1969 г. Сентябрь *Том 99, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

537.312.62

КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Б. Т. Гейликман, В. З. Кресин

I. ВВЕДЕНИЕ

При переходе вещества из нормального в сверхпроводящее состояние весьма существенно изменяются его физические свойства. Электромагнитные, тепловые и кинетические свойства сверхпроводников отличаются от свойств нормальных металлов, которые достаточно хорошо описываются обычной квантовой теорией твердого тела. В микроскопической теории сверхпроводимости [1-3] показано, что основные особенности сверхпроводящего состояния обусловлены парной корреляцией электронов и связанным с ней появлением щели в энергетическом спектре сверхпроводников.

Настоящий обзор посвящен описанию кинетических явлений в сверхпроводниках; при этом мы ограничились рассмотрением явлений теплопроводности и затухания звука. Исследование процессов передачи тепла в сверхпроводниках началось довольно давно. Специфика этих явлений (см., например, [4]) привела к созданию двухжидкостной модели [5], в рамках которой удавалось качественно описать некоторые из наблюдавшихся закономерностей.

Явления переноса в сверхпроводниках кратко обсуждались уже в обзорах по сверхпроводимости [6-9], появившихся вскоре после создания микроскопической теории. В настоящее время на основе современной микроскопической теории сверхпроводимости удается достаточно полно описать явления теплопроводности и поглощения звука в сверхпроводниках. Описание процессов переноса, как нам кажется, является в настоящее время достаточно завершенным разделом физики сверхпроводящего состояния. Полученные температурные зависимости кинетических коэффициентов действительно оказываются существенно отличными от известных для нормальных металлов. Основная особенность сверхпроводников состоит в наличии конденсата куперовских пар, движение которых не сопровождается переносом энтропии. Число же электронных возбуждений, играющих основную роль в кинетических явлениях, зависит от температуры, уменьшается при ее понижении ниже $T_к$ ($T_к$ — критическая температура) и стремится к нулю при $T \to 0$. Эта зависимость числа носителей от температуры и соответствующие изменения длин пробега приводят к весьма своеобразной картине кинетических явлений в сверхпроводниках.

II. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

1. Механизмы теплопроводности

Как известно, тепловой поток в металле складывается из двух компонент: электронной теплопроводности $\varkappa_e$ и теплопроводности решетки $\varkappa_p$, так что $\varkappa = \varkappa_e + \varkappa_p$. Стационарный характер процесса теплопроводности обеспечивается наличием нескольких механизмов релаксации. При иссле-

довании электронного вклада в тепловой поток такими механизмами являются столкновения электронов с примесями (что определяет $\varkappa_{ed}$), фононами ($\varkappa_{ep}$) и межэлектронные соударения ($\varkappa_{ee}$). Решеточная же теплопроводность $\varkappa_p$ определяется взаимодействием фононов с электронами ($\varkappa_{pe}$), фонон-фононными соударениями ($\varkappa_{pp}$) и рассеянием фононов примесями, границами и дефектами кристалла ($\varkappa_{pd}$).

Таким образом, существует шесть механизмов теплопроводности. Теплопроводность, соответствующая данному типу носителя, приближенно определяется суммой теплосопротивлений. Поэтому

$$\varkappa_e^{-1} \approx \varkappa_{ed}^{-1} + \varkappa_{ep}^{-1} + \varkappa_{ee}^{-1}, \qquad \varkappa_p^{-1} \approx \varkappa_{pe}^{-1} + \varkappa_{pp}^{-1} + \varkappa_{pd}^{-1}.$$

Различные механизмы в зависимости от условий играют, разумеется, неодинаковую роль. В обычном металле основной вклад в тепловой поток вносит электронная компонента $\varkappa_e$, а $\varkappa_p$ составляет при наиболее благоприятных условиях (см., например, [10]) лишь несколько процентов величины полной теплопроводности.

В сверхпроводниках электронная теплопроводность играет основную роль в чистых или мало загрязненных образцах. При $T \to 0$ ($\varkappa_e$ экспоненциально падает при $T \to 0$; см. ниже), а также в веществах, содержащих большие концентрации примеси, существенно возрастает роль $\varkappa_p$. Подробное обсуждение роли различных механизмов проводится ниже, в п. 6, после вычисления коэффициентов теплопроводности, соответствующих различным механизмам. Отметим кстати, что, поскольку основные особенности сверхпроводящего состояния связаны с перестройкой электронной системы, величины $\varkappa_{pp}$ и $\varkappa_{pd}$ описываются теми же закономерностями, что и у нормальных металлов.

2. Рассеяние электронов примесями

Рассматриваемый механизм [11] (см. также [12]) играет основную роль в сверхпроводящих образцах, содержащих небольшие концентрации примеси. При этом, разумеется, исключается область температур, близких к абсолютному нулю, где экспоненциально мало число электронных возбуждений.

Тепловой поток определяется соотношением

$$Q = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x} = 2 \int \varepsilon v_x f \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3};$$

здесь f — возмущенная функция распределения электронных возбуждений сверхпроводника, находящихся под действием температурного градиента и взаимодействующих с атомами примеси. Для ее нахождения запишем соответствующее кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_x} - \frac{\partial f}{\partial p_x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{f - f_0}{\tau}; \tag{1}$$

здесь ε — энергия электронного возбуждения, равная $\varepsilon = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)}$ (ξ — энергия обычного электрона, отсчитанная от поверхности Ферми, $\xi = (p^2 - p_0^2)/2m = v_F(p - p_0)$, v_F и p_0 — соответственно скорость и импульс на поверхности Ферми, $\Delta(T)$ — щель в энергетическом спектре), $f_0 = [\exp(\varepsilon/T) + 1]^{-1}$ (температура измеряется в энергетических единицах, $k = 1$). С левой стороны вместо f можно подставить f_0; тогда уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\frac{\varepsilon}{T}\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_x}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{f - f_0}{\tau}. \tag{2}$$

Отметим, что зависимость энергии возбуждения от температуры полностью выпадает из кинетического уравнения.

В правой части уравнений (1) — (2) фигурирует τ — время релаксации электронных возбуждений сверхпроводника на примесях. Для нахождения этой величины запишем в представлении вторичного квантования гамильтониан взаимодействия обычных электронов с атомами примеси

$$\mathscr{H}' = \sum_{\mathbf{k}} (a^+_{\mathbf{k},\,1/2} a_{\mathbf{k}',\,1/2} + a^+_{\mathbf{k},\,-1/2} a_{\mathbf{k}',\,-1/2}) V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'},$$

где $a^+_{\mathbf{k},\,1/2}$, $a_{\mathbf{k},\,-1/2}$ — амплитуды вторичного квантования с импульсом $\mathbf{k}$ и спином $^1/_2$ ($-^1/_2$), соответствующие рождению и исчезновению электрона, $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ — матричный элемент.

Сверхпроводящее состояние, согласно [2], описывается ферми-амплитудами $\alpha_{\mathbf{k}0}$, $\alpha_{\mathbf{k}1}$, причем

$$\alpha_{\mathbf{k}0} = u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\,1/2} - v_k a^+_{-\mathbf{k},\,-1/2}, \quad \alpha_{\mathbf{k}1} = u_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k},\,-1/2} + v_{\mathbf{k}} a^+_{\mathbf{k},\,1/2},$$
$$\left.\begin{matrix} u^2_{\mathbf{k}} \\ v^2_{\mathbf{k}} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\xi}{\varepsilon}\right). \tag{3}$$

Введя эти амплитуды в $\mathscr{H}'$, находим для упругого рассеяния ($|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$)

$$\mathscr{H}' = \sum \frac{\xi}{\varepsilon} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (\alpha^+_{\mathbf{k}0}\alpha_{\mathbf{k}'0} + \alpha^+_{\mathbf{k}1}\alpha_{\mathbf{k}'1}),$$

где $\alpha^+_{\mathbf{k}i}\alpha_{\mathbf{k}i}$ — числа возбуждения.

Выражая далее с помощью известной квантовомеханической формулы $W_{ab} = 2\pi\,|\mathscr{H}'|^2_{ab}\rho_E$ (статистический вес $\rho_E = p^2\,d\Omega\,dp/d\varepsilon$) вероятность рассеяния электронного возбуждения, находим

$$\tau = \tau_0 \frac{\varepsilon}{|\xi|}, \tag{4}$$

где τ_0 — не зависящее от энергии время релаксации обычных электронов.

Подставляя полученное выражение для τ в формулу (2), находим искомую функцию распределения и далее вычисляем соответствующий коэффициент теплопроводности

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa_{ed} = \frac{2}{3}\frac{p_0^3\tau_0}{\pi^2 m} F(T), \\ &F(T) = T^{-1}\int_{-\infty}^{\Delta} \varepsilon^2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\,d\varepsilon = \\ &= \frac{\Delta^2(T)}{T}\left[\exp\left(\frac{\Delta}{T}\right) + 1\right]^{-1} + 2T\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}}{s^2}\exp\left(-\frac{s\Delta}{T}\right) + \\ &\qquad + 2\Delta\ln\left[1 + \exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Таким образом, мы видим, что электронная теплопроводность описывается универсальной зависимостью от температуры и убывает с ее понижением по закону (5). На рис. 1 построен график этой зависимости. Кроме того, приведены экспериментальные данные, полученные при исследовании теплопроводности загрязненных образцов Tl [13]. Видно, что теория

достаточно хорошо согласуется с экспериментом. Если в формуле (5) положить $\Delta = 0$, то мы приходим к известному в обычной теории металлов (см., например, [10]) линейному закону изменения величины $\varkappa_{ed}$.

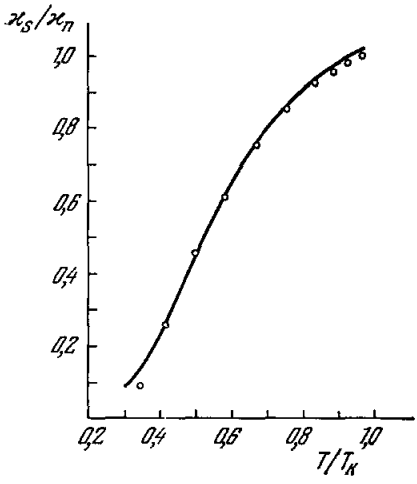

Рис. 1.

В работах [14, 15] электронная теплопроводность $\varkappa_{ed}$ вычисляется с использованием точной формулы для коэффициента теплопроводности [16] (см. ниже, п. 8) и применением метода функций Грина. В результате авторы приходят к той же формуле (5), полученной в [11] с помощью кинетического уравнения.

3. Теплопроводность чистых сверхпроводников

В образцах высокой чистоты при $T \to T_к$ основную роль играет теплопроводность $\varkappa_{ep}$, связанная с рассеянием электронов фононами.

Для исследования вопроса о температурной зависимости [17, 18] запишем кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_x} - \frac{\partial f}{\partial p_x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{ст},$$

где f — электронная функция распределения, которую мы будем искать в виде

$$f = f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\varphi(\varepsilon, \Omega)\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Для того чтобы в рассматриваемом случае записать выражение для интеграла столкновений, в гамильтониане электрон-фононного взаимодействия

$$\mathscr{H}' = \sum_{\substack{\mathbf{k}, s, \mathbf{q} \\ \mathbf{k}'=\mathbf{k}+\mathbf{q}}} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} a^+_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}'s} b^+_{\mathbf{q}} + \text{к. с.} \tag{6}$$

($b^+_{\mathbf{q}}$ — амплитуда рождения фонона с импульсом $\mathbf{q}$, $s = 1/2$, $-1/2$; $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ — матричный элемент) делаем переход (3) к новым ферми-амплитудам, после чего исходный гамильтониан принимает вид

$$\mathscr{H}' = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} [(u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'} - v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}'})(\alpha^+_{\mathbf{k}0}\alpha_{\mathbf{k}'0} + \alpha^+_{\mathbf{k}1}\alpha_{\mathbf{k}'1}) + (u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}'} + u_{\mathbf{k}'}v_{\mathbf{k}'})(\alpha^+_{\mathbf{k}0}\alpha^+_{\mathbf{k}'1} + \alpha_{\mathbf{k}0}\alpha_{\mathbf{k}'1})] b^+_{\mathbf{q}} + \text{к. с.} \tag{6'}$$

С учетом полученного выражения для $\mathscr{H}'$ кинетическое уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} f_0^2 e^{\varepsilon/T}\frac{\xi}{T}\frac{p_x}{m} = {} & \int |V|^2 N_0 \left(1 + \frac{\xi\xi' - \Delta^2}{\varepsilon\varepsilon'}\right)[\varphi(\varepsilon', \Omega') - \varphi(\varepsilon, \Omega)] \times \\ & \times e^{\varepsilon'/T} f_0(\varepsilon) f_0(\varepsilon')\,\delta(\varepsilon' - \varepsilon - \omega)\,d\mathbf{q} + \int |V|^2 N_0 \left(1 + \frac{\xi\xi' - \Delta^2}{\varepsilon\varepsilon'}\right) \times \\ & \times [\varphi(\varepsilon', \Omega') - \varphi(\varepsilon, \Omega)] \exp\left(\frac{\varepsilon}{T}\right) f_0(\varepsilon) f_0(\varepsilon')\,\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega)\,d\mathbf{q} + \\ & + \int |V|^2 N_0 \left(1 - \frac{\xi\xi' - \Delta^2}{\varepsilon\varepsilon'}\right)[\varphi(\varepsilon', \Omega') - \varphi(\varepsilon, \Omega)] \times \\ & \times \exp\left(\frac{\omega}{T}\right) f_0(\varepsilon) f_0(\varepsilon')\,\delta(\varepsilon' + \varepsilon - \omega)\,d\mathbf{q}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$N_0 = \left[\exp\left(\frac{\omega}{T}\right) - 1\right]^{-1}.$$

Учтем далее, что волновой вектор теплового фонона $\mathbf{q}$ мал по величине по сравнению с электронным импульсом. Поэтому функцию $\varphi(\Omega')$ можно разложить по степеням $\mathbf{q}' = \mathbf{p} - \mathbf{p}^*$ ($\mathbf{p}^*$ — вектор, направленный по $\mathbf{p}$ и имеющий длину, равную $|\mathbf{p}'|$). Такой метод исследования кинетического уравнения был впервые развит в [19]. Решение уравнения, полученного после интегрирования по углам и замены $\varepsilon\varepsilon'[1 \pm (\xi\xi' - \Delta^2)/\varepsilon\varepsilon']/|\xi||\xi'| \approx 2$ (см. ниже, п. 3), ищем в виде $\varphi(\varepsilon, \Omega) = \varphi_1(\Omega) + \varphi_2(\varepsilon, \Omega)$. После простых, но громоздких вычислений приходим к следующему выражению для величины φ, определяющей возмущенную электронную функцию распределения:

$$\varphi = \frac{a(\Omega)}{T^4 \Phi(T)} \int_b^\infty f_0^2 e^z \sqrt{z^2 - b^2}\, dz; \tag{8}$$

$$b = \frac{\Delta}{T}, \quad \Phi(T) \approx 96\zeta(4) \ln(1 + e^{-b}) + \\ + \sum_{s=1}^{\infty} s^{-5} e^{-2bs} (80b^4 s^4 + 160b^3 s^3 + 240b^2 s^2 + 240bs + 120) - \\ - \ln(e^b + 1) \sum_{s=1}^{\infty} s^{-4} e^{-2bs} (64b^3 s^3 + 96b^2 s^2 + 96bs + 48).$$

Далее, согласно формуле $Q = 2\int \varepsilon v_x f\, dp$, вычисляется тепловой поток, что и приводит к следующему окончательному выражению:

$$\varkappa_{ep} = \frac{\text{const}}{\Phi(T)\, T^2} \left[b^2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} K_2(bs) \right]^2 \tag{9}$$

($K_2(bs)$ — функция Бесселя мнимого аргумента).

В области температур, близких к $T_к$, где вклад электрон-фононного взаимодействия в тепловой поток наиболее существен, находим

$$\varkappa_{ep} = \varkappa_{ep}^n \frac{36}{\pi^4} \frac{\Phi(T_к)}{\Phi(T)} \left[2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{s^2} e^{-bs} + 2b \ln(1 + e^{-b}) - \frac{b^2}{2(e^b + 1)^2} \right]^2 \tag{10}$$

($\varkappa_{ep}^n$ — теплопроводность нормального металла). На рис. 2 построена соответствующая теоретическая кривая и приведены экспериментальные данные для чистых образцов олова [20] и индия [21].

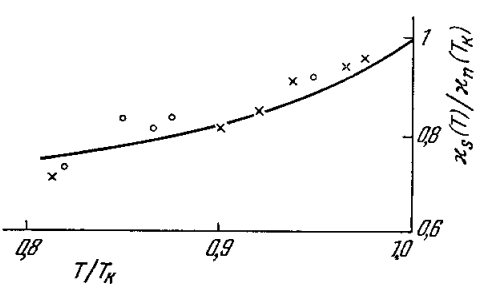

Рис. 2. Экспериментальные точки соответствуют: × — олову [20], ○ — индию [21]; сплошная кривая — теоретическая [17].

