием квантовой теории излучения Планка: в своих статьях 1905 и 1906 гг. он показал, что можно прийти к выражению (1) только в том случае, если любому состоянию с n_1 квантами $\hbar\omega_1$, с n_2 квантами $\hbar\omega_2$, . . . приписать одинаковые вероятности a priori. Если же, однако, рассматривать такие состояния соответствующими n_1 (статистически) независимым корпускулам с энергией $\hbar\omega_1$, n_2 корпускулам с энергией $\hbar\omega_2$, . . ., статистические веса будут пропорциональны $\prod\limits_i n_i\varepsilon$ и, вместо того чтобы прийти к (1), мы придем к (1а). Этот парадокс так и оставался парадоксом до 1924 г., когда Бозе предложил статистику особого рода. Все связанные с этим вопросы обсуждались весьма и весьма подробно; главную роль в дискуссии играли Эренфест и Эйнштейн. Мы попытаемся воспроизвести основные соображения, которые выдвигались в этой дискуссии.

Если нас интересует вопрос о статистической независимости, очень уместно заняться исследованием флуктуаций, например флуктуаций энергии. Если бы световые кванты были статистически независимыми образованиями, мы могли бы ожидать, что флуктуации числа фотонов имеют нормальный вид, т. е. что

$$\overline{\Delta n^2} = \langle (n-\bar{n})^2 \rangle = \bar{n}, \tag{30}$$

где $\bar{n}$ представляет собой среднее (равновесное) число фотонов в заданном интервале частот; угловые скобки указывают математические ожидания, или термодинамические средние. Используя соотношение

$$u(\omega)\, d\omega = \bar{n}\hbar\omega, \tag{31}$$

из соотношения (30) получим (2а). Таким образом, можно сказать, что (2а) соответствует корпускулярной природе электромагнитного излучения.

Если же, с другой стороны, рассматривать излучение как электромагнитные волны, можно подсчитать флуктуации энергии, возникающие из-за интерференции световых лучей, обладающих близкими волновыми векторами. Как было показано Эйнштейном в 1909 г., чтобы получить нужный результат, достаточно воспользоваться соображениями размерности. Дисперсия энергии может зависеть только от объема V, занимаемого излучением (и должна быть пропорциональна ему), от ширины спектрального интервала (и должна быть пропорциональна ему, поскольку можно ожидать независимости различных компонент поля излучения), от частоты ω, от скорости света c и от плотности излучения $u(\omega)$. Единственная комбинация этих величин, удовлетворяющая требованиям размерности, выглядит следующим образом:

$$C[u(\omega)]^2 V \frac{c^3\, d\omega}{\omega^2}, \tag{32}$$

где C представляет собой некоторое число, которое, как выяснилось, равно просто π. Из выражения (32) мы приходим к (2б), которое, следовательно, отражает волновую природу электромагнитного излучения.

Если мы взглянем теперь на загадочное выражение Планка (17) и соотношение (15), то обнаружим, что оно ведет к выражению (2) для флуктуаций. Этот результат можно интерпретировать следующим образом: световые кванты обладают как волновыми, так и корпускулярными свойствами, и что те и другие вносят свой вклад в флуктуации плотности энергии. В предельном случае высоких частот свет ведет себя в основном как корпускулы, в случае низких частот — в основном как волны.

Эйнштейн развивал мысль о том, что свет состоит из квантов, и выяснял связь между этими квантами и законом излучения Планка, пока, наконец, в 1917 г. ему не удалось связать его же собственную теорию броуновского движения с проблемами излучения. Исходя из требования, чтобы больцмановское распределение атомов по энергетическим состояниям сохранялось при излучении и поглощении квантов, входящих в состав поля излучения черного тела, Эйнштейн пришел к выводу, что поле излучения должно иметь вид, предсказанный Планком. Более того, взаимодействие излучения с атомами должно приводить также к максвелловскому распределению атомов по скоростям.

Первое утверждение довольно просто и хорошо известно. Предполагается, что существует вероятность перехода A_{12} для спонтанных переходов между двумя состояниями 1 и 2, энергии которых равны E_1 и E_2 ($E_2 < E_1$); предполагается также, что существуют вероятности перехода B_{12} и B_{21} для вынужденных (индуцированных) переходов. Если обозначить через N_i число атомов в состоянии i и пренебречь возможностью вырождения, то для равновесного состояния справедливо следующее соотношение:

$$N_1[B_{12}u(\omega_{12}) + A_{12}] = N_2 B_{21} u(\omega_{12}), \tag{33}$$

где

$$\hbar\omega_{12} = E_1 - E_2. \tag{34}$$

Так как $u(\omega) \to \infty$ при $T \to \infty$, прежде всего получим

$$B_{12} = B_{21}. \tag{35}$$

Далее, используя соотношение $N_1/N_2 = \exp(-\beta\hbar\omega_{12})$, получим

$$u(\omega) = \frac{A/B}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}, \tag{36}$$

что и требовалось доказать. Второе утверждение — именно это Эйнштейн считал наиболее важным — касается термодинамического равновесия между постулированным движением атома и излучением.

