

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

538

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ МЕТАЛЛОВ *)

IV. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ И КИНЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

М. Я. Азбель

Термодинамическим и кинетическим свойствам электронов проводимости металлов в стационарных полях при достаточно высоких температурах была посвящена вторая часть ¹ настоящего обзора, кинетическим — третья ². Однако в этой области температур выпадает из рассмотрения ряд принципиально важных физических эффектов.

При весьма низких температурах металл, не являющийся ферро- или антиферромагнетиком, благодаря диамагнитному квантованию электронных орбит оказывается сильным диа- или парамагнетиком с магнитной восприимчивостью, абсолютное значение которой может быть сколь угодно велико (в магнитных полях порядка 10 кэ — достигать 10^3). В случае парамагнетизма это приводит к появлению доменной или периодической структуры и связанным с ее появлением фазовым переходам.

В полуметаллах и полупроводниках в очень сильных магнитных полях H «магнитная энергия» μH (μ — магнетон Бора для электрона проводимости) оказывается наибольшей из электронных энергий («ультраквантовый случай»). В результате появляется возможность превращений полуметалл — собственный полупроводник и собственный полупроводник — металл.

В кинетике при низких температурах возникают квантовые осцилляции магнитосопротивления (эффект Шубникова — де Гааза), не рассматривавшиеся в ². В классической области в сильных магнитных полях может иметь место своеобразная экранировка постоянного тока, который сосредоточивается в тонком слое вблизи поверхности металла (статический скин-эффект). На низких частотах эта экранировка существенно сказывается на всех кинетических характеристиках металла и, в частности, приводит к новому типу скин-эффекта, отличающегося от нормального и аномального скин-эффекта тем, что затухание электрического и магнитного полей происходит совершенно по-разному.

Определяющую роль играет поверхность проводника в весьма своеобразных осцилляциях поверхностного импеданса в очень слабых магнитных полях ⁴⁵, обусловленных магнитными поверхностными уровнями.

*) Эта статья является четвертой частью обзора; предыдущие три части были опубликованы ранее ¹⁻³.

Перечисленным выше явлениям, открытым в течение последних нескольких лет, и посвящена данная статья. Изложение почти всюду построено так, что знания предыдущих частей обзора не требуется. Чтобы не усложнять чтения, использовано минимальное число статей, поэтому список литературы не дает полной библиографии.

1. ТЕРМОДИНАМИКА

1. Физическая природа квантовых осцилляций и сильного магнетизма

Хорошо известно (см., например, ³), что электрон в постоянном магнитном поле $\mathbf{H} \parallel$ ось z движется по спирали с осью вдоль магнитного поля, так что его движение в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, является периодическим с частотой, равной циклотронной частоте Ω . Периодическому движению в классической механике соответствуют дискретные уровни в квантовой механике, причем согласно принципу соответствия *) в квазиклассическом случае расстояние $\Delta\epsilon$ между уровнями связано с классической частотой равенством

$$\Delta\epsilon = \hbar\Omega \propto B, \quad (1,1)$$

где B — магнитная индукция.

Классическая частота Ω есть (см., например, ³)

$$\Omega = \frac{eB}{m^*c}, \quad (1,2)$$

где e — заряд электрона, c — скорость света, m^* — эффективная масса электрона:

$$m^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial \epsilon}, \quad (1,3)$$

(S — площадь сечения поверхности $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon$ плоскостью $p_z = \text{const}$, $\mathbf{p}$ — квазиимпульс, ϵ — энергия электрона). Из (1,1) — (1,3) следует

$$\Delta S = \frac{ehB}{c},$$

откуда

$$S(\epsilon, p_z) = \frac{ehB}{c} n, \quad (1,4)$$

где n — целое число **). Важно подчеркнуть, что (1,4) было получено из (1,1) и потому, согласно выводу, правильно определяет основное приближение не только для S , но и для ΔS . (Иначе в квазиклассическом

*) В общем случае принцип соответствия вытекает из следующих простых соображений. Резонансная частота в классическом и квантовом случаях равна соответственно Ω и $\Delta\epsilon/\hbar$. Но при $\hbar \rightarrow 0$ это должна быть одна и та же частота, так что в основном приближении $\Delta\epsilon/\hbar \approx \Omega$ и $\Delta\epsilon \approx \hbar\Omega$. При произвольном законе дисперсии такое соотношение, которое означает непрерывность $\Delta\epsilon/\hbar$ как функции $\hbar$, является нетривиальным (поскольку $\hbar$ входит как параметр при старшей производной $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$) и может рассматриваться как физическое ограничение на возможные вид закона дисперсии. Даже в простейшем случае свободного электрона в периодическом поле вывод соотношения (1,1) отнюдь не прост (см. ⁵⁰).

**) Зная только классический гамильтониан, можно получить уровни энергии не только в основном приближении, но и в следующем, а также записать волновые функции. Дело в том, что эрмитовский оператор определяется соответствующей классической величиной с точностью до $\hbar^2$ включительно, так как разные способы симметризации дают отличие порядка $\hbar^2$ (см. ²⁰). Это связано с тем, что $[a, b] = i\hbar \{a, b\}$, где $\{ \dots \}$ — классическая скобка Пуассона, и $\hbar$ всегда входит вместе с i .

случае, где, по определению, $n \gg 1$, уравнение (1,4) в качестве основного приближения было бы просто трюизмом.)

Согласно (1,4) уровни энергии бесконечно кратно вырождены по обобщенному квазиимпульсу P_x . Физически это естественно: P_x определяет положение центра орбиты в кристаллической решетке (так как $p_x = P_x + (eB/c)y$ и $y(t) = (p_x(t) - P_x)/(eB/c)$, t — время обращения по орбите), которое несущественно, поскольку межатомное расстояние a в квазиклассическом случае мало по сравнению с ларморовским радиусом r , а нас интересует только основное приближение по a/r ; P_x является в том же приближении интегралом движения, поскольку вектор-потенциал выбран в виде $(-Hy, 0, 0)$.

Поясним, почему в основную формулу (1,4) входит магнитная индукция B , а не напряженность магнитного поля. Задача о поведении заряженных квазичастиц — электронов проводимости — в магнитном поле является типичной задачей теории поля о поведении системы свободных зарядов в вакууме (в данном случае — вакууме для квазичастиц). Поэтому, строго говоря, следует рассматривать только микроскопическое магнитное поле, создаваемое в данной точке всеми зарядами, движущимися по орбитам, радиус которых порядка ларморовского радиуса r . Если расстояние a между зарядами мало по сравнению с r , как это обычно бывает в металлах (где $a \sim 10^{-8}$, а r при $B \sim 10^4$ э порядка 10^{-3} см), микроскопическое магнитное поле в данной точке определяется $4\pi(r/a)^2(l/a) \gg 1$ электронами, а потому «самоусредняется» (l — длина свободного пробега электрона).

Такое усредненное самосогласованное поле есть, по определению, магнитная индукция B ; только она и ощущается каждым из электронов, только ею и будет определяться магнитный момент M . (Впервые это было отмечено Д. Шёнбергом⁷ и затем доказано А. Пипшардом⁸.) Понятно, что связь M и B нелокальна: M в данной точке выражается через значения B во всех точках, отстоящих от данной на расстояние $2r_{\max}$. (То, что во все формулы входит именно B , естественно еще и поскольку $\mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, а $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$, так как $\text{div } \mathbf{B} = 0$.)

Рассмотрим сначала основные особенности энергетического спектра в магнитном поле при однородном B . Зависимость $\epsilon_n(p_z)$, определяемая (1,4), показана на рис. 1; различным кривым соответствуют разные n . Из (1,1) и рис. 1 видно, как меняет квантование в магнитном поле спектр электронов. Благодаря наличию непрерывного параметра p_z спектр остается непрерывным, но границы спектра, вообще говоря, смещаются (так, если формально не учитывать спина, для свободного электрона $\epsilon = (n + 1/2)\hbar\Omega + (p_z^2/2m)$ и $\epsilon_{\min}$ равно $\hbar\Omega/2$, а не нулю, как при $B = 0$).

Однако по мере роста энергии скачком меняется кратность вырождения, так как появляются новые «ветви» спектра. (Например, на рис. 1 при $\epsilon = \epsilon_0^{(1)}$ имеются четыре ветви, а при $\epsilon = \epsilon_0^{(2)}$ — пять.) Это приводит к особенностям в плотности состояний $\nu(\epsilon)$. Вблизи экстремальных значений энергии ϵ_i $\nu(\epsilon) \approx |\epsilon - \epsilon_i|^{-1/2}$. (Для получения $\nu(\epsilon)$ нужно записать плотность состояний на интервал dp_z . Так как число состояний сохраняется при включении магнитного поля даже в случае ферми-жидкости

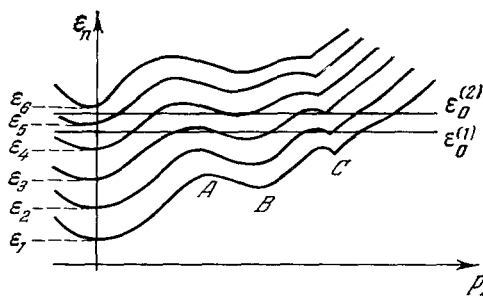


Рис. 1.

(см. ниже), каждой проекции спина соответствует число состояний $dp/h^3 = dp_x dp_y dp_z/h^3 = dS dp_z/h^3 \rightarrow \Delta S dp_z/h^3$. С учетом (1,4) это приводит к формуле Ландау $dN = (eB/ch^2) dp_z$.

Рассмотрим любой эффект, который при абсолютном нуле температуры определяется, как это обычно бывает, только электронами с энергией, равной граничной фермиевской энергии ε_0 (см. рис. 1). Поскольку полное число электронов в металлах сохраняется, а спектр в магнитном поле меняется, само ε_0 должно зависеть от магнитного поля. Однако изменение ε_0 порядка $\Delta\varepsilon$, а интересующие нас эффекты, как мы покажем в этом разделе, пропорциональны $(\Delta\varepsilon)^{1/2}$, так что изменение ε_0 , благодаря малости $\Delta\varepsilon/\varepsilon_0 \ll 1$, можно не учитывать.

С ростом магнитного поля, поскольку $\Delta\varepsilon \sim B$, при некотором значении B одна из ветвей (или часть одной из ветвей, если имеются точки типа A , B на рис. 1, в которых ε экстремально) «выйдет из игры», так что $\varepsilon = \varepsilon_0$ будет соответствовать особенности в $v(\varepsilon)$. Ясно, что это приведет к некоторой особенности и для любой физической величины. Такая особенность станет повторяться каждый раз, когда «исчезает» очередная ветвь или ее часть (а также тогда, когда граничную ферми-энергию проходит особенность в спектре, например точка типа C), т. е. когда изменяется на единицу число ветвей, имеющих энергию ε_0 . Поэтому из (1,4) находим период получающихся осцилляций (по обратному магнитному полю):

$$1 = \Delta n = \Delta \left(\frac{cS}{ehB} \right) = \frac{cS}{eh} \Delta \left(\frac{1}{B} \right),$$

$$\Delta \left(\frac{1}{B} \right) = \frac{cS}{eh}.$$

Из сказанного ранее ясно, что S следует брать в точке $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $p_z = p_0$, где p_0 соответствует либо экстремуму $\varepsilon(p_z)$, либо точкам типа C . Уравнение $\varepsilon'_n(p_z) = 0$ удобно преобразовать следующим образом (учитывая (1,4)):

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_z} \right)_n = \frac{\partial(\varepsilon, n)}{\partial(p_z, n)} = \frac{\partial(\varepsilon, S)}{\partial(p_z, S)} = \frac{\partial(\varepsilon, S)}{\partial(\varepsilon, p_z)} / \frac{\partial(p_z, S)}{\partial(\varepsilon, p_z)} = - \left(\frac{\partial S}{\partial p_z} \right)_\varepsilon / \left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \right)_{p_z}. \quad (1,5)$$

Отсюда видно, что экстремум $\varepsilon_n(p_z)$ достигается в точке, где $S'(p_z) = 0$ ($S = S_{\text{ext}}$), т. е.

$$\Delta \left(\frac{1}{B} \right) = \frac{cS_{\text{ext}}(\varepsilon_0)}{eh}. \quad (1,5a)$$

Формально $\varepsilon'_n(p_z) = 0$ возможно, согласно (1,5), также при

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = 2\pi m^* = \pm \infty,$$

что соответствует особым сечениям с самопересечением или «граничным» сечениям между открытыми и замкнутыми сечениями. Такие сечения, конечно, также «проявятся» в осцилляциях и дадут «свою» площадь S_p :

$$\Delta \left(\frac{1}{B} \right) = \frac{cS_p(\varepsilon_0)}{eh}. \quad (1,6)$$

Оценим амплитуду описанных осцилляций (для простоты, в случае экстремальных сечений). Поскольку «выпадает» одна ветвь спектра, изменения физической величины в общем случае обуславливаются электронами

в интервале Δp_z , соответствующем $\Delta n = 1$ (при фиксированном B). Вблизи экстремального сечения из (1,4) находим

$$S''(p_0) (\Delta p_z)^2 = \frac{ehB}{e},$$

т. е.

$$\Delta p_z \approx \left(\frac{ehB}{cS''(p_0)} \right)^{1/2} \approx p_0 \left(\frac{ehB}{cS} \right)^{1/2},$$

где p_0 — характерный размер ферми-поверхности в направлении p_z .

Таким образом, относительная величина эффекта пропорциональна $d = \Delta p_z/p_0$, т. е.

$$d \approx \left(\frac{ehB}{cS} \right)^{1/2}. \quad (1.7)$$

В случае термодинамической величины следует дополнительно учесть, что магнитный момент имеет чисто релятивистское происхождение (поскольку изменение квазиимпульса в магнитном поле определяется чисто релятивистским членом eA/c). Так как знак скорости v зарядов безразличен, дополнительный множитель имеет порядок

$$b = \left(\frac{v}{c} \right)^2. \quad (1.8)$$

До сих пор речь шла об абсолютном нуле температуры $T = 0$ и бесконечной длине свободного пробега электронов $l = \infty$ (когда имеет строгий смысл понятие уровня энергии электрона). Перейдем теперь к случаю конечных l и T .

Если $l \gg 2\pi\tau$, то электрон между столкновениями успевает совершить большое число оборотов, проявив периодичность своего движения; естественная ширина уровня $\hbar/\tau$ мала по сравнению с расстоянием между уровнями $\hbar\Omega$, и в основном приближении по $(\Omega\tau)^{-1}$ амплитуда квантовых осцилляций не зависит от l . Если же $l \ll 2\pi\tau$, то основная часть электронов не успевает совершить ни одного оборота, движется аperiodически, естественная ширина уровня «покрывает» большое число уровней, и говорить о том, какая из ветвей прошла $\varepsilon = \varepsilon_0$, будет бессмысленным. Однако имеются электроны, которые проходят путь порядка $2\pi\tau$ и к которым применимы все приведенные ранее соображения. Именно эти электроны обеспечивают осцилляции; амплитуда осцилляций пропорциональна их числу, т. е.

$$\exp \left(-\frac{2\pi\alpha}{l} \right) \approx \exp \left(-\frac{2\pi\alpha}{\Omega\tau} \right) = d_1,$$

где константа $\alpha \sim 1$ и не может быть определена из качественных соображений. Точный расчет (см. ⁴) показывает, что $\alpha = \pi$ и

$$d_1 \approx \exp \left(-\frac{2\pi^2}{\Omega\tau} \right). \quad (1.8a)$$

Конечная температура существенно влияет на амплитуду осцилляций; эффект определяется уже не только $\varepsilon = \varepsilon_0$, если размытие энергии захватывает несколько ветвей:

$$T > \hbar\Omega. \quad (1.9)$$

Сопоставим температуре «эффективное время жизни» уровня (с которого при конечной T электрон может уйти или на который он может прийти):

$$\frac{\hbar}{\tau_{\text{эфф}}} = T, \quad \tau_{\text{эфф}} = \frac{\hbar}{T}. \quad (1.10)$$

Тогда, несколько формально используя формулу (1,8а), получим правильный результат (найденный прямым вычислением в ^{4,5}) для зависимости амплитуды осцилляций от температуры:

$$d_2 \approx \exp \left(-\frac{2\pi^2 T}{\hbar \Omega} \right). \quad (1,11)$$

(Естественно, поскольку основным параметром остается «параметр квазиклассичности» $\hbar \Omega / \varepsilon_0$, в (1,11) следует брать Ω при $\varepsilon = \varepsilon_0$, $p_z = p_0$.)

Подытоживая все сделанные оценки и учитывая, что «магнитная энергия» имеет порядок $B^2/8\pi$, находим порядок величины магнитной добавки $\delta\theta$ к термодинамическому потенциалу θ (особое сечения, для простоты, не учитываются, тем более, что их вклад, как легко понять из оценки соответствующего Δp_z , существенно меньше):

$$\delta\theta = \sum_{\alpha} \frac{B^2}{8\pi} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \left(\frac{\hbar \Omega}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{2\pi^2}{\Omega \tau} - \frac{2\pi^2 T}{\hbar \Omega} \right) f_{\alpha} \left(\frac{c S_{\text{ext}}^{\alpha}}{e \hbar B} \right) \ll \frac{B^2}{8\pi},$$

$$\frac{c S_{\text{ext}}^{\alpha}}{e \hbar B} \sim \frac{\varepsilon_0}{\hbar \Omega}, \quad |f_{\alpha}(x)| \approx 1, \quad (1,12)$$

где сумма берется по всем экстремальным сечениям всех зон, $f_{\alpha}(x)$ — осциллирующая функция с периодом порядка 1. (Эта оценка может быть, конечно, получена из формул работ ^{4,5}, если учесть, что $e^2/\hbar \approx e^2 a/\hbar a \approx \approx e^2/a\rho \approx \varepsilon/\rho \approx v$.)

Заметим, что множитель $(v/c)^2$ имеет чисто квантовое происхождение, так как $v \approx \hbar/ma$ (это сразу следует из принципа неопределенности $\Delta p \cdot \Delta x \approx \hbar$). Поэтому $B^2 (v/c)^2$ можно представить в более «обычном» виде $n \hbar \Omega \cdot \hbar \Omega / \varepsilon_0$, где $n \hbar \Omega$ — энергия «полностью ориентированных» диамагнитных моментов (n — полная плотность зарядов), а $\hbar \Omega / \varepsilon_0$ — относительное количество всех моментов, ориентированных полем B .

Прежде чем переходить к дальнейшему обсуждению, заметим еще, что формулой (1,4) определялась только кинетическая энергия зарядов. Полная же энергия электрона в магнитном поле, с учетом спинового парамагнетизма, равна

$$\varepsilon_{\sigma}(p_z, n) = \varepsilon_n(p_z) + \sigma \mu_0 B, \quad \mu_0 = \frac{e \hbar}{2 m_0 c}, \quad \sigma = \pm 1, \quad (1,13)$$

где $\varepsilon_n(p_z)$ определяется формулой (1,4), а m_0 — масса свободного электрона.

Остановимся несколько подробнее на вопросе о том, почему заряд, спин и парамагнитный момент квазичастицы — электрона проводимости — оказываются такими же, как для свободного электрона. Очевидно совпадение соответствующих «полных» величин — строгих интегралов движения — для всего ансамбля частиц и возбуждений. Ясно также, что полное число состояний не зависит от взаимодействия ^{6а}, поскольку число состояний есть число линейно независимых волновых функций системы, т. е. число базисных векторов, которое зависит только от размерности соответствующего пространства, неизменной при сохранении числа частиц. (При конечном числе состояний и фермиевской статистике сохранение числа состояний физически очевидно: если все состояния заполнены, то уменьшение их количества при включении или выключении взаимодействия потребовало бы уменьшения числа частиц.) Если соответствующие взаимодействия, например спин-орбитальное, малы (а в хороших металлах с числом свободных электронов порядка одного на атом это естественно: единственная характерная энергия *) $e^2/a \approx \hbar^2/2ma^2 \approx \varepsilon_0$, в то время как спин-орбитальное взаимодействие содержит еще малый параметр v/c), так что в основном приближении заряд, спин и парамагнитный момент для интересующей нас ветви спектра не зависят от динамических характеристик квазичастицы, то мы получаем доказываемый результат. (К полуметаллам это рассуждение неприменимо: там

*) При большом порядковом номере ядра это рассуждение может оказаться незаконным.

появляется еще один малый параметр — число электронов на атом. Сильное спин-орбитальное взаимодействие приводит к тому, что спин и импульс существенно не коммутируют, σ само по себе нельзя считать интегралом движения, и формула (1.13), конечно, лишается смысла. Отметим попутно, что кулоновское взаимодействие квазичастиц, в отличие от кулоновского взаимодействия «затравочных» электронов, мало благодаря малости числа возбуждений и пропорционально T^2 .)

До сих пор речь шла об эффектах, связанных с конечным расстоянием между уровнями с заданным p_z , т. е. с $\Omega \neq 0$ в формуле (1.1).