В достаточно чистых сверхпроводниках могут проявляться эффекты, связанные с наличием перекрывающихся энергетических зон. При этом полный коэффициент теплопроводности, определяемый рассеянием электронов тепловыми фононами, оказывается аддитивной функцией коэффициентов, относящихся к разным зонам[22] (подробнее об условиях, при которых проявляются многозонные эффекты, см. ниже, гл. III, п. 1, г)). Мы не рассматриваем процессов, при которых электроны переходят из одной зоны в другую, поскольку такие переходы сопровождаются, вообще говоря, изменением электронного импульса на величину $\sim p_F$, что невоз-

можно при рассматриваемых частотах тепловых фононов $\omega \sim T$. Указанная аддитивность нарушается при введении примесей, наличие которых приводит к межзонным переходам [23]. При длинах пробега l, удовлетворяющих условию $l < \xi_0$ (ξ_0 — размер куперовской пары), многозонные эффекты перестают играть роль [24] и становится справедливым обычное однозонное приближение.

4. Решеточная теплопроводность

Рассмотрим теперь вопрос о переносе тепла фононами, связанном с рассеянием их электронными возбуждениями сверхпроводника [25, 26]. Существует область температур ($T \gtrsim 0{,}3-0{,}5T_к$), где этот механизм играет решающую роль.

Запишем кинетическое уравнение для функции распределения фононов N

$$-\frac{\partial N}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}u_0\frac{q_x}{|\mathbf{q}|}=\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\text{ст}}, \tag{11}$$

где u_0 — скорость звука, $\mathbf{q}$ — импульс фонона.

Используя выражение (6) для гамильтониана электрон-фононного взаимодействия $\mathscr{H}'$, в котором совершен переход к новым ферми-амплитудам, описывающим сверхпроводящее состояние, приходим к следующему выражению для интеграла столкновений:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{\text{ст}}=\int|V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2\left\{\left(1+\frac{\xi\xi'-\Delta^2}{\varepsilon\varepsilon'}\right)[f'(1-f)(N+1)-Nf(1-f')]\times\right.$$
$$\times\delta(\varepsilon'-\varepsilon-\omega)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\xi\xi'-\Delta^2}{\varepsilon\varepsilon'}\right)[(N+1)ff'-N(1-f)(1-f')]\times$$
$$\left.\times\delta(\varepsilon'+\varepsilon-\omega)\right\}\frac{p^2\,dp\,do}{4\pi^2}. \tag{12}$$

Интеграл столкновений (12) отличается от обычного множителями $\{1\pm[(\xi\xi'-\Delta^2)/\varepsilon\varepsilon']\}$, появление которых связано с наличием в гамильтониане $\mathscr{H}'$ (6′) множителей $(u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'}-v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}'})$, $(u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}'}+u_{\mathbf{k}'}v_{\mathbf{k}})$. Искомую функцию распределения фононов ищем в виде

$$N=N_0-r(x)\frac{q_x}{T}\frac{\partial N_0}{\partial x},$$

где $x=\omega/T$. Электронная же функция распределения f, согласно (2), (4), равна

$$f=f_0+\frac{p_x}{m}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\frac{\varepsilon}{T}\tau_0\frac{\xi}{|\xi|}\frac{\partial T}{\partial x},\quad f_0=\left[\exp\left(\frac{\varepsilon}{T}\right)+1\right]^{-1}.$$

Подставляем далее выражения для N и f в соотношение (12) и интегрируем по углам. Полагая приближенно $L\varepsilon\varepsilon'/|\xi||\xi'|\approx 2$, $L=1\pm\pm(\xi\xi'-\Delta^2)/\varepsilon\varepsilon'$ (это дает ошибку $\sim\Delta^2\omega^2/4(\varepsilon\varepsilon'\mp\Delta^2)\varepsilon\varepsilon'$, т. е. $\sim 0{,}1$ для Q при $\Delta/T=1{,}5$) и интегрируя затем по энергии ε, находим следующее выражение для искомой функции $r(x)$:

$$r\approx\frac{\text{const}}{T^2}[2x-2\ln(e^{b+x}+1)(e^b+1)^{-1}+$$
$$+D(x)(2b-x+2\ln(e^{x-b}+1)(e^b+1)^{-1}]^{-1}\frac{\partial T}{\partial x};$$

здесь

$$b=\frac{\Delta}{T},\qquad x=\frac{\omega}{T},$$

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 2b,\\ 0, & x<2b.\end{cases}$$

Мы учли, что рождение фононом пар возбуждений возможно лишь в случае, когда $\omega \gg 2\Delta$.

Рассмотрим теперь тепловой поток в решетке

$$Q = \sum_{\mathbf{q}} N_{\mathbf{q}} u_0 \frac{q_x}{|\mathbf{q}|} u_0 \mathbf{q} = \frac{T^4}{6\pi u_0^3} \int_0^\infty \frac{x^4 r(x) e^x}{(e^x - 1)^2} dx.$$

Вычисление интеграла приводит к следующему окончательному выражению для коэффициента решеточной теплопроводности:

$$\varkappa_{pe} = BT^2 F(T),$$

$$\begin{aligned} F(T) = &-8b^4 (e^b - 1)^{-1} - 8b^3 (e^b - 1)^{-1} + 6\zeta(3)(e^b + 1) - \\ &- 3(e^b + 1) \sum_s s^{-3} e^{-2bs} (4b^2 s^2 + 4bs + 2) + 6\zeta(4)(e^b - 1) - \\ &- (e^b - 1) \sum_s s^{-4} e^{-2bs} (8b^3 s^3 + 12b^2 s^2 + 12bs + 6) + \\ &+ 32b^3 (e^{2b} - 1)^{-1} + a^4 \sum_s \{s e^{-2bs} - Ei[-s(2b - a)]\} + 6 \sum_s s^{-3} e^{-2bs}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$a \approx 2b - 0{,}16, \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

На рис. 3 приведена теоретическая кривая, построенная согласно (13), и экспериментальные данные для сплава In — Tl [27].

При $\Delta = 0$ формула (13) переходит в известную формулу квантовой теории металлов (см., например, [10]), описывающую убывающий с понижением температуры вклад решеточной теплопроводности. Убывание это связано, как известно, с соответствующим уменьшением числа тепловых фононов.

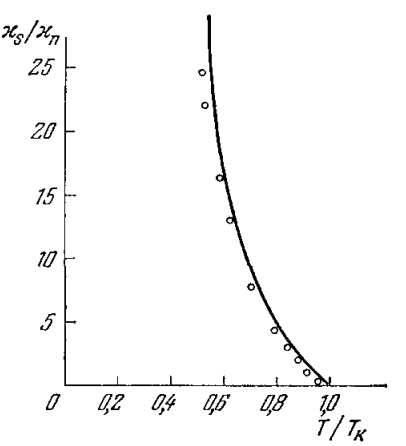

Рис. 3.

В сверхпроводниках, в отличие от нормальных металлов, величина $\varkappa_{pe}$ оказывается, как видно из (13), возрастающей с понижением температуры. Эта особенность связана с увеличением длины свободного пробега фононов из-за экспоненциального уменьшения числа электронных возбуждений (длина пробега фононов, обусловленная их рассеянием электронными возбуждениями, равна $l_{pe} \approx (n_e \sigma)^{-1}$, где n_e — число электронных возбуждений, σ — сечение).

При достаточно низкой температуре фононы начинают в основном рассеиваться на дефектах решетки и границах кристалла (фонон-фононное взаимодействие при $T \ll \Theta$, как известно [28], не играет роли). При этом $\varkappa_p \approx \varkappa_{pd} \sim T^3$, и решеточная теплопроводность убывает при $T \to 0$. При температуре, когда $\varkappa_{pe} \approx \varkappa_{pd}$, должен наблюдаться максимум решеточной теплопроводности.

5. Сравнение с экспериментом

Полученные выше температурные зависимости (5), (9) и (13) позволяют в значительной мере объяснить совокупность имеющихся в настоящее время экспериментальных данных, полученных при исследовании теплопроводности сверхпроводников.

Как уже отмечалось выше, в п. 1, существуют шесть механизмов теплопроводности, относительный вклад которых весьма существенно зависит от условий эксперимента.

Для чистых сверхпроводников, а также для образцов, содержащих малые концентрации примеси, $\varkappa \approx \varkappa_e$ (причем для очень чистых сверхпроводников $\varkappa \sim \varkappa_{ep}$, а для слабо загрязненных $\varkappa \sim \varkappa_{ed}$), за исключением области температур, близких к абсолютному нулю. При этом теплопроводность падает с понижением температуры в согласии с формулами (5), (9) (см. ниже рис. 5, кривая *1*). Это падение является вначале медленным, а затем становится экспоненциальным, что связано с соответствующим уменьшением числа электронных возбуждений.

Действительно, воспользуемся для качественной оценки простой формулой кинетической теории $\varkappa = c_v l v/3$ (c_v — теплоемкость, l — длина свободного пробега, $v = v_F$). В интересующем нас случае $c_v \sim n \sim \sim \exp(-\Delta/T)$, а l меняется степенным образом.

Указанная зависимость достаточно хорошо описывает экспериментальные данные, полученные при исследовании теплопроводности Al и Zn в [29] и позднее в [31], Tl [13], Sn [13, 20], In [21] (обзор экспериментальных данных см. также в [4, 7, 30]).

При очень низких температурах $\varkappa_e \ll \varkappa_p$; тогда $\varkappa \approx \varkappa_{pd}$. При этом теплопроводность в основном определяется рассеянием фононов примесями, дефектами и отражением их от границ кристалла. Она стремится к нулю при $T \to 0$ по закону $\varkappa \sim T^3$. Резкое возрастание роли решеточной теплопроводности является существенной аномалией сверхпроводящего состояния (в обычных металлах при всех температурах $\varkappa \approx \varkappa_e$) и связано с уменьшением нормальной составляющей электронной жидкости. Конденсат куперовских пар обладает нулевой энтропией и не вносит поэтому вклада в тепловой поток.

В работе [32] исследовалась теплопроводность Pb, Sn, In, Ta в низкотемпературной области; в [37] изучались свойства Sn, а в [13, 36, 42, 43] — свойства Tl, Sn, Al, Ga, Zn, Cd, Pb. Действительно, было установлено, что при $T \to 0$ (для Tl, например, при $T \leqslant 0{,}3$—$0{,}4°$ K [13]) сверхпроводник по характеру своей теплопередачи становится неотличим от диэлектрика. На рис. 4 видно, что при $T \to 0$ изменяется характер температурной зависимости $\varkappa(T)$ олова [13]: теплопроводность начинает меняться по закону $\varkappa_{pd} \sim T^3$.

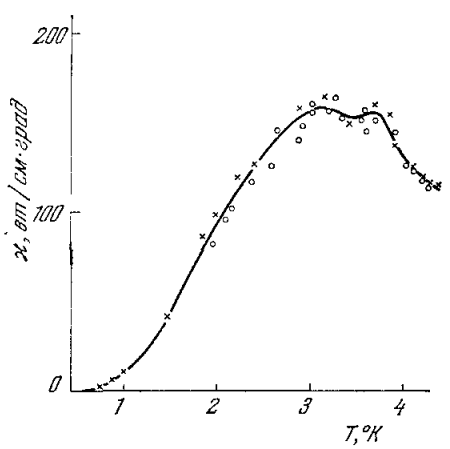

Рис. 4.

Тот факт, что при понижении температуры основную роль начинает играть фононная теплопроводность, экспериментально подтверждается еще следующим образом. При пластической деформации образца существенно изменяется длина свободного пробега длинноволновых тепловых фононов, ибо они при этом начинают в основном рассеиваться на дислокациях, возникающих при такой деформации. Для электронов же, обладающих малой длиной волны, появление дислокаций не играет существенной роли и они по-прежнему рассеиваются в основном на атомах примеси. Поэтому теплопроводность образца должна уменьшаться при пластической деформации, если основной вклад в тепловой поток вносят фононы, и не

должна практически изменяться, если основную роль играет электронная компонента.

Измерения, проведенные в [33], показали уменьшение в шесть раз теплопроводности сверхпроводящего свинца при пластической деформации при $T = 1°$ K, что также подтверждает приведенные выше соображения о возрастании роли $\varkappa_p$ при $T \to 0$.

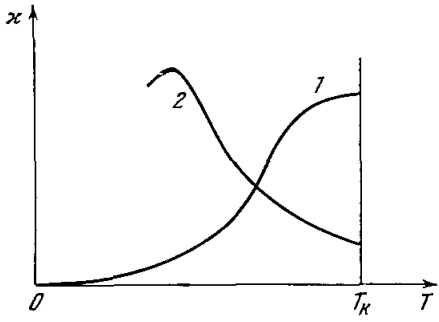

Рис. 5.

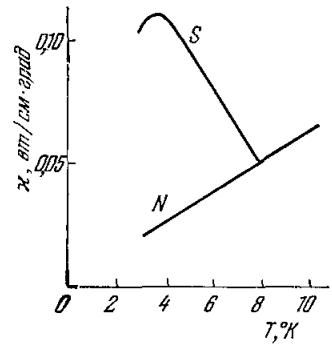

Рис. 6.

Сильное загрязнение образца уменьшает длину пробега электронов, а вместе с тем, в согласии с формулой $\varkappa = lc_v v/3$, и электронный вклад в теплопроводность. При этом $\varkappa_p \gg \varkappa_e$ и $\varkappa \approx \varkappa_p$ при всех температурах. В промежуточной области ($T = 0{,}3$—$0{,}5T_к$) температур и при $T \to T_к$ основную роль играет рассеяние фононов электронами и теплопроводность описывается формулой (13) (рис. 5, кривая *2*). При этом функция $\varkappa_{pe}$ возрастает с понижением температуры, что объясняет наблюдаемое экспериментально аномальное поведение теплопроводности сверхпроводящих сплавов. На рис. 3 приведены экспериментальные данные для сплава In — Tl [27]. В [34, 35] наблюдается возрастание $\varkappa_p$ у Nb при $T = 0{,}4T_к$.

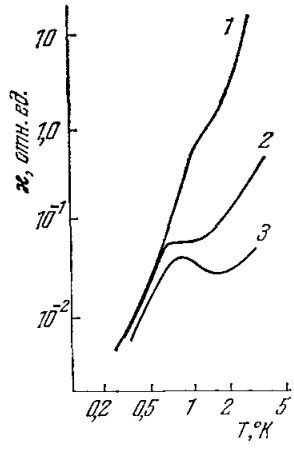

Рис. 7. Кривые соответствуют: *1* — чистому Sn, *2* — Sn + 0,3% In, *3* — Sn + + 3% In.

На рис. 6 приведена температурная зависимость теплопроводности сплава Pb + 10%Bi [36]. Сначала функция $\varkappa(T)$ возрастает с понижением температуры в согласии с (13), затем после прохождения максимума начинает убывать при $T \to 0$. В области температур, соответствующей максимуму, $\varkappa_{pe} \approx \varkappa_{pd}$ (см. п. 4). При дальнейшем понижении температуры фононы в основном рассеиваются на примесях, что и соответствует убыванию функции $\varkappa(T)$.

В промежуточном случае не очень чистых сверхпроводников в области температур, близких к $T_к$, главную роль играет $\varkappa_e$ и ввиду этого $\varkappa$ падает с уменьшением температуры (см. рис. 5) по закону (5). При достаточно низкой температуре $\varkappa_p$ оказывается большим $\varkappa_e$ и дальнейшее поведение теплопроводности будет определяться кривой *2* на рис. 5, соответствующей формуле (13). Такая зависимость наблюдалась на опыте для Sn [37], Hg [38] и Pb [40]. На рис. 7 [37] показано, как постепенное увеличение концентрации примеси приводит к возрастанию роли решеточной теплопроводности и появлению соответствующего максимума.

На рис. 8 приведена температурная зависимость теплопроводности сверхпроводящего загрязненного свинца, полученная в [40]. Падение $\varkappa(T)$ при $T \sim T_к$ связано с соответствующим поведением величины $\varkappa_e$, играющей при $T \sim T_к$ главную роль. Далее, как видно из рисунка, теплопроводность Pb начинает возрастать, и в дальнейшем наблюдается максимум теплопроводности, связанный с максимумом $\varkappa_p$.

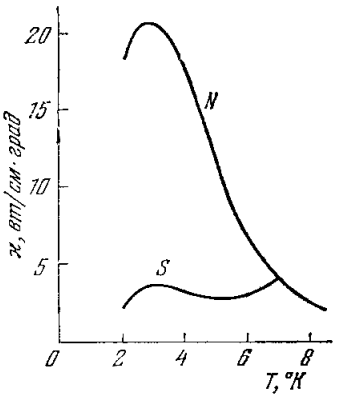

Рис. 8.

6. Основные типы теплопроводности

Теоретические и экспериментальные исследования процессов передачи тепла в сверхпроводниках приводят, таким образом, к выводу о существовании трех типов температурной зависимости теплопроводности.