С одной стороны, флуктуации поля излучения должны приводить к броуновскому движению атомов. С другой стороны, такая хаотическая бомбардировка атомов фотонами должна вызывать появление сил трения, действующих на атом. В условиях равновесия эти два эффекта приводят к сохранению средней энергии атома. Для реализации этого условия существенно, как это показал Эйнштейн, чтобы каждый фотон с энергией $\omega\hbar$ обладал импульсом $\hbar\omega/c$, имеющим строго определенное направление (игольчатое излучение),— факт, который был подтвержден в 1923 г. Комптоном.

Нам хотелось бы добавить здесь, что при подсчете флуктуации давления излучения Эйнштейн обнаружил, что для флуктуации плотности импульса получается выражение (2), деленное на c. Это обстоятельство указывает на то, что световому кванту следует приписать импульс $\hbar\omega/c$, и в то же время еще раз обнаруживает дуализм световых квантов.

Позвольте мне вернуться к тому, что было сделано Эренфестом для теории излучения. В 1911 г. он исследовал этот вопрос в статье, озаглавленной следующим образом: «Какие элементы гипотезы световых квантов играют существенную роль в теории теплового излучения?»

На эти размышления Эренфеста натолкнул очевидный парадокс, состоявший в том, что результат Вина, очевидно, указывавший на квантовую природу излучения, был получен на основе чисто классических рассуждений. Он показал, что фактически весь подход Вина заключался в том, что отношение энергии к частоте является адиабатическим инвариантом и что эта инвариантность совместима со вторым началом термодинамики. Хорошо известно, как принцип адиабатических инвариантов, высказанный Эренфестом, стал путеводной нитью старой квантовой теории. Эренфест отметил также в 1911 г. важную роль, которую играет правильный выбор априорных статистических весов заданных состояний. Он выяснил, что теория фотонов Эйнштейна содержит в себе неотъемлемым образом следующие предположения: 1) осциллятор может обладать только определенными значениями энергии $n\hbar\omega$ (n — целое); 2) эти значения энергии реализуются как наличие n *независимых* квантов с энергией $\hbar\omega$; 3) эти фотоны ведут себя как корпускулы в процессах излучения, но они существуют также как отдельные образования. Более того, Эренфест показал, что второе предположение ведет скорее к закону Вина, чем к закону Планка. В 1915 г. вместе с Каммерлинг-Оннесом он вернулся к этому вопросу и привлек внимание к тому обстоятельству, что нужно использовать выражение (22) в качестве выражения для статистического веса состояния, чтобы получить закон Планка. Заключительные строки его статьи звучат так: «*Формальный прием Планка* (наше выражение (22).— *Д. Т.*) *не может быть истолкован с помощью световых квантов Эйнштейна*» (курсив Эренфеста).

Некоторый исторический интерес представляет дискуссия между Эйнштейном и Лауэ. В 1910 г. Эйнштейн совместно с Хопфом доказал, что компоненты напряженности поля в данной точке пространства для случая излучения абсолютно черного тела могут быть представлены в зависимости от времени в виде рядов Фурье

$$\sum_n \left[A_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right],$$

где через T обозначен период наблюдения; коэффициенты A_n и B_n статистически независимы друг от друга.

В 1915 г. Лауэ высказал сомнения в правильности этого результата. Он подчеркивал, что полная статистическая независимость может иметь место только в том случае, когда колебания отдельных осцилляторов происходят совершенно беспорядочно, а сложение таких хаотических колебаний создает наблюдаемое излучение абсолютно черного тела. Однако в ответ на эти соображения Эйнштейн указал, что Лауэ пользуется частными предположениями относительно расположения осцилляторов в пространстве. Эйнштейн еще раз доказал — и на этот раз более строго,— что на самом деле предположение о хаотическом распределении фаз различных осцилляторов вполне достаточно, чтобы доказать статистическую независимость различных мод поля излучения. Позже Лауэ согласился с этими рассуждениями Эйнштейна. Более того, Эйнштейн сумел показать, что статистическое распределение величин A_n и B_n соответствует гауссову стохастическому процессу.