При $\Omega = 0$ основное квазиклассическое приближение соответствует непрерывному спектру. Естественно, представляет интерес переход от дискретного спектра к непрерывному и связанные с этим особенности.

Обращение Ω в нуль, т. е. периода обращения (в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю) — в бесконечность, возможно, очевидно, по двум причинам. Если орбита конечная, то это может иметь место, если при подходе к некоторой точке на орбите в плоскости x, y скорость достаточно быстро обращается в нуль, т. е. параллельна магнитному полю. Так как скорость направлена по нормали к поверхности $\varepsilon(p) = \varepsilon$, соответствующая точка может быть либо типа A (рис. 2, a), и тогда $\Omega \neq 0$,

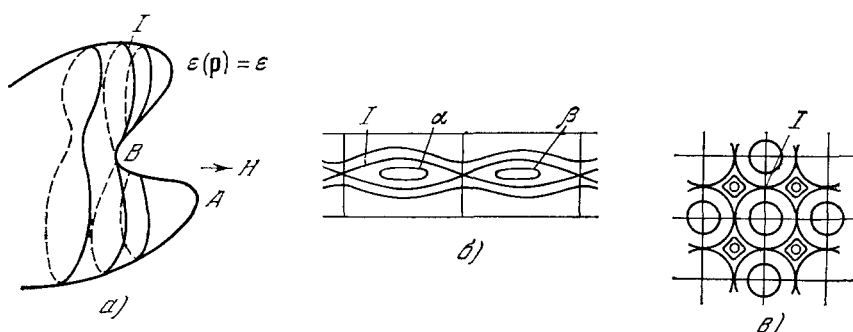


Рис. 2.

либо соответствовать седловой точке B и самопересечению орбит. Тогда при заданном p_z $\Omega(\varepsilon) = 0$ в изолированной точке по ε , где происходит переход от двух сечений и соответственно двух ветвей Ω и уровней энергии к одному сечению и одной ветви с удвоенным числом уровней (детально этот переход изучен в работах 6а, 19, 20).

Вторая причина, по которой может отсутствовать периодичность движения по орбите, — инфинитность самой орбиты. Понятно, что в этом случае $\Omega = 0$ заполняет целую область по энергиям, а переход к $\Omega = 0$ соответствует переходу от замкнутых орбит к открытым, т. е. траектории с самопересечением (кривая I на рис. 2, б). Поскольку имеется экспоненциально малая вероятность туннельного перехода с одной замкнутой орбиты (α) на другую (β), появляется взаимодействие орбит. Дискретные уровни размываются в полосу относительной ширины порядка $\exp(-|\varepsilon - \varepsilon_S|/\hbar\Omega)$, где $\varepsilon = \varepsilon_S$ соответствует самопересечению.

При движении по открытым орбитам в экспоненциально узком интервале энергий имеется резонансная вероятность (также пропорциональная $\exp(-|\varepsilon - \varepsilon_S|/\hbar\Omega)$) полного внутреннего отражения от «низкого барьера». Это приводит к экспоненциально узким запрещенным областям в непрерывном спектре.

Таким образом, по мере приближения со стороны замкнутых орбит к энергии самопересечения ε_S уровни дискретного спектра расширяются в зоны; затем, при удалении от ε_S , «просветы» между зонами сужаются и стремятся к нулю. Параметр, соответствующий размытию уровней или запрещенным областям непрерывного спектра: P_x ; он отражает неэквивалентность (в следующем приближении по a/r) различных положений центров орбит в решетке. (Подробности о характере спектра см. в работах 6б, в.)

Если плоскость x, y является плоскостью симметрии, орбиты с самопересечением проходят через всю решетку в этой плоскости (рис. 2, в). Учет взаимодействия орбит в этом случае приводит к существованию соизмеримости зависящей от магнитного поля дебройлевской длины волны и периода кристаллической решетки. В результате вблизи самопересечения, где эффект неэкспоненциально мал, характер спектра определяется разложением приведенного обратного магнитного поля $\hbar^{-1}$ (для квадратной решетки — величины $\hbar^{-1} = 2\pi c(eB\hbar a^2)^{-1}$, где a — период кристаллической решетки) в цепную дробь: $\hbar^{-1} = s + 1/(s_1 + 1/(s_2 + \dots))$. Спектр состоит из s уровней, расщепленных на s_1 подуровней каждый; подуровень расщеплен на s_2 субуровней

и т. д. Расстояние между уровнями, подуровнями и т. д. осциллирует по B^{-1} с универсальным периодом. Каждая рациональная точка h^{-1} является особой, разумеется, при бесконечной длине свободного пробега l ; конечное l приведет к размытию этой сложной системы уровней. Следует помнить, что общая ширина расщепленного ландауского уровня порядка $\exp(-|\varepsilon - \varepsilon_S|/\hbar\Omega)$. (Подробнее характер спектра описан в ¹⁹.)

Исследование спектра в области «взаимодействия» орбит весьма существенно для изучения самых разных квантовых эффектов, например для изучения магнитного пробоя.

2. Физическая причина доменных и периодических диамагнитных структур. Характер фазовых переходов

В предыдущем разделе была получена оценка (1,12) диамагнитной добавки к термодинамическому потенциалу. Учитывая, что $\varepsilon_0/\hbar\Omega \gg 1$ и, следовательно, $f_\alpha(B^{-1})$ есть быстро осциллирующая функция, находим для магнитного момента M формулу

$$M = -\frac{\delta\theta}{\delta B} \approx \sum_{\alpha} B \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon_0}{\hbar\Omega}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2\pi^2}{\Omega\tau} - \frac{2\pi^2}{\hbar\Omega}\right) f'_\alpha\left(\frac{cS_{\text{ext}}^\alpha}{e\hbar B}\right). \quad (2,1)$$

Отсюда магнитная восприимчивость $\chi = -\delta M/\delta B$ есть

$$\chi \approx \sum_{\alpha} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon_0}{\hbar\Omega}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{2\pi^2}{\Omega\tau} - \frac{2\pi^2}{\hbar\Omega}\right) f''_\alpha\left(\frac{cS_{\text{ext}}^\alpha}{e\hbar B}\right). \quad (2,2)$$

При достаточно низких температурах в чистых образцах, когда

$$\Omega \gg \frac{2\pi^2}{\tau}, \quad \frac{2\pi^2 T}{\hbar}, \quad (2,3)$$

χ по формуле (2,2) может достигать сколь угодно больших значений и соответствовать сильному магнетизму. (Впервые на это обратил внимание Шёнберг ⁷). В частности, для $\chi \gg 1$ нужно при выполнении (2,3)

$$\frac{\varepsilon_0}{\hbar\Omega} \gg \left(\frac{c}{v}\right)^{4/3} \sim 10^3. \quad (2,4)$$

Специфической особенностью электронного диамагнетизма является то, что при $T = 0$, $\tau = \infty$ он тем сильнее, чем слабее магнитное поле: $M/B \propto B^{-1/2}$, $\chi \propto B^{-3/2}$. Термин «диамагнетизм» здесь и всюду используется только в смысле происхождения сильного магнетизма — в смысле диамагнитного квантования Ландау. Магнитная же восприимчивость согласно (2,2), вообще говоря, состоит из суммы «диамагнитных» и «парамагнитных» в смысле знака компонент и может соответствовать как сильному диамагнетизму ($-\chi \gg 1$), так и сильному парамагнетизму ($\chi \gg 1$). Последний приводит к неустойчивости однородного состояния (см. ниже).

Неосциллирующая добавка $\delta\theta_L$ к θ за счет диамагнетизма Ландау обусловлена всеми ветвями на рис. 1 и потому значительно больше $\delta\theta$ (см. (1,12)): $\delta\theta_L \approx n\hbar\Omega (\hbar\Omega/\varepsilon_0) \approx B^2 (v/c)^2$. Однако меняется она плавно, и при низких температурах (когда выполняется (2,3)) ее вклад в полные χ и M , очевидно, мал: $M_\alpha/B \approx (v/c)^2$, $\chi_i \sim (v/c)^2$.

Поскольку при $T = 0$, $\tau = \infty$ и $B \rightarrow 0$ особенность имеет не только χ , но и $M/B \sim B^{-1/2}$, возможно, что окажется $|M| \gg |B|$. Для этого нужно согласно (2,1)

$$2\pi^2 T \lesssim \hbar\Omega < \varepsilon_0 \left(\frac{v}{c}\right)^4,$$

т. е.

$$T \leq \frac{1}{2\pi^2} \varepsilon_0 \left(\frac{v}{c} \right)^4, \quad l > 2\pi^2 a \left(\frac{c}{v} \right)^4$$

(a — среднее расстояние между электронами) или $T \leq 10^{-4} - 10^{-5} \text{ }^\circ\text{K}$, $l > 10 - 10^3 \text{ см}$. В настоящее время эксперименты при таких температурах и длинах пробега нереальны, поэтому будем всюду в дальнейшем предполагать, что

$$T \gg \frac{1}{2\pi^2} \varepsilon_0 \left(\frac{v}{c} \right)^4, \quad \left| \frac{M}{B} \right| \ll 1. \quad (2,4a)$$

Формула (2,2) даже при этих условиях может давать большие положительные значения χ . Однако, как известно, термодинамически устойчивыми являются лишь состояния, соответствующие $\frac{\partial H}{\partial B} > 0$ (см. ⁹), т. е. $4\pi\chi < 1$.

Поэтому возрастание χ при $4\pi\chi_{\max} > 1$ приводит к расслоению на магнитные фазы с различными значениями B (рис. 3), т. е. к появлению диамагнитных доменов. Впервые это заметил Кондон ¹⁰ (см. также ⁶⁶); форма стенки между доменами найдена Привороцким ^{11a}; размеры доменов получены в ^{11b}.

Непосредственное экспериментальное доказательство существования диамагнитных доменов было дано в работе ⁶⁴: наблюдалось расщепление линии ядерного магнитного резонанса благодаря разным значениям магнитного момента в различных доменах (изложение результатов этой модели и ее обсуждение см. в ⁶⁵).

Физически это связано с тем, что магнитное поле меняет плотность состояний, а следовательно, и внутреннюю энергию электронного газа, и при $4\pi\chi_{\max} > 1$ оказывается выгодной перестройка плотности состояний, связанная с изменением B при расслоении на фазы.

Поскольку согласно (2,2) величина χ осциллирует, кривая равновесия имеет ряд периодически повторяющихся плоских участков расслоения (один показан пунктиром на рис. 3).

Неустойчивым однородное состояние магнетика может оказаться и тогда, когда расслоение на домены еще термодинамически невыгодно, если в χ имеются как парамагнитные, так и диамагнитные компоненты:

$\chi = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \chi_{\alpha}$ (см. (2,2)), причем $4\pi\chi < 1$, но для парамагнитных компонент в отсутствие взаимодействия уже возникла бы неустойчивость по отношению к расслоению: $4\pi\chi_0 = 4\pi \sum \chi_v > 1$ (v — те из α , для которых $\chi_v > 0$). Расслоения не происходит из-за самосогласованного взаимодействия с компонентами, для которых устойчивым является однородное состояние. Это значит, что взаимодействие ведет к «перемешиванию», т. е. имеет характер эффективного притяжения диамагнитных ($\chi_{\alpha} < 0$) и парамагнитных ($\chi_{\alpha} > 0$) компонент *). Таким образом, неустойчивость v -х компонент создает тенденцию к расслоению на фазы, а притяжение

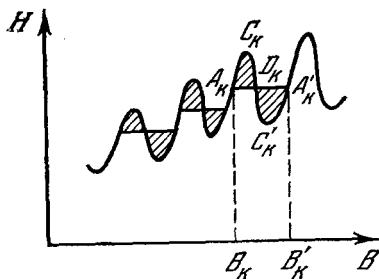


Рис. 3.

*) Расслоение на магнитные фазы при $\left(\frac{\partial H}{\partial B} \right)_T^{\min} < 0$ аналогично обычному

расслоению в многокомпонентной системе на пар — жидкость при $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T^{\min} < 0$; давление соответствует напряженности магнитного поля, равной сумме парциальных

между ними (отрицательная поверхностная энергия) — к перемешиванию. В таком случае естественно ожидать упорядочения фаз, т. е. возникновения самосогласованной периодической структуры, характеристики которой определяются свойствами термодинамической системы. Так, период структуры окажется макроскопическим и порядка радиуса взаимодействия — ларморовского радиуса r . Необходимое условие появления периодической структуры — несколько периодов де Гааза — ван Альфена ($\alpha_0 > 1$).

Из общих соображений можно понять, как будет происходить переход от однородной структуры к периодической *). Требование термодинамической устойчивости приводит к непрерывности при переходе соответствующего термодинамического потенциала (так, положительность теплоемкости c_v означает непрерывность и монотонность свободной энергии как функции температуры T). Это значит, что в точке перехода либо может появляться бесконечно малое количество новой фазы с существенно новыми свойствами, т. е. с конечной амплитудой A пространственных осцилляций, либо само новое состояние бесконечно мало отличается от старого (т. е. амплитуда осцилляций бесконечно мала).

В первом случае рождение новой фазы связано с флуктуационно возникающими зародышами, которые, чтобы оказаться термодинамически выгодными, должны быть достаточно велики (ибо имеется поверхностная энергия на границе разных фаз). Поэтому возможны перегрев и переохлаждение — сохранение метастабильной однородной фазы. Точка перехода есть, следовательно, точка пересечения термодинамических потенциалов однородных фаз и не является, в сущности, особой точкой (см. ¹⁴, § 81, 83) — это фазовый переход I рода.

Во втором случае поверхностная энергия отсутствует, поэтому перегрев или переохлаждение невозможны; новое состояние появляется сразу во всем объеме, и точка перехода есть особая точка термодинамического потенциала системы (фазовый переход II рода). Изменение состояния сразу во всем макроскопическом объеме должно быть, очевидно, «подготовлено»: размер флуктуационно возникающих областей невыгодного состояния (радиус корреляции r_c) по мере приближения к точке перехода должен неограниченно возрастать. В теории Ландау это происходит по закону (см. ¹⁴, § 119)

$$r_c \approx a \left| \frac{T - T_K}{T_K} \right|^{-1/2} = a \tau^{-1/2}$$

(a — расстояние между частицами, T_K — температура перехода). Пока радиус корреляции мал по сравнению с радиусом взаимодействия ρ (в данном случае ларморовским радиусом), флуктуационную неоднородность амплитуды осцилляций можно не учитывать и считать эту амплитуду однородной и «достоверной» (а не случайной), определяемой из условий термодинамического равновесия. Неравенство $r_c \ll r$ соответствует

напряженностей для компонент, отвечающих разным экстремальным сечениям или зонам, а удельный объем $V = \rho^{-1}$ — магнитной индукции. Все взаимодействие между компонентами формально сводится к тому, что «удельные объемы» разных компонент должны совпадать (B , очевидно, зависит только от координат). В результате, хотя для v -х компонент расслоение на фазы с B и B' выгодно, оно запрещено остальными зонами, для которых такие «удельные объемы» невыгодны. Однако при неоднородной индукции B разные χ_α меняются по-разному, полная восприимчивость χ может возрасти, что термодинамически выгодно (см. ниже).

*) Впервые возможность появления периодической структуры была показана в ¹². Там же построена теория таких структур. В ¹³ отмечалось появление периодической структуры, однако найденное там решение соответствует $4\pi\chi > 1$, термодинамически абсолютно неустойчиво и потому никогда не может физически реализоваться (см. также ниже).

$|T - T_K| \gg (a/r)^2 T_K$ ($a \sim 10^{-8}$ см, $r \sim 10^{-3}$ см в магнитных полях $H \sim 10^4$ э, $T_K \sim 1^\circ\text{K}$ — только при таких температурах существенны квантовые осцилляции, т. е. $|T - T_K| \gg 10^{-10}^\circ\text{K}$). Нарушение этого неравенства находится далеко за пределами возможностей эксперимента.

Если $(a/r)^2 \leq N^{-1/2}$ (N — число частиц), то неравенство $r_c \ll r$ выполняется во всей области применимости термодинамики, так как измерение температуры имеет смысл лишь с точностью до флуктуаций: $\tau \gg N^{-1/2}$. (Заметим, что $(a/r)^2 \sim n^{-4/3}$, где n — огромная плотность фермиевских частиц.)

В пренебрежении флуктуациями связанная с магнитным полем добавка к любому термодинамическому потенциалу θ зависит от «полной» индукции. Поскольку неоднородная добавка вблизи точки перехода II рода мала по сравнению с однородной ($A \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$), θ может быть разложено в ряд по этой добавке. Считая период осцилляций λ заданным *) (т. е. обеспечивающим минимум термодинамического потенциала при данной амплитуде пространственных осцилляций A), получаем разложение θ по степеням A^2 , которое аналогично известному разложению Ландау

$$\theta = \theta_0 + \alpha A^2 + \beta A^4 + \gamma A^6 + \dots \quad (2,5)$$

При $\alpha = 0$, $\beta > 0$ получаются фазовые переходы II рода типа Ландау (см. ¹⁴, § 137, 138) с конечным скачком теплоемкости c_H (если переход происходит при фиксированном магнитном поле H и изменении температуры) или магнитной восприимчивости (если меняется H , а T фиксировано). Можно показать, что относительная величина скачка — порядка $(\hbar\Omega/\epsilon_0)^{1/2}$.

Кривая фазовых переходов II рода может оканчиваться, пересекаясь с кривой фазовых переходов I рода в критической точке фазовых переходов II рода (см. ¹⁴, § 140), где в формуле (2,5) будет $\alpha(T_0, B_0) = \beta(T_0, B_0) = 0$. При $\alpha = a_1 T_1 + b_1 H_1$, $\beta = a_2 T_1 + b_2 H_1$ (где $T_1 = T - T_0$, $H_1 = H - H_0$, $|T_1/T| \ll 1$, $|H_1/H| \ll 1$) исследование на минимум (2,5) удобно проводить в системе координат (α, β) , а затем перейти к координатам (T_1, H_1) . При $\gamma > 0$ оказывается, что непосредственным продолжением кривой фазовых переходов II рода является линия абсолютной неустойчивости однородной фазы с $A = 0$ (об исследовании кривой, отделяющей область абсолютной неустойчивости, см. ниже п. 6); ее касаются в точке (T_0, H_0) линия фазовых переходов I рода (соответствующих расслоению на однородную, с $A = 0$, и периодическую, с $A \neq 0$, фазы) и линия абсолютной неустойчивости периодической фазы с $A \neq 0$ (рис. 4). Теплоемкость c_H или соответственно восприимчивость χ на последней обращаются в бесконечность как $|T_1|^{-1/2}$ или $|H_1|^{-1/2}$ (см. п. 6).

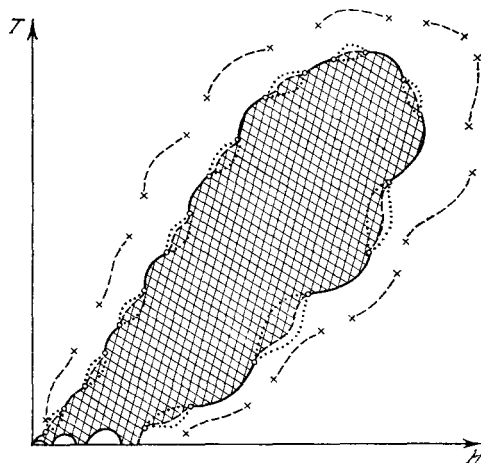


Рис. 4. Диаграмма состояния.

— линия фазовых переходов II рода; — — линия фазовых переходов I рода; ... — линия абсолютной неустойчивости; ○ — критическая точка фазовых переходов II рода; × — критическая точка фазовых переходов I рода. Заштрихована область существования пространственно-периодической структуры.

*) При $T = T_K$ он конечен; считая функцию $\lambda(T)$ регулярной, получаем линейную вблизи T_K добавку к λ_K по температуре. Доказательство этого дано ниже.

Фазовый переход возможен, конечно, не только от однородной структуры к периодической, но и при появлении на фоне неоднородной структуры с конечной амплитудой добавки (конечной или бесконечно малой) с новым периодом, отличающимся от старого на конечную величину.

Периодическая зависимость квантовых осцилляций от B^{-1} в однородном случае приводит к повторяемости переходов по B^{-1} при изменении B^{-1} при заданном T .

Все трудности построения теории переходов II рода относятся к экспериментально недостижимой области $r_c \gg \rho$ (если таковая вообще существует).

Фазовые переходы, связанные с диамагнитным ландауским квантованием, имеют место и при появлении доменной структуры (см. рис. 3). Во внешнем магнитном поле H_0 , параллельном поверхности образца, когда $H_t = H_0$, независимой переменной является H и минимум имеет потенциал

$$\delta\theta_t = - \left(\frac{1}{4\pi} \right) B \delta H. \quad (2,6)$$

При $H = H_K$ происходит «кипение» — фазовый переход I рода от B_K к B'_K . Если поле H_0 нормально к поверхности, оно совпадает со средним по поверхности образца значением магнитной индукции $\bar{B}$:

$$H_0 = \bar{B}_n. \quad (2,7)$$

(Это следует из непрерывности $\int B_n dS$). Из (2,7) вытекает $H_K = cB_K + (1 - c) B'_K$, где c — концентрация фазы B_K . Точки B_K и B'_K соответствуют $4\pi\chi < 1$ и находятся из минимума термодинамического потенциала. Поскольку согласно (2,7) задано $\bar{B}$, независимой переменной является B и ищется минимум θ_t^* ($\delta\theta_t^* = \frac{1}{4\pi} H \delta B$) при дополнительном условии (2,7).