К *1-му типу* (рис. 9) относятся чистые и слабо загрязненные сверхпроводники. В них, как уже отмечалось выше, при $T \to T_к$ и в промежуточной области температур основную роль играет электронная теплопроводность $\varkappa_e$. С понижением температуры $\varkappa$ при этом убывает в основном по экспоненциальному закону, описываемому формулами (5), (9), первая из которых соответствует слабо загрязненному, а вторая — чистому сверхпроводнику. На рис. 1 была изображена температурная зависимость $\varkappa$ таллия [13], относящаяся к рассматриваемому 1-му типу. При $T \to 0$ начинает играть основную роль решеточная теплопроводность: $\varkappa_{pd} \sim T^3$ и $\varkappa$ начинает стремиться к нулю по степенному закону.

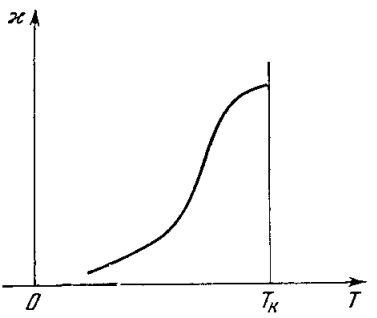

Рис. 9.

Ко *2-му типу* относятся сверхпроводники с большой концентрацией примеси (рис. 10). Теплопроводность этих сильно загрязненных сверхпроводников, в отличие от веществ первого типа, возрастает при $T \sim T_к$, с понижением температуры. При этом основную роль играет решеточная теплопроводность $\varkappa_{pe}$, описываемая формулой (13). Характерной особенностью рассматриваемого случая является наличие максимума теплопроводности, после прохождения которого $\varkappa(T)$ стремится к нулю по закону, определяемому функцией $\varkappa_{pd} \sim T^3$. Сплав Pb + 10%Bi (см. рис. 6) является примером сверхпроводников 2-го типа.

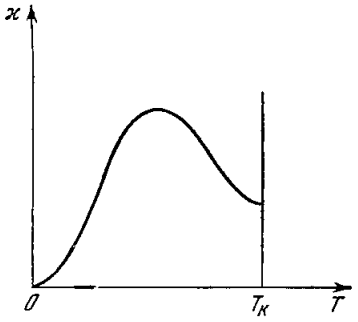

Рис. 10.

Наконец, *3-й тип теплопроводности* (рис. 11), который описывает поведение не очень чистых сверхпроводников, представляет собой комбинацию 1-го типа (при $T \sim T_к$) и 2-го (в промежуточной области температур). Приведенные в [37, 13, 40] данные по Pb и Sn (см. рис. 8) позволяют считать соответствующие образцы примерами сверхпроводников, относящихся к рассматриваемому промежуточному случаю.

В них при $T \sim T_к$ основную роль играет $\varkappa_{ed}$. Поэтому теплопроводность вначале падает с понижением температуры по закону (5). Далее, однако, $\varkappa_p$ становится больше $\varkappa_e$, и в дальнейшем сверхпроводник ведет себя как вещество, относящееся к рассмотренному выше 2-му типу.

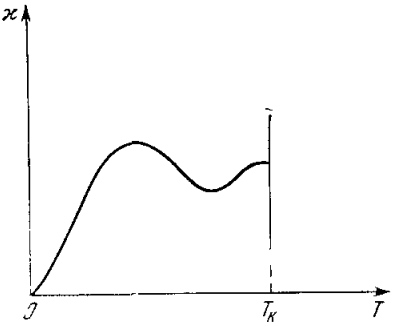

Рис. 11.

7. Влияние анизотропии на теплопроводность сверхпроводников

Выше, при исследовании различных механизмов теплопроводности, использовалась изотропная модель. Закон дисперсии электронов предполагался квадратичным. Электрон-фононное взаимодействие описывалось постоянной, не зависящей от направления, величиной.

Реальные металлы характеризуются существенно анизотропной ферми-поверхностью. Энергетическая щель $\Delta(\mathbf{p})$ является, вообще говоря, функцией направления. Однако анизотропия щели невелика, в связи с чем изотропная модель БКШ, как известно, достаточно хорошо описывает экспериментальные данные.

Теплопроводность является интегральным эффектом. Поэтому производимое при ее вычислении усреднение не приводит, вообще говоря, к сколько-нибудь заметной анизотропии коэффициента теплопроводности. Приведенные в п. 2—4 формулы, полученные в изотропной модели, достаточно хорошо поэтому описывают экспериментальные данные.

Исключение составляют одноосные кристаллы (например, Ga, Zn). В этих сверхпроводниках экспериментально [42, 43] наблюдается заметное различие вида функции $\varkappa(T)$ для различных ориентаций кристалла.

Вычислим электронную теплопроводность одноосного сверхпроводника [41]. Кинетическое уравнение, описывающее в рассматриваемом анизотропном случае поведение взаимодействующих с примесями электронных возбуждений, имеет вид

$$\frac{f}{T^2}\,\xi_{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial\xi_{\mathbf{k}}}{\partial\mathbf{k}}\,\nabla T\right) = I_{ст}, \tag{14}$$

где $I_{ст}$ — интеграл столкновений; при этом $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2(\mathbf{k})}$.

При температурах, близких к критической, энергетическая щель мала, и поэтому эффекты, связанные с ее анизотропией, не играют существенной роли. Иначе обстоит дело при достаточно низких температурах, удовлетворяющих условию $T \ll \Delta_{\min}$. Рассматривается область столь низких температур, при которых щель практически перестает зависеть от T и функция распределения электронных возбуждений определяется экспонентой $\exp(-\Delta/T)$. В анизотропном случае щель $\Delta(\mathbf{k})$ по некоторым экстремальным направлениям будет принимать минимальное значение. В одноосном кристалле с экстремальным направлением, совпадающим с главной осью его симметрии, бо́льшая часть электронных возбуждений будет двигаться вдоль этого направления.

Интеграл столкновений, фигурирующий в уравнении (14), может быть записан в виде (см. п. 1)

$$I_{ст} = -2\pi\int |V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2 (u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'} - v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}'})^2\,\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'})\,(f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}'})\,d\tau_{\mathbf{k}},$$
$$\left.\begin{matrix} u_{\mathbf{k}}^2 \\ v_{\mathbf{k}}^2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}}\right). \tag{15}$$

Учтено, что в анизотропном случае при упругом рассеянии примесями сохраняется лишь энергия возбуждения. Абсолютная же величина импульса, в отличие от изотропного случая, не сохраняется.

Искомую функцию распределения $f_{\mathbf{k}}$ ищем в виде $f_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}^0 (1 + \chi_{\mathbf{k}})$. Кинетическое уравнение после интегрирования по $\xi_{\mathbf{k}}$ принимает вид

$$-\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{T^2}\left(\frac{\partial \xi_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \nabla T\right) = \frac{\pi}{2}\int |V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2 \frac{\xi_{\mathbf{k}}+\xi_{\mathbf{k}'}}{\xi_{\mathbf{k}}|\xi_{\mathbf{k}'}|}\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial \xi_{\mathbf{k}}\,\partial o'}\right)(\chi_{\mathbf{k}} - \chi_{\mathbf{k}'})\,do'. \qquad (15')$$

Уравнение (14′) решается для экстремальных направлений. Обозначим через $\varkappa_{\parallel}$ и $\varkappa_{\perp}$ коэффициенты теплопроводности соответственно вдоль экстремального направления и направления, перпендикулярного к нему. Введем величины V_0 и V_π — матричные элементы для рассеяния соответственно на углы 0° и π для возбуждений, первоначально движущихся в экстремальном направлении. Решение уравнения (14′) приводит к следующим выражениям для величин $\varkappa_{\parallel}$ и $\varkappa_{\perp}$:

$$\varkappa_{\parallel} \approx \frac{8\Delta^2}{5\pi T}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{k}}\right)_F \frac{1}{1{,}8V_\pi^2 + 0{,}2V_0^2}\exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right), \qquad (16)$$

$$\varkappa_{\perp} \approx \frac{10\Delta^2}{3\pi\Delta''}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{k}}\right)_F \frac{1}{V_0^2 + V_\pi^2}\exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right) \qquad (16')$$

(Δ'' — вторая производная щели по углу θ между ∇T и вектором $\mathbf{k}$ вблизи экстремума). Экспоненциальная часть температурной зависимости $\varkappa$, как видно из (16), (16′), совпадает по всем направлениям. Мы видим, что отношение $\varkappa_{\perp}/\varkappa_{\parallel}$ оказывается равным

$$\frac{\varkappa_{\perp}}{\varkappa_{\parallel}} \approx \frac{2T}{\Delta''}\,\frac{1{,}8V_\pi^2 + 0{,}2V_0^2}{V_\pi^2 + V_0^2}, \qquad (17)$$

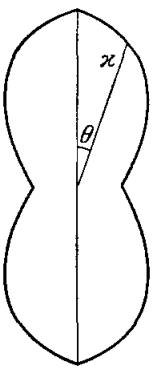

Рис. 12.

т. е. теплопроводность в направлении, перпендикулярном к экстремальному, оказывается приближенно в T/Δ раз меньше экстремального значения. На рис. 12 изображена зависимость теплопроводности от угла θ (рассматривается случай $\varkappa_{\perp}/\varkappa_{\parallel} = 1/5$), отсчитанного от экстремального направления, имеющая вид $\varkappa = \varkappa_{\parallel}\cos^2\theta + \varkappa_{\perp}\sin^2\theta$. Анизотропия теплопроводности экспериментально обнаружена в кристаллах Ga [42], Zn и Gd [43]. В [43] проведено детальное сравнение результатов, полученных при исследовании образцов Zn, с теорией [41]. Как видно из рис. 13, согласие является достаточно хорошим. Анизотропия щели в Zn оказывается характеризующейся следующими данными: $\Delta_{\min} = 1{,}2T_{\text{к}}$ или $\sim 1{,}0°$ K и $\Delta_{\max} - \Delta_{\min} \sim 0{,}55T_{\text{к}}$.

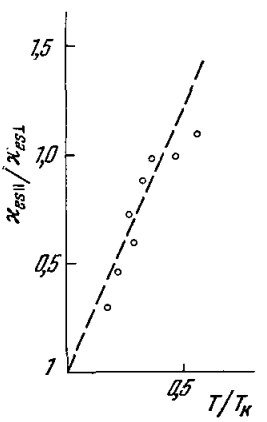

Рис. 13. $\varkappa_{es\parallel}$ и $\varkappa_{es\perp}$ — теплопроводности образцов Zn вдоль и перпендикулярно к гексагональной оси [43] (штриховая линия — теория [41]).

8. Исследование промежуточного состояния

Экспериментально наблюдается заметное уменьшение теплопроводности сверхпроводника при переходе его в промежуточное состояние. Впервые это явление наблюдалось в [44], где исследовались образцы из Pb + 0,1% Bi. Отмечается этот эффект и в ряде других работ, например в [45–47], где эффект уменьшения $\varkappa$ наблюдался у монокристаллов Hg, Sn, In. В широком температурном интервале эффект этот исследовался в [48, 49].

Отмечается уменьшение теплопроводности как при низких температурах, когда основной является фононная теплопроводность, так и в области более высоких температур, когда главным является электронный вклад. В первом случае, рассмотренном в [50, 51], уменьшение $\varkappa$ связано с уменьшением длины пробега фононов при переходе их из сверхпроводящей в нормальную фазу (в отмеченных выше экспериментах области нормальной фазы располагались перпендикулярно к оси образца, вдоль которой и распространялся тепловой поток; следовательно, фононы пересекали границу нормальной и сверхпроводящей фаз). Средняя длина пробега фононов уменьшалась благодаря наличию нормальных областей, что и приводило к понижению наблюдаемого теплового потока.

Рассмотрим далее область более высоких температур, где основным является электронный вклад (образец предполагается достаточно чистым). В [52] показано, что на границе нормальной и сверхпроводящей фаз при передаче тепла поперек слоев имеет место специфическое отражение электронных возбуждений. Именно, исследование уравнений

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = -\left(\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right) f + i\Delta(\mathbf{r})\varphi,$$

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right) \varphi - i\Delta(\mathbf{r}) f,$$

$$f(\mathbf{r}, t) = \langle\Phi_0 | \psi(\mathbf{r}, t\rangle | \Phi_1\rangle, \quad \varphi = (\mathbf{r}, t) = \langle\Phi_0 | \psi^+(\mathbf{r}, t) | \Phi_1\rangle,$$

(где ψ^+, ψ — гейзенберговские операторы, Φ_0 и Φ_1 — волновые функции в пространстве чисел заполнения, описывающие соответственно основное и возбужденное состояния системы, μ — химический потенциал; совокупность величин f и φ имеет смысл волновой функции квазичастицы) приводит к выводу о том, что импульс практически не изменяется при отражении, а величины ξ и скорость $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}$ меняют знак. Иными словами, при отражении происходит переход «электрона» в «дырку» и наоборот.

Рассмотрим область температур $T_0 \ll T \ll T_к$ (T_0 — температура, при которой основную роль начинает играть фононная теплопроводность). Тогда основную роль играют возбуждения с энергией ε, близкой к Δ (число остальных экспоненциально мало). При этом коэффициент надбарьерного отражения оказывается равным

$$W = 1 - f(\mathbf{n}_z)\sqrt{\frac{\varepsilon-\Delta}{\Delta'}} \tag{18}$$

($f \sim 1$, $\mathbf{n}_z$ — единичный вектор нормали).

Коэффициент W оказывается, как мы видим, величиной порядка единицы, и, следовательно, теплообмен через границу сверхпроводящей и нормальной фаз оказывается существенно затрудненным. Возникает ситуация, аналогичная теплообмену между твердым телом и жидким гелием [55,56]. В обоих случаях возникает скачок температуры, связанный в случае промежуточного состояния с тепловым потоком Q следующим соотношением:

$$Q = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f_0 \left(\frac{p_0}{\pi}\right)^2 \Delta \sqrt{\frac{\Delta}{T}} \exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right) \delta T,$$

где $Q = \frac{\partial W}{\partial T}\delta T$, W вычисляется по формуле

$$W = \int\limits_{v_z>0} 2n_0(\varepsilon)\,\varepsilon\,(1-W)\,v_z\,\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \qquad f_0 \sim 1, \; n_0(\varepsilon) = \exp(-\varepsilon/T),$$

а W определяется посредством (18). Добавочное теплосопротивление определяется по формуле

$$\Delta R = f_0^{-1}\left(\frac{2\pi}{p_0}\right)^2 \sqrt{\frac{\varphi(\eta)\,T}{\pi\alpha\, d\Delta^3}}\exp\left(\frac{\Delta}{T}\right) \tag{19}$$

($a = \sqrt{\alpha a/\varphi(\eta)}$ — период структуры в промежуточном состоянии [57]). Зависимость ΔR (в которую, как видно из (19), не входит электронная длина пробега) от температуры достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными.

В [54] показано, что в случае, когда $a_s \ll a_n$ (a_s, a_n — толщины соответственно сверхпроводящего и нормального слоев), существенным при $T \ll T_к$ оказывается эффект туннелирования тепловых возбуждений сквозь s-слой, что приводит к степенной зависимости теплосопротивления от температуры.

В работе [53] методом кинетического уравнения исследуется вопрос о теплопередаче вдоль слоев нормальной и сверхпроводящей фаз. При $T \ll T_к$ основную роль играют электроны нормальных областей. Теплопроводность ζ_{ik} (i, k пробегают обозначения x, y; ось z нормальна к границе областей) слоистой структуры при этом оказывается равной

$$\varkappa_{ik} = \frac{7\zeta(3)}{12\pi^3}\,T\,\frac{a_n^2}{a}\int\frac{d(\cos\theta)\,d\varphi}{K(\theta,\varphi)}\,n_i n_k\,\delta(\cos\theta), \tag{20}$$

где $n = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}}\Big/\left|\frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}}\right|$, $K(\theta, \varphi)$ — гауссова кривизна ферми-поверхности, $a = a_n + a_s$ — период структуры, углы θ и φ определяют взаимное расположение $\mathbf{n}$ и оси z. Основной вклад в теплопроводность вносят возбуждения, движущиеся параллельно границе, разделяющей фазы. Существенно, что в рассматриваемом случае сложной структуры $\varkappa$ не зависит от длины пробега. При этом, как видно из (20), теплопроводность чистой нормальной фазы оказывается в $la/a_n^2 \gg 1$ раз больше теплопроводности промежуточного состояния.

В случае «нитевидной структуры», термодинамически более выгодной вблизи границы промежуточного состояния, теплопроводность оказывается зависящей от длины пробега. При этом

$$\varkappa = \eta\,\frac{T}{24}\,\frac{a^2\ln(l/a)}{K(0)\,l_0}, \tag{21}$$

где η — концентрация нормальной фазы, а l — длина пробега, $l_0 = l(0)$; предположено, что длина свободного пробега электронов много больше диаметра нормальных нитей. Основной вклад в теплопроводность в этом случае вносят возбуждения, скорость движения которых образует малый угол с осью нити.