Перед тем как изложить окончательное решение статистической проблемы, принадлежащее Бозе, мы должны остановиться еще на одной работе Эренфеста, опубликованной в 1925 г.; в ней рассматривались флуктуации в излучении черного тела. Еще раз он начинает с очевидного парадокса (на этот парадокс было обращено внимание его женой *)). С одной стороны, можно вывести закон Планка, рассматривая электромагнитные волны, квантуя их энергию и используя выражение Планка (22). С другой стороны, применяя законы термодинамики к закону Планка, мы приходим к соотношению (2), которое включает в себя некоторый член, по природе своей скорее корпускулярный, чем волновой. И действительно, Орнштейн и Зернике выяснили это несколько иным путем. Эйнштейн считал, что энтропия различных элементов объема аддитивна или, что то же самое, что флуктуации в таких объемах независимы, но это предположение несовместимо с наличием флуктуаций, обусловленных интерферирующими волнами. Вывод из всего исследования Эренфеста состоит в том, что для того, чтобы найти правильное выражение для флуктуаций, не следует трактовать поле излучения просто как совокупность интерферирующих волн (ср. вывод соотношения (32).— *Д. Т.*) **).

Индийский физик Бозе в конце концов в 1924 г. отказался от мысли получить закон излучения Планка, исходя из электромагнитной теории. Он получил закон излучения Планка непосредственно на основе эйнштейновской гипотезы световых квантов и статистической механики. Это событие явилось естественным развитием и кульминацией идей Эйнштейна.

Вывод Бозе состоял в следующем. Если фотоны представляют собой частицы, то они характеризуются своим положением (т. е. радиусом-вектором $\mathbf{r}$) и своим импульсом $\mathbf{p}$. Пусть их энергия $\hbar\omega$ связана с импульсом релятивистским соотношением

$$(\hbar\omega)^2 = c^2p^2. \tag{37}$$

Если мы рассматриваем фотоны, частоты которых лежат в интервале ω, $\omega+d\omega$, им доступен объем $d\Omega$ фазового пространства. Этот объем $d\Omega$ определяется как

$$d\Omega = \int d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{p} = 4\pi \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 \frac{\hbar\, d\omega}{c} V. \tag{38}$$

Следуя идеям старой квантовой теории, фазовое пространство делим на ячейки объемом $(2\pi\hbar)^3$. Это означало— с учетом того обстоятельства, что у фотона есть два возможных направления поляризации,— что существуют $(V/\pi^2c^3)\omega^2\, d\omega (= Z)$ допустимых ячеек фазового пространства для фотонов с частотами, лежащими в интервале ω, $\omega + d\omega$. Пусть в этом интервале заключено N фотонов. Вопрос состоит в том, каким числом способов

*) Т. Афанасьевой-Эренфест.

**) *В этой связи мы можем сослаться также на работу Фюрта.*

можно распределить эти N фотонов по $(V/\pi^2c^3)\,\omega^2\,d\omega$ $(=Z)$ ячейкам. Далее Бозе ввел очень существенную неразличимость фотонов, предположив, что единственный способ получить различные распределения состоит в том, чтобы помещать различные числа фотонов в разные ячейки. Это означало, что он характеризует распределение фотонов, указывая число ячеек, в которых фотонов нет (n_0), в которых есть один фотон (n_1), два фотона, ... и т. д., и предполагает (молчаливо), *что каждое из n_i распределений обладает одной и той же априорной вероятностью.* Таким образом, мы получим

$$P=\prod_{d\omega}\frac{Z!}{\prod n_i!}\,, \tag{39}$$

причем вместе с этим

$$Z=\sum n_i, \tag{40}$$

$$N=\sum in_i, \tag{41}$$

$$E=\sum_{d\omega}N\hbar\omega, \tag{42}$$

где полная энергия E задана (но не задано полное число квантов $N_{\text{полн}}=$ $=\sum\limits_{d\omega}N$). Обычные приемы статистической механики из требования максимума P при заданном E приводят к результату

$$N=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{V\,d\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\,, \tag{43}$$

который представляет собой закон Планка.

Отметим, что приписать каждому n_i-распределению тот же самый *априорный* статистический вес означает в точности то же самое, что и приписать одинаковый *априорный* вес состояниям, которые рассматривал Планк. Именно в этом месте существенно проявляется статистическая зависимость световых квантов. Говоря иначе, можно сказать, что эта статистическая зависимость проявляется через требования симметрии в квантовой механике, которая как раз приводит нас к априорным весам, использованным Бозе. Как только была введена статистика Бозе — Эйнштейна, флуктуации перестали носить стандартный характер, и действительно для флуктуаций числа бозонов в состоянии с энергией ε_s мы имеем соотношение

$$\langle(n_s-\bar{n}_s)^2\rangle=\bar{n}_s+\bar{n}_s^2 \tag{44}$$

и для флуктуаций чисел N в некотором интервале энергий

$$\langle(N-\bar{N})^2\rangle=\bar{N}+\sum{}'\,\bar{n}_s^2, \tag{45}$$

где сумма $\sum'$ распространяется по всему интервалу энергий, а

$$N=\sum{}'\,n_s. \tag{46}$$

Заметим, что, поскольку $\sum'$ в точности соответствует умножению на $d\omega$ так, что

$$N=\frac{u(\omega)\,d\omega}{\hbar\omega}\,, \tag{47}$$

соотношение (2) получается умножением (45) на $\hbar^2\omega^2$.