Значит, безусловный минимум имеет $\theta_t = \theta_t^* + A \int B dr$. Определяя константу A из $\delta\theta_t/\delta B = 0$, находим $A = -H/4\pi$, и

$$\delta\theta_t = -\frac{1}{4\pi} B \delta H = -M \delta B + 2\pi \delta M^2 + \frac{\delta H^2}{8\pi} \equiv \delta\theta + 2\pi \delta M^2 + \frac{\delta H^2}{8\pi}. \quad (2,6a)$$

Таким образом, минимум по независимой переменной B имеет θ_t , поэтому (см. рис. 3) точки B_K и B'_K определяются равенством площадей $A_K C_K D_K$ и $D_K C'_K A'_K$. При изменении H_0 в интервале $B_K < H_0 < B'_K$ имеет место «испарение», сопровождающееся скачком восприимчивости и связанное с фазовым переходом II рода типа Ландау. Следовательно, ситуация аналогична обычному расслоению в системе пар — жидкость: при постоянном объеме независимая переменная — средний удельный объем v , неоднозначность $v(p)$ позволяет варьировать давление p при заданном v и минимум имеет термодинамический потенциал Φ ($d\Phi = v dp$) как функция v ; значения Φ на одну частицу, т. е. химические потенциалы, при этом совпадают в обеих фазах.

Таким образом, фазовые переходы и I и II рода могут соответствовать переходу как к периодической, так и к доменной структурам.

Чтобы отличить фазовые переходы, связанные с появлением периодической и доменной структур, следует использовать существенную зависимость от геометрии массивного образца второй и независимость первой. Так, например, если H_0 вращается в плоскости, перпендикулярной к оси четвертого порядка (размеры образца $L_x, L_y, \sqrt{rL_x} \gg L_y \gg r$), характеры фазовых переходов при $H_0 \parallel x$ и $H_0 \parallel y$ будут одинаковы для периодиче-

ской и резко отличаться для доменной (первый род для $\mathbf{H}_0 \parallel x$ и второй род для $\mathbf{H}_0 \parallel y$) структур.

Важной особенностью подобных фазовых переходов является макроскопичность радиуса взаимодействия. Конечность образца приводит при этом к относительной ширине перехода (как по температуре, так и по магнитному полю) порядка $(r/D)^2$ (D — наименьший линейный размер образца). Внутри этой области все термодинамические величины являются быстро изменяющимися, но аналитическими функциями.

Формула (2,2) показывает, что неоднородные структуры возникают при слабых магнитных полях и низких температурах в чистых образцах (при $T = 0$ и $\tau = \infty$ восприимчивость $\chi \rightarrow \infty$ при $B \rightarrow 0$), т. е. при

$$2\pi^2 T \ll \hbar \Omega < \epsilon_0 (4\pi)^{2/3} \left(\frac{v}{c} \right)^{4/3}, \quad \Omega \tau \gg 1, \quad \Omega \propto B. \quad (2,8)$$

Интерференция различных периодов приведет к уменьшению χ и размытию температуры перехода или вообще невозможности неоднородной структуры, если χ окажется слишком малой. Это значит, что нужна весьма слабая мозаичность кристалла, высокая стабильность во времени и однородность в пространстве магнитного поля (вариации последнего должны быть малы по сравнению с периодом ΔB осцилляций χ , т. е. с $B \hbar \Omega / \epsilon_0 \propto B^2$).

Появление неоднородного магнитного момента приводит к возникновению электростатического потенциала ϕ . Согласно условиям термодинамического равновесия химический потенциал ζ постоянен по системе, и чтобы обеспечить постоянство полной электронной плотности (следующее из условия электронейтральности, которое выполняется с точностью порядка $(a/r)^2$ (см., например, ¹⁵)), необходимо ввести $\phi(r)$. Поскольку (это видно из результата) $e\phi(r) \ll \hbar \Omega$, ϕ при квантовании можно не учитывать, так что, если $N = N_0 + \Delta N$ ($\Delta N = -\frac{\partial \Delta \Omega(r)}{\partial \zeta}$ — осциллирующая при постоянном ζ часть N , $\Omega(r)$ — плотность потенциала Ω , N_0 — в основном приближении не зависящая от магнитного поля монотонная часть электронной плотности), имеем

$$N_0(\zeta) = N_0(\zeta + e\phi) + \Delta N \{B(r)\}, \quad (2,9)$$

$$\left. \begin{aligned} e\phi(r) &= -\frac{1}{v(\epsilon_0)} \Delta N \{B(r)\} \approx \hbar \Omega \left(\frac{\hbar \Omega}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{2\pi^2 T}{\hbar \Omega} - \frac{2\pi^2}{\Omega \tau} \right), \\ v &= \frac{dN_0}{d\epsilon_0}. \end{aligned} \right\} \quad (2,9a)$$

Величина ζ определяется из совпадения полных чисел электронов в магнитном поле и в его отсутствие. Знание ζ и $\phi(r)$ позволяет определить плотность электронов каждой зоны в точке r .

Используя полученную формулу и приведенную ранее оценку для добавки к термодинамическому потенциалу, легко убедиться, что потенциал ϕ не сказывается в интересующем нас приближении не только на квантовании в магнитном поле, но и на магнитной восприимчивости. Поэтому все расчеты можно проводить без $\phi(r)$ и, подставив результаты расчетов в (2,9a), получить $\phi(r)$.

Пространственная периодическая структура скажется и на других физических свойствах магнетика. Изменится распространение в нем электромагнитных и ультразвуковых волн при наличии периодической сверхструктуры; в частности, при достаточной амплитуде волны появятся особенности, связанные с периодическими по времени фазовыми переходами. Создадутся новые типы резонансов за счет новых ветвей собственных

колебаний в сверхструктуре. Возникнет пространственная модуляция удельного объема (магнитострикция в периодическом поле).

Понятно, что периодические структуры, диамагнитные домены и все связанные с ними эффекты возможны и в ферромагнетике, где даже в отсутствие внешнего магнитного поля имеется $B = 4\pi M_0$ ($M_0(T)$ — спонтанный магнитный момент).

3. Термодинамика доменных и периодических структур

Чтобы упростить рассмотрение, ограничимся случаем, когда магнитное поле направлено по одной из главных кристаллографических осей, так что $\mathbf{M} \parallel \mathbf{B} \parallel \mathbf{H} \parallel z$. Будем исследовать только основное приближение по длине свободного пробега l : $l = \infty$. Тогда в направлении z характерная длина отсутствует и, значит, отсутствует координатная зависимость от z всех величин. Так как $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, то это означает, что

$$H = H_z = \text{const}, \quad M = M_z(x, y), \quad B = B_z(x, y). \quad (3,1)$$

Для определения уравнения состояния — зависимости M от B , которое, как было показано в п. 1 (см. рис. 1), носит в общем случае нелокальный функциональный характер:

$$M = M\{B\}, \quad (3,2)$$

нужно вычислить добавку $\delta\theta$ за счет диамагнитного и спинowego квантования к соответствующему термодинамическому потенциалу (см. (2,6a)). (Поскольку эта добавка согласно (1,12) всегда мала, добавки ко всем термодинамическим потенциалам в соответствующих переменных совпадают; см. ¹⁴, § 24.) Тогда определится M :

$$M = - \frac{\delta\theta}{\delta B}. \quad (3,3)$$

Удобнее всего вычислять потенциал Ω :

$$\Omega = -T \sum_k \ln \left(e^{\frac{\xi - \varepsilon_k}{T}} + 1 \right) \quad (3,4)$$

(сумма берется по всем состояниям).

В однородном случае уровни энергии были уже записаны — в формуле (1,13). Неоднородная добавка согласно (3,1) связана только с M , которое всегда мало по сравнению с B (см. (2,4a) и обсуждение этого вопроса в п. 2). Это позволяет для нахождения уровней энергии в неоднородном поле B воспользоваться теорией возмущений по M ; при этом вырождение по P_x снимается, поскольку в неоднородном поле становится существенным определяемое P_x положение центра орбиты.

В одномерном случае, когда B зависит только от одной координаты и P_x по-прежнему остается интегралом движения, вычисление элементарно (впервые проведено в ¹⁶); в двумерном случае оно несколько сложнее, так как P_x больше не сохраняется и приходится определять «правильные» функции нулевого приближения в случае бесконечно кратного вырождения (расчет дан в ¹⁷).

Порядок относительной добавки к расстоянию между уровнями очевиден: $M/H \approx M/B \approx \chi \hbar \Omega / \varepsilon_0$ (ср. с (2,1) и (2,2)). Эта малая добавка не влияет на приводившиеся в п. 2 оценки и скажется главным образом на аргументе быстро осциллирующей функции, где число уровней $\varepsilon = \varepsilon_0$ окажется равным уже не $\varepsilon_0 / \hbar \Omega$, а вследствие изменения $\Delta\varepsilon$, $(\varepsilon_0 / \hbar \Omega) [1 + (aM/H)]^{-1}$ ($a \sim 1$). В линейном по M приближении появляется, следовательно, немалая добавка к фазе порядка χ (см. (2,2)). Следующее приближение дает заведомо малую поправку $(M/B)^2 (\varepsilon_0 / \hbar \Omega) \ll (v/c)^2 (\hbar \Omega / \varepsilon_0)^{1/2}$ (см. (2,1)). Значит, даже под знаком периодической функции достаточно ограничиться линейным по M приближением. А это означает возможность находить только первое

приближение теории возмущений в правилах квантования и волновых функциях *). В общем случае правильные волновые функции нулевого приближения и уровни энергии с точностью до первого порядка включительно имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(0)} &= \int c(P_x) \psi_{np_z P_x}^{(0)} dP_x, \\ c(P_x) &= \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_x^{P_x} x(P'_x) dP'_x \right], \\ \varepsilon &= \varepsilon_{np_z}^{(0)} + \varepsilon', \end{aligned} \right\} \quad (3,5)$$

где ε' — непрерывное квантовое число, $x(P_x)$ — находится из уравнения

$$\varepsilon' = \frac{1}{H} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \oint p_y(p_x) dp_x B_1 \left(x, \frac{c(P_x - P_x)}{eH} \right), \quad B_1 = 4\pi M = B - H, \quad (3,6)$$

а $\varepsilon_{np_z}^{(0)}$, $\psi_{np_z P_x}^{(0)}$ соответствуют нулевому приближению ($B = H$) и выписаны, например, в ¹.

Вычисление термодинамического потенциала при известных уровнях энергии может быть проведено аналогично тому, как это делается в одномерном случае (см. ¹). Наиболее просто результат выглядит в одномерном случае ¹⁷:

$$\Omega = \sum_{\alpha} \int dP_x \Omega_{\text{ЛК}}^{(\alpha)} \left[\frac{cS_{\alpha}}{ehH} - \frac{2c}{ehH^2} \int_{p_{\alpha\alpha}^{\min}}^{p_{\alpha\alpha}^{\max}} p_y(p_x) M \left(\frac{P_x - P_x}{eH/c} \right) dp_x \right], \quad (3,7)$$

$$M = \frac{B - H}{4\pi},$$

где $\sum_{\alpha} \Omega_{\text{ЛК}}^{(\alpha)} (cS_{\alpha}/ehH)$ — потенциал, найденный Лифшицем и Косевичем ⁵ в однородном поле H . Как и в однородном случае, чтобы получить окончательную формулу, достаточно заменить химический потенциал на граничную фермиевскую энергию.

Полученные формулы относятся только к идеальному электронному газу и не учитывают, например, ферми-жидкостного взаимодействия; впрочем, последнее не влияет на период осцилляций и порядок величины их амплитуды (см. ^{1, 18}). Однако конкретный вид $M(r)$ мало существен, а характер этой функции может быть получен из весьма общих соображений.

Как было показано в начале этого раздела, в общем случае все величины являются периодическими функциями, аргумент которых — линейная функция магнитного момента. Это означает, что плотность любого термодинамического потенциала $\theta_1(r)$ магнетика должна, с учетом трансляционной симметрии, иметь вид (по-прежнему $\mathbf{B}$ направлено по кристаллографической оси)

$$\theta(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \left\{ \int K_{\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') M(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right\}, \quad (3,8)$$

$$\theta = \int \theta_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

*) Именно благодаря этому можно не учитывать спин-орбитальное взаимодействие в неоднородном поле, связанное с силой $\mu_0 \nabla(\sigma B)$. Это же позволяет использовать для получения правил квантования принцип соответствия (1,4) с Ω — классической частотой в неоднородном поле. Ее можно найти, используя теорию возмущений по M в классических уравнениях Гамильтона — Якоби: они при варьировании периода движения удобнее, чем уравнение Ньютона.

причем центральная симметрия кристалла обеспечивает четность $K_\alpha(\mathbf{r})$. Знание термодинамического потенциала позволяет определить по формуле (3,3) момент M и записать основное для определения $B(x, y)$ уравнение задачи

$$B - 4\pi M \{B\} = H = \text{const.} \quad (3,9)$$

Следует, однако, иметь в виду, что это уравнение само по себе может давать не только равновесные, но и метастабильные и абсолютно неустойчивые решения. В самом деле, уравнение состояния (3,3) обеспечивает лишь экстремум термодинамического потенциала, а не его наименьшее значение, и потому является только необходимым (но не достаточным) условием равновесия. Чтобы отбросить абсолютно неустойчивые решения, следует записать вторую вариационную производную от полного термодинамического потенциала, магнитная добавка к которому связана не только с квантованием, но и с изменением полей в магнетике. В п. 2 было показано, что таким потенциалом является всегда потенциал $\delta\theta = -B\delta H/4\pi$ (формулы (2,6), (2,6a)); рассуждения, очевидно, не зависят от того, идет ли речь о доменах или периодических структурах. Так как H не варьируется ($H = \text{const}$), а $-M\delta B = \delta\theta$ (см. (3,3)), то

$$\theta_t = \theta + 2\pi \int M^2 dr, \quad M = \frac{B-H}{4\pi} = -\frac{\delta\theta}{\delta B}. \quad (3,10)$$

Полученные формулы (3,10), (3,8), (3,3) и (3,9) позволяют, в принципе, полностью построить термодинамику рассматриваемых нами магнетиков как в равновесном, так и в метастабильном состояниях. Поскольку термодинамические потенциалы в этих состояниях отличаются на конечную величину и имеют в обоих случаях минимум, исследование вариационных производных уже ничего не дает. Равновесному состоянию будет соответствовать наименьшее значение θ_t , которое можно выделить, сравнив значения θ_t для различных решений (подставленных в (3,10)).

Метастабильные решения в магнетиках благодаря дальнему действию могут оказаться весьма стабильными, поскольку всегда нужен макроскопический (порядка r , т. е. 10^{-3} — 10^{-4} см) размер зародышей новой фазы. При кипении, как известно, уже при относительно небольшом перегреве критический размер зародышей оказывается порядка атомного. Правда, закалка должна производиться весьма быстро, так как характерные времена релаксации имеют электронное происхождение и весьма малы (даже в весьма чистых металлах при гелиевых температурах они порядка 10^{-9} сек). Обратимся к наиболее интересной области — появлению неоднородной структуры. Исследуем сначала случай, когда такая структура появляется при фазовом переходе II рода.

4. Теория диамагнитных фазовых переходов II рода

Основным уравнением теории периодических структур является, как уже говорилось, уравнение

$$B - 4\pi M \{B\} = H = \text{const}, \quad B = B(\mathbf{R}), \quad \mathbf{R} \equiv (x, y). \quad (4,1)$$

Уравнение (4,1) всегда имеет однородное решение B_0 :

$$B_0 - 4\pi M(B_0) = H, \quad (4,2)$$

которое может оказаться не единственным. Выясним условия существования неоднородного решения, бесконечно близкого к однородному:

$$B = B_0 + B_1. \quad (4,3)$$

Имеем

$$B_1 = 4\pi\hat{\chi}B_1, \quad (4,4)$$

где $\hat{\chi}$ — линейный интегральный оператор. Из однородности пространства (по отношению к сдвигам на период кристаллической решетки, в основном приближении бесконечно малый по сравнению с r) следует, что этот оператор должен быть разностным, а инвариантность кристалла относительно инверсии ($\mathbf{R} \rightarrow -\mathbf{R}$) обеспечивает его четность, так что (4,4) можно записать в виде

$$B_1(\mathbf{r}) = \int \chi(\mathbf{R}-\mathbf{R}') B_1(\mathbf{R}') d\mathbf{R}', \quad \chi(-\mathbf{R}) = \chi(\mathbf{R}). \quad (4,5)$$

Полагая

$$B_1 = \text{Re} [A \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R})], \quad (4,6)$$

приходим к уравнению для периода пространственных осцилляций

$$4\pi\tilde{\chi}(\mathbf{k}_0) = 1, \quad \tilde{\chi}(\mathbf{k}) = \int \chi(\mathbf{R}) \cos(\mathbf{k}\mathbf{R}) d\mathbf{R}. \quad (4,7)$$

Условие разрешимости (4,7) является при $4\pi\chi < 1$ не только необходимым, но и достаточным условием возникновения периодической структуры. Для доказательства этого разложим $\theta\{B\}$ по B_1 . Учитывая, что (3,10) должно при этом совпасть с (4,5), и принимая во внимание симметрию кристалла, находим

$$\begin{aligned} \theta_t = \theta_0 + \frac{1}{8\pi} \int B_1^2(\mathbf{R}) d\mathbf{R} - \frac{1}{2} \int \chi(\mathbf{R}-\mathbf{R}') B_1(\mathbf{R}) B_1(\mathbf{R}') d\mathbf{R} d\mathbf{R}' + \\ + \frac{1}{12\pi} \int f(\mathbf{R}-\mathbf{R}', \mathbf{R}-\mathbf{R}'') B_1(\mathbf{R}) B_1(\mathbf{R}') B_1(\mathbf{R}'') d\mathbf{R} d\mathbf{R}' d\mathbf{R}'' + \\ + \frac{1}{16\pi} \int g(\mathbf{R}-\mathbf{R}', \mathbf{R}-\mathbf{R}'', \mathbf{R}-\mathbf{R}''') B_1(\mathbf{R}) B_1(\mathbf{R}') B_1(\mathbf{R}'') \times \\ \times B_1(\mathbf{R}''') d\mathbf{R} d\mathbf{R}' d\mathbf{R}'' d\mathbf{R}''' + \dots \end{aligned} \quad (4,8)$$

Линейный по B_1 член в (4,8) отсутствует потому, что он должен в силу трансляционной симметрии иметь вид $K_0(B_0) \int B_1(\mathbf{R}) d\mathbf{R}$, а устойчивость по отношению к однородным возмущениям ($B_1 = \text{const}$) означает

$$\left. \frac{\partial \theta_t}{\partial B_1} \right|_{B_1=0} = K_0(B_0) = 0 \quad \left(\text{а } \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial B_1^2} \right|_{B_1=0} = 1 - 4\pi\chi > 0 \right)$$

по предположению).

Запишем (4,8) в виде

$$\theta_t = \theta_0 + \frac{\pi}{2} \int (1 - 4\pi\tilde{\chi}(\mathbf{k})) |\tilde{B}_1(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} + \dots \quad (4,9)$$

(тильдой здесь и в дальнейшем обозначаются компоненты Фурье соответствующих функций).

Если (4,7) имеет решение, то $4\pi\tilde{\chi}_{\text{max}} \geq 4\pi\tilde{\chi}(k_0) = 1$, и малая неоднородность согласно (4,9) заведомо выгодна, однородное состояние неустойчиво. Как уже отмечалось в п. 1, неустойчивость однородного состояния может быть связана как с появлением периодической структуры, так и с расслоением на диамагнитные домены. Последнее происходит (см. рис. 3) уже при $4\pi\chi < 1$ (т. е. $\frac{\partial H}{\partial B} > 0$); только такие значения χ

и реализуются. Поэтому для существования периодической структуры необходимо *) $4\pi\tilde{\chi}_{\max} \geq 1$ (максимум берется по k) при $4\pi\tilde{\chi} = 4\pi\tilde{\chi}(0) < 1$.

Будем предполагать это условие выполненным. Точка фазового перехода II рода соответствует тому, что впервые появляется корень

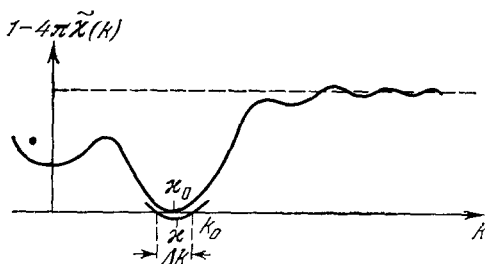


Рис. 5.