9. Теплопроводность сверхпроводников с сильным электрон-фононным взаимодействием

Экспериментальное исследование теплопроводности чистых сверхпроводящих образцов из Pb и Hg [38, 39] показало, что $\varkappa(T)$ у них при $T \sim T_к$ падает с понижением температуры более резко, чем у других металлов (рис. 14). Теплопроводность этих сверхпроводников плохо описывается поэтому формулой (9). Эта особенность свинца и ртути связана с их принадлежностью к группе так называемых аномальных сверхпроводников. Кроме Pb и Hg, к ним относятся также Nb, Ga, In, NbN, пленки Bi и др.

В этих веществах определяющее сверхпроводимость электрон-фононное взаимодействие не является слабым, и поэтому их свойства (см. обзор [7]) плохо описываются обычной теорией, развитой в приближении слабой связи. Аномальные сверхпроводники характеризуются значительно бо́льшим, чем остальные металлы, отношением $T_к/\theta$. Так, например, для Pb $T_к/\theta \approx 0{,}1$ (для сравнения отметим, что для Al, например, $T_к/\theta \approx 1/400$), что, согласно формуле $T_к \approx \theta \exp(-1/g)$ приводит к значению константы связи $g_{Pb} \approx 0{,}4$.

Из формул (5), (9) и (13) видно, что теплопроводность сверхпроводников определяется универсальной функцией параметра $b = \Delta/T$. Согласно обычной теории [1, 6]

$$\left.\frac{\Delta}{T}\right|_{T\to T_к} = 3{,}06\sqrt{1-\frac{T}{T_к}}\,.$$

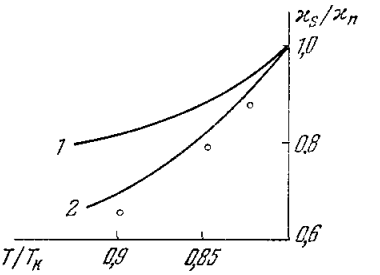

Рис. 14.

Для аномальных сверхпроводников это соотношение, полученное в приближении слабой связи, оказывается несправедливым, с чем и связано отмечаемое экспериментально расхождение теории и эксперимента.

Теоретическому рассмотрению свойств сверхпроводников с сильной связью посвящены работы [58-61, 62-63]. В [64] отмечаются специфические особенности теплопроводности аномальных сверхпроводников.

В [60, 61] найдена существенная для решения интересующего нас вопроса о теплопроводности температурная зависимость щели при $T \to T_к$. Оказалось, что для Pb

$$\left.\frac{\Delta}{T}\right|_{\substack{Pb,\\ T\to T_к}} \approx 4\sqrt{1-\frac{T}{T_к}}.$$

Для вычисления электронной теплопроводности аномальных сверхпроводников [60, 61], поскольку электрон-фононное взаимодействие не является слабым, будем исходить из общего определения коэффициента теплопроводности [16]

$$\varkappa(T, \omega) = (2\omega T)^{-1}\int d^4x\,\langle[\hat{q}(x), \hat{q}(0)]\rangle, \tag{22}$$

где $\hat{q}$ — оператор теплового потока, выражение для которого можно записать в виде [65]

$$\hat{q} = \left(\frac{\nabla\nabla'}{2m} - \mu + V\right)\frac{\nabla-\nabla'}{2mi}\,\psi^+(x')\,\psi(x)\Big|_{x=x'},$$

где V — потенциальная энергия. Выражение (22) может быть приведено к виду

$$\varkappa = (2\omega)^{-1}\sum_{\omega_{n'}}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{\omega_{n'}\omega'_-}{m^2}\,p^2\{G^n(\mathbf{p}, \omega_{n'})\,G^n(-\mathbf{p}, -i\omega'_-) +$$

$$+ F^{+n}(\mathbf{p}, \omega_{n'})\,F(-\overline{\mathbf{p}}, -\omega'_-)\}, \tag{23}$$

$$\omega'_- = \omega_{n'} - \omega_1, \quad \omega_1 = -i\omega, \quad \omega_{n'} = (2n'+1)\pi T;$$

здесь G^n и F^n — температурные гриновские функции электронных возбуждений, взаимодействующих с примесями, причем G^n и F^n, в соответствии с [66], могут быть записаны в виде

$$G^n = \frac{i\tilde{\omega} + \xi}{\tilde{\omega}^2 + \xi^2 + \tilde{\Sigma}^2(\omega)}, \qquad F^{+n} = \frac{\tilde{\Sigma}^*(\omega)}{\tilde{\omega}^2 + \xi^2 + \tilde{\Sigma}^2(\omega)},$$

$$\tilde{\omega} = \eta\omega, \quad \tilde{\Sigma}(\omega, T) = \eta\Sigma(\omega, T), \quad \eta = 1 + \frac{i}{2\tau\sqrt{\omega^2 - \Sigma^2(\omega)}},$$

где τ — время релаксации.

Функция $\Sigma(\omega, T)$ представляет собой собственно энергетическую часть, описывающую куперовское спаривание электронов. В приближении слабой связи можно пренебречь ее частотной зависимостью. При этом $\Sigma(\omega, T) \equiv \Delta(T)$ ($\Delta(T)$ — энергетическая щель). Для аномальных сверхпроводников функция $\Sigma(\omega, T)$ определяется путем решения интегрального уравнения [67]

$$\Sigma(\omega_n, T) = \frac{T}{(2\pi)^3} g^2 \sum_{\omega_{n'}} \int \frac{\omega^2(\mathbf{p}-\mathbf{k})}{\omega^2(\mathbf{p}-\mathbf{k}) + (\omega_n - \omega_{n'})^2} \frac{\Sigma(\omega_{n'}, T)}{\omega_{n'}^2 + \xi^2 + \Sigma^2(\omega_{n'}, T)} d\mathbf{k},$$

причем весьма существенным оказывается учет членов «запаздывания», описываемых выражением $(\omega_n - \omega_{n'})^2$ в знаменателе фононной гриновской функции.

Подставляем выражения для гриновских функций в (23) и интегрируем далее с помощью теории вычетов. Заменяем суммирование (аналогичный расчет см. в [14]) интегрированием в плоскости комплексной переменной. Существенно, что особыми при этом являются точки, удовлетворяющие уравнению $\omega = i\Sigma(\omega)$, т. е. точки, являющиеся решением уравнения для отыскания энергетической щели Δ. В результате оказывается, что обычный статический коэффициент теплопроводности описывается выражениями (5) [11], в которых, однако, фигурирует соответствующая данному аномальному сверхпроводнику щель $\Delta(T)$; в свинце, например, как мы уже отмечали выше, при $T \to T_к$ $\Delta/T \approx 4\sqrt{1-T/T_к}$.

Выражением (9) с соответствующей функцией $\Delta(T)$ описывается и теплопроводность чистых аномальных сверхпроводников, связанная с рассеянием электронов фононами. На рис. 14 приведена соответствующая теоретическая кривая, достаточно хорошо описывающая экспериментальные данные.

Большая величина коэффициента α в формуле

$$\left.\frac{\Delta}{T}\right|_{T\to T_к} = \alpha\sqrt{1-\frac{T}{T_к}}$$

определяет более резкое, чем в обычном случае, падение коэффициента теплопроводности аномальных сверхпроводников с понижением температуры.

10. Термоэффекты

а) Термоэлектрический эффект. Анизотропия кристалла приводит к возможности наблюдения в сверхпроводниках своеобразного термоэлектрического эффекта. Если в образце создан градиент температуры, то его существование приводит к появлению нормального тока $\mathbf{j}^{(n)}$. Однако в изотропном случае этот ток полностью компенсируется встречным сверхпроводящим током $\mathbf{j}^{(s)}$, и, таким образом, как полный ток, так и создаваемое им поле отсутствуют. Наличие градиента температуры приводит, таким образом, лишь к обычной теплопроводности и к малому дополнительному эффекту конвективной теплопроводности [68, 69, 11].

Эффект этот аналогичен циркуляции нормальной и сверхтекучей компонент неравномерно нагретого He II. В [11] показано, что отношение $Q_{конв}/Q$ для конвективного теплового потока $Q_{конв} = TSv_n$ (S — интропия, v_n — скорость нормальной компоненты) есть величина порядка $\sim k(T/T_к)^{1/2}/(p_0^2/m)$, что даже при $T \sim T_к$ составляет величину порядка $\sim 10^{-5}$—10^{-4}. Однако в анизотропном случае, когда имеется не одно, связанное с ∇T, а несколько выделенных направлений, ток $\mathbf{j}^{(n)}$, вообще говоря, не должен полностью компенсироваться током $\mathbf{j}^{(s)}$. Впервые вопрос о термоэлектрическом эффекте в сверхпроводниках был рассмотрен в [70, 68], где показано на основе соответствующего обобщения теории Лондонов, что учет анизотропии делает неверным обычный вывод об отсутствии термоэлектрических явлений в сверхпроводниках.

Термоэлектрические коэффициенты, определение которых и позволяет решить вопрос о возможности наблюдения эффекта, могут быть вычислены на основе микроскопической теории. Найти их из опытов с нормальными

металлами невозможно, поскольку они существенно зависят от параметров сверхпроводящего состояния (см. ниже).

В [71] термоэлектрический эффект в сверхпроводниках рассматривается на основе современной микроскопической теории. Исследуется вопрос о возможности его экспериментального обнаружения. Исходными для решения задачи являются уравнение Максвелла, а также выражения, определяющие сверхпроводящий и нормальный токи:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}^{(n)} + \mathbf{j}^{(s)}), \tag{24}$$

$$j_\alpha^{(n)} = b_{\alpha\beta} \nabla_\beta T, \tag{24'}$$

$$j_\alpha^{(s)}(\mathbf{q}) = -\frac{c}{4\pi} K_{\alpha\beta}(\mathbf{q}) A_\beta(\mathbf{q}), \tag{24''}$$

где $b_{\alpha\beta}$ — термоэлектрические коэффициенты, $K_{\alpha\beta}$ — так называемый тензор Пиппарда, связывающий ток с векторным потенциалом; $K_{\alpha\beta}$ вычисляется на основе микроскопической теории [72].

Рассмотрим бесконечную сверхпроводящую пластину (рис. 15; s — ось кристалла, все величины зависят от y). В случае полупространства отличная от нуля составляющая тока j_x, как видно из (24) — (24″), равна

$$j_x(y) = \frac{cH}{4\pi\delta} \exp(-y/\delta),$$

где $\delta = K_{xx}(0)$ — глубина проникновения, H — поле в толще образца (см. ниже). Для пластины [70]

$$j_x = \frac{cH}{4\pi\delta} \frac{\operatorname{sh}(y/2\delta)}{\operatorname{ch}(a/2\delta)}.$$

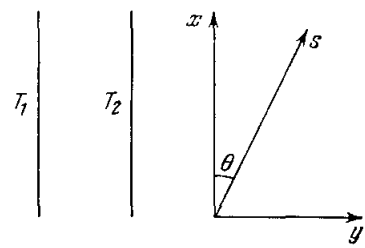

Рис. 15.

Соотношения, получаемые в рассматриваемом плоском случае, являются, естественно, градиентно-инвариантными. Таким образом, анизотропия кристалла приводит к существованию циркулирующего тока, отличного от нуля в поверхностном слое $\sim \delta$. Магнитное поле, создаваемое им, определяется равенством

$$H_z(y) = \frac{4\pi}{c} \frac{d}{dy} [K^{-1}(0, T) j^{(n)}(y)], \tag{25}$$

$$j^{(n)} = j_x^{(n)} - \frac{K_{xy}}{K_{yy}} j_y^{(n)}, \qquad K(q) = K_{xx}(q) - \frac{K_{xx}^2(q)}{K_{yy}(q)}.$$

Существенно, что в выражение для поля (25) даже для пиппардовских сверхпроводников входят составляющие тензора Пиппарда, соответствующие $q \to 0$, т. е. при исследовании термоэлектричества все сверхпроводники являются лондоновскими. Это связано с тем, что при возможных значениях градиента температуры $\nabla T \leqslant 0{,}1$ *град·см*$^{-1}$ связанный с ∇T нормальный ток слабо меняется на расстояниях порядка $\sim \xi_0$. В связи с этим в формуле

$$A_x(y) = \int j_n(\mathbf{q}) e^{iqy} [q^2 + K(\mathbf{q})]^{-1} d\mathbf{q},$$

определяющей векторный потенциал, основную роль играют $q \ll \xi_0^{-1}$. Кроме того, разумеется, $q \ll \delta^{-1}$, за исключением весьма малого интервала температур вблизи $T_к$.

Нормальный ток, определяющий, согласно (25), магнитное поле, а вместе с тем и термоэлектрические коэффициенты, находится путем

решения кинетического уравнения (см. (2) и (15))

$$-\frac{\varepsilon}{T}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}\nabla T = -2\pi\frac{|\xi|}{\varepsilon}\int |V|^2 (f'_{\mathbf{p}} - f'_{\mathbf{p}'})\frac{\partial \sigma}{v_F}$$

(где $d\sigma$ — элемент ферми-поверхности), решение которого может быть записано в виде [73]

$$f_1 = -\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\frac{\varepsilon}{T}\Lambda\nabla T$$

($\mathbf{\Lambda} = \tau(\mathbf{p})\mathbf{v}$ — векторная длина свободного пробега).

Окончательно для поля, создаваемого термоэлектрическим током, получено следующее выражение [71]:

$$H_z(y) = \frac{2\pi ck}{e}(\nabla T)^2 \sin 2\theta\,(\varphi_{\parallel} - \varphi_{\perp})\frac{d}{dT}\left[F\left(\frac{\Lambda}{T}\right)\frac{\delta_L^2(T)}{\delta_L^2(0)}\right], \tag{26}$$

$$\varphi_{\parallel,\perp} = \int \frac{d\sigma}{v_F} v_{\parallel,\perp}^2(\mathbf{n}) \Big/ \int \frac{d\sigma}{v_F} v_{\parallel,\perp}^2,$$

где θ — угол между $\mathbf{s}$ и осью Ox (см. рис. 15), τ — время релаксации, k — постоянная Больцмана; $v_{\parallel,\perp}$ — соответственно параллельная и перпендикулярная составляющие фермиевской скорости относительно оси кристалла $\mathbf{s}$, $F(x) = x(e^x + 1)^{-1} - \ln(1 + e^{-x})$.

Мы видим, что поле выражается через универсальную функцию $T/T_к$ и величины, характеризующие нормальный металл. При $T \to T_к$ находим

$$H_z = \frac{ck}{e}(\nabla T)^2 \cdot \frac{1{,}4\pi}{T_к}\sin 2\theta\,(\varphi_{\parallel} - \varphi_{\perp})\left(1 - \frac{T}{T_к}\right)^{-2}. \tag{27}$$

Эффект возрастает при $T \to T_к$ (за исключением малого интервала вблизи $T_к$, где исчезает циркулирующий ток).

Оценим возможное значение поля:

$$H \sim \frac{ck}{e}(\nabla T)^2 \frac{\Lambda}{v_F T_к}\left(1 - \frac{T}{T_к}\right)^{-2}.$$

Если, например, $\nabla T \approx 0{,}1$ *град/см* и $\Lambda \approx 0{,}1$ *см* (см., например, [74, 30]; образец, следовательно, должен быть достаточно чистым), то при $T/T_к \approx 0{,}99$ возможны поля $H \sim 10^{-3}$ *гс*, при $T/T_к \approx 0{,}9$ — поля $H \sim 10^{-5}$ *гс*.

С понижением температуры или при загрязнении образца термоэлектрическое поле, а вместе с ним и магнитный момент уменьшаются. Исследование термоэлектрического эффекта в сверхпроводниках может быть в связи с этим использовано [75] в качестве простого метода экспериментального обнаружения квантования магнитного потока.

Наиболее сильно термоэлектрический эффект проявляется при выполнении следующих условий: 1) образец должен быть достаточно чистым; 2) следует взять одноосный кристалл; 3) температура должна быть близка к $T_к$.

Приведенные выше значения поля H вполне доступны для экспериментального обнаружения, что и делает интересной постановку соответствующих экспериментов.

б) Термомагнитный эффект. Термомагнитные эффекты возникают, как известно, при действии магнитного поля на тепловой поток (см., например, [76]). В сверхпроводниках оказывается возможным наблюдение эффекта Ледюка — Риги, состоящего в появлении градиента температуры, перпендикулярного к направлению результирующего теплового потока.