В заключение нам хотелось бы обратить внимание на связь между представлением когерентного состояния, введенного Глаубером, и распределением энергии излучения абсолютно черного тела. Мы рассмотрим осциллятор только с одной модой. Матрица плотности такого осциллятора дается формулой

$$\rho = \int P(\alpha)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,d^2\alpha \tag{48}$$

где α представляет собой комплексную величину, $P(\alpha)$ — аналог плотности вероятности в комплексной α-плоскости и, наконец, $|\alpha\rangle$ — векторы когерентного состояния, определяемые посредством n-квантовых состояний $|n\rangle$ по формулам

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle. \tag{49}$$

При определенных общих условиях, включающих в себя условия теплового равновесия, величина $P(\alpha)$ имеет гауссову форму:

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi\langle n\rangle} \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{\langle n\rangle}\right), \tag{50}$$

где $\langle n\rangle$ — среднее число квантов, соответствующее данной моде. Матрица плотности (48) в этом случае приобретает вид

$$\rho = \frac{1}{1+\langle n\rangle} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\langle n\rangle}{1+\langle n\rangle}\right)^l \,|l\rangle\langle l|, \tag{51}$$

где мы использовали (49).

Распределение Планка представляет собой частный случай (51); если использовать соотношение

$$\langle n\rangle = (e^{\beta\hbar\omega} - 1)^{-1}, \tag{52}$$

то из (51) можно получить выражение для

$$\rho = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{l=0}^{\infty} e^{-l\beta\hbar\omega}\,|l\rangle\langle l|, \tag{53}$$

которое представляет собой известное выражение для матрицы плотности моды теплового возбуждения осциллятора.

Мы уже упоминали об утверждении Эйнштейна, опирающемся на классическую теорию, что напряженность поля теплового излучения может быть описана в виде гауссова стохастического процесса. P-представление (48) совместно с весовой функцией (50) позволяет придать точный смысл утверждению о том, что напряженность поля теплового излучения может рассматриваться как пример гауссова стохастического процесса также и в квантовой теории.

Оксфордский университет,
Великобритания

ЛИТЕРАТУРА

I. Оригинальные работы

1. S. N. Bose, Zs. Phys. **26**, 178 (1924).
2. A. H. Compton, Phys. Rev. **22**, 409 (1923).
3. P. Ehrenfest, Wiener Ber. **114**, 1301 (1905); Phys. Zs. **7**, 528 (1906); Ann. d. Phys. **36**, 91 (1911); Zs. Phys. **34**, 362 (1925)
4. P. Ehrenfest, H. Kamerlingh Onnes, Ann. d. Phys. **46**, 1021 (1915).

5. A. Einstein, Ann. d. Phys. **17**, 132 (1905); **20**, 199 (1906); Phys. Zs. **10**, 185 (1909); Ann. d. Phys. **47**, 879 (1915); Phys. Zs. **18**, 121 (1917) (см. перевод: Собрание научных трудов, тт. 1—4, М., «Наука», 1964—1967.
6. A. Einstein, L. Hopf, Ann. d. Phys. **33**, 1096 (1910).
7. R. Fürth, Zs. Phys. **48**, 323 (1928); **50**, 310 (1928).
8. R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963); Les Houches 1964 Summer School, 1965, стр. 63.
9. M. von Laue, Ann. d. Phys. **47**, 853 (1915); **48**, 668 (1915).
10. L. S. Ornstein, F. Zernike, Proc. Amsterdam 28, 280 (1919).
11. M. Planck. Verh. Dtsch. Phys. Ges. **2**, 202, 237 (1900).

II. Обзорные статьи

12. D. ter Haar, Elements of Thermostatics, § 8.2, Hall, Reinchart and Winston, 1966; The Old Quantum Theory, Pergamon Press, 1967.
13. M. J. Klein, Proc. Amsterdam **B62**, 41 (1959); Arch. Hist. Ex. Sci. **1**, 459 (1962) (см. перевод: УФН **92** (4), 679 (1968)); Natural Philosopher 3, 1 (1964).
14. L. Rosenfeld, Osiris **2**, 149 (1936); Max Planck, Festschrift, 1958, стр. 203.