уравнения (3,7), т. е. $4\pi\tilde{\chi}_{\max}=1$, и, значит, возникает кратный корень уравнения (3,7) (рис. 5). Вблизи этой точки интервал k , в котором $1 - 4\pi\tilde{\chi} < 0$, очевидно, мал: $|\Delta k/k_0| \ll 1$. Это означает (см. рис. 5), что при $|\Delta k| \gg k_0$, где $1 - 4\pi\tilde{\chi}(k) \gg 1$, значение B_1 должно быть мало по сравнению с его значением в интервале, где $1 - 4\pi\tilde{\chi} < 0$, так как член, выписанный в (4,9), является

при малых (по исходному допущению) $\tilde{B}_1$ определяющим и состояние с немалым разбросом Δk заведомо невыгодно. Это значит, что даже с учетом следующих членов разложения вблизи точки перехода B_1 может быть представлено в виде

$$B_1(\mathbf{R}) = A(\mathbf{R}) \exp(i\mathbf{x}\mathbf{R}) + A^*(\mathbf{R}) \exp(-i\mathbf{x}\mathbf{R}) + C(\mathbf{R}), \quad |C| \ll |A|, \quad (4,10)$$

$$\tilde{\chi}(\mathbf{x}) = \tilde{\chi}_{\max}, \quad \nabla \tilde{\chi}(\mathbf{x}) = 0, \quad (4,11)$$

где $A(\mathbf{R})$ — медленно (на расстояниях, больших по сравнению с радиусом взаимодействия в ядрах (4,8) — ларморовским радиусом r) меняющаяся функция, звездочка обозначает комплексное сопряжение, а $C(\mathbf{R})$ может соответствовать любым k , меняется произвольным образом, но мало по сравнению с $A(\mathbf{R})$ (строго говоря, в среднем быстропеременная часть могла бы быть не мала по амплитуде).

Запись (4,10) позволяет решать методом последовательных приближений **) нелинейное уравнение для $B_1(\mathbf{R})$, которое следует из $\delta\theta_i/\delta B_1 = 0$:

$$B_1(\mathbf{R}) = 4\pi \int \chi(\mathbf{R}-\mathbf{R}') B_1(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' + \int f(\mathbf{R}-\mathbf{R}', \mathbf{R}-\mathbf{R}'') B_1(\mathbf{R}') \times \\ \times B_1(\mathbf{R}'') d\mathbf{R}' d\mathbf{R}'' + \int g(\mathbf{R}-\mathbf{R}', \mathbf{R}-\mathbf{R}'', \mathbf{R}-\mathbf{R}''') B_1(\mathbf{R}') B_1(\mathbf{R}'') \times \\ \times B_1(\mathbf{R}''') d\mathbf{R}' d\mathbf{R}'' d\mathbf{R}''' + \dots \quad (4,12)$$

*) Можно показать, что для данной зоны и данного сечения $\chi_\mu(\mathbf{R})$ знакопостоянно и

$$\text{sign } \chi_\mu(\mathbf{R}) = \text{sign } \chi_\mu, \quad 4\pi |\tilde{\chi}_\mu| \leq 4\pi |\tilde{\chi}_\mu(0)| = 4\pi |\chi_\mu|.$$

Поэтому для реализации периодического решения необходимо несколько экстремальных сечений и $4\pi\tilde{\chi}_0 > 1$ при $4\pi\tilde{\chi} < 1$ (определение χ_0 дано в п. 1).

**) Ясно, что выбор нулевого приближения в виде (4,10) уже полностью определяет ход последовательных приближений, разумеется, с учетом условия разрешимости неоднородного уравнения в случае, когда однородное уравнение имеет нетривиальное решение. При этом решение уравнения $\int h(\mathbf{R}-\mathbf{R}') \Phi(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' = F(\mathbf{R}) \exp(i\mathbf{s}\mathbf{R})$ с $F(\mathbf{R})$ — медленно меняющейся функцией — имеет вид

$$\Phi(\mathbf{R}) = \exp(i\mathbf{s}\mathbf{R}) H^{-1} \left(i \frac{d}{d\mathbf{R}} F(\mathbf{R}) \right), \quad H(\xi) = \int \exp[i\mathbf{R}(\xi - \mathbf{s})] h(\mathbf{R}) d\mathbf{R}$$

Подставляя (4,10) в (4,12), находим (во втором по A приближении) величину C :

$$C = E \exp(2i\kappa\mathbf{R}) + E^* \exp(-2i\kappa\mathbf{R}) + 2D, \quad (4,13)$$

$$E = \frac{\tilde{f}(\kappa, -\kappa)}{1 - 4\pi\tilde{\chi}(2\kappa)} A^2, \quad D = \frac{\tilde{f}(\kappa, -\kappa)}{1 - 4\pi\tilde{\chi}(0)} |A|^2. \quad (4,14)$$

В следующем приближении, помимо третьих гармоник, от члена третьего порядка по B_1 появляются первые гармоники. Соответствующее уравнение (совпадающее, конечно, с условием ортогональности «возмущающих» неоднородных членов в уравнении (4,12) решению однородного уравнения) имеет вид

$$-2\pi \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 A}{\partial R_i^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial \kappa_i^2} + iA - 4\beta A |A|^3 = 0, \quad (4,15)$$

$$\tau = 4\pi\tilde{\chi}(\kappa) - 1, \quad 2\beta = 3\tilde{g}(\kappa, \kappa, -\kappa) + \frac{2\tilde{f}(\kappa, 2\kappa)\tilde{f}(\kappa, \kappa)}{1 - 4\pi\tilde{\chi}(2\kappa)}, \quad (4,16)$$

$$\alpha_i^{-1} = -2\pi \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial \kappa_i^2} > 0;$$

здесь $\alpha_i > 0$, так как $\tilde{\chi}$ в точке κ имеет максимум; направление осей x, y выбрано так, чтобы было $\frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial \kappa_x \partial \kappa_y} = 0$.

Введем κ_0 — точку, в которой (см. рис. 5)

$$4\pi\tilde{\chi}(\kappa_0) = 1, \quad \nabla\tilde{\chi}(\kappa_0) = 0. \quad (4,17)$$

Два уравнения (4,17) определяют, помимо κ_0 , еще и связь между T и H , т. е. кривую фазовых переходов от однородной к периодической структуре в плоскости T, H . Если переход наблюдается при фиксированном H , то $\tau \sim T - T_0(H)$ ($T_0(H)$ — точка перехода); если фиксировано T , то $\tau \sim H - H_0(T)$.

Полагая в (4,15) $A = |A| \exp(i\psi)$, находим, что если $\psi \neq 0$, то $\nabla\psi \sim |A|^{-2}$ и является быстроосциллирующей (так как $|A|$, по предположению, мал) по R функцией, что, как было показано выше, неверно. Поэтому $\psi = 0$ и A вещественно. Подстановка (4,10), (4,13), (4,14) при вещественном A в (4,8) приводит к выражению

$$\theta_i - \theta_0 = \int \left[-U(A) + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2\alpha_i} \left(\frac{\partial A}{\partial R_i} \right)^2 \right] d\mathbf{R} \equiv \int \theta_i d\mathbf{R}, \quad (4,18)$$

$$U(A) = \frac{1}{4} \tau A^2 - \frac{1}{2} \beta A^4.$$

При том, что в точке перехода возникает, как следует из приведенных выше общих соображений, периодическая структура с периодом $2\pi\kappa_i^{-1} \approx r$, вид (4,18) разложения θ_i по медленно (по сравнению с r) меняющейся малой добавке A может быть получен непосредственно. Для этого достаточно принять во внимание, что: 1) из требования минимума θ_i (уже усредненного по расстояниям порядка r) по A в точке перехода вытекает $\delta\theta_i/\delta A = 0$; 2) $\delta H/\delta A \propto \tau$ (так как $4\pi\tilde{\chi}(\kappa_0) = 1$), а это дает $\delta^2\theta_i/\delta A^2 \propto \tau$; 3) наличие минимума $\theta_i(A)$ при $\tau = 0$ требует $\delta^3\theta_i/\delta A^3 = 0$, $\delta^4\theta_i/\delta A^4 = \beta > 0$; 4) разложение по малому ∇A (вследствие медленного изменения $A(\mathbf{R})$) может содержать лишь четные степени ∇A вследствие инвариантности по отношению к замене $\mathbf{R}$ на $-\mathbf{R}$).

Поясним смысл требования $\beta > 0$. Если $\beta < 0$, то из (4,18) следует, что точка $\tau = 0$ вообще не является особой — в ней уже существует периодическая структура с конечной амплитудой, переход произошел раньше и притом при конечном A (поскольку переход при $A \rightarrow 0$ как раз и исследуется), т. е. имеем фазовый переход I рода.

Так как $\alpha_i > 0$ (см. (4,16)), то $\theta_i \geq -U(A) \geq -U_{\max}$, причем равенство $\theta_i = -U_{\max}$ достигается для однородного A . При этом член с производными в (4,18) исчезает, θ_i принимает форму, характерную для переходов II рода типа Ландау (см. (2,5)), и приводит к переходу от $A = 0$ при $\tau < 0$ к $\pm A_0$, $A_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\tau/2\beta}$ при $\tau > 0$. Состояния с $\pm A_0$ отличаются только сдвигом по фазе. Это отличие может быть существенно в конечном образце, где такие состояния аналогичны доменам. Из определения κ и κ_0 легко найти зависимость пространственных периодов $2\pi\kappa_i^{-1}$ от τ : $\kappa - \kappa_0 \propto \tau$. Таким образом, период осцилляций меняется линейно по τ вблизи точки перехода, а их амплитуда пропорциональна $\sqrt{\tau}$.

Все приведенные выше рассуждения особенно наглядны в одномерном случае ($A = A(y)$), когда функционал (4,18) можно формально интерпретировать как действие для одномерного движения частицы массы α во времени y по координате A с запрещенным уходом частицы на бесконечность (так как B должно быть конечно), $U(A)$ — «потенциальная энергия». Переход между состояниями с $\pm A_0$ в этом случае имеет доменный характер и происходит (при $\tau > 0$) по закону

$$A = A_0 \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\tau\alpha} (y - y_0) \right]. \quad (4,19)$$

Из определения (4,7) ясно, что при $k \rightarrow \infty$ функция $\tilde{\chi}(k)$, осциллируя, стремится к нулю. Это означает, что при изменении температуры (или магнитного поля) могут появляться новые корни уравнений (4,11) и в соответствии с этим иметь место новые фазовые переходы. Если какой-либо экстремум $\tilde{\chi}(k)$ при $k > 0$ окажется вырожденным, возможно расщепление на фазы с разными периодами.

Во всех предыдущих рассуждениях предполагалось, что имеется единственное решение κ уравнений (4,11). Понятно, что это так лишь для прямоугольной решетки в плоскости: наличие осей симметрии порядка выше второго обеспечит соответствующее число решений уравнений (4,11) — «звезду» векторов κ . Если никакие три из них в сумме не равны нулю, все рассмотрение остается в силе, оказываясь лишь несколько более громоздким. Если же какие-либо решения (4,11) в сумме дают нуль, в разложении $\theta_i(A)$ не исчезает член третьего порядка, фазовый переход II рода оказывается невозможным, периодическая структура появляется в результате фазового перехода I рода.

5. К р и т и ч е с к а я т о ч к а и д о м е н н а я с т р у к т у р а

В предыдущем разделе предполагалось, что неустойчивость однородного состояния наступает при $\kappa_0 \neq 0$. Рассмотрим теперь случай, когда $\tilde{\chi}_{\max} = \tilde{\chi}(0) = \chi$. (Точка нуль обязательно соответствует экстремуму в силу центральной симметрии кристалла: $\tilde{\chi}(-k) = \tilde{\chi}(k)$, поэтому $\nabla \tilde{\chi}(-k) = -\nabla \tilde{\chi}(k)$, отсюда $\nabla \tilde{\chi}(0) = 0$, т. е. имеет место экстремум и притом, вследствие исходной устойчивости однородного состояния, именно максимум.) Точка перехода к неоднородной структуре при $\chi < 0$ согласно (4,7) соответствует $4\pi\tilde{\chi} = 1$. В этом случае можно воспользоваться теорией, развитой в предыдущем разделе, однако проще сразу заметить,

что при $\kappa_0 = 0$ вся величина B медленно меняется, и потому $\theta_1 \{B\}$ можно разложить по степеням ∇B . В основном приближении θ совпадает с «локальной» однородной плотностью $\theta_1^0(B)$. В следующем приближении

$$\theta_1 \{B\} = \theta_1^0(B) + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2\alpha_i} \left(\frac{\partial B}{\partial R_i} \right)^2. \quad (5,1)$$

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в п. 4, убеждаемся, что эта точка относится к расслоению на диамагнитные домены. Вне доменной стенки производные в $\theta_1 \{B\}$ следует отбросить.

Поскольку $4\pi\chi = 1$ и, следовательно, в однородном случае $\frac{\partial H}{\partial B} = 0$, из устойчивости однородного состояния по одну сторону от точки перехода следует $\frac{\partial^2 H}{\partial B^2} = 0$, $\frac{\partial^3 H}{\partial B^3} > 0$. Полагая $B = B_0 + B_1$, $T = T_0 + T_1$, $H = H_0 + H_1$, и учитывая, что

$$\delta\theta_t = -B\delta H, \quad (5,2)$$

находим

$$\theta_t = \theta_0 + \left(a_2 T_1 - \frac{H_1}{4\pi} \right) B_1 + \frac{1}{3} a_3 T_1 B_1^2 + \frac{1}{4} a_4 B_1^4. \quad (5,3)$$

Это разложение (законность которого обосновывалась в п. 2) аналогично гиббсовскому разложению вблизи обычной критической точки системы жидкость — пар (см., например, ¹⁴, § 83), только роль давления p играет H , а роль удельного объема v играет B . (Разумеется, вблизи «обычной» критической точки экспериментальное исследование при заданной связи p и v , соответствующей наклонному H_0 , крайне затруднительно.) Поэтому все результаты гиббсовского изучения критической точки немедленно переносятся на данный случай. Так, аналогично формуле (84.10) из § 137 в ¹⁴, имеем

$$c_H \propto (a_3 T_1 + 3a_4 B_1^2)^{-1}. \quad (5,3a)$$

В частности, на кривой равновесия, где $B_1 \propto |T_1|^{1/2}$, теплоемкость $c_H \propto T^{-1}$, а при магнитном поле, равном «критическому» ($H_1 = 0$), когда из минимума θ_t (т. е. из $\frac{\partial \theta_t}{\partial B_1} = 0$) следует $B_1 \propto T^{-1/3}$, формула (5,3a) дает $c_H \propto T_1^{-2/3}$.

Самостоятельный интерес представляет выяснение формы и размеров диамагнитных доменов. Наиболее интересен и важен случай, когда характерные линейные размеры образца L велики по сравнению с ларморовским радиусом r , так что размеры доменов g значительно больше толщины доменной стенки d . В этом случае решение задачи распадается на «микроскопическую» и «макроскопическую» части.

«Микроскопическая» задача состоит в выяснении формы доменной стенки, т. е. распределения индукции в слое толщиной порядка d . Так как $d \ll g$, в основном приближении по d/g стенку можно считать плоской, а задачу одномерной, так что согласно уравнениям Максвелла $B_n = \text{const}$, $H_t = \text{const}$ (n — нормаль, направление которой выберем дальше в качестве оси y ; t — касательная к стенке). При этом согласно (4,1)

$$H_t \{B_t(y); B_n\} = H_t, \quad H_n \{B_t(y); B_n\} = H_n(y). \quad (5,4)$$

Уравнения (5,4) совершенно аналогичны обычным уравнениям состояния вблизи границ сосуществующих фаз, только B_n следует считать заданным параметром (поскольку в области вблизи поверхности образца оно, вообще говоря, не совпадает с «объемным» равновесным значением). Поэтому и условия выхода B_t , B_n на насыщение при $y \rightarrow \pm \infty$ (т. е. при

$|y| \gg d$, но, разумеется, $|y| \ll g$) совпадают с обычным условием $H_t = H_n$, которое соответствует равенству площадей на кривой $H_t = H_t(B_t)$ при заданном B_n , аналогичной кривой на рис. 3, где H заменено на H_t , а B — на B_t . В результате на бесконечности ($y \rightarrow \pm \infty$) получается определенная связь H_t и B_n :

$$H_t = H_n(B_n). \quad (5,5)$$

Особенно очевидно это условие в изотропном случае, когда H_t не зависит от B_n .

Конкретный вид $B_t(y)$ и $H_n(y)$ можно получить вблизи критической точки, когда имеет место (5,4). Соответствующая формула в изотропном случае была впервые получена в ^{11а}. Она, естественно, аналогична формуле (4,19) (толщина доменной стенки, в частности, порядка $r_{\max}\mu^{-1/2}$, где $r_{\max}$ — максимальный ларморовский радиус) и позволяет получить поверхностную энергию Δ на границе доменов:

$$\Delta = \frac{r_{\max}\mu^{1/2}(B-B')^2}{24\sqrt{2\pi}}, \quad \mu = 1 - 4\pi\chi \ll 1. \quad (5,6)$$

«Макроскопическая» задача состоит в выяснении формы и размеров доменов в основном приближении по $d/g \ll 1$, т. е. при $d = 0$. Задавая сначала период доменной структуры D , следует решить магнитостатическую задачу; при этом уравнение (5,5), играющее роль дополнительного граничного условия на границах доменов, определит форму границ (в ряде предельных случаев она найдена в ^{11б}).

После этого с помощью уравнения (2,7) можно определить размеры доменных областей; в случае плоской пластины

$$g_1 B + (D - g_1) B' = H_0 D, \\ g_1 = \frac{(H_0 - B') D}{B - B'}, \quad g_2 = D - g_1 = \frac{(B - H_0) D}{B - B'}. \quad (5,7)$$

Наконец, вычисляя при известной структуре полей полный термодинамический потенциал, учитывая в нем поверхностную энергию на границах доменов и минимизируя его по D , определим D . Величина D оказывается порядка ^{11б}

$$D \approx \sqrt{\mu r L}, \quad \mu = 1 - 4\pi\chi \ll 1, \quad (5,8)$$

где L — толщина пластины.

Из (5,6) — (5,8) ясна оправданность делавшихся приближений:

$$\frac{d}{g} \sim \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{r}{L}} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{g}{L} \sim \sqrt{\frac{r}{L}} \mu \ll 1.$$

Вдали от критической точки, при $\mu \gg 1$ и соответственно $\chi_{\max} \gg 1/4\pi$ (см. рис. 3) расчеты значительно усложняются ^{11б}. Доменная стенка имеет весьма сложный вид. $B(y)$ при переходе от A_n к A'_n осциллирует, имея множество постепенно затухающих, узких и высоких максимумов и соответственно глубоких минимумов. Поверхностная энергия и размер домена по порядку величины определяются формулами (5,6), (5,7); только теперь, когда $\mu \gg 1$, в них вместо $\mu^{1/2}$ входит $\mu^{1/3}$.

6. Кривая абсолютной неустойчивости однородной и периодической структур

Законность разложения термодинамического потенциала (аналогичного разложению Ландау в теории фазовых переходов), обусловленная дальностью действия на расстояниях $r \gg a$ (a — среднее расстояние между зарядами), позволяет изучить особенность на кривой абсолютной

неустойчивости (где в однородном случае $\frac{\partial H}{\partial B} = 0$). Пусть при заданных H и $T = T_0$ уравнение для B , которое запишем символически в виде

$$\hat{L}\{T, H; B\} = 0, \quad (6,1)$$

имеет частное решение $B_0(\mathbf{R})$, так что

$$\hat{L}\{T_0, H; B_0(\mathbf{R})\} = 0. \quad (6,2)$$

Выясним характер и устойчивость решения при $T = T + T'$. Положим $B = B_0 + \psi$. Тогда

$$\hat{L}_1\psi + T'\hat{L}_2\{B_0(\mathbf{R})\} + \frac{1}{2}\hat{L}_3\psi^2 + \dots = 0, \quad (6,3)$$

где

$$\hat{L}_1 = \frac{\delta \hat{L}}{\delta B_0}, \quad \hat{L}_2\{B_0(\mathbf{R})\} = \frac{\partial}{\partial T} \hat{L}\{T, H; B_0(\mathbf{R})\}, \quad \hat{L}_3 = \frac{\delta^2 \hat{L}}{\delta B_0^2}. \quad (6,4)$$

Варьирование T при заданном H делается только для конкретности: совершенно аналогично проводится рассмотрение при заданном T и варьируемом H . Решение и исследование (6,3) проводится так же, как и ранее для (4,12), и характер его также определяется наличием или отсутствием решения однородного уравнения $\hat{L}_1\psi = 0$. При заданном H такое решение впервые появляется в точке $T = T_0(H)$. Совокупность этих точек при различных H дает кривую $T_0 = T_0(H)$. Отличие состоит лишь в том, что кубические по амплитуде члены в термодинамическом потенциале могут либо исчезать (в силу симметрии или в изолированных по H точках), либо оставаться, поскольку, в отличие от (4,12), ядра в уравнении (6,3) не обязаны быть разностными, так как неоднородность $B_0(\mathbf{R})$ нарушает, вообще говоря, трансляционную симметрию в системе. В последнем случае разложение термодинамического потенциала по $A_1 = A - A_0$ (A_0 — значение амплитуды периодической структуры на кривой абсолютной неустойчивости) и $T_1 = T - T_0$ имеет вид

$$\theta_t = \theta_0 + \alpha T_1 A_1 + \frac{1}{6} \beta A_1^3. \quad (6,5)$$

При $\alpha T_1/\beta < 0$ минимум θ_t отсутствует, при $\alpha T_1/\beta > 0$ имеется относительный минимум при $A_1 = (-2\alpha T_1/\beta)^{1/2}$ и $\theta_t - \theta_0 \propto |T_1|^{3/2}$. Это означает, что при приближении к кривой абсолютной неустойчивости при заданном внешнем поле H_0 теплоемкость стремится к бесконечности как $|T_1|^{-1/2}$. При изотермическом приближении к этой кривой ($H_0 = H + H_1$) восприимчивость стремится к бесконечности как $|H_1|^{-1/2}$. Такова же особенность, в частности, в критической точке фазовых переходов II рода (см. п. 2).