Для исследования этого эффекта [77] запишем кинетическое уравнение для электронных возбуждений при наличии температурного градиента

по оси x и перпендикулярного к тепловому потоку магнитного поля:

$$-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\frac{\varepsilon}{T}v_x\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{eH}{c}\left(v_y\frac{\partial f}{\partial p_x}-v_x\frac{\partial f}{\partial p_y}\right)\frac{\xi}{|\xi|}=-\frac{f-f_0}{\tau}. \qquad (28)$$

Время релаксации τ равно [11] $\tau = \tau_0\varepsilon/|\xi|$ (см. выше, п. 2). Естественно, предполагается, что размер образца меньше глубины проникновения поля. Решая уравнение (28) методом последовательных приближений ($f = f_0 + f_1 + f_2$), находим, что

$$f_1=\frac{p_x}{m}\tau_0\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\frac{\varepsilon}{T}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\xi}{|\xi|}, \qquad f_2=\tau_0^2 v_y\frac{1}{T}\frac{eH}{mc}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\varepsilon^2}{|\xi|}. \qquad (29)$$

Величина эффекта Ледюка — Риги определяется коэффициентом

$$L=\frac{\partial T}{\partial y'}\Big/\frac{\partial T}{\partial x'}H$$

(ось x' совпадает с направлением результирующего теплового потока). Легко видеть, что $L = Q_y/Q_xH$, причем

$$Q_x=2\int \varepsilon v_x f_1\,dp, \qquad Q_y=2\int \varepsilon v_y f_2\,dp.$$

С помощью (29) находим

$$L=\frac{\tau_0 e}{mc}. \qquad (30)$$

Эффект Нернста — Эттингаузена, заключающийся в появлении электрического поля, перпендикулярного к направлению результирующего теплового потока, в случае сверхпроводников, очевидно, отсутствует.

III. ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКА В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Затухание продольных звуковых волн в сверхпроводниках впервые исследовалось еще до появления теории сверхпроводимости в работах [78, 79]. Изучение этого эффекта соответственно в Pb и Sn привело к выводу о монотонном уменьшении затухания с понижением температуры ниже $T_к$. Температурная зависимость оказывается значительно более резкой по сравнению с соотношением $\gamma \sim (T/T_к)^4$, полученным при исследовании двухжидкостной модели Гортера — Казимира.

Вопрос о затухании звука был одним из первых, исследованных в теории сверхпроводимости. Это обстоятельство не является случайным. Дело в том, что соответствующие измерения позволяют получить богатую информацию об особенностях электронного спектра возбуждений сверхпроводника. Температурная и угловая зависимости энергетической щели весьма надежно определяются с помощью ультразвуковых измерений.

При рассмотрении вопроса о затухании звука следует различать два предельных случая. Первый из них соответствует частотам ω, удовлетворяющим условию $\omega \gg \tau^{-1}$ (ультразвук), где τ — время релаксации, а второй — условию $\omega \ll \tau^{-1}$ (длинноволновый звук). В первом случае можно вообще пренебречь процессами релаксации и рассматривать поглощение звука просто как процесс абсорбции звуковых квантов свободными электронными возбуждениями. Затухание в этом случае вполне аналогично известному затуханию Ландау плазменных волн [80] и фактически представляет собой поглощение волны резонансными электронами.

Во втором случае процессы релаксации играют, разумеется, решающую роль и диссипация энергии звуковой волны определяется путем исследования соответствующего кинетического уравнения.

1. Затухание ультразвука

а) Изотропный случай. В рассматриваемом случае период звуковой волны значительно меньше времени релаксации. Взаимодействие волны с электронной системой при этом, как мы уже отмечали, можно рассматривать как излучение и поглощение звуковых квантов электронными возбуждениями.

Записывая с помощью u, v-преобразования (3) вероятность поглощения звукового кванта и вероятность обратного процесса, получим для коэффициента поглощения следующее выражение [26, 17]:

$$\gamma \sim \int |V|^2 \left[\left(1+\frac{\xi\xi'-\Delta^2}{\varepsilon\varepsilon'}\right)(f-f')\,\delta(\varepsilon'-\varepsilon-\omega) + \right.$$
$$\left. + \left(1-\frac{\xi\xi'-\Delta^2}{\varepsilon\varepsilon'}\right)(1-f-f')\,\delta(\varepsilon'+\varepsilon-\omega)\right] dp.$$

Производя соответствующее интегрирование, приходим к следующей формуле для отношения коэффициентов поглощения ультразвука в нормальном и сверхпроводящем состояниях (при $\omega \lesssim T$):

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_n} = \frac{x - \ln[(e^{b+x}+1)(e^b+1)^{-1}] + D(x)\,(2b - x + 2\ln[(e^{x-b}+1)(e^b-1)^{-1}])}{\ln[(e^x+1)/2]}, \quad (31)$$

где $x = \omega/T$, $b = \Delta/T$; функция $D(x)$ (см. выше) введена в связи с тем, что рождение пар возбуждений возможно только в том случае, когда $\omega \geqslant 2\Delta$.

При $x = \omega/T \ll 1$ приходим к формуле, полученной ранее в [1]:

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_n} = \frac{2}{e^b+1}. \quad (32)$$

Наблюдаемое в эксперименте резкое уменьшение поглощения с понижением температуры ниже $T_к$ описывается, как видно из (32), «фермиевской» функцией. Оно определяется резким возрастанием по мере удаления от $T_к$ функции $\Delta(T)$ и связано с уменьшением числа электронных возбуждений.

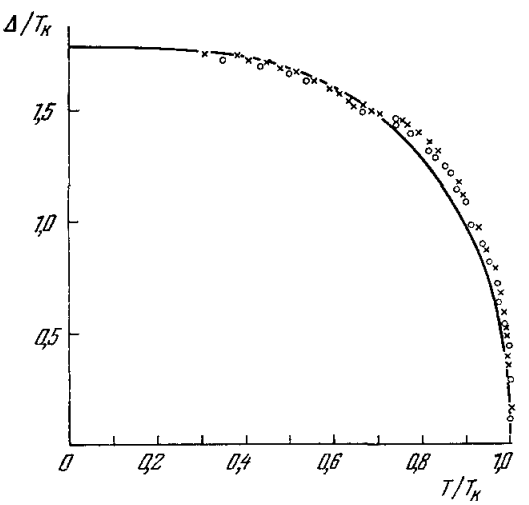

Рис. 16.

Формула (32) непосредственно связывает энергетическую щель $\Delta(T)$ с измеряемым в эксперименте отношением γ_s/γ_n. Простота ее позволяет весьма эффективно использовать ультразвуковые измерения для определения вида функции $\Delta(T)$. На рис. 16 приведены экспериментальные данные [81], полученные при исследовании затухания ультразвука в монокристаллах Sn. Следует отметить очень хорошее согласие теории с экспериментальными данными. На этом примере видно, что ультразвуковые измерения действительно позволяют с высокой точностью восстановить характер функции $\Delta(T)$, являющейся основной характеристикой сверхпроводящего состояния.

б) Влияние анизотропии щели на затухание ультразвука. 1) *Коэффициент поглощения. Восстановление функции* $\Delta(\mathbf{n})$. Поглощение ультразвука весьма чувствительно к структуре энергетического спектра исследуемого вещества. Поэтому соответствующие исследования, как уже отмечалось выше, позволяют получить достаточно полную информацию о температурной и угловой зависимости $\Delta(T, \mathbf{n})$ в спектре возбуждений.

В ряде экспериментальных работ (см. ниже) наблюдается ярко выраженная анизотропия поглощения ультразвука в сверхпроводниках. Формулы (31), (32), полученные в изотропном приближении, неприменимы для анализа соответствующих экспериментальных данных. Теоретическому рассмотрению вопроса о влиянии анизотропии на затухание ультразвука посвящены работы [82–84].

Ограничимся вначале рассмотрением чистого сверхпроводника [82].

Затухание описывается мнимой частью поляризационного оператора $\Pi(\mathbf{q}, i\omega_n)$ равного

$$\Pi(\mathbf{q}, i\omega_n) = \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_{n'}} \int d^3p' \left[G(\mathbf{p}) G(\mathbf{p}-\mathbf{q}) - F(\mathbf{p}) F(\mathbf{p}-\mathbf{q})\right],$$

где $\omega_n = (2n+1)\pi T$,

$$G(\mathbf{p}, \omega_n) = \left(\frac{u_{\mathbf{p}}^2}{\varepsilon_{\mathbf{p}} - \omega_n} - \frac{v_{\mathbf{p}}^2}{\varepsilon_{\mathbf{p}} + \omega_n}\right) g(\mathbf{p}),$$

$$F(\mathbf{p}, \omega_n) = \frac{\Delta(\mathbf{p})}{2\varepsilon_{\mathbf{p}}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}} - \omega_n} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{p}} + \omega_n}\right) g(\mathbf{p}),$$

$$u_{\mathbf{p}}^2,\ v_{\mathbf{p}}^2 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{\varepsilon_{\mathbf{p}}}\right);$$

безразмерная функция $g(\mathbf{p})$ существенным образом зависит от направлений.

Перейдем от суммирования по ω_n к интегрированию с помощью замены

$$T \sum_{\omega_n} = \frac{i}{4\pi} \int_{\Gamma} \operatorname{th}\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) d\omega$$

Γ — контур, состоящий из двух прямых, параллельных мнимой оси).

Вычисление приводит к следующему выражению (при $\omega < 2\Delta$) для $\operatorname{Im}\Pi$:

$$\operatorname{Im}\Pi = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3p g^2(\mathbf{p}) \frac{\xi^2}{\varepsilon^2} \left[f(\beta\varepsilon - \beta\omega) - f(\beta\varepsilon)\right] \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega),\ \beta = T^{-1}.$$

Искомое отношение γ_s/γ_n описывается формулой

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_n} = 2\langle f(\beta\Delta)\rangle_n,$$

$$\langle\varphi\rangle_n = \int \frac{d\sigma'}{v_F'} g^2(\mathbf{n}') \delta(\cos x) \varphi(\mathbf{n}') \Big/ \int \frac{d\sigma'}{v_F'} g^2(\mathbf{n}') \delta(\cos x) \qquad (33)$$

($d\sigma$ — элемент ферми-поверхности, x — угол между направлением фермиевской скорости и направлением распространения звука), из которой видно, что поглощение звука действительно характеризуется существенной анизотропией.

Формула, весьма удобная для анализа экспериментальных данных, получается при рассмотрении поглощения ультразвука в области низких температур, удовлетворяющей условиям

$$1 < \frac{T_{\text{к}}}{T} < \frac{2}{\alpha} \ln\left(\frac{v_F}{u}\right)$$

(u — скорость звука, α — коэффициент анизотропии, равный отношению изменения $\Delta(\mathbf{n})$ на поверхности Ферми к минимальному значению Δ_0). Она имеет вид

$$\gamma_s(\mathbf{q}) \sim \omega(\mathbf{q}) \exp\left(-\frac{\Delta_n^{\min}}{T}\right), \tag{34}$$

где $\omega(\mathbf{q})$ — фононная частота, $\Delta_n^{\min}$ — минимальное значение энергетической щели на окружности стереографической проекции поверхности Ферми, перпендикулярной вектору $\mathbf{n} = \mathbf{q}/q$.

В области более низких температур, при которых измерения пока, по-видимому, не производились, поглощение определяется абсолютным минимумом щели Δ_0. При этом

$$\gamma \sim \exp(-\beta\Delta_0) \sum |\cos^3 \chi_0|^{-1},$$

где χ_0 — углы между скоростями в точке абсолютного минимума и направлением $\mathbf{q}$.

Из формулы (34) непосредственно видно, что коэффициент поглощения γ_s экспоненциально убывает с температурой, причем показатель экспоненты зависит от направления. Согласно этой формуле поглощение определяется минимальным значением щели вдоль линии $\mathbf{qv} = 0$. Результат этот имеет ясный физический смысл. Действительно, в рассматриваемом случае поглощения высокочастотного звука, которое (см. выше, гл. I) может рассматриваться как прямой квантовый процесс поглощения фонона электроном, должен выполняться закон сохранения энергии $\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} = \omega_{\mathbf{q}}$, $\omega_{\mathbf{q}} = \mathbf{uq}$. Приведенное условие, с учетом неравенства $u \ll p$, может быть записано в виде

$$\mathbf{vq} = \omega. \tag{35}$$

Таким образом, в рассматриваемое резонансное поглощение основной вклад, как и следовало ожидать, вносят электроны, движущиеся в плоскости равной фазы звуковой волны. Поскольку скорость звука удовлетворяет неравенству $u \ll v_F$, условие (35) можно приближенно записать в виде $\mathbf{vq} = 0$, т. е. действительно в поглощение основной вклад вносят электронные возбуждения, скорости которых перпендикулярны к направлению распространения звука. При низких температурах больцмановское распределение электронных возбуждений сверхпроводника и приводит к формуле (34), в которой фигурирует минимальное значение щели вдоль линии $\mathbf{vq} = 0$.

В работе [83] обсуждается вопрос о возможности восстановления энергетической щели $\Delta(\mathbf{n})$ по измерениям затухания ультразвука в низкотемпературной области. Предлагается способ, позволяющий при наличии односвязной поверхности Ферми восстановить во многих случаях функцию $\Delta(\mathbf{n})$. Способ этот заключается в следующем. С помощью ультразвуковых измерений определяется функция $f(\mathbf{n}) = \Delta_n^{\min}$. Далее для каждой точки линии уровня γ_a этой функции строится большая окружность $c(\mathbf{n})$, перпендикулярная к направлению $\mathbf{n}$. Огибающая полученного семейства окружностей и представляет собой линию уровня функции $\Delta(\mathbf{n})$. К сожалению, в случае неодносвязной поверхности Ферми приведенная процедура не позволяет однозначно восстановить ферми-поверхность, поскольку невозможно определить, к какой из несвязанных частей ее относятся найденные линии уровня.

2) *Экспериментальные данные.* Анизотропия щели обнаружена с помощью ультразвуковой методики во многих сверхпроводящих эле-

ментах. Прежде всего это относится к сверхпроводящему олову, исследованному в [85-88] (подробный обзор экспериментальных данных см. в [89]). На рис. 17 непосредственно видна зависимость поглощения [86] от ориентации звуковой волны.

В [90] отмечается, что разность $\Delta_{max} - \Delta_{min}$ уменьшается по мере загрязнения образца. Введение примесей, согласно [24], действительно все более приближает исследуемый сверхпроводник к изотропной модели. Эффекты анизотропии щели существенны до тех пор, пока $l > v/\Delta_{ср}$.

Согласно [87-89] ориентации вектора $\mathbf{q}$ относительно кристаллографических осей $\mathbf{q} \perp [101]$ соответствует отнесенная к поясу $\mathbf{qv} = 0$ на ферми-поверхности минимальная щель $2\Delta = 3{,}9T_к$; если же, например, $\mathbf{q} \perp [112]$, то $(2\Delta/T_к)_{min} = 4{,}4$, а ориентация $\mathbf{q} \perp [111]$ соответствует $(2\Delta/T_к)_{min} = 4{,}8$. Отмечается также согласие с теоремой Покровского [91] о пропорциональном изменении с температурой щелей, относящихся к различным кристаллографическим направлениям.

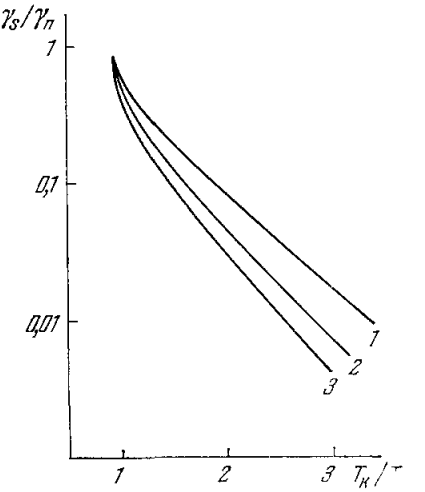

Рис. 17. Кривые соответствуют: 1 — $\mathbf{q} \parallel [001]$, 2 — $\mathbf{q} \parallel [110]$, 3 — $\mathbf{q} \perp [001]$.

Наблюдается также с помощью ультразвуковых измерений анизотропия в Ga [92], Va и Zn [93], Ta [94], Re [95], In [96], Nb [97]. В Zn, например, $\Delta_{min} = 3{,}4T_к$, а $\Delta_{max} = 3{,}8T_к$. В Nb ориентации $\mathbf{q}_{min} \parallel [100]$ соответствует $\Delta = 3{,}6T_к$, а $\mathbf{q} \parallel [111]$ — $\Delta = 3{,}4T_к$.

В работе [98] энергетический спектр Nb исследуется с помощью измерений его теплоемкости в низкотемпературной области. Чистый сверхпроводящий Nb характеризуется, согласно данным этой работы, двумя щелями $2\Delta_1 = 3{,}5T_к$ и $2\Delta_2 = 0{,}3T_к$. Таким образом, исследование свойств Nb различными методами приводит к различным значениям Δ_{min} и Δ_{max}. Это связано с тем, что при измерении теплоемкости проявляется в основном многозонная структура сверхпроводника (см. ниже), а при исследовании зависимости поглощения ультразвука от направления основную роль играет анизотропия щели.

3) *Поглощение звука в анизотропном сверхпроводнике при наличии примесей.* Выше рассматривалось поглощение ультразвука в чистом анизотропном сверхпроводнике. Вычислим теперь [84] коэффициент поглощения с учетом рассеяния примесями электронных возбуждений. Задача решается как для массивного сверхпроводника, так и для пластины, толщина которой $d < l$ (l — длина пробега возбуждений).

Звуковое поле будем рассматривать как фактор, деформирующий решетку кристалла [99, 100, 106]. Коэффициент поглощения определяется формулой $\gamma_s = T\dot{S}/W$ (S — плотность энтропии газа элементарных возбуждений, связанная обычным образом с функцией распределения $n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$, W — плотность энергии звуковой волны). Записывая интеграл столкновений в приближении времени релаксации, находим

$$\gamma_s = -\frac{2}{W}\int \nu' |\chi|^2 \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon\, ds}{\left|\frac{d\varepsilon}{d\mathbf{p}}\right|}, \tag{36}$$

где ν' — частота столкновений возбуждений с примесями, причем

$\nu' = \nu\,|\xi|/\varepsilon^{11}$ (см. выше, гл. II, п. 1),

$$n = n_0 - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\chi, \quad n_0 = [\exp(\varepsilon/T) + 1]^{-1}, \qquad \varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$$

и появление добавки $\varepsilon_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ обусловлено смещением в решетке, описывающим звуковое поле.

Функция χ, определяющая возмущенную функцию распределения, находится путем решения кинетического уравнения, аналогичного уравнению, используемому в [100] для решения задачи о поглощении звука в нормальном металле. Отдельно рассматриваются два случая: 1) массивный металл или пластина с зеркально отражающими гранями; 3) пластина с диффузно рассеивающими границами.

В первом случае в наиболее интересной области, каковой оказывается область низких температур $T < \delta\Delta = \Delta_{\max} - \Delta_{\min}$, отношение γ_s/γ_n оказывается равным (при $ql \ll 1$)

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_n} \sim \frac{T}{\delta\Delta}\exp\left(-\frac{\Delta_{\min}}{T}\right). \tag{37}$$

В обратном предельном случае $ql \gg 1$ существенным оказывается соотношение величин $(ql)^{-1}$ и $(T/\delta\Delta)^{1/2}$. Так, например, если $(ql)^{-1} < (T/\delta\Delta)^{1/2}$, то

$$\gamma_s^{\max} \sim \exp\left(-\frac{\Delta_{\min}}{T}\right)\left(\frac{T}{\delta\Delta}\right)^{1/2}\gamma_n;$$

если же $(ql)^{-1} > (T/\delta\Delta)^{1/2}$, то

$$\gamma_s^{\max} \sim \exp\left(-\frac{\Delta_{\min}}{T}\right) ql\left(\frac{T}{\delta\Delta}\right)\gamma_n.$$

Наиболее сложной угловая зависимость оказывается в температурном интервале $(ql)^{-1} < (T/\delta\Delta)^{1/2}$, $\exp(\delta\Delta/T) > ql\,(\delta\Delta/T)^{1/2}$. При этом оказывается существенной анизотропия и предэкспоненциального множителя.

Поглощение в пластине $\gamma_s^{\text{пл}}$ с диффузно рассеивающими границами в области температур $\delta\Delta \lesssim T$ (именно при выполнении этого условия температурное изменение щели оказывается наиболее заметным) описывается формулой $\gamma_s^{\text{пл}} = 2n_0(\Delta_0)\,\gamma_n^{\text{пл}}$, причем $\gamma_n^{\text{пл}} = \gamma_n^{\text{масс}}\ d/l$, Δ_0 — величина щели в точке $v_x = v_z = 0$ на поверхности Ферми. Эта формула может быть использована для восстановления энергетической щели как функции направления и температуры.

В изотропном случае полученные в [84] формулы переходят в обычное соотношение (32). Это не случайно, поскольку упругое рассеяние на примесях не может быть механизмом релаксации системы электронных возбуждений, меняющих свою энергию в поле звуковой волны. Поэтому в изотропном случае поглощение при наличии примесей оказывается таким же, как и в свободном электронном газе (см. п. 1). В анизотропном же случае, как и при наличии перекрывающихся энергетических зон, картина существенно усложняется, поскольку электроны при рассеянии примесями могут перейти в другую зону или на другой участок ферми-поверхности. Происходит перепутывание соответствующих ψ-функций. Изменение электронных состояний сказывается на картине поглощения звуковой волны, что и приводит к закономерностям, отличным от формулы (32) обычной теории БКШ.

в) Поглощение ультразвука в сверхпроводниках с перекрывающимися энергетическими

з о н а м и. При наличии перекрывающихся энергетических зон поглощение ультразвука описывается гамильтонианом $\mathscr{H} = \sum_{i,\mathbf{k},\mathbf{q}} \lambda_i a^+_{\mathbf{k}i} a_{\mathbf{k}i} b_{\mathbf{q}}$, где $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ — электронные импульсы, $\mathbf{q}$ — импульс фонона.

Коэффициент поглощения при $\omega \leqslant \Delta_i(T)$ оказывается для чистых образцов равным [101–103]

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_n} = \sum_i \frac{f_i}{\exp\left(\frac{\Delta_i}{T}\right)+1}. \tag{38}$$

Суммирование в (38) происходит по всем зонам; величины f_i не зависят от температуры. Не рассматриваются процессы, при которых электрон, поглотивший квант звука, переходит из одной зоны в другую, поскольку такие переходы сопровождаются, вообще говоря, изменением электронного импульса на величину $\sim p_0$, что невозможно при рассматриваемых частотах звуковой волны $\omega \leqslant \Delta$. При $T \to 0$, как видно из (38), основной вклад в поглощение вносит зона, характеризующаяся меньшей энергетической щелью, что приводит к отклонению от простой экспоненциальной зависимости и некоторому замедлению падения функции $\gamma_s(T)$. Этот эффект отклонения при $T \to 0$ температурной зависимости коэффициента затухания от экспоненциальной зависимости отмечается в ряде экспериментальных работ. Так, в [93] это явление наблюдалось в сверхпроводящем ванадии. Аналогичное замедление падения отмечается в сверхпроводящем олове [90]. Введение примесей, в согласии с [24], приводит постепенно к исчезновению многозонных эффектов, что и видно на рис. 18, взятом из [90].

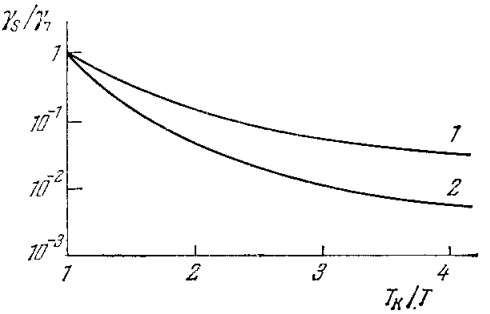

Рис. 18. Кривые соответствуют: *1* — чистому Sn, *2* — Sn + 0,1 ат.% In.

Следует заметить, что эффект анизотропии приводит к меньшим изменениям щели, чем эффект перекрытия зон. В связи с этим отметим, что в той же работе [90] приводятся данные для щелей Δ_1 и Δ_2; $2\Delta_1/T_к = 2{,}8$ и $2\Delta_2/T_к = 8$, которые, по-видимому, относятся к различным энергетическим зонам (ср. данные для Nb и см. выше п. б), 2)). В [89] отмечается, что для одной из ориентаций звуковой волны относительно осей Sn наблюдается отклонение от экспоненциальной зависимости. Заметим в связи с этим, что проявление многозонной структуры в Sn в туннельных экспериментах отмечается в [104].

В [103] методом корреляционных функций исследуется поглощение продольного ультразвука в двухзонном сверхпроводнике. Коэффициенты f_i, фигурирующие в (38), оказываются при этом равными

$$f_i = \frac{m_i^2}{\sum_{k=1,2} m_k^2} \quad (i = 1, 2)$$

($m_{1,2}$ — эффективные электронные массы соответственно для 1-й и 2-й зон). В [105] получена общая формула для коэффициента поглощения ультразвука в сверхпроводящих сплавах в многозонной анизотропной модели. При этом оказывается, что даже при наличии изотропных щелей в каждой из зон поглощение может оказаться различным в зависимости от направления распространения звука относительно кристаллографических осей,

если при равенстве щелей эффективные массы и фермиевские импульсы неодинаковы в различных зонах.

г) Поглощение ультразвука в сверхпроводниках с сильной связью. В работе [107] экспериментально исследовалось поглощение ультразвука в сверхпроводящем свинце. Отмечено, что затухание спадает ниже $T_к$ значительно быстрее, чем это следует из обычной теории сверхпроводимости. Ясно, что эта особенность связана с аномальным характером свинца, являющегося сверхпроводником с сильным электрон-фононным взаимодействием. Аналогичные эффекты наблюдаются при исследовании Nb [108] и Hg [109], также являющихся аномальными сверхпроводниками. Отмеченная особенность может быть объяснена [110] на основе теории сверхпроводников с сильной связью [60-61].

Расчет производится на основе метода, развитого в [82] (см. выше, п. 1, б)). Учитывается, что собственно энергетическая часть $\Sigma(\omega_n, T)$, входящая в функцию Грина и описывающая куперовское спаривание, существенным образом зависит от «частоты» ω_n ($\omega_n = (2n+1)\pi T$). Зависимость эта имеет вид [60,61]

$$\Sigma(\omega_n, T) = C(T)\frac{\omega^2}{\omega^2+\omega_n^2} + \Sigma' \quad (\Sigma' \ll \Sigma),$$

где ω — фононная частота.

Оказывается, что поглощение ультразвука и при наличии сильной связи описывается формулами обычной теории (31), (32) (это обстоятельство отмечается также в [111]). Однако в них фигурирует теперь величина щели, соответствующая данному аномальному сверхпроводнику. Если в обычном случае коэффициент α в формуле

$$\left.\frac{\Delta}{T}\right|_{T\to T_к} = \alpha\left(1-\frac{T}{T_к}\right)^{1/2}$$

равен 3,06, то для Pb [60, 61] $\alpha_{Pb} = 4$, что и определяет более резкое убывание затухания ультразвука с понижением температуры ниже $T_к$.

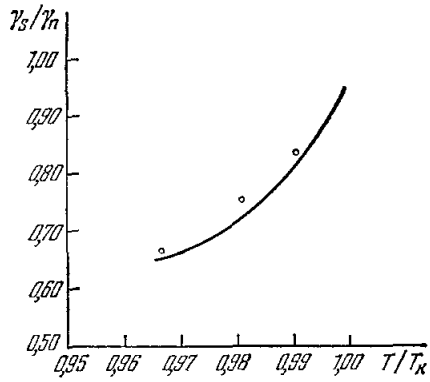

Рис. 19.

На рис. 19 приведены экспериментальные данные [107], соответствующие измерениям вблизи $T_к$, и теоретическая кривая [110], построенная с учетом приведенных выше соображений. Видно, что формула (32) с соответствующей свинцу зависимостью Δ/T при $T \to T_к$ достаточно хорошо описывает экспериментальные данные, приведенные в [107].

д) Пороговые явления. Наличие щели в энергетическом спектре приводит к возможности наблюдения в сверхпроводниках так называемых пороговых явлений [112-114]. Если в нормальном металле возможен процесс поглощения фонона любой частоты, то в сверхпроводнике при $T = 0°$ К ультразвук будет затухать только в случае, когда $\omega \geqslant 2\Delta(0)$. Соответствующий процесс рождения фононом пары возбуждений и при конечных температурах оказывается возможным только в случае, когда энергия фонона не меньше порогового значения, равного $\omega = 2\Delta(T)$. Наличие пороговых эффектов в поглощении гиперзвука в Al экспериментально наблюдалось в [115].

Пороговое поглощение при $T = 0°$ К описывается, согласно [113], следующей общей формулой:

$$\frac{\gamma_s}{\omega} = \frac{\pi \tilde{g}}{(2\pi)^2 qv} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi_+ \int\limits_{\xi_- - vq}^{\xi_+ + vq} d\xi_- \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- - \xi_+\xi_- + \Delta^2}{\varepsilon_+\varepsilon_-} \delta(\varepsilon_+ + \varepsilon_- - \omega), \tag{39}$$

$$\xi_\pm = \xi_{\mathbf{p}\pm\mathbf{q}/2}.$$

Вблизи порога, когда $\omega = 2\Delta\,[1 + (\eta/2)]\,(\eta \ll 1)$, затухание скачком возрастает от нуля до конечной величины $\tilde{g}u/8v$. Размазывание этого скачка затухания происходит в весьма малой области частот.

В случае, когда $\omega \gg 2\Delta$, можно пренебречь в (39) величиной 2Δ. Тогда естественно получается формула [116], описывающая процесс рождения фононом в нормальном металле электронно-дырочной пары.

В анизотропном случае пороговая частота ω_0, как и следовало ожидать, определяется минимальным значением щели на линии $\mathbf{qv} = 0$. При этом оказывается, что вблизи порога поглощения $\gamma_s(\mathbf{n})$ описывается законом $\gamma_s(\mathbf{n}) \sim (\omega_0/v)(\omega - \omega_0)^{1/2}$.

Пороговые эффекты при конечных температурах [114] существенны, как уже отмечалось выше, при частотах, удовлетворяющих условию $\omega \gg 2\Delta(T)$. Таким образом, даже звуковые кванты с малой энергией могут распасться на пару возбуждений в области температур, близких к критической. Однако вклад этих эффектов оказывается малым по сравнению со вкладом процессов прямого поглощения фононов квазичастицами [116]. Существенную роль пороговые явления играют при вычислении производной $d\gamma_s/dT$ при $T = T_к$. Согласно (32) эта производная обращается в бесконечность в критической точке. Учет же порогового поглощения [114] приводит к конечному ее значению, что и наблюдается в эксперименте [85]. Например, при $\omega < (u/v_F)T_к$

$$\left.\frac{d\gamma_s}{dT}\right|_{T=T_к} = \frac{1}{3}\gamma_n \frac{c^2}{\omega T_к}\left(\frac{s}{v_F}\right)^3 \quad (c = 3{,}05 T_к^{1/2}).$$

В нормальном металле, как известно, коэффициент поглощения ультразвука не зависит от температуры [100], т. е. рассматриваемая производная при этом оказывается равной нулю. Следовательно, при переходе металла из нормального в сверхпроводящее состояние имеет место скачок производной $d\gamma_s/dT$. Однако даже при частотах, равных, например, 10^8 *сек*$^{-1}$, он оказывается весьма малым: $(T_к/\gamma_n)(d\gamma_s/dT) \sim 10^{-4}$. Любопытно, что в случае высоких частот производная $d\gamma_s/dT$ оказывается отрицательной величиной, что означает возрастание коэффициента поглощения с понижением температуры вблизи $T_к$.

Температурная зависимость коэффициента поглощения ультразвука [114] с учетом пороговых эффектов оказывается отличной от формул (32), (31), полученных в предположении $\omega \ll T$. Например, при $T \to 0$

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_n} = \exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right)\sqrt{\frac{2\pi\Delta T}{\omega(\omega - 2\Delta)}} \quad (\omega \gg T).$$

Коэффициент поглощения звука достаточно высокой частоты может увеличиваться при понижении температуры до значения $T_{пор}$, определяемого равенством $\omega = 2\Delta(T_{пор})$. В [117] отмечается такое возрастание поглощения гиперзвука с $\omega \sim 3\cdot 10^{10}$ *гц* в сверхпроводящем индии.

В [118] показано, что при частотах $\omega \sim 2\Delta$ и скорости распространения звука, близкой к v_F (последнее условие может быть выполнено в сверхпроводящих полупроводниках), следует ожидать заметной аномалии в законе

дисперсии звука. При этом длина волны звука λ становится сравнимой с размером куперовской пары ξ_0. Вопрос о дисперсии звука в сверхпроводящих металлах обсуждается в [119–121]. В [122] экспериментально показано, в согласии с теорией [119], что при $\mathbf{q}\mathbf{v}_F \ll \Delta$ ($\mathbf{q}$ — волновое число) никаких существенных изменений зависимости $\omega(\mathbf{q})$ не наблюдается.

2. Поглощение длинноволнового звука

Выше мы говорили о двух предельных случаях, которые следует различать при рассмотрении вопроса о поглощении звука. До сих пор мы в основном исследовали случай $\omega \gg \tau^{-1}$ (ультразвук).

Поглощение длинноволнового звука [17, 18], частота которого удовлетворяет условию $\omega \ll \tau^{-1}$, определяется в изотропном случае рассеянием электронных возбуждений тепловыми фононами. Звуковое поле будем рассматривать как фактор, деформирующий решетку. Необратимость процесса деформации и приводит к поглощению звуковой энергии. Задача сводится, таким образом, к решению соответствующего кинетического уравнения и последующему вычислению диссипативной функции, определяющей поглощение звуковой волны.

Кинетическое уравнение для функции распределения f электронных возбуждений сверхпроводника, находящихся в звуковом поле и взаимодействующих с фононами, имеет вид

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{зв}} = \sum_{\mathbf{q}} |V|^2 (u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'} - v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}'})^2 \{[f'(1-f)(N+1) - f(1-f')N]\,\delta(\varepsilon'-\varepsilon-\omega) + [f'(1-f)N - f(1-f')(N+1)]\,\delta(\varepsilon-\varepsilon'-\omega)\} + |V|^2 (u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}'} + u_{\mathbf{k}'}v_{\mathbf{k}})^2 [N(1-f)(1-f') - (N+1)ff']\,\delta(\varepsilon'+\varepsilon-\omega),$$

где N — число фононов частоты ω.