7. Диаграмма состояния

Выясним общий вид диаграммы состояния в магнитном поле с учетом возникновения периодических и доменных структур. При высоких температурах $T \gg \hbar\Omega/2\pi^2$ восприимчивость, связанная с диамагнетизмом Ландау и парамагнетизмом Паули, мала при любых температурах и неоднородная структура невозможна даже как метастабильная. (Это легко показать, используя теорию возмущений.)

По мере понижения температуры, при некоторой температуре впервые появляется локальный минимум для неоднородного поля. При этом принципиально возможны несколько различных случаев.

Локальный минимум может впервые появиться при конечной амплитуде неоднородности, так что наименьшее значение θ_t будет по-прежнему обеспечиваться однородной индукцией B . При этом функция $\theta_t(A)$ получит по крайней мере два минимума, между которыми обязателен относительный максимум. Таким образом, у $\theta_t(A)$ появляются (помимо минимума при однородной индукции B , т. е. при $A = 0$) сразу относительные максимум и минимум, точка $T = T_K$ «рождения» минимума соответствует трехкратно вырожденному решению:

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial A} = \frac{\partial^2 \theta_t}{\partial A^2} = 0,$$

что и определяет температуру T_K и амплитуду в этой точке (рис. 6, а). Появление локального минимума означает возможность существования соответствующей фазы, хотя бы как метастабильной, а его исчезновение — абсолютную неустойчивость такой фазы. Кривая «рождения» минимумов

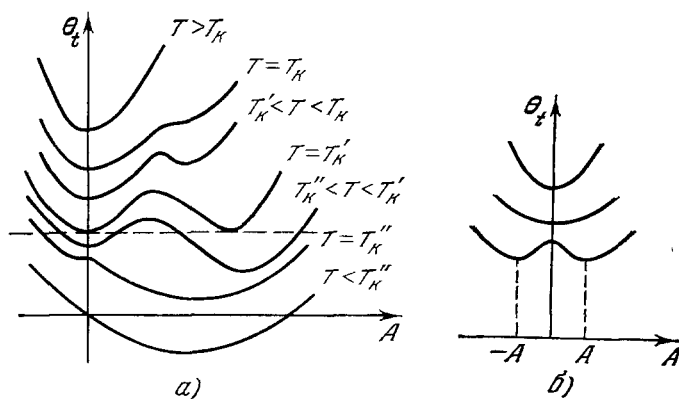


Рис. 6.

на плоскости T, H ограничивает, таким образом, область абсолютной неустойчивости данного состояния (аналогично кривой $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0$ при расслоении системы жидкость — пар).

Если затем минимум θ_t , углубляясь, при $T = T_K$ достигнет того же значения, что и в предшествовавшем абсолютном минимуме при $A = 0$, то произойдет расслоение на однородную ($A = 0$) и неоднородную ($A \neq 0$) фазы — фазовый переход I рода *). При $T < T'_K$ неоднородное состояние станет устойчивым, а однородное — метастабильным при $T''_K < T < T'_K$ и абсолютно неустойчивым при $T < T''_K$ (в последнем случае особенность вблизи $T = T''_K$ та же, что и выше; понятно, что мы считаем заданным H_0 , а не T только ради конкретности).

Может, однако, оказаться, что еще до того, как наступит расслоение на однородную и неоднородную фазы (если оно вообще произойдет — минимум при $A \neq 0$ может после некоторой температуры начать двигаться вверх), появится неустойчивость однородного состояния при $A = 0$. Поскольку, как уже упоминалось и как показано в п. 4, разложение $\theta_t(A)$ содержит лишь четные степени A , это будет означать рассмотренный ранее фазовый переход II рода (рис. 6, б); минимумы при $\pm A$ соответствуют фазам с одинаковыми периодами и разными «началами отсчета» (см. п. 4). Если же совпадут минимумы $\theta_t(A)$ при различных $A \neq 0$, произойдет расслоение на структуры с разными периодами.

*) Отсюда ясно, что периодическое решение с конечной амплитудой всегда впервые возникает как метастабильное, невыгодное по сравнению с однородным.

Поскольку минимумы на кривых $\theta_i(A)$ могут при изменении внешних условий двигаться как вверх, так и вниз (а при заданном T и изменении магнитного поля их движение заведомо периодически), из (3,2) и из того, что θ_i есть суперпозиция периодических по B^{-1} функций, следует, что при заданном $T < \hbar\Omega/2\pi^2$ число переходов данного типа порядка $(\epsilon_0/T)(v/c)^{1/3}/4$ и могут возникать различные комбинации упомянутых случаев. В частности, новая структура может возникать только в одной точке (H_{00}, T_0) (рис. 7; показан ход $\theta_i(A)$ для двух структур, I и II).

С учетом всего сказанного, вернемся к рассмотрению рис. 4, где изображена в переменных T, H диаграмма состояния магнетика; переход к переменным T, H_0 ясен из указанной ранее связи H_0 и H . На рис. 4 принято во внимание, что кривая фазовых переходов не может оборваться в критической точке для доменной; характер переходов к доменной структуре одинаков вдоль всей кривой и зависит только от ориентации H (на рис. 4 для конкретности H_0 перпендикулярно к поверхности образца). Принято также во внимание (помимо периодичности χ_α по B^{-1}), что согласно формуле (2,8) кривая переходов ограничена по B как сверху, так и снизу, а по температуре — сверху. Вид диаграммы состояния существенно усложнился бы в следующем приближении по a_0/r_2 (a_0 — межатомное расстояние), где важна соизмеримость a_0^2 и $\hbar H/c$ (см. также ¹⁹).

Особенности на диаграмме состояния были приведены в п. 2 и доказаны в п. 5.

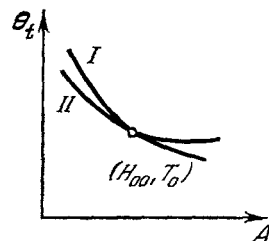


Рис. 7.

8. Ультраквантовый случай и переход металл — диэлектрик

До сих пор речь шла о магнитных полях, слабых по сравнению с энергией Ферми: $\hbar\Omega \ll \epsilon_0$, когда имеет место квазиклассический случай. При этом знании классического закона дисперсии $\epsilon = \epsilon(p)$ оказывалось достаточно для нахождения основных квантовых добавок ко всем физическим величинам. В результате экспериментальное изучение квантовых эффектов в этой области магнитных полей являлось удобным средством изучения классического закона дисперсии. (Так, периоды квантовых осцилляций непосредственно определяли площади экстремальных и особых сечений классической ферми-поверхности.)

По мере роста магнитного поля связанная с ним энергия может стать малой. Столь сильные магнитные поля реально достигаются в полуметаллах типа висмута и полупроводниках с малой (вследствие малого числа носителей заряда) энергией Ферми и обычно малой эффективной массой. Вообще говоря, при $\hbar\Omega \gg \epsilon_0$, когда магнитострикция существенно меняет решетку кристалла, энергетический спектр в квантовом случае в принципе не может быть получен из классического, от квазиклассического случая сохранится лишь систематика состояний. Поскольку во всех реально доступных магнитных полях как классический радиус орбиты, так и боровский радиус $\sqrt{\hbar c/eH}$ велики по сравнению с постоянной кристаллической решетки, в основном приближении сохранится также вырождение по P_x (см. п. 1). В результате $\epsilon = \epsilon_s(p_z; H)$, где $s = 0, 1, \dots$ — дискретное квантовое число. Так как о расстояниях между различными дискретными уровнями при фиксированном p_z заранее ничего сказать нельзя (в частности, не является слабой спин-орбитальная связь), не имеет смысла

сохранять прежние три квантовых числа — номер зоны q , проекцию спина σ и номер диамагнитного уровня Ландау n .

Целесообразно сохранить лишь деление на электроны и «дырки», для которых соответственно $\varepsilon_s(p_z)$ имеет минимум или максимум в интересующей нас области энергий. Исследование области столь сильных магнитных полей «квантового» и «ультраквантового» (когда расстояние между уровнями становится наибольшим параметром задачи) случаев представляет особый интерес, так как позволяет, сдвигая край зоны (см. ниже), менять саму энергию Ферми, влиять (при наличии нескольких зон) на число носителей данного типа, наблюдать аномалии при прохождении энергией Ферми особых значений энергии.

С другой стороны, теоретическое рассмотрение подобного случая представляет и принципиальный интерес. Основная идея при введении квазичастиц состоит в изучении малого числа — и потому слабо взаимодействующих между собой — возбуждений, возникающих на фоне заданного вакуума. Внешние поля, в частности, постоянное магнитное поле, естественно, меняют сам вакуум (так же как и характер спектра квазичастиц, приводя к появлению особенностей в спектре (см. п. 1)). Однако пока внешние поля малы (для постоянного магнитного поля это условие совпадает, очевидно, с условием квазиклассичности), изменение вакуума можно рассматривать как малое возмущение и говорить об изменении закона дисперсии квазичастиц при «прежнем» вакууме. Но, коль скоро вакуум не изменился, а единственной характеристикой квазичастиц является их закон дисперсии, естественно, что в основном приближении «новый» закон дисперсии во внешних полях может быть получен из «старого». Именно это и используется при построении как классической, так и квазиклассической теории. Так, основное классическое уравнение движения электрона во внешних полях $\dot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + (e/c)[\mathbf{vH}]$ может быть получено совершенно аналогично тому, как это делается в теории поля (см., например, ²⁹), если учесть, что: 1) функция Лагранжа должна определяться с точностью до полной производной по времени однозначно, а квазиимпульс определяется с точностью до любого вектора обратной решетки; 2) заряд электрона проводимости совпадает с зарядом свободного электрона (см. п. 1).

В случае, когда расстояние между уровнями значительно больше энергии Ферми, т. е. энергия, связанная с магнитным полем, оказывается порядка энергии, связанной с вакуумом, и внешнее поле не является малым возмущением, получение нового закона дисперсии, возникающего на фоне нового вакуума, из старого, классического закона дисперсии, как уже говорилось, в общем случае принципиально невозможно. Это означает, что задачу следует ставить иначе (см. ²⁶, ²²). Заданным нужно считать, в частности, уже спектр квазичастиц в постоянном магнитном поле. Следует считать *заданными* и волновые функции (или матричные элементы).

Задача состоит теперь в том, чтобы, во-первых, выяснить, какие физические результаты не зависят от закона дисперсии, и, во-вторых, в том, чтобы найти методы экспериментального восстановления квантового гамильтониана, в частности уровней энергии, — задача, аналогичная той, которая возникала, когда заранее задавался закон дисперсии $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$ в классическом случае.

Естественно ожидать, что, как и во всех известных в настоящее время случаях, расстояние между дискретными уровнями с ростом H будет расти. (Выход на насыщение маловероятен, но тривиален для рассмотрения — он означает исчезновение зависимости от магнитного поля у всех физических величин. Для систематических осцилляций по H , вообще говоря, нет даже характерного параметра, который определял бы период осцилляций). При этом, поскольку число состояний сохраняется (см. п. 1),

на каждый уровень будет приходиться все большее число классических состояний, так что плотность состояний $\nu_s(p_z; B)$ также будет расти. Если состояния, соответствующие разным энергиям, в результате взаимодействия не перемешиваются, $\nu_s(p_z; B)$ связано с $\varepsilon_s(p_z; B)$ формулой, вытекающей из закона сохранения числа состояний;

$$\nu = \nu(\varepsilon_s; p_z), \quad \varepsilon = \varepsilon_s(p_z; B). \quad (8.1)$$

При абсолютном нуле температуры ($T = 0$) смещение границ ветвей s может «опустошить» одну из ветвей при прохождении ее через энергию Ферми. При этом все электронные характеристики металла будут иметь особенности, разрывающиеся при конечной температуре (см. ²²).

Проиллюстрируем сначала эту ситуацию в простейшем случае, когда имеются равные числа электронов (e) и дырок (h) с законами дисперсии

$$\varepsilon_e = \varepsilon_1 + \frac{p^2}{2m_e}, \quad \varepsilon_h = \varepsilon_2 - \frac{(p - p_2)^2}{2m_h} \quad (8.2)$$

и спиновыми массами $m_{e,h}^s$, не меняющимися в магнитном поле. Тогда в магнитном поле, направленном по оси z ,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_e &= \varepsilon_1 + \left(k + \frac{1}{2}\right) \mu_e B \pm \mu_e^s B + \frac{p_z^2}{2m_e}, \\ \varepsilon_h &= \varepsilon_2 - \left(k + \frac{1}{2}\right) \mu_h B \pm \mu_h^s B - \frac{(p_z - p_2)^2}{2m_h}, \\ k &= 0, \dots, \mu_{e,h} = \frac{|e|\hbar}{m_{e,h}}, \quad \mu_{e,h}^s = \frac{|e|\hbar}{2m_{e,h}^s c}. \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Начало спектра и электронов, и дырок, таким образом, смещается; расстояние между «дном» электронной зоны ($\varepsilon_e^{\min}$) и «покрышкой» ($\varepsilon_h^{\max}$) дырочной зоны меняется:

$$A = \varepsilon_h^{\max} - \varepsilon_e^{\min} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + bB, \quad (8.4)$$

и если $b < 0$, то зоны при $B = B_K$, когда $A = 0$, разойдутся — при $T = 0$ металл превратится в диэлектрик (на возможность этого эффекта для висмута впервые обратили внимание Давыдов и Померанчук ²¹). При этом, если B обусловлено протекающим через образец током, возможно появление «промежуточного», или «смешанного», состояния — расслоение на металлическую и полупроводниковую фазы.

Рассмотрим этот процесс в общем случае. Понятно, что при B , близком к B_K , число носителей заряда, во всяком случае, мало, так что нас интересуют лишь узкие области вблизи экстремумов, т. е. $\varepsilon_e = \varepsilon_e^0(p_z) \approx \varepsilon_{\min} + \alpha(p_z - p_1)^2$, $\varepsilon_h = \varepsilon_h^0(p_z) \approx \varepsilon_{\max} - \beta(p_z - p_2)^2$, а $\nu_{e,h}(p_z, B) \approx \nu_{e,h}(p_{1,2}, B_K)$. В результате при $B = B_K - B'$, $0 < B' \ll B_K$ для чисел электронов n и дырок n_h и химического потенциала ζ находим

$$n_e = n_h \propto (\zeta - \zeta(B_K))^{1/2}, \quad \zeta(B_K + B') = \zeta(B_K) - \gamma B'. \quad (8.5)$$

Для термодинамических потенциалов имеем

$$\theta \propto n_{e,h} (\zeta - \zeta(B_K)) \sim |B'|^{3/2}. \quad (8.6)$$

(для энергии это очевидно, а малые добавки θ , связанные с $n_{e,h}$, в соответствующих переменных совпадают для всех термодинамических потенциалов ¹⁴). При $B' > 0$ $n_e = n_h = 0$ и $\theta = 0$. Таким образом, при $T = 0$ в точке $B = B_K$ по магнитному полю имеет место «фазовый переход двухсплоивного рода»: магнитный момент $M = -\frac{\partial \theta}{\partial B}$ непрерывен, восприимчивость обращается в плюс или минус бесконечность при $B = B_K - 0$ по закону $(-B')^{-1/2}$, а проводимость — в нуль пропорционально $n_e \propto (-B)^{1/2}$ ($\chi \rightarrow \infty$ означает, конечно, расслоение; см. выше).

Может, однако, оказаться, что превращение металла в диэлектрик произойдет в результате фазового перехода I рода из-за аннигиляции электронно-дырочных пар при их взаимодействии, аналогично тому, как это происходит под давлением в отсутствие магнитного поля (см. ²⁴).

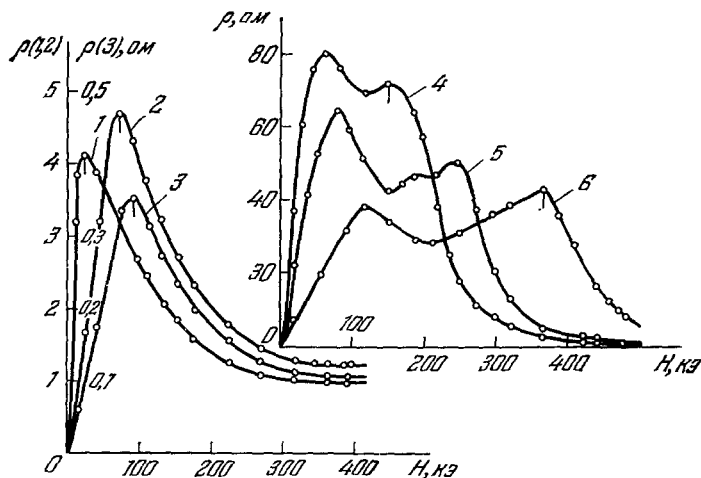


Рис. 8. Зависимость изменения сопротивления ρ от H при ориентировке $H \parallel C_3$ (ток $i \parallel C_2$)⁶².

Сплав Bi и Sb; содержание Sb в ат. %: 1 — 8,8; 2 — 8,9; 3 — 9,1; 4 — 10,5; 5 — 12; 6 — 15,8.

Если число электронов не совпадает с числом дырок, но одна из ветвей спектра уходит за фермиевскую границу, число частиц в исчезающей ветви все равно обращается в нуль, и потому можно провести такой же расчет и в этом случае с тем же результатом — фазовым переходом двухполовинного рода.

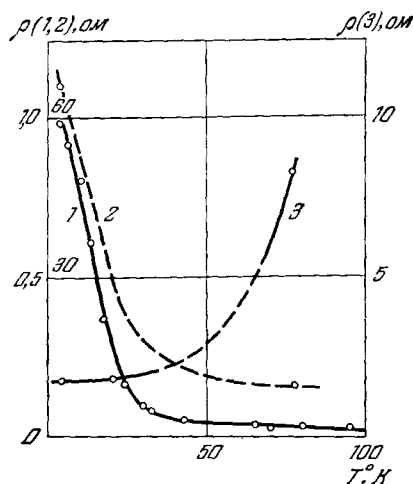


Рис. 9. Температурная зависимость ρ для образца $\text{Bi}_{89.5}\text{Sb}_{10.5}$ при: 1 — $H=0$; 2 — $H < H_K$; 3 — $H > H_K$ ⁶⁰.

видно на рис. 8 (взятом из работы ⁶²), а изменение характера температурной зависимости магнитосопротивления — на рис. 9 (из работы ⁶⁰).

Если с ростом магнитного поля электронные и дырочные ветви перекрываются все больше (при спектре (8,2) это означает, что в формуле (8,4) $b > 0$), числа электронов и дырок неограниченно растут с ростом B .

При конечной температуре, низкой по сравнению с ферми-энергией, фазовый переход размывается и сменяется аномалией: вблизи B_K газ зарядов в исчезающей ветви становится невырожденным, число зарядов в ней определяется только температурой, а затем, по мере роста энергетической щели, число зарядов экспоненциально падает. Особенности электронных характеристик вблизи B_K рассмотрены в ²², ²³ и экспериментально наблюдались на висмуте, сурьме и их сплавах в ^{59–62}.

Резкое падение относительного сопротивления с ростом магнитного поля (переход диэлектрик — металл) хорошо

Этот случай поддается конструктивному расчету лишь тогда, когда имеет место формула (8,1). Наибольший интерес расчет представляет при том условии, что основной вклад в магнитный момент дает одна ветвь одной из зон (электронной или дырочной). Тогда для нее по зависимости $M(B, T)$ можно восстановить соответствующее этой ветви $\epsilon(p_z, B)$. Расчет достаточно утомителен, и потому нецелесообразно приводить его здесь.

Наконец, возможен случай, когда в достаточно сильном магнитном поле остаются только электронные или дырочные ветви. Тогда, поскольку число зарядов N сохраняется, а при $B \rightarrow \infty$ их плотность состояний $v \rightarrow \infty$, заполненной окажется только малая по p_z область вблизи основного состояния $\epsilon_0^{\min}(B)$, так что *)

$$\epsilon_0(p_z, B) = \epsilon_0^{\min}(B) + \frac{1}{2} \beta (p_z - p_0)^2, \quad v_0(p_z, B) \approx v(p_0(B), B) \equiv v_0(B) \quad (8,7)$$

($\beta > 0$, если ветвь электронная, и $\beta < 0$, если ветвь дырочная). Фермиевская энергия $\epsilon_0 - \epsilon_0^{\min}$ при этом пропорциональна $(n/v_0)^2 \rightarrow 0$, и потому газ зарядов оказывается бoльцмановским при любой конечной температуре. Свободная энергия его равна

$$F = -NT \ln \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\epsilon_{\min} + 0,5\beta p_z^2}{T}\right) v(p_z) dp_z,$$

и магнитный момент при постоянном объеме (найденный в ²⁶)

$$M = -\left(\frac{\partial E}{\partial B}\right)_V = -N \frac{\partial \epsilon_0}{\partial B} + NT \frac{\partial}{\partial B} \ln v_0. \quad (8,8)$$

Пренебрегая изменением объема ($p = -\frac{\partial E}{\partial v} = N \frac{\partial \epsilon_0}{\partial v}$, откуда $v = v(H, p)$), можно, измеряя магнитный момент, найти зависимость от магнитного поля энергии основного состояния ϵ_0 и плотности состояний v_0 в нем. Это, конечно, лишь первые сведения о квантовом гамильтониане. Развитие теории должно было бы дать принципиальную возможность восстановить гамильтониан по различным экспериментальным данным, как восстановлен сейчас классический гамильтониан — закон дисперсии — для большого числа металлов. Формула (8,8) при $T \rightarrow 0$ означает, очевидно, полную номинальную намагниченность **). Заметим, что ферми-жидкостные эффекты в полуметаллах и полупроводниках, где число носителей заряда мало, пренебрежимо малы (см., например, ⁴⁰), и потому описанное рассмотрение является последовательным.

9. Переменные поля. Нелинейный квантовый псевдорезонанс

Пока речь идет о статическом случае, когда электростатика и магнитостатика разделяются, можно отдельно говорить о квантовых осцилляциях магнитного момента и электросопротивления. В переменном электромагнитном поле измеряется одна величина — тензор полного поверхностного импеданса, связывающая напряженность поля на поверхности

*) Разумеется, зависимость от B связана, в частности, с магнитострикцией (которая может привести к изоморфному фазовому переходу I рода). Магнитострикцию следует учитывать при определении ϵ_0 , поскольку $n = N/V = v_0(p_z(\epsilon_0) - p_0)$ (V — объем проводника) не сохраняется. Однако это, конечно, не влияет на порядок величины ϵ_0 , поскольку сжатие не велико, пока проводник выдерживает деформацию. Чтобы не учитывать магнитострикцию, будем считать v плотностью состояний во всем объеме (а не на единицу объема).

**) Случай неподвижного дна зоны является особым. Он соответствует отсутствию первого члена в формуле (8,8) и при квадратичной дисперсии был рассмотрен Румером ²⁵.

проводника и протекающий через него полный ток. В хороших проводниках с высокой плотностью зарядов удержание в уравнениях Максвелла тока смещения является обычно превышением точности (см. также гл. II, п. 10 и 11). Поэтому полный ток определяется напряженностью на поверхности переменного магнитного поля. В одномерном случае проводника, заполняющего полупространство *), импеданс $\hat{Z}$ выражается равенством

$$E_t^{(S)} = \frac{c}{4\pi} \hat{Z} [Hn]^{(S)} \quad (9,1)$$

(индекс t обозначает тангенциальную компоненту, (S) — поверхность, n — нормаль к поверхности, E и H — напряженности переменных полей).

Знание тензора $\hat{Z}$ позволяет свести решение к чисто внешней задаче о поле в вакууме с граничными условиями (9,1) и выразить комплексный коэффициент отражения волны через $\hat{Z}$. (Обычные электродинамические граничные условия — непрерывность $E_t^{(S)}$ и $H_t^{(S)}$ — совместно с (9,1) дают шесть уравнений, выражающих $E_t^{(S)}$, $H_t^{(S)}$, $E_t^{\text{отр}}$ через $E_t^{\text{пад}}$).

Квантовые осцилляции $\hat{Z}$ определяются, естественно, квантовыми осцилляциями как магнитного момента M , так и плотности тока проводимости j . Строго говоря, эти две величины в нестационарном случае нельзя даже разделить. Как и в п. 1, речь идет о типичной задаче теории поля — о свободных зарядах в полях E и $B_0 + B$ (здесь B_0 определяется постоянным магнитным полем, B — переменным). При этом уравнения Максвелла записываются так:

$$\text{rot } E = -\frac{i\omega}{c} B, \quad \text{rot } H = \frac{4\pi}{c} j_{\text{полн}}, \quad (9,2)$$

но $j_{\text{полн}}$ связано с матрицей плотности $\hat{n}$ во внешних полях E и B (см. ²⁷):

$$j(r) = \frac{1}{2} e \text{Sp} \{ \hat{v} \delta(r - \hat{r}) + \delta(r - \hat{r}) \hat{v} \} \hat{n}. \quad (9,3)$$

(Физический смысл этой формулы очевиден: в классическом случае $ev \delta(r - r(t))$ — плотность тока, создаваемая в точке r зарядом, находящимся в точке $r(t)$. Формула может быть получена в квазиклассическом случае непосредственно из определения $j = -c \delta \mathcal{H} / \delta A$, где $\mathcal{H} = \text{Sp}(\mathcal{H} \hat{n})$ — среднее значение оператора Гамильтона.)

На низких частотах ($\omega \ll v$, v — характерная частота столкновений) система почти успевает «следить» за мгновенными значениями переменных полей, и для M и j можно в основном приближении по ω/v воспользоваться формулами в стационарных неоднородных полях, подставив в эти формулы значения переменных полей в данный момент времени.

В случае столь низких частот, что имеет место нормальный скин-эффект, глубина скин-слоя δ имеет в изотропном проводнике вид

$$\delta = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma(1+4\pi\chi)}}. \quad (9,2a)$$

Порядок величины χ оценивался ранее (формула (2,2)). Из таких же соображений, как и в п. 2, легко оценивается и относительная величина квантовых осцилляций проводимости $\Delta\sigma/\sigma$. Ее зависимость от T и τ такая

*) Этот случай практически наиболее важен. Высокая проводимость означает малую длину волны в проводнике, по сравнению с которой все характерные размеры проводника можно считать бесконечными.

же, как у χ ; вклад в $\Delta\sigma$, как и в χ , вносит часть $(\hbar\Omega/\varepsilon_0)^{1/2}$ электронов вблизи экстремальных сечений, однако отсутствует множитель $(v/c)^2$, так как $\Delta\sigma$, в отличие от χ , не имеет релятивистского происхождения. В результате

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \approx \left(\frac{\hbar\Omega}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{2\pi^2 T}{\hbar\Omega} - \frac{2\pi^2}{\Omega t} \right) \ll 1. \quad (9,3a)$$

В действительности величина $\Delta\sigma/\sigma$ может оказаться еще меньше, так как σ определяется всеми электронными группами, а наблюдаемые обычно осцилляции $\Delta\sigma$ связаны с аномально малыми зонами.

Сравнивая (9,3a) и (2,2), убеждаемся, что

$$s = \frac{4\pi\chi}{\Delta\sigma/\sigma} \approx \left(\frac{v}{c} \frac{\varepsilon_0}{\hbar\Omega} \right)^2. \quad (9,4)$$

(Оценка (2,2) не годится при $4\pi\chi \gg 1$, однако в этом случае вклад $\Delta\sigma/\sigma \ll 1$ заведомо мал по сравнению с вкладом при $4\pi\chi \approx 1$.)

Обычно достигаются магнитные поля $\hbar\Omega \ll \varepsilon_0 v/c$ и осцилляции сопротивления определяются осцилляциями магнитного момента²⁸. Ситуация изменится лишь при переходе к достаточно высоким и к предельно низким частотам. В области низких частот ω , при которых $\delta > ds^{-1} \gg d$ (d — толщина проводника), в формулу (9,1) входит разность значений H_t на поверхностях образца (ею определяется полный ток), и оценка показывает, что определяющими оказываются осцилляции σ (эффект Шубникова — де Гааза).

На достаточно высоких частотах, когда наступает аномальный скин-эффект и $\delta < r$, магнитный момент определяется переменным полем лишь на малой части орбиты и χ уменьшается в $\delta_{\text{эфф}}/r$ раз ($\delta_{\text{эфф}}$ — эффективная глубина затухания B). При $\omega t \gg 1$ происходит дополнительное уменьшение χ в ωt раз, так как магнитный момент не успевает «следить» за изменением B *). В результате осцилляции $\dot{Z}$ на достаточно высоких частотах определяются осцилляциями j (см. ²⁷).

Характерная особенность квантовых осцилляций в переменных полях — нелинейные эффекты уже при сравнительно небольшой интенсивности падающей волны. При $\omega t \ll 1$ в формулу (2,2), по сказанному выше, входит полная индукция $B = B_0 + B$. Достаточно напряженности поля в падающей волне порядка периода квантовых осцилляций, т. е.

$$B \approx B_0 \frac{\hbar\Omega}{\varepsilon_0} \approx \Delta B, \quad (9,5)$$

чтобы нелинейные эффекты оказались существенными. Случай $B \gg \Delta B$ особенно интересен, так как приводит к своеобразному псевдорезонансу³⁴.

Для простоты расчета предположим, что выполнены условия нормального скин-эффекта: $\delta \gg l$, а поэтому и $\delta \gg r$ (δ — толщина скин-слоя). В этом случае на расстояниях r, l поле можно считать однородным и все соотношения локальными. В основном приближении можно пользоваться формулами, полученными для статики.

Будем считать магнитную восприимчивость малой (т. е. согласно (2,2) $(v/c)^2 (\varepsilon_0/\hbar\Omega)^{3/2} \ll 1$) и магнитный момент в уравнениях Максвелла рассматривать как возмущение. Тогда в основном приближении переменное электромагнитное поле в металле имеет обычный вид: $E = E_0 \exp(-z/\delta) \cos(\omega t - z/\delta)$, $H_1 = H_{10} \exp(-z/\delta) \cos(\omega t - z/\delta)$, а в следующем приближении в уравнения Максвелла войдет магнитный

*) Разумеется, обе эти причины уменьшают и квантовые осцилляции Δj , но уменьшают так же, как и классическую величину j , поэтому относительная величина $\Delta j/j$ остается неизменной.

момент в заданном поле нулевого приближения, т. е. (поскольку, как было сказано выше, можно воспользоваться статистическими формулами) при $(\varepsilon_0/\hbar\Omega) (H_1/H)^2 \ll 1$

$$M = M_0 \cos(kH_1 + \beta),$$

где $\beta = cS/e\hbar H$, $k = (cS/e\hbar H^2) \sin \alpha$ (α — угол между направлением H и нормалью к поверхности металла). Чтобы нелинейные эффекты были существенны, необходимо, очевидно, иметь $kH_{1,0} \gg 1$. В этом случае величина M быстро осциллирует с глубиной на расстояниях $\delta/kH_{1,0}$, малых по сравнению с глубиной скин-слоя δ . Поэтому естественно, что напряженности полей на поверхности будут определяться только значением магнитного момента на поверхности:

$$M = M_0 \cos(kH_{1,0} \cos \omega t + \beta).$$

В частности, коэффициент отражения n -й гармоники связан с n -м коэффициентом Фурье разложения функции $\cos(kH_{1,0} \cos \omega t + \beta)$, т. е.

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(kH_{1,0} \cos x - nx)] dx = \exp(-i\pi n/2) J_n(kH_{1,0}).$$

Легко заметить, что при $kH_{1,0} \gg 1$ возможны несколько случаев. Если $n > kH_{1,0}$, то c_n экспоненциально убывает с ростом $n/kH_{1,0}$; если $n < kH_{1,0}$, то $c_n \approx n (kH_{1,0})^{-3/2} \cos \left[nkH_{1,0} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]$. Наконец, при $n = kH_{1,0}$ имеет место своеобразный псевдорезонанс: $c_n \propto n^{-1/3}$, относительная полуширина которого порядка $n^{-2/3}$. Как ясно из сказанного, этот псевдорезонанс имеет существенно квантовый нелинейный характер.

Оценим амплитуду резонансной гармоники. Во-первых, она пропорциональна амплитуде магнитного момента, которая при $\hbar\Omega > 2\pi^2 T$, $2\pi^2 \hbar/\tau$ порядка $M \approx H (v/c)^2 (\varepsilon_0/\hbar\Omega)^{1/2}$ (см. (2,1)). Во-вторых, появляется множитель $\sqrt{\omega/\sigma}$, за счет того, что рассматриваемый эффект является нелинейным.

При этом проводимость σ , входящая в уравнения, имеет иной порядок, чем проводимость σ_0 в отсутствие магнитного поля (см. ²). Если сечения фермиевской поверхности являются замкнутыми кривыми, то, как показывает расчет, $\sigma \approx (r/l) \sigma_0$, если число электронов не равно числу дырок, и $\sigma \approx (r/l)^2 \sigma_0$, если $n_e = n_h$ (H предполагается не параллельным поверхности образца).

II. КИНЕТИКА

10. Статический скин-эффект

Получим, исходя из простых физических соображений, формулу для плотности тока j и нескомпенсированной плотности зарядов ρ' в проводнике. Если n — функция распределения, а n_0 — равновесная функция распределения в отсутствие электрического поля, то

$$j = \frac{2e}{\hbar^3} \int v n dp, \quad v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}, \quad (10,1)$$

$$\rho' = \frac{2e}{\hbar^3} \int (n - n_0) dp. \quad (10,2)$$

(В формуле (10,2) учтено, что в равновесном состоянии $\rho' = 0$.)

Внешнее поле приводит к тому, что квазичастица, имевшая энергию $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$, приобретет энергию $\Delta\varepsilon(\mathbf{p})$. Ясно, что число квазичастиц, имеющих теперь энергию ε , равно числу частиц, имевших раньше энергию $\varepsilon - \Delta\varepsilon(\mathbf{p})$, т. е. $n(\mathbf{p}) = n_0(\varepsilon(\mathbf{p}) - \Delta\varepsilon(\mathbf{p}))$, или, в линейном приближении по полю (которого практически вполне достаточно и которое только и будет нас интересовать)

$$n(\mathbf{p}) = n_0(\varepsilon) - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \Delta\varepsilon(\mathbf{p}).$$

Поскольку в равновесном состоянии (в отсутствие внешних полей) ток и нескомпенсированный заряд в нормальных металлах отсутствуют,

$$\mathbf{j} = -\frac{2e}{h^3} \int v \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \Delta\varepsilon(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad (10,3)$$

$$\rho' = -\frac{2e}{h^3} \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \Delta\varepsilon(\mathbf{p}) dp. \quad (10,4)$$

(Математически член с $n_0(\varepsilon)$ в выражении для $\mathbf{j}$ обратился в нуль благодаря центральной симметрии функции $\varepsilon(\mathbf{p})$: $\varepsilon(-\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p})$).

Учитывая, что $-\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \approx \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$, так как $\varepsilon_0 \gg T$, а $dp = |eH/c| d\varepsilon dp_z dt$, находим

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{h^3} \left| \frac{eH}{c} \right| \sum_{\varepsilon(\mathbf{p})=\varepsilon_0} \int v \Delta\varepsilon dp_z dt \equiv \frac{1}{e} \sum \langle \mathbf{v} \Delta\varepsilon \rangle, \quad (10,3a)$$

$$\rho' = \frac{2e}{h^3} \left| \frac{eH}{c} \right| \sum_{\varepsilon(\mathbf{p})=\varepsilon_0} \int \Delta\varepsilon dp_z dt \equiv \frac{1}{e} \sum \langle \Delta\varepsilon \rangle. \quad (10,4a)$$

Сумма при наличии нескольких зон берется по всем зонам. В отсутствие столкновений

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (10,5)$$

и потому

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E} \mathbf{v}. \quad (10,6)$$

Если путь, который квазичастица проходит в поле между столкновениями, есть $\Delta\mathbf{r}$ (разумеется, он имеет смысл только по порядку величины), то

$$\Delta\varepsilon \approx e\mathbf{E} \Delta\mathbf{r}. \quad (10,7)$$

Таким образом,

$$\sigma_{ik} \approx \sum \langle \overline{v_i \Delta r_k} \rangle, \quad (10,8)$$

где косыми скобками обозначено усреднение по ферми-поверхности в смысле (10,3a), (10,4a).

Из полученной формулы ясно, что изменение тензора проводимости в постоянном магнитном поле связано с изменением пути, проходимого электроном в данном направлении без столкновений. В то время как вдоль магнитного поля $\mathbf{B} \parallel z$ этот путь, как и в отсутствие поля, порядка длины свободного пробега l (так что $\sigma_{zz}(B) \approx \sigma_{zz}(0) \approx \sigma_0$ — проводимости при $B = 0$), поперек поля $\Delta r_\alpha \approx r \approx l\gamma$ и соответствующие компоненты σ_{ik} в сильном поле ($r \ll l$) резко уменьшаются. Появляется резкая анизотропия: если хотя бы одно из i, k не совпадает с z , то $\sigma_{ik} \ll \sigma_0\gamma$, $\gamma \propto r/l \propto B^{-1}$, $\gamma \ll 1$.

Примем во внимание принцип Онсагера симметрии кинетических коэффициентов: $\sigma_{ih}(H) = \sigma_{ih}(-H)$. Отсюда $\sigma_{ii}(-H) = \sigma_{ii}(H)$ является четной функцией γ , и, следовательно, линейный член в разложении $\sigma_{ii}(\gamma)$ обращается в нуль, $\sigma_{xx} \approx \sigma_{yy} \approx \sigma_0 \gamma^2$.

«Особый» характер имеют и σ_{xy} , σ_{yx} . Они, очевидно, определяются дрейфом в скрещенных электрическом и магнитном полях, скорость которого, как известно, равна cE/B и не зависит от закона дисперсии.

Поэтому *)

$$\sigma_{xy} = \sum (\pm en) \frac{c}{H}, \quad (10,9)$$

где n — число носителей в данной зоне, которое берется со знаком $+$ для электронов и со знаком $-$ для дырок, поскольку движение дырок создает ток в направлении, противоположном току электронов. Если $n_e = n_h$, то в отсутствие столкновений дрейфовый ток (10,9) отсутствует, линейный по H^{-1} член в σ_{xy} исчезает и

$$\sigma_{xy} \approx \sigma_0 \gamma^2. \quad (10,10)$$

В итоге, с учетом принципа Онсагера,

$$\hat{\sigma} = \sigma_0 \begin{pmatrix} a_{11}\gamma^2 & , & a_{12}\gamma \left(1 - \frac{n_e}{n_h}\right) + \tilde{a}_{12}\gamma^2, & a_{13}\gamma \\ -a_{12}\gamma \left(1 - \frac{n_e}{n_h}\right) + \tilde{a}_{12}\gamma^2, & a_{22}\gamma^2 & , & a_{23}\gamma \\ -a_{13}\gamma & , & -a_{23}\gamma & , & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \frac{r}{l} \propto B^{-1} \quad (a_{ih} \approx 1) \quad (10,11)$$

$$\hat{\rho} = \hat{\sigma}^{-1} =$$

$$= \rho_0 \begin{pmatrix} b_{11} \left[\left(1 - \frac{n_e}{n_h}\right) + \gamma \alpha_{11} \right] & , & b_{12} \gamma^{-1} \left[\left(1 - \frac{n_e}{n_h}\right) + \gamma \alpha_{12} \right]^{-1}, & b_{13} \gamma^{-1} \\ -b_{21} \left[\left(1 - \frac{n_e}{n_h}\right) - \gamma \alpha_{21} \right]^{-1} \gamma^{-1}, & b_{22} \left[\left(1 - \frac{n_e}{n_h}\right) + \gamma^2 \alpha_{22} \right]^{-1} & , & b_{23} \gamma^{-1} \\ -b_{31} \gamma^{-1} & , & -b_{32} \gamma^{-1} & , & b_{33} \end{pmatrix},$$

$$(b_{ih} \approx \alpha_{ih} \approx 1), \quad (10,12)$$

что совпадает с результатами точного расчета (см. 2). (Несложно было бы из аналогичных рассуждений получить асимптотику $\hat{\sigma}$ и $\hat{\rho}$ для открытых поверхностей, а для поликристаллов — закон Капицы. В последнем случае нужно было бы учесть, что при ориентации магнитного поля под углом $(\pi/2) - \varphi$ к оси гофрированного цилиндра $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p})$ (рис. 10) путь $\Delta y \approx \approx r/(\varphi + \gamma)$.)

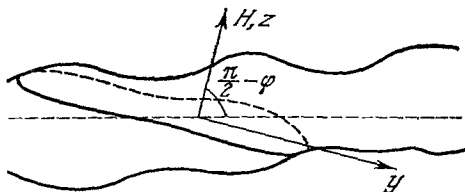


Рис. 10.

Из полученных формул ясна принципиальная разница между поведением массивного проводника в магнитном поле и без него. В последнем случае все (отличные от нуля в анизотропном случае) компоненты

тензора проводимости с ростом длины свободного пробега стремятся к бесконечности (так как $\sigma_{ih} \propto l$). В магнитном поле при $l \rightarrow \infty$ (когда магнитное поле автоматически становится сильным, $r \ll l \rightarrow \infty$) компоненты σ_{xx} , σ_{yy} , а при $n_e = n_h$ и σ_{xy} , σ_{yx} , стремятся к нулю, так как они пропорцио-

*) Здесь и ниже речь идет о замкнутых поверхностях Ферми. Случай открытых поверхностей рассматривается аналогично (см. 3¹⁶).

нальны l^{-1} (согласно приведенным выше формулам $\sigma_0 \gamma^2 \propto l (r/l)^2 \propto l^{-1}$). Особенно ярко различие в поведении массивного проводника при $H \neq 0$ и $H = 0$ проявляется в случае $n_e = n_h$: при $H = 0$ образец с бесконечной длиной свободного пробега является идеальным проводником (сопротивление $\rho = 0$), а при $H \neq 0$ — идеальным диэлектриком ($\rho = \infty$).

Любопытно, что это приводит к минимуму на кривой зависимости $\rho_H(T)$ (T — температура). В самом деле, пока $l < r$, $\rho \propto l^{-1}$ вместе с l^{-1} убывает с понижением температуры. Однако когда достигается $l \approx r$ в заданном магнитном поле, дальнейший рост l с понижением температуры приводит к росту $\rho \propto l$.

В неоднородном поле скорость дрейфа зависит от локальных характеристик орбит и электронный и «дырочный» токи перестают компенсироваться. В результате

$$\sigma_{xy}(\xi) \approx \sigma_0 \left\{ \gamma f\left(\frac{\xi}{r}\right) + \gamma^2 \right\}, \quad (10,13)$$

где $f(1) \approx 1$, $f(x)$ затухает, стремясь к нулю, на расстояниях порядка 1 (ξ направлено по нормали к поверхности проводника). Вблизи поверхности несправедливо $\sigma_{ii}(-H) = \sigma_{ii}(H)$ и потому $\sigma_{xx} \approx \sigma_{yy} \approx \gamma \sigma_0$.

Если образец тонкий (его толщина $d \ll l$), основной вклад даже в полный ток, согласно (10,13), вносит слой порядка r вблизи поверхности и имеет место статический скин-эффект, предсказанный в ³⁰ и детально рассчитанный в ¹⁵. При этом полный ток не зависит от толщины пластины.

Перейдем к построению последовательной теории статического скин-эффекта. Прежде всего обратим внимание на то, что сама основная система уравнений при микроскопическом рассмотрении отличается от таковой в макроскопическом случае ⁹.

При рассмотрении геометрических эффектов и их влияния на распределение тока и поля в слабонеоднородном случае связь плотности тока с напряженностью электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ (так как $\text{rot } \mathbf{E} = 0$) остается, очевидно, такой же, как в неограниченном металле:

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E} = -\hat{\sigma} \nabla \varphi, \quad (10,14)$$

где σ_{ik} не зависит от координат.

Основным уравнением для определения распределения поля в образце является уравнение второго порядка относительно φ — уравнение непрерывности заряда в статическом случае

$$\text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (10,15)$$

т. е.

$$(\nabla, \hat{\sigma} \nabla) \varphi = 0. \quad (10,16)$$

Граничные условия к этому уравнению обеспечивает уравнение непрерывности заряда на поверхности. Заряды не проходят через поверхность проводника (их эмиссией можно, конечно, с высокой точностью пренебречь), вне проводника $\mathbf{j} = 0$, и потому

$$\mathbf{j}_n = 0 \quad (10,17)$$

(n — внутренняя нормаль к поверхности проводника), т. е.

$$(\hat{\sigma} \nabla \varphi)_n = 0. \quad (10,18)$$

(В общем случае наличия контактов $j_n = i_n$, где i — ток, поступающий к данной точке поверхности через контакты.)

При известном φ плотность зарядов определяется уравнением

$$\rho' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \Delta \varphi. \quad (10,19)$$

Благодаря высокой плотности зарядов электронов в проводнике в основном приближении можно считать (так как $\rho' \ll \rho_0$)

$$\rho' = 0. \quad (10,20)$$

В тонкой пластине ($d \ll l$), а при построении микроскопической теории и в общем случае, связь j и φ должна определяться из микроскопической теории, причем благодаря неоднородности поля $\hat{\sigma}$ является оператором и по координатам. При этом сохранение заряда в правильной микроскопической теории обеспечивается автоматически, и, каково бы ни было $\varphi(r)$, оператор $\hat{\sigma}$ должен получиться таким, чтобы уравнение (10,15) выполнялось автоматически, являясь следствием вида $\hat{\sigma}$.

В микроскопической теории и условие отражения зарядов от границ проводника должно быть таким, чтобы автоматически обеспечивать условие сохранения заряда на поверхности, т. е. таким, чтобы автоматически удовлетворялось уравнение (10,17).

Что же касается уравнения (10,20), то микроскопическая теория дает, естественно, не только связь j с φ , но и интегральную связь ρ' с φ . В результате (10,20) оказывается интегральным (и потому не требующим дополнительных граничных условий) уравнением для определения φ .

В связи с тем, что (10,20) оказывается основным уравнением для φ , проведем обоснование замены (10,19) на (10,20) более подробно. Из определения (10,2) для ρ' ясно, что $\rho' = e^2 \gamma \hat{L} \nu$, где $\nu \approx n/\epsilon_0$ — характерная плотность зарядов, а $\hat{L}$ — линейный интегральный оператор «порядка единицы»: $\hat{L}\varphi \approx \varphi$ (ср. (10,2) с (10,1)). Если φ изменяется на расстояниях порядка λ , то из (10,19) следует $\hat{L}\varphi \approx (\lambda_0/\lambda)^2 \varphi$, где $\lambda_0 = (e \sqrt{4\pi\nu})^{-1}$. В хороших металлах с числом электронов порядка одного на атом λ_0 порядка межатомного расстояния 10^{-8} см, в полуметаллах типа висмута $\lambda_0 \approx 10^{-7}$ — 10^{-6} см, в несобственных полупроводниках даже при столь низких температурах, что становится существенным вырождение, для $n \approx 10^{12}$ см $^{-3}$ и эффективной массы $m \approx 10^{-29}$ г величина $\lambda_0 \approx 10^{-6}$ см (так как $\lambda_0 \propto m^{-1/2} n^{-1/6}$, оно крайне слабо зависит от n).

Это означает, что удержание правой части в (10,19) является лишь превышением точности даже в области, где «формируется» граничное условие для рассеявшихся от поверхности электронов, так что, действительно, (10,19) сводится к $\hat{L}\varphi = 0$, которое формально эквивалентно (10,20). Ясно, что замена в (10,19) E на D не может изменить характер проведенных оценок. В переменных полях замена (10,19) на (10,20) эквивалентна пренебрежению током смещения. Следует подчеркнуть, что ρ' отличается от крайне малого $\hat{L}\varphi$ размерным множителем, и потому для определения величины ρ' нужно, получив φ из уравнения (10,20), воспользоваться уравнением (10,19). (Это соответствует последовательным приближениям при решении уравнения (10,19).)

Замена уравнения (10,19) уравнением (10,20) имеет и принципиальный характер. Дело в том, что λ_0 определяет, как это ясно из (10,19), глубину, на которой затухают внешние поля. Это значит, что только с точностью, определяемой отношением λ_0/λ , можно вообще говорить о сопротивлении как о внутренней характеристике проводника, не зависящей от внешних электрических полей. (Например, внося проводник с током между пластинами конденсатора и меняя потенциалы на обкладках конденсатора, можно с такой точностью менять выделение Джоулева тепла в проводнике при заданной силе тока и заданных контактах.)

которой $v_n > 0$ (n — внутренняя нормаль к поверхности) *). В случае пластины уравнение (10,21а) сводится к

$$\left. \begin{aligned} \xi(\lambda) &= \xi(t) - \xi + \xi_S, \quad \lambda < t, \quad \lambda = \lambda_{\min}, \\ \xi_S &= \begin{cases} 0 & \text{при } v_{\xi}(\lambda) > 0, \\ d & \text{при } v_{\xi}(\lambda) < 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (10,22)$$

Функция $h(\mathbf{r}_S)$ однозначно определяет плотность тока — подстановка (10,21) в (10,3а) дает

$$\mathbf{j} = \sum \langle \mathbf{v} h(\mathbf{r}_S) \rangle \quad (10,23)$$

— и потенциал φ ; из (10,21), (10,20) и (10,4а) следует

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{(\sum \langle h(\mathbf{r}_S) \rangle)}{\sum \langle 1 \rangle}. \quad (10,24)$$

Поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, то E_x и E_η (выбор осей ясен из рис. 11) не зависят от ξ , так что $\varphi(\mathbf{r}) = -E_x x - E_\eta \eta - \varphi_1(\xi)$.

Поэтому, учитывая (10,24), удобно находить

$$h(\mathbf{r}_S) = -E_x x - E_\eta \eta + h(\xi_S). \quad (10,25)$$

Перейдем к определению $h(\xi_S)$. Согласно (10,17)

$$j_n = \sum \langle v_n h \rangle^S = \sum \langle v_n h \rangle_+^S + \sum \langle v_n h \rangle_-^S = 0, \quad (10,26)$$

$$\langle f \rangle = \frac{2e^2}{\hbar^3} \left| \frac{eH}{c} \right| \int f dp_z dt = [\bar{\Psi}], \quad \bar{\Psi} = \int_0^T \varphi dt, \quad \langle v_n \rangle = 0,$$

где индекс S означает, что берется точка на поверхности, а плюс и минус относятся соответственно к электронам, отразившимся от этой же поверхности (электроны типа I на рис. 11) и отразившимся от противоположной поверхности (электроны типа II). Подставляя (10,25) в (10,26), находим $h(0) - h(d) =$

$$= \frac{1}{\sum \langle v_{\xi} \rangle_+} \left\{ E_x \sum \langle v_{\xi}(t) (x(t) - x(\lambda_0)) \rangle + E_\eta \sum \langle v_{\xi}(t) (\eta(t) - \eta(\lambda_0)) \rangle \right\}, \quad (10,27)$$

где λ_0 для электронов, сталкивающихся с поверхностью $\xi = 0$, определяется уравнением

$$\xi(\lambda_0) = \xi(t), \quad \lambda < t, \quad (10,22a)$$

а для электронов, сталкивающихся с поверхностью $\xi = d$, уравнением

$$\xi(\lambda_0) = \xi(t) + d, \quad \lambda < t. \quad (10,22b)$$

Из уравнения (10,22) ясно, что

$$v_{\xi}(t) dt = v_{\xi}(\lambda) d\lambda, \quad (10,28)$$

что позволяет значительно упростить выражение (10,27):

$$h(0) - h(d) = d E_\eta \operatorname{ctg} \varphi \quad (10,29)$$

(определение φ см. на рис. 11).

Этого достаточно для определения и разности потенциалов по (10,24) и плотности тока по (10,23) — изменение h на постоянную не сказывается

*) Три уравнения (10,21а) совместно с уравнением поверхности проводника $G(\mathbf{r}_S) = 0$ определяют в общем случае четыре величины: $\mathbf{r}_S$ (три компоненты) и λ .

на них. Функцию $h(\mathbf{r})$ (которая требуется лишь при $\xi = 0$, d) можно записать в виде

$$h = -E_x x - E_\eta \eta + E_\eta \xi \operatorname{ctg} \varphi = -E_x x - \frac{E_\eta y}{\sin \varphi}. \quad (10,30)$$

Формулы (10,23), (10,24), (10,27) дают точное решение поставленной задачи в любом (по величине и направлению) магнитном поле. Исключением является $\varphi = 0$, когда полученное решение теряет смысл. Это естественно: при $\varphi = 0$ всегда имеются электроны, орбиты которых «помещаются» в пластине и которые, двигаясь в этом случае без столкновений вдоль ее поверхности, обеспечивают бесконечную проводимость.

Подставим (10,30) и (10,22) в (10,23):

$$j = \sum \langle v(t) (K(t) - K(\lambda)) \rangle, \quad (10,31)$$

$$K(t) = -E_x x(t) - \frac{E_\eta y(t)}{\sin \varphi}, \quad (10,32)$$

причем $K(t)$ — периодическая с периодом T функция t . Заметим, что из (10,31) и (10,28) автоматически вытекает $j_\xi(\xi) = 0$.

Из (10,31) следует

$$j_\alpha(\xi) = \sigma_{\alpha\beta}(\xi) E_\beta \quad (10,33)$$

(α, β принимают значения x, η), где $\sigma_{\alpha\beta}(\xi) \propto r$.

Для вычисления плотности тока по формуле (10,31) удобно воспользоваться тем, что $K(\lambda)$ периодически по λ с периодом T , а λ изменяется на T при изменении ξ на $\bar{v}_\xi$. Разложим $K(\lambda^\pm)$ в ряд Фурье по ξ :

$$K(\lambda^\pm) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \kappa_n^\pm \exp\left(\frac{2\pi i n \xi}{\bar{v}_\xi}\right); \quad (10,34)$$

тогда из (10,31)

$$j_\alpha = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j_m^\alpha, \quad j_0^\alpha = \bar{v}_\alpha K - \frac{\bar{v}_\alpha \bar{v}_\xi K}{\bar{v}_\xi}, \quad (10,35)$$

$$j_m^\alpha = \frac{1}{2\pi i m} \left\{ T \exp\left[\frac{2\pi i n}{|\bar{v}_\xi|} \left(\frac{d}{2} + \operatorname{sign} \bar{v}_\xi \left(\frac{d}{2} + \xi\right)\right)\right] \times \right. \\ \left. \times \overline{v_\alpha(t) \exp\left(-\left(\frac{2\pi i m \xi(t)}{\bar{v}_\xi}\right) \dot{K}(t') \exp\left(\frac{2\pi i m \xi(t')}{\bar{v}_\xi}\right)\right)} \right\}. \quad (10,36)$$

Рассмотрим подробнее случай сильных магнитных полей: $r \ll d$.

Замечая, что $\overline{v_x x} = \overline{v_y y} = 0$, $\sum \langle v_x y \rangle = -\sum \langle v_y x \rangle \propto n_e - n_h$, находим, при $d \gg r$,

$$j_0^{x, \eta} = \mp \frac{(n_e - n_h) e c}{H \sin \varphi} E_{\eta, x}. \quad (10,37)$$

Выясним физический смысл этого результата. Если в металле число дырок равно числу электронов, то $j_0^\alpha = 0$ и ток на любой глубине связан со слагаемыми типа (10,36). Но эти слагаемые благодаря интегрированию по p_z осциллируют и быстро убывают при удалении от поверхностной пластины (из-за $d \gg r$). Основной вклад в полный ток при $r \ll d$ вносит лишь поверхностный слой толщины порядка r вблизи поверхности (чтобы убедиться в этом, достаточно подсчитать полный ток в области, далекой от поверхностей пластины). При этом в основном приближении по r/d (т. е. при $d \rightarrow \infty$) плотность тока на поверхности равна нулю, на глубине

порядка r возрастает до величины порядка $pecE/H$, а на больших глубинах $\xi \gg r$ затухает, осциллируя, пропорционально $(r_0/\xi) \cos(\xi/r_0)$; $r_0 = (\bar{v}_\xi)_{\max}$ (рис. 12).

Именно благодаря этому полный ток при $n_e = n_h$ оказывается не зависящим от толщины пластины и пропорциональным r^2 . Ток в «глубинных» слоях металла приводит лишь к малым зондгеймеровским осцилляциям³², детально рассматривавшимися в³³, для которых может быть из (10,36) записана точная формула. (При $d \gg r$ их вычисление не представляет труда: в (10,36) основной вклад дает область вблизи концов интегрирования по p_z , т. е. вблизи опорных точек p_0 .)

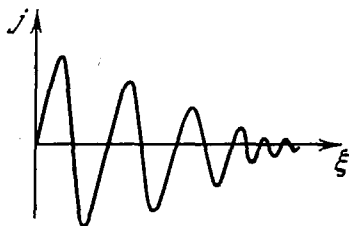


Рис. 12.

Затухание тока в глубь металла, изображенное на рис. 12, и есть статический скин-эффект. Он имеет место лишь при $n_e = n_h$ и не меняет зависимости сопротивления от магнитного поля. В самом деле, определим сопротивление пластины. Для этого необходимо учесть, что если в направлении μ пластина хотя и велика (даже по сравнению с d), но все же ограничена, то полный ток может течь лишь в направлении $\xi \perp \mu$, ξ и $J_\mu = \int j_\mu d\mu = 0$ (уравнение непрерывности в интегральной форме, обеспечивающее отсутствие потока заряда через границы пластины в направлении μ). Так как

$$J_{x, \eta} = \mp \frac{(n_e - n_h) ec}{B \sin \varphi} dE_{\eta, x} + \frac{n_e e^2}{mv} r^2 a_\beta^{x, \eta} E_\beta, \quad a_\beta^{x, \eta} \approx 1,$$

то $R = E_\xi / J_\xi$ имеет вид

$$R(B, d) \approx \begin{cases} R(0, d) \propto d^{-2} (n_e \neq n_h), \\ R(0, d) \left(\frac{d}{r}\right)^2 \propto r^{-2} (n_e = n_h) \end{cases}$$

и при $n_e = n_h$ не зависит от толщины пластины.

До сих пор речь шла только об одномерной задаче. Из изложенного понятно, однако, что описанный метод применим^{31a} к образцу произвольной формы с произвольными расположением и формой подводящих ток контактов. Последний вопрос представляет особый интерес, так как связан с фокусировкой тока в сильном магнитном поле. При этом существенно меняется и сопротивление образца. В частности, при размерах контактов, малых по сравнению с r , оно обратно пропорционально площади контактов^{31a}.

Рассеяние электронов от поверхности всюду предполагалось диффузным. В полуметаллах оно может быть близким к зеркальному (вследствие большой дебройлевской длины волны *). Это приводит^{31b} к линейной зависимости сопротивления от магнитного поля — закону Капицы.

В хороших металлах отражение по той же причине близко к зеркальному для электронов, сталкивающихся с поверхностью под малыми угла-

*) В полуметаллах возможна еще одна причина зеркального отражения — загиб энергетических зон вблизи поверхности, на расстоянии порядка дебройлевской длины волны от поверхности: возникающий потенциальный барьер не подпускает к ней заряды (см. ⁶⁹). Если же загиб зон образует потенциальную яму, заряды не пропускаются от поверхности в глубь полуметалла⁷⁰. В этом случае возникают поверхностные уровни, которые могут быть обнаружены по обусловленному ими резонансу.

ми (см. п. 13). В результате появляется возможность определить по зависимости сопротивления от магнитного поля зависимость коэффициента отражения электронов от угла падения.

До сих пор речь шла только о замкнутых поверхностях Ферми. Открытые поверхности также приводят к существованию статического скин-эффекта; теория для этого случая построена в ³¹⁶. Экспериментально статический скин-эффект изучался на кадмии ⁵², вольфраме ⁵³, индии и алюминии ⁵⁴ и висмуте ^{54, 55}.

11. Переменные поля (классический случай). Низкие частоты

В предыдущем разделе было показано, что даже слабая неоднородность может существенно изменить сопротивление проводника в сильном магнитном поле ($\gamma \ll 1$). Поскольку член с неоднородностью пропорционален γ , а однородный γ^2 , достаточно, чтобы характерное расстояние, связанное с неоднородностью, было порядка $r\gamma^{-1} \approx l$. Неоднородность может возникать по разным причинам. Одним из наиболее простых способов ее создания является скин-эффект. В этом случае естественно ожидать новой (по сравнению с «обычным» скин-эффектом, который определяется проводимостью в однородном поле) зависимости сопротивления от магнитного поля уже на очень низких частотах, когда «обычная» глубина скин-слоя становится порядка длины свободного пробега:

$$\delta \approx \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega_1\sigma(B)}} \ll l. \quad (11,1)$$

В хороших предельно чистых металлах при низких температурах, когда $l \approx 1 - 3$ мм, это соответствует $\omega_1 \approx 1 - 100$ сек⁻¹.

Заранее ясно, что затухание поля и тока при $\omega \gtrsim \omega_1$ будет носить весьма своеобразный характер под влиянием статического скин-эффекта. Почти однородное электрическое поле, как и в п. 10, создает ток, убывающий главным образом на расстоянии порядка ларморовского радиуса r , как на рис. 12. Благодаря разному характеру затухания поля и плотности тока задачу на не слишком высоких частотах можно решать методом последовательных приближений. Сначала следует определить напряженность электрического поля. Пока она меняется на расстояниях, больших по сравнению с r (это и определяет «не слишком высокие» частоты), характер рассеяния электронов от поверхности несуществен и наличие поверхности не сказывается на тензоре проводимости. Это позволяет четко продолжить напряженность поля на полупространство вне проводника $z \geq 0$ и записать

$$j(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}(|z - z'|) E(z') dz'. \quad (11,2)$$

В результате уравнения Максвелла в одномерном случае

$$E''_{\alpha} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{\alpha} (\alpha = x, y), \quad j_z = 0 \quad (11,3)$$

немедленно решаются переходом к компонентам Фурье по координате (разумеется, с учетом скачка E'_{α} при $z=0$, связанного с четным продолжением E_{α}):

$$-k^2 E_{\alpha} - 2E'_{\alpha}(0) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \tilde{\sigma}_{\alpha j}(k) E_j(k), \\ \tilde{\sigma}_{zj}(k) E_j(k) = 0 \quad (11,4)$$

и

$$\tilde{\sigma}_{ij}(k) = 2 \int_0^{\infty} \cos(kz) \sigma_{ij}(z) dz, \quad E(k) = 2 \int_0^{\infty} \cos(kz) E(z) dz, \quad (11,4a)$$

где i и j принимают значения x, y, z . Определив из (11,4) $E(z)$, надо записать следующее приближение — формулу для быстро убывающего j (которое зависит от характера отражения от поверхности) аналогично тому, как это делалось в п. 10. В интересующем нас случае, когда E меняется на расстояниях, больших по сравнению с r , добавка, учитывающая характер отражения, будет такой же, как в статическом случае. (Поскольку характерное расстояние, на котором меняется $\hat{\sigma}$, есть r , можно E считать однородным.) В результате полный ток J_α равен (см. п. 10, $n_e = n_h$)

$$J_\alpha = J_\alpha^{(0)} + J_\alpha^{(\text{стат.})} = (\hat{Z}_0^{-1})_{\alpha\beta} E_\beta(0) + (1-q) \frac{n_e e^2 r^2}{p} a_{\alpha\beta} E_\beta(0), \quad (11,5)$$

$$\alpha_{\alpha\beta} \sim 1,$$

где $\hat{Z}_0$ определяется уравнениями (11,4), $J_\alpha^{\text{стат.}}$ не зависит от ω , l , а q — коэффициент отражения зарядов от поверхности, в сильных магнитных полях при большой глубине скин-слоя для хороших металлов близкий, вероятно, к нулю (так как не малы углы столкновения зарядов с поверхностью).

Используя определение импеданса $E_\alpha(0) = Z_{\alpha\beta} J_\beta$, находим

$$\hat{Z}^{-1} = \hat{Z}_0^{-1} + \frac{n_e e^2 r^2}{p} \hat{a} (1-q). \quad (11,6)$$

Порядок $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(k)$ легко определяется так же, как это делалось в начале п. 10, если принять во внимание, что, по сказанному выше, $\sigma_{\alpha\beta}(k) = \sigma_{\alpha\beta}(-k)$. В основном приближении в широкой области частот импеданс при $q \neq 1$ не зависит от частоты и совпадает со статическим сопротивлением пластины с $l = \infty$ при $d \rightarrow \infty$.

Не приводя результатов расчета для всей области частот и магнитных полей, остановимся на своеобразном резонансе на сверхнизких частотах³⁵, который имеет место при $n_e = n_h$ в нормальном к поверхности металла (x, y) магнитном поле, когда поверхность металла совпадает с кристаллографической плоскостью. В этом случае в силу симметрии задачи электрическое поле, расположенное в плоскости x, y , создает ток только в этой же плоскости, поэтому $\sigma_{\alpha z} = \sigma_{z\alpha} = 0$ и в (11,4) $E_z = 0$, а $\sigma_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\hat{\sigma} = \sigma_0 \begin{pmatrix} \gamma^2 a_{11}, & \gamma^2 a_{12} + \gamma(kr)^2 b_{12} \\ \gamma^2 a_{12} - \gamma(kr)^2 b_{12}, & \gamma^2 a_{22} \end{pmatrix}. \quad (11,7)$$

При

$$\frac{4\pi\omega\sigma_0\gamma r^2}{c^2} = 1 \quad (11,8)$$

детерминант уравнений (11,4), (11,7) обращается в нуль — уравнения перестают иметь решение. Причина — резонанс одного из главных значений $\hat{Z}_0$. Чтобы вычислить $\hat{Z}_0$ вблизи резонанса, нужно продолжить разложение $\sigma_{xy}(\gamma, k) = \sigma_{yx}(-\gamma, k) = \sigma_{xy}(\gamma, -k)$:

$$\sigma_{xy} = \sigma_0 (\gamma^2 a_{12} + \gamma(kr)^2 b_{12} + \gamma(kr)^4 c_{12}). \quad (11,9)$$

(Обратим внимание на смысл этого разложения: оно означает, например, что

$$j_x = \sigma_0 (\gamma^2 a_{11} E_x + \gamma^2 a_{12} E_y + \gamma r^2 b_{12} E_y'' + \gamma r^4 c_{12} E_y^{IV}), \quad (11,10)$$

т. е. что при $l = \infty$ плотность тока существенно зависит от четвертой производной от электрического поля по координате!) Полуширина резонанса порядка $\gamma^{1/2}$, эффективная глубина затухания поля в резонансе — $r\gamma^{-1/4}$. Как вещественная, так и мнимая части импеданса $\hat{Z}_0$ (а значит, при зеркальном отражении зарядов от поверхности, и Z) в резонансе возрастают в $\gamma^{-1/4}$ раз. При отражении, отличном от зеркального, слабая пространственная дисперсия E приводит, как и в статическом случае, к сильной пространственной дисперсии плотности тока, которая затухает на расстоянии порядка r . В результате в основном приближении по γ импеданс вообще не зависит от частоты и совпадает со статическим сопротивлением пластины с $l = \infty$ при $d \rightarrow \infty$ и заданном q ^{67, 68}. В следующем приближении появляется зависимость от ω и резонансная добавка к импедансу; в резонансе она порядка $\gamma^{3/4}$; соответствующая добавка к Z' (B) порядка $\gamma^{1/4}$. Резонанс весьма чувствителен к указанной геометрии задачи (в этом можно убедиться, рассматривая общий случай).

Характерная особенность резонанса — своеобразная зависимость резонансной частоты от магнитного поля

$$\omega \approx \Omega \left(\frac{c\Omega}{v\omega_0} \right)^2 \propto H^3 \quad (11,11)$$

(ω_0 — плазменная частота). Условие $\Omega\tau > 1$ означает, что достаточны частоты

$$\omega > \frac{1}{\tau} \left(\frac{v\omega_0\tau}{c} \right)^{-2}, \quad (11,12)$$

что совпадает с условием (11,1).

Резонанс наиболее нагляден при кубической симметрии решетки, когда в (11,7) $a_{12} = 0$ и σ_{xy} полностью определяется неоднородностью переменного поля. При этом импеданс диагонален при круговой поляризации волны:

$$E_{\pm} = E_x \pm iE_y. \quad (11,13)$$

Уравнения (11,4) дают

$$E_{\pm}'' = \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_{\pm} = \frac{4\pi i\omega}{c^2} (\gamma^2 \sigma_0 a_{11} E_{\pm} \pm i\sigma_0 \gamma r^2 b_{12} E_{\pm}''), \quad (11,14)$$

и в резонансе $E_{\pm}''$ в (11,14) сокращается, так что приходится удерживать $E_{\pm}^{IV}$.

В нерезонансной области существенный интерес представляет появление скин-эффекта нового типа, отличного как от нормального, так и от аномального: переменные электрическое поле, с одной стороны, и магнитное поле и ток, с другой, убывают на разных по порядку величины расстояниях. Этот скин-эффект имеет место в широкой области частот (или постоянных магнитных полей), соответствующей $\delta_{ан} \gg r \gg \delta_n$ (δ_n и $\delta_{ан}$ — глубины скин-слоя при нормальном и аномальном скин-эффекте соответственно). Поскольку он имеет ту же природу, что и статический скин-эффект (см. п. 10), при котором электрическое поле является однородным, а ток затухает в глубь металла, его естественно назвать *поверхностным скин-эффектом*. Теория поверхностного скин-эффекта построена в работах ⁶⁷ (случай полупространства) и ⁶⁸ (случай тонкой пластины).

12. Квантовые осцилляции сопротивления металлов (эффект Шубникова — де Гааза)

Как было показано в п. 1 гл. I, в достаточно сильных магнитных полях, когда успевают установиться квазистационарные диамагнитные уровни,

$$\Omega\tau > 2\pi^2, \quad (12,1)$$

и когда число уровней, играющих существенную роль, строго

определено: размытие фермиевской энергии мало по сравнению с расстоянием между диамагнитными уровнями,

$$\hbar\Omega > 2\pi^2T, \quad (12,2)$$

квантование в магнитном поле приводит к осцилляциям как термодинамических (эффект де Гааза — ван Альфена; см. п. 1), так и кинетических величин, например сопротивления (эффект Шубникова — де Гааза). Рассмотрим последнее явление.

Чтобы представить себе ситуацию, возникающую в этом случае, введем, следуя ^{36а} (совершенно формально, только для простоты вычислений), время свободного пробега τ . Тогда квантовое кинетическое уравнение для матрицы плотности $\hat{n}$

$$\hat{n} = \hat{n}_0 + \hat{n}', \quad (12,3)$$

($\hat{n} = n_0(\mathcal{H}_0)$) — равновесная матрица плотности, $\mathcal{H}_0$ — оператор гамильтона в отсутствие электрического поля) принимает вид

$$\frac{d\hat{n}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}\hat{n}] + \frac{\hat{n} - \hat{n}_0}{\tau} = 0, \quad (12,4)$$

где

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - eE\hat{r}. \quad (12,5)$$

В линейном по электрическому полю приближении, подставляя (12,5) и (12,3) в (12,4), получаем

$$\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_0, \hat{n}'] + \frac{\hat{n}'}{\tau} = \frac{i}{\hbar} [eE\hat{r}, \hat{n}_0]. \quad (12,6)$$

Переходя к матричным элементам при известном спектре и учитывая диагональность $\mathcal{H}_0$ и $\hat{n}_0$ и то, что

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} [r, n_0]_{nn'} &= \frac{i}{\hbar} \{n_0(\varepsilon_{n'}) - n_0(\varepsilon_n)\} r_{nn'} = \\ &= \frac{i}{\hbar} \frac{n_0(\varepsilon_n) - n_0(\varepsilon_{n'})}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'}} [\hat{r}, \mathcal{H}_0]_{nn'} = -\frac{n_0(\varepsilon_{n'}) - n_0(\varepsilon_n)}{\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n} v_{nn'}, \end{aligned} \quad (12,7)$$

находим из (12,6)

$$\left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n) + \frac{1}{\tau} \right] n'_{nn'} = -\frac{n_0(\varepsilon_{n'}) - n_0(\varepsilon_n)}{\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n} eE v_{nn'}, \quad (12,8)$$

откуда

$$n'_{nn'} = -\frac{n_0(\varepsilon_{n'}) - n_0(\varepsilon_n)}{\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n} \frac{eE v_{nn'}}{\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n) + \frac{1}{\tau}}. \quad (12,9)$$

Так как $\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n \approx (n' - n) \hbar\Omega$, из (12,1) и (12,2) ясно, что как первый, так и второй сомножители в (12,9) имеют резкий максимум при $n' = n$.

Диагональные матричные элементы в квазиклассическом случае, как известно, равны средним по времени от данной классической величины ^{36б}. Но, как было показано в п. 1 гл. I, квантовые осцилляции определяются экстремальными по площади сечениями ферми-поверхности, где средняя скорость электрона обращается в нуль (так как $\bar{v}_x = \bar{v}_y = 0$,

$$\text{а } \bar{v}_z = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right)_{p_z} \propto \oint \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_z} \frac{dl}{v_{\perp}} \propto \oint \frac{\partial p_{\perp}}{\partial p_z} dl \propto \frac{\partial S}{\partial p_z} \Big|.$$

Таким образом, оказывается, что член, который дал бы основной вклад в квантовые осцилляции, выпадает, причем это связано с его равномерным усреднением по всей орбите, т. е. с его однородностью по координатам.

Следовательно, неоднородные в пространстве слагаемые в (12,8), даже если бы в уравнении они оказались малыми, в осцилляциях сопротивления могли бы оказаться определяющими. (Впервые показано в³⁷.)

Легко понять, что, строго говоря, такие члены в кинетическом уравнении должны быть, а тогда ясно из сказанного, что удержание их может оказаться обязательным.

Для конкретности рассмотрим упругое рассеяние на примесях. В классическом случае сохранение энергии при столкновении обеспечивается дельта-функцией $\delta(\epsilon - \epsilon')$, причем в основном приближении можно брать энергию в отсутствие электрического поля. В квантовом случае, когда в скрещенных электрическом и магнитном полях ($\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$) возникают стационарные состояния, отвечающие при данном p_z ($z \parallel \mathbf{H}$) дискретным уровням (поэтому изменение энергии может происходить скачком), нужно записывать $\delta(\epsilon - eE_y y - \epsilon' + eE_y y')$.

При этом появляются (неоднородные в классическом случае) члены, вклад которых следует оценить. (То, что именно к ним сводится учет электрического поля в интеграле столкновений, было показано Косевичем и Андреевым³⁸ с помощью метода Боголюбова³⁹.)

Ясно, что соответствующие члены в правой части уравнения (12,8) окажутся порядка (так как $y \approx r$) $(eEr/\hbar\Omega)(n_0/\tau)$. С другой стороны, правая часть (12,8) порядка $eEv(n_0/\hbar\Omega)(\Delta n/n_0) \approx eEv(n_0/\hbar\Omega)(\hbar\Omega/\epsilon_0)$. Поскольку в однородном поле в недиагональных членах проводимости роль l берет на себя r , т. е. вклад в ток дает лишь следующее приближение по $(\Omega\tau)^{-1}$, вклад от обычной правой части (12,8) в ток соответствует члену порядка $eEv(n_0/\hbar\Omega)(\hbar\Omega/\epsilon_0)(1/\Omega\tau)$. В итоге роль «добавочных» неоднородных членов оказывается в $\epsilon_0/\hbar\Omega \gg 1$ раз значительнее, чем «обычных».

Подчеркнем, что, как ясно из изложенного выше, это полностью обусловлено однородностью поля. Легко видеть, что в существенно неоднородном поле, в частности при аномальном скин-эффекте, «дополнительную» зависимость интеграла столкновений от электрического поля учитывать не следует (это подтверждается и прямыми вычислениями).

Выражение для квантового интеграла столкновений с примесями легко преобразуется. Суммирование в интеграле столкновений происходит только по разностям квантовых чисел: сдвиг энергии на потенциальную энергию в электрическом поле в линейном по E приближении нужно учитывать только у величин, соответствующих нулевому приближению. В результате получаем (см. ³⁸)

$$\Delta\sigma_{\text{осц}}^{\alpha\gamma} \approx -B^2 u_m^{\alpha\gamma}(\epsilon_0) \frac{d \ln(S_{\text{exp}}(\epsilon_0))}{d\epsilon_0} \frac{\partial M_z}{\partial B}. \quad (12,10)$$

Осцилляции химического потенциала дают малый вклад в осцилляции проводимости (см. п. 1 гл. I). Другие элементы тензора $\Delta\sigma^{i\gamma}$ могут быть вычислены аналогичным образом.

Итак, осцилляции проводимости выражаются через осцилляции магнитного момента M_z , причем амплитуда осцилляций определяется по порядку величины классическим «тензором подвижности»

$$u_{\alpha\beta} |_{S=S_{\text{ext}}, \epsilon=\epsilon_0} \equiv u_m^{\alpha\beta}.$$

Последовательный расчет тензора проводимости в магнитном поле как в квазиклассическом, так и в квантовом и ультраквантовом случаях с помощью диаграммной техники был проведен Абрикосовым⁴⁰.

Построение квантовой теории термомангнитных явлений может быть проведено в аналогично изложенной квантовой теории гальваномагнитных явлений, однако требует учета возникающего в квантовом случае магнитного момента, влияющего на кинетические коэффициенты (аналогично тому, как это имело место в переменном поле; см. п. 9 гл. I).

13. Переменные поля (квантовый случай).

Поверхностные уровни и определение коэффициента отражения электронов от поверхности

Все предыдущее рассмотрение было связано с квантованием в постоянном магнитном поле электронного энергетического спектра в неограниченном образце. В то же время значительный интерес представляет выяснение характера поверхностных уровней, поскольку оно может, в частности, дать информацию о характере рассеяния электронов на поверхности проводника. Заранее ясно, что характер рассеяния определяется соотношением между дебройлевской длиной волны λ_D падающих на поверхность зарядов и характерными размерами искажений поверхности. У хороших металлов λ_D порядка межатомного расстояния, и потому при немалых углах падения отражение электронов от поверхности с высокой точностью можно считать диффузным. Значит, естественная ширина уровней заведомо того же порядка, что и расстояние между ними (так как определяется той же частотой) и говорить о квантовании спектра этих электронов не приходится. По мере уменьшения угла падения φ , дебройлевская длина волны в нормальном к поверхности направлении растет пропорционально φ^{-1} , так что при достаточно малых углах падения отражение электронов от поверхности может оказаться близким к зеркальному.

Такого рода ситуация возникает, если существенны «скользящие» электроны. Именно это имеет место при аномальном скин-эффекте, когда

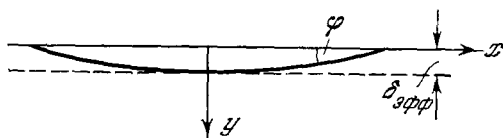


Рис. 13.

эффективная глубина скин-слоя $\delta_{эф} \approx (\delta^2 l)^{1/3}$ мала по сравнению с длиной свободного пробега l и в отсутствие магнитного поля существенны ⁴¹ углы $\varphi \approx (\delta/l)^{2/3}$, что может соответствовать $\varphi \approx 10^{-3}$.

В слабом магнитном поле ($r \gg l$) на высоких частотах существенны (рис. 13) углы $\varphi \approx (\delta_{эф}/r)^{2/3}$. Таким образом, исследование квантования орбит, показанных на рис. 13, представляет отнюдь не только академический интерес.

В квазиклассическом случае квантование уровней электронов, сталкивающихся с поверхностью в параллельном ей (для простоты рассуждений) магнитном поле, находится из тех же рассуждений, что и квантование в неограниченном образце (см. п. 1 гл. I), и приводит к аналогичному результату (см., например, ³⁾

$$S(\epsilon, p_z, P_z) = \frac{ne\hbar H}{c} \quad (13,1)$$

(в слабых полях разница между H и B не существенна), где S — площадь орбиты, пересекающей поверхность образца, в импульсном пространстве. Естественно, она зависит от сохраняющегося P_x , которое определяет положение орбиты ($y = (c/eH)(p_x - P_x)$), и определяется площадью сечения ($y \geq 0$):

$$\epsilon(p_x, p_y, p_z) = \epsilon, \quad p_z = \text{const}, \quad p_x \leq P_x. \quad (13,2)$$

Площадь орбиты в импульсном пространстве отличается от ее площади в координатном пространстве только множителем $(eH/c)^2$ (так как из $\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{vH}]$ следует $y = (cp_x/eH) + y_0$, $x = -(cp_y/eH) + x_0$). При малых φ , как ясно из рис. 13,

$$y = y_{\max} - \alpha x^2, \quad y_{\max} = x_{\max} \varphi, \quad \alpha = R^{-1} \quad (13,3)$$

(где R — радиус кривизны в точке $y = y_{\max}$), так что

$$y_{\max} = R\varphi^2, \quad x_{\max} = R\varphi.$$

Квантование площади орбиты дает квантование углов φ :

$$\frac{2}{3} R^2 \varphi^3 = \frac{nch}{eH}, \quad \varphi_n = \left(\frac{3}{2} \frac{nch}{eHR^2} \right)^{1/3}. \quad (13,4)$$

Поскольку R порядка ларморовского радиуса ($\varepsilon \approx \varepsilon_0$), то

$$\varphi_n \approx \left(\frac{eHh}{cp_0^2} n \right)^{1/3} \approx \left(\frac{h\Omega}{\varepsilon} \right)^{1/3} n^{1/3}. \quad (13,5)$$

Так как $x = v_x^0 t \approx v_0 t$, период обращения $T_\varphi = 2\Delta x_{\max}/v_x^0 = 2R\varphi_n (v_x^0)^{-1}$, и частоты Ω_n обращения по таким орбитам

$$\Omega_n(\varepsilon_0, p_z) = \frac{\pi v_x^0}{R\varphi_n} \approx \Omega \left(\frac{\varepsilon_0}{h\Omega} \right)^{1/3} n^{-1/3}. \quad (13,6)$$

Расстояние между соответствующими уровнями

$$\Delta\varepsilon_n = \hbar\Omega_n. \quad (13,7)$$

Естественная ширина уровней $\delta\varepsilon$ обусловливается «объемным» временем свободного пробега $(\delta\varepsilon)_\tau \approx \