При включении звукового поля электрон оказывается в решетке с несколько измененной постоянной, что приводит к зависимости его импульса от тензора деформации [99]. Поэтому

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{зв}} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\frac{\xi}{\varepsilon}\,\varepsilon_{ik}(\mathbf{k})\dot{u}_{ik} \tag{40}$$

(u_{ik} — тензор деформации, ε_{ik} — тензор, зависящий от направления $\mathbf{k}$). Интеграл столкновений, естественно, имеет такой же вид, как и в задаче об электронной теплопроводности чистого сверхпроводника (см. выше, гл. II, п. 3). Рассматривается сферическая поверхность Ферми.

Функцию распределения, как обычно, ищем в виде

$$f = f_0 + g(\varepsilon, \Omega),$$

где $f_0 = [\exp(\varepsilon/T) + 1]^{-1}$, а $g(\varepsilon, \Omega)$ — функция, зависящая от энергии электронных возбуждений и углов, определяющих направление их движения. Представляем ее в виде разложения по полиномам Лежандра и, интегрируя по углам, находим добавку к функции распределения. Вычисляем далее диссипативную функцию $T\dot{S}$ (S — энтропия газа электронных возбуждений). Коэффициент поглощения оказывается величиной, спадающей с понижением температуры ниже $T_{\text{к}}$ по закону

$$\gamma_s = \gamma_n \frac{4\Phi(T_{\text{к}})}{(e^b+1)^2\,\Phi(T)}, \tag{41}$$

где $\gamma_n = \text{const}\cdot T^{-5}$ — коэффициент поглощения звука в нормальном металле [99]; $\Phi(T)$ определяется формулой (8). Температурная зависимость

(41) затухания обусловлена уменьшением числа электронных возбуждений при $T \to 0$. Можно показать [99, 17], что примеси не играют роли в рассматриваемом процессе. Это, естественно, поскольку, как мы уже отмечали выше, упругое рассеяние в данном случае не может привести к установлению равновесия.

Звуковая энергия может поглощаться также фононами, взаимодействующими с электронными возбуждениями сверхпроводника. Механизм релаксации в этом случае будет таким же, как и при исследовании решеточной теплопроводности сверхпроводников (см. выше, гл. II, п. 4). Решение соответствующего кинетического уравнения для фононов, находящихся в поле звуковой волны, и последующее вычисление диссипативной функции позволяет определить температурную зависимость коэффициента поглощения γ_{pe} [17]. Поглощение звука фононами оказывается возрастающим при понижении температуры, что связано с увеличением длины свободного пробега фононов вследствие уменьшения числа электронных возбуждений сверхпроводника. Этот механизм играет роль при температурах, не слишком близких к $T_к$.

3. Поглощение звука в промежуточном состоянии

Поглощение звука в промежуточном состоянии характеризуется рядом существенных особенностей. Прежде всего следует отметить дополнительный механизм поглощения звуковой волны, исследованный в [123] и связанный с наличием характерной для промежуточного состояния системы чередующихся слоев нормальной и сверхпроводящей фаз.

Критическое магнитное поле, как известно, зависит от давления и температуры образца. Поэтому его величина изменяется при наличии звуковой волны. Магнитное поле в нормальных слоях равно критическому, и поэтому изменение последнего приводит к перемещению границы между фазами. При этом в нормальных слоях возникает переменное магнитное поле и связанные с ним токи Фуко. Выделяющееся при этом джоулево тепло и представляет собой дополнительный к обычному механизм диссипации энергии звуковой волны.

Критическое поле $H_к$ в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$H_к = H_{к0}(1 + \alpha u_{ii}) + \frac{\partial H_к}{\partial T} T';$$

здесь $H_{к0}$ — критическое поле в отсутствие звука, $\alpha \approx 1$, $u_{ii} = \operatorname{div} \mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ — смещение решетки в звуковой волне, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$, T' — изменение температуры, появляющееся из-за выделения или поглощения тепла при движении границ между фазами.

Описанный механизм оказывается существенным при исследовании затухания низкочастотного звука, длина волны которого удовлетворяет условиям: $\lambda \gg \delta$, $\lambda \gg a_n$ (δ — глубина скин-слоя, a_n — толщина нормальных слоев).

В [123] получена общая формула для коэффициента поглощения. В предельном случае очень малых частот, когда $a_n \ll \delta$, поглощение при $T \leqslant T_к$ описывается формулой

$$\gamma = \frac{a_n^3[\alpha + 1 - (\mathbf{mn})^2]^2}{24(a_s + a_n)\rho\sigma u_e^3 \delta^4} \left(\frac{cH_к}{2\pi}\right)^2, \tag{42}$$

где $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — единичные векторы в направлениях $\mathbf{H}_{к0}$ и $\mathbf{k}$, ρ — плотность металла, a_s — толщина сверхпроводящих слоев, u_l — скорость продольного звука, σ — статическая проводимость; предполагается, что длина

свободного пробега электронов значительно меньше a_n и δ, что и позволяет пользоваться σ. Видно, что поглощение в этом случае пропорционально квадрату частоты звука ω^2 и практически не зависит от температуры. Эта зависимость становится существенной при повышении T.

В обратном предельном случае $a_n \gg \delta$ поглощение

$$\gamma = \frac{4\,[\alpha + 1 - (\mathbf{mn})^2]^2}{\rho\sigma\,(a_n + a_s)\,u_e^3\delta}\left(\frac{cH_\text{к}}{8\pi}\right)^2 \tag{43}$$

оказывается пропорциональным $\omega^{1/2}$.

Отношение коэффициента поглощения звука, связанного с рассматриваемым механизмом, к обычному электронному поглощению оказывается величиной порядка $(e^2/c)\,(v_F/c)\,(\alpha/\xi_0)^2$ $(a = a_n + a_s)$. Это отношение может быть больше единицы благодаря множителю a/ξ_0. Тогда рассмотренный механизм поглощения низкочастотного звука, связанный с движением границы фаз, начинает играть главную роль. Частотная зависимость поглощения при этом оказывается весьма своеобразной. В области очень малых частот затухание пропорционально ω^2. Затем с повышением частоты возникает область (при $a_n \gg \delta$), где поглощение пропорционально $\omega^{1/2}$. При больших же частотах, где поглощение определяется обычным механизмом [100], вновь возникает зависимость $\gamma \sim \omega^2$. Хорошее согласие полученных результатов с формулой (43) отмечается в работе [124], где экспериментально исследовалось поглощение звука, частота которого изменялась в интервале от 21 до 90 *Мгц*. Звуковая волна поглощалась в чистом сверхпроводящем свинце, находящемся в промежуточном состоянии.

Выше мы говорили о поглощении низкочастотного звука. В [125] исследуется затухание высокочастотных звуковых колебаний сверхпроводниками, находящимися в промежуточном состоянии. При этом длина звуковой волны оказывается по порядку величины совпадающей с толщиной слоев. Предполагаются также выполненными условия $a_n \ll l$ и $a_n \ll R$ (R — ларморовский радиус в критическом магнитном поле). В [125] показано, что в этом случае возможно определение с помощью ультразвуковых измерений периода слоистой структуры исследуемого сверхпроводника. Показано, что как при $R \gg l$, так и в обратном предельном случае $R \ll l$ монотонная часть поглощения описывается функцией, непосредственно связывающей период структуры с величиной критического магнитного поля. При $R \ll l$, кроме того, имеется осциллирующая добавка к поглощению (аналогичный эффект в нормальных металлах отмечается в [126]), причем период осцилляции также оказывается связанным с искомой величиной $a = a_n + a_s$.

4. Поглощение поперечных звуковых волн

Затухание поперечных волн в сверхпроводниках изучено в гораздо меньшей степени, чем поглощение в них продольного звука. Своеобразные особенности затухания поперечного звука отмечаются в работах [127, 128], где исследуются Sn и In, и в [129–131], где рассмотрены соответствующие свойства Al. Отмечается наличие двух областей, резко различающихся своей температурной зависимостью. В первой из них, находящейся непосредственно вблизи $T_\text{к}$, наблюдается весьма резкое падение поглощения (рис. 20). Так, например, в [127] при изменении температуры ниже $T_\text{к}$ всего на 0,01° поглощение поперечного звука частоты $\omega \sim$ ~ 30 *Мгц* падает вдвое. После этого резкого падения температурная зависимость достаточно хорошо описывается обычной формулой (32) теории БКШ.

В работах [7, 132–134] резкое падение поглощения объясняется экранированием связанного с поперечной звуковой волной поля сверхпроводящими токами.

Дальнейшие исследования показали, однако, что отмеченный эффект не является универсальным. Так, в [135] отмечается, что затухание поперечного звука в Nb и Ta не характеризуется аномалиями и температурная зависимость его во всей области температур вполне аналогична зависимости, описывающей поглощение продольного звука. Исследование чистого Ga ($ql > 100$) [136] показало, что для ряда направлений распространения звука наблюдается область резкого падения поглощения, а для других направлений такое аномальное падение не имеет места.

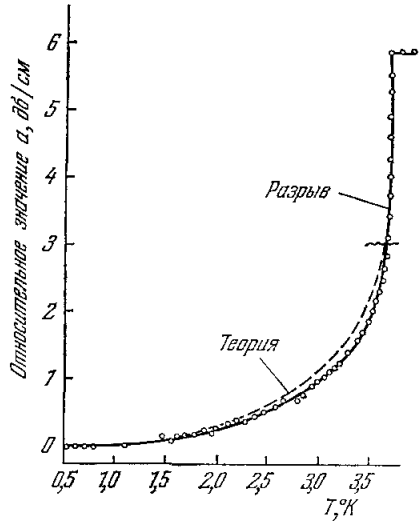

Рис. 20.

В [137] показано, что в области высоких звуковых частот коэффициент поглощения и дисперсия скорости распространения поперечного звука в значительной мере определяются вкладом макроскопических электрических полей. При частотах $\omega \lesssim 10^8$ *гц* эти поля, вообще говоря, не играют роли (см. также [138]) и поглощение, как обычно, связано с прямым деформационным взаимодействием.

Вычисление коэффициента поглощения поперечного звука [139] показало, что в ряде случаев должны наблюдаться существенные особенности рассматриваемого поглощения. Например, температурная зависимость поглощения в пиппардовских сверхпроводниках при значениях параметров, удовлетворяющих неравенствам $\omega \ll T \ll \Delta \ll qv$, описывается формулой

$$\gamma = \frac{8Nmv_F\omega}{3\pi^2\rho_m v_s}\frac{\Delta}{T}\exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right)\left(\frac{\omega^2 mc^2 v_F}{3\pi^2 Ne^2 v_s^3}+\frac{\pi\Delta}{\omega}\right)^{-2}, \qquad (44)$$

где ρ_m — плотность металла, v_s — скорость сверхтекучей компоненты. Представляет интерес в связи с этим постановка соответствующих экспериментов.

5. Особенности кинетических явлений в сверхпроводниках II рода

Сверхпроводники II рода, находящиеся в смешанном состоянии характеризуются, как известно [140], наличием системы вихревых нитей. Параметр сверхпроводящего упорядочения $\Delta(\mathbf{r})$ обращается в нуль на оси вихря. Вихревая структура и связанная с ее появлением нормальная компонента являются дополнительными факторами, которые необходимо учитывать при исследовании кинетических явлений в сверхпроводниках II рода. С действием этих факторов и связаны отмечаемые экспериментально особенности процессов передачи тепла и поглощения звука в смешанном состоянии.

Поведение электронной теплопроводности теоретически исследовалось в [141, 142]: $\varkappa_e$ вблизи H_{k2} меняется по линейному закону $\varkappa_e \sim (H-H_{k2})$. В [143] проведено исследование загрязненных образцов свинца и индия; отмечается, в согласии с теорией, что в условиях, когда основным является

электронный вклад в тепловой поток, отношение производных $d\varkappa/dH$ и dM/dH (M — намагниченность) является универсальной функцией температуры. Монотонное возрастание теплопроводности как функции поля, меняющегося в интервале между $H_{к1}$ и $H_{к2}$, отмечается в [144], где исследовались монокристаллические образцы неупорядоченных сплавов тантала и ниобия. Измерения производились при постоянной температуре, близкой к $T_к$. Основной вклад при этом в тепловой поток вносит электронная компонента. Аналогичное поведение отмечается при исследовании чистого Nb [145, 146]. В [147] наблюдается существенная анизотропия $\varkappa_e$ в зависимости от угла между направлением теплового потока и вихревыми нитями. Поведение $\varkappa$ используется для определения величин $H_{к1}$ и $H_{к2}$.

Наиболее существенные аномалии наблюдаются при исследовании фононной теплопроводности сверхпроводников II рода. Наличие крупномасштабных образований, какими являются абрикосовские вихри, приводит к заметному уменьшению длины свободного пробега тепловых фононов и связанному с этим резкому падению величины $\varkappa_p$. Это падение теплопроводности при достижении полем значения $H_{к1}$ наблюдалось в [144] в области низких температур, где, как уже отмечалось выше (см. гл. II, п. 5), основную роль играет фононная теплопроводность. Уменьшение ее при возрастании поля и приводит к тому, что в исследуемом сверхпроводнике вновь начинает играть основную роль электронная теплопроводность $\varkappa_e$, величина же $\varkappa_e$ растет при увеличении H. В силу приведенных соображений ясно, что теплопроводность сверхпроводников II рода $\varkappa(H)$, исследуемая как функция поля, меняющегося в интервале $H_{к1} < H < H_{к2}$, характеризуется в области низких температур наличием минимума. Этот минимум действительно наблюдался в [144–146] (рис. 21).

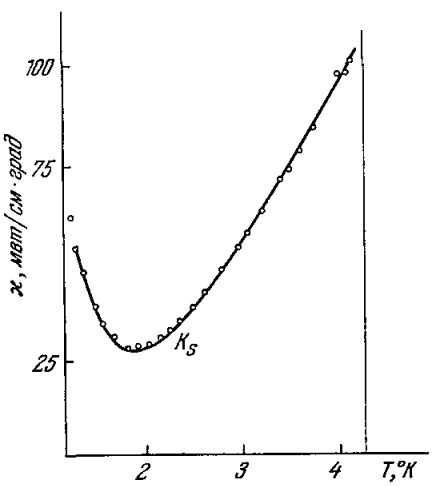

Рис. 21.

В [148] вычислен коэффициент поглощения ультразвука в «грязном» сверхпроводящем сплаве ($\tau T_к \ll 1$, τ — время релаксации). Предположено, что поле не является слишком большим ($H_{к1} < H \ll H_{к2}$). Определяется работа, совершаемая над электронным газом звуковой волной длина которой предполагается удовлетворяющей условиям $ql \ll q\delta_0 \ll 1$, $qd \ll 1$, где d — расстояние между вихревыми нитями. Диссипация энергии описывается в гидродинамическом приближении следующей формулой:

$$\overline{\langle \dot{H} \rangle^t} = \int dV\, \overline{[\eta_{iklm}\dot{u}_{ik}\dot{u}^t_{lm} + \sigma_{ik}E_iE^t_k]}, \tag{45}$$

где E_i — эффективное электрическое поле в системе координат, связанной с решеткой, σ_{ik} — тензор проводимости, η_{iklm} — тензор коэффициентов вязкости, u_{ik} — тензор деформации; скобки $\langle\ldots\rangle$ обозначают термодинамическое усреднение, черта — усреднение по времени.

Первый член в (45) представляет собой обычное поглощение звуковой волны электронной системой. Связанный с ним коэффициент затухания можно представить в виде

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_n} = \left.\frac{\gamma_s}{\gamma_n}\right|_{БКШ} + K(T)\frac{B}{H_{к2}}; \tag{46}$$

здесь B — магнитная индукция в сверхпроводнике; функция $K(T)$ выражается определенным образом через величины $\varkappa$ и Δ/T; $\varkappa$ — параметр теории Гинзбурга — Ландау. При $T = 0°$ величина $K(0) \approx 1$.

Основная специфика поглощения звука в смешанном состоянии связана со вторым слагаемым, фигурирующим в (45). Он описывает омические потери, связанные с появлением индукционных электрических полей. При смещении решетки кристалла, обусловленном прохождением звуковой волны, вихревые нити увлекаются ионной системой металла. Однако упругое взаимодействие между вихрями приводит к тому, что это увлечение не является полным. Индукционные электрические поля и появляются благодаря движению системы вихрей относительно ионов решетки. Поглощение как продольного, так и поперечного звука обнаруживает при этом весьма сильную анизотропию. Так, например, коэффициент поглощения продольного звука оказывается пропорциональным $\sim\sin^6\theta$, где θ — угол между векторами $\mathbf{q}$ и $\mathbf{H}_0$. В случае, когда звук распространяется в направлении поля, деформации вихревой решетки не происходит и соответствующий коэффициент поглощения оказывается равным нулю. Наиболее сильно поглощаются волны, распространяющиеся в направлении, перпендикулярном к полю.

В [149] рассматривается поглощение ультразвука в смешанном состоянии при наличии парамагнитных примесей. Работы [151-155] посвящены теоретическому и экспериментальному исследованию вопроса о затухании звука в чистых сверхпроводниках II рода. В [153] экспериментально получена согласующаяся с теорией [151] линейная зависимость $[1 - (\gamma_s^l/\gamma_n^l)]$ от $[H_{к2}(T) - H]^{1/2}$, где H — внешнее поле, γ^l — коэффициент поглощения продольного звука в чистом Nb.

Наличие вихревой структуры приводит к существованию в сверхпроводниках II рода явления, аналогичного эффекту обычного магнетосопротивления в нормальном металле. Возникают также термомагнитные и гальваномагнитные эффекты. К ним относятся эффект Эттингаузена [154-157] (появление градиента температуры, перпендикулярного к протекающему току, причем $\Delta T \sim (V_l/\varkappa)(T/T_к)^2$ [155]; здесь V_l — продольное электрическое напряжение, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности), продольный эффект Нернста [154, 156, 158], эффект Холла [159-160]. Наблюдается выделение тепла Пельтье [155, 157] на границе, разделяющей смешанное ($H > H_{к1}$) и обычное сверхпроводящее состояния.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова
Московский государственный заочный
педагогический институт

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. Bardeen, L. Cooper, J. Schrieffer, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).
2. Н. Н. Боголюбов, ЖЭТФ 34, 58 (1958).
3. Л. П. Горьков, ЖЭТФ 34, 735 (1958).
4. Д. Шенберг, Сверхпроводимость, М., ИЛ, 1965.
5. C. Gorter, H. Casimir, Phys. Zs. 35, 963 (1934).
6. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, УФН 65(4), 551 (1958).
7. Дж. Бардин, Дж. Шриффер, Новое в изучении сверхпроводимости, М., Физматгиз, 1962.
8. Э. Линтон, Сверхпроводимость, М., «Мир», 1964.
9. J. Blatt, Theory of Superconductivity, Academic Press, New York — London, 1964.
10. Г. Бете, А. Зоммерфельд, Электронная теория металлов, М.— Л., ОНТИ, 1938.

11. Б. Т. Гейликман, ЖЭТФ **34**, 1042 (1958).
12. J. Bardeen, G. Rickayzen, L. Tewordt, Phys. Rev. **113**, 982 (1959).
13. Н. В. Заварицкий, ЖЭТФ **39**, 1571 (1960).
14. K. Maki, Progr. Theor. Phys. **31**, 378 (1964).
15. В. В. Андреев, В. В. Слезов, ФММ **17**, 477 (1964).
16. R. Cubo, M. Yokota, S. Nakajima, J. Phys. Soc. Japan **12**, 1203 (1957).
17. Б. Т. Гейликман, В. З. Кресин, ЖЭТФ **41**, 1142 (1961).
18. В. З. Кресин, ЖЭТФ **36**, 1947 (1959).
19. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ **7**, 180 (1937).
20. A. Guenalt, Superconductivity Conference, Cambridge, 1959.
21. E. Jones, A. Toxen, Труды Международной конференции по физике низких температур, 1960 (Торонто, Канада); Phys. Rev. **120**, 1167 (1960).
22. Б. Т. Гейликман, Р. О. Зайцев, В. З. Кресин, ФТТ **9**, 821 (1967).
23. R. Vasudevan, C. Sung, Phys. Rev. **144**, 237 (1966).
24. P. Anderson, J. Phys. Chem. Solids **11**, 26 (1959).
25. Б. Т. Гейликман, В. З. Кресин, ДАН СССР **123**, 259 (1958).
26. Б. Т. Гейликман, В. З. Кресин, ЖЭТФ **36**, 959 (1959).
27. R. Sladek, Phys. Rev. **97**, 902 (1955).
28. Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, М., ИЛ, 1956.
29. Н. В. Заварицкий, ЖЭТФ **34**, 1116 (1958).
30. Н. В. Заварицкий, Докторская диссертация (ИФП АН СССР, 1963).
31. C. B. Satterwaite, Superconductivity Conference, Cambridge, 1959.
32. K. Mendelsohn, C. Renton, Proc. Roy. Soc. **230**, 157 (1955).
33. K. Mendelsohn, H. Montgomery, Phil. Mag. **1**, 718 (1956).
34. K. Mendelsohn, Phys. Suppl. **24**, 53 (1958).
35. K. Mendelsohn, R. Rowell, Cryogenics, **2**, 26 (1961).
36. K. Mendelsohn, J. Olsen, Proc. Phys. Soc. **63A**, 2 (1950).
37. S. Laredo, Proc. Roy. Soc. **229A**, 473 (1955).
38. J. Hulm, Proc. Roy. Soc. **204A**, 98 (1950).
39. J. Watson, G. Graham, Canad. J. Phys. **41**, 1738 (1963).
40. W. de Haas, A. Rademakers, Physica **7**, 992 (1940); Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden **254**, 261e (1940).
41. И. М. Халатников, ЖЭТФ **36**, 1818 (1959).
42. Н. В. Заварицкий, ЖЭТФ **37**, 1506 (1959); Материалы V Всесоюзного совещания по физике низких температур (1958), Тбилиси, Изд-во АН ГССР, 1960, стр. 55.
43. Н. В. Заварицкий, ЖЭТФ **39**, 1191 (1960).
44. K. Mendelsohn, J. L. Olsen, Proc. Phys. Soc. **A63**, 2 (1950); Phys. Rev. **80**, 859 (1950).
45. K. Webber, D. Spohr, Phys. Rev. **91**, 414 (1953).
46. J. Hulm, Phys. Rev. **90**, 1116 (1953).
47. D. Detwiler, H. Fairbank, Phys. Rev. **88**, 1049 (1952).
48. Н. В. Заварицкий, ЖЭТФ **38**, 1573 (1960).
49. S. Strässler, P. Wyder, Phys. Rev. Lett. **10**, 225 (1963).
50. А. А. Абрикосов, Н. В. Заварицкий, Дополнение в книге Д. Шенберга «Сверхпроводимость», М., ИЛ., 1955.
51. S. Laredo, A. Pippard, Proc. Cambr. Phil. Soc. **51**, 368 (1955).
52. А. Ф. Андреев, ЖЭТФ **46**, 1823 (1964).
53. А. Ф. Андреев, ЖЭТФ **47**, 2222 (1964).
54. В. Б. Шикин, ЖЭТФ **53**, 1431 (1967).
55. П. Л. Капица, ЖЭТФ **11**, 1 (1941).
56. И. М. Халатников, ЖЭТФ **22**, 687 (1952).
57. Е. М. Лифшиц, Ю. В. Шарвин, ДАН СССР **79**, 783 (1951).
58. Б. Т. Гейликман, В. З. Кресин, в сб. «Проблемы многих тел и физика плазмы» (Труды Международного симпозиума, Новосибирск, 1965 г.), М., «Наука», 1967, стр. 144.
59. Б. Т. Гейликман, В. З. Кресин, ФТТ **7**, 3294 (1965).
60. Б. Т. Гейликман, В. З. Кресин, Письма ЖЭТФ **5**, 271 (1967).
61. Б. Т. Гейликман, В. З. Кресин, ФТТ **9**, 3111 (1967).
62. D. Scalapino, K. Wada, Phys. Rev. Lett. **14**, 102 (1965); J. Swihart, Y. Wada, D. Scalapino, Phys. Rev. Lett. **14**, 106 (1965).
63. D. Scalapino, J. Schriffer, J. Wilkins, Phys. Rev. **148**, 263 (1966).
64. V. Ambegaokar, J. Woo, Phys. Rev. **148**, 263 (1966).
65. L. Kadanoff, P. Martin, Phys. Rev. **124**, 670 (1961).
66. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **35**, 1158 (1958); **36**, 319 (1959).

67. Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **39**, 1437 (1960).
68. В. Л. Гинзбург, Сверхпроводимость, М., Изд-во АН СССР, 1946, стр. 79; ЖЭТФ **21**, 979 (1951).
69. G. Gorter, Can. J. Phys. **34**, 1334 (1956).
70. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **14**, 177 (1944).
71. В. З. Кресин, В. А. Литовченко, ЖЭТФ **53**, 2154 (1967).
72. В. Л. Покровский, ЖЭТФ **40**, 641 (1961); Докторская диссертация (Новосибирск, 1962 г.).
73. Д. Займан, Принципы теории твердого тела, М., «Мир», 1966, стр. 225.
74. Г. М. Песчанский, Кандидатская диссертация (УФТИ, 1958).
75. B. Josephson, частное сообщение.
76. Я. Г. Дорфман, И. К. Кикоин, Физика металлов, М., ГТИИ, 1933.
77. Б. Т. Гейликман, В. З. Кресин, ЖЭТФ **39**, 502 (1960).
78. H. Bommel, Phys. Rev. **96**, 220 (1954); **100**, 758 (1955).
79. L. Mackinnon, Phys. Rev. **98**, 1181 (1954); **100**, 655 (1955).
80. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **16**, 574 (1946).
81. R. Morse, H. Bohm, Phys. Rev. **108**, 1094 (1957); R. Morse, Progr. Cryogenics **1**, 220 (1959).
82. В. Л. Покровский, ЖЭТФ **40**, 898 (1961).
83. В. Л. Покровский, В. А. Топоногов, ЖЭТФ **40**, 1112 (1961).
84. И. А. Привороцкий, ЖЭТФ **42**, 450 (1962).
85. П. А. Безуглый, А. А. Галкин, А. П. Королюк, ЖЭТФ **36**, 1951 (1959); **39**, 7 (1960).
86. R. Morse, J. Olsen, Y. Gavenda, Phys. Rev. Lett. **3**, 15, 193 (1959).
87. А. И. Шепелев, ЖЭТФ **45**, 2076 (1963).
88. А. И. Шепелев, Г. Д. Филимонов, ЖЭТФ **48**, 1054 (1965).
89. А. И. Шепелев, Диссертация (Харьков УФТИ, 1966 г.); УФН **96**(2), 217 (1968).
90. L. Claiborne, N. Einspruch, Phys. Rev. Lett. **15**, 862 (1965); LT-10, стр. 256.
91. В. Л. Покровский, ЖЭТФ **40**, 641 (1961).
92. H. Hart, B. Roberts, Bull. Am. Phys. Soc. **7**, 175 (1962).
93. H. Bohm, N. Horwitz, Proc. 8th Intern. Conf. Low Temperatures, 1963, London, стр. 191.
94. G. Saunders, A. Lawson, Phys. Rev. **135**, A1161 (1964); R. Weil, A. Lawson, Phys. Rev. **141**, 452 (1966).
95. C. Jones, J. Reine, Phys. Lett. **21**, 510 (1966).
96. В. Филь, О. Шевченко, П. Безуглый, ЖЭТФ **52**, 891 (1967).
97. E. Dobbs, J. Perz, Proc. 8th Intern. Conf. Low Temperatures, 1963, London, стр. 195; Rev. Mod. Phys. **36**, 257 (1964).
98. L. Spen, N. Senozan, N. Phillips, Phys. Rev. Lett. **14**, 1025 (1965).
99. А. И. Ахиезер, ЖЭТФ **8**, 1318 (1938).
100. А. И. Ахиезер, М. И. Каганов, Г. Я. Любарский, ЖЭТФ **32**, 837 (1957).
101. Б. Т. Гейликман, Р. О. Зайцев, В. З. Кресин, Материалы 10-й Международной конференции по физике низких температур (Москва, 1966 г.), т. 2А, М., ВИНИТИ, 1967, стр. 173 (далее — LT-10, vol. 2A).
102. Б. Т. Гейликман, Р. О. Зайцев, В. З. Кресин, ФТТ **9**, 821 (1967).
103. И. И. Фалько, ФММ **23**, 391 (1967).
104. Н. В. Заварицкий, ЖЭТФ **45**, 1839 (1964); **48**, 837 (1965).
105. И. И. Фалько, ФТТ **9**, 2124 (1967).
106. В. Л. Покровский, С. К. Саввиных, ЖЭТФ **43**, 564 (1962).
107. B. Deaton, Phys. Rev. Lett. **16**, 577 (1966).
108. J. Perz, E. Dobbs, Proc. Roy. Soc. **113**, A296 (1967).
109. R. Thomas, N. Teplay, Phys. Rev. Lett. **17**, 22 (1966).
110. В. З. Кресин, Ю. В. Медведев, ФММ **26**, 182 (1968).
111. J. Woo, Phys. Rev. **155**, 429 (1967).
112. В. Л. Покровский, ЖЭТФ **40**, 143 (1961).
113. В. Л. Покровский, М. С. Рывкин, ЖЭТФ **40**, 1859 (1961).
114. И. А. Привороцкий, ЖЭТФ **43**, 1331 (1962).
115. E. Fagen, M. Garfunkel, Phys. Rev. Lett. **18**, 897 (1967).
116. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **34**, 1438 (1958).
117. H. Bommel, Superconductivity Conference, Cambridge, 1959.
118. В. В. Васькин, В. Я. Демиховский, ФТТ **10**, 419 (1968).
119. И. О. Кулик, ЖЭТФ **43**, 1489 (1962).
120. Ю. И. Балкарей, ФТТ **8**, 797 (1966).
121. H. Ozaki, N. Mikoshiba, Phys. Lett. **23**, 52 (1966).
122. B. Chandrasekhar, I. Rayne, Phys. Rev. Lett. **6**, 677 (1961); C. Alers, D. Waldorf, Phys. Rev. Lett. **6**, 677 (1961).

123. А. Ф. Андреев, Ю. М. Брук, ЖЭТФ **50**, 1420 (1966).
124. M. Gottlieb, C. Jones, M. Garbuny, Phys. Lett. **24A**, 585 (1967).
125. А. Ф. Андреев, ЖЭТФ 53, 680 (1967).
126. В. Л. Гуревич, ЖЭТФ **37**, 71, 1680 (1959).
127. R. Morse, H. Bohm, J. Acoust. Soc. Am. **31**, 1523 (1959).
128. R. Morse, Progr. Cryogenics **1**, 220 (1959).
129. R. Morse, IBM J. Res. Developm. **6**, 58 (1962).
130. R. David, H. van der Laan, N. Roulis, Physica **29**, 357 (1963).
131. R. David, Philips Res. Rept. **19**, 524 (1964).
132. T. Tsuneto, Phys. Rev. **121**, 402 (1961).
133. L. Kadanoff, A. Pippard, Proc. Roy. Soc. **A292**, 299 (1966).
134. J. Cullen, R. Ferrell, Phys. Rev. **146**, 282 (1966).
135. M. Levy, R. Kagiwada, I. Rudnica, Phys. Rev. **132**, 2039 (1963).
136. H. Hart, B. Roberts, Bull. Am. Phys. Soc. **7**, 175 (1962).
137. Д. П. Белозеров, Э. А. Канер, ЖЭТФ 55, 642 (1968).
138. M. Levy, Phys. Rev. **131**, 1497 (1963).
139. В. П. Силин, Г. Л. Коткин, ФММ **14**, 456 (1962).
140. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ 32, 1442 (1957).
141. C. Caroli, M. Cyrot, Phys. Kondens. Materie **4**, 285 (1965).
142. K. Maki, Phys. Rev. **158**, 397 (1967).
143. P. Lindefeld, E. Lynton, R. Soulen, LT-10, vol. 2 A, стр. 396.
144. K. Mendelsohn, IBM Journ. **6**, 27 (1962); J. Lowell, K. Mendelsohn, LT-10, vol. 2A, стр. 402.
145. J. Lowell, J. Sousa, Phys. Lett. **A25**, 469 (1967).
146. Y. Muto, K. Noto, T. Mamija, T. Tukuroi, J. Phys. Soc. Japan **23**, 130 (1967); LT-10, vol. 2A, стр. 407.
147. R. Parks, F. Zumsteg, Phys. Rev. Lett. **18**, 47 (1967).
148. В. П. Галайко, И. И. Фалько, LT-10, vol. 2A, стр. 424; ЖЭТФ **52**, 976 (1967).
149. L. Kadanoff, I. Falko, Phys. Rev., **136**, A 1170 (1964).
150. K. Maki, Phys. Rev. **48**, 370 (1966).
151. K. Maki, Phys. Rev. **156**, 437 (1967); LT-10, vol. 2A, стр. 170.
152. L. Cooper, A. Houghton, H. Lee, Phys. Rev. **148**, 198 (1966).
153. R. Kagiwada, M. Levy, I. Rudnick, H. Kagiwada, K. Maki, Phys. Rev. Lett. **18**, 74 (1967).
154. F. Otter, P. Solomon, Phys. Rev. Lett. **16**, 681 (1966); LT-10, vol. 2A, стр. 328.
155. A. Vijfeijken, Phys. Lett. **23**, 65 (1966); LT-10, vol. 2A, стр. 316.
156. T. Ohta, Japan. J. Appl. phys. **6**, 645 (1967).
157. A. Fiory, B. Serin, Phys. Rev. Lett. **16**, 308 (1966); **19**, 227 (1967).
158. R. Huebener, Phys. Lett. **A25**, 588 (1967).
159. J. Baixeras, S. Williamson, Solid State Commun, **5**, 599 (1967).
160. A. Vijfeijken, A. Nilssen, Philips Res. Rept. **20**, 505 (1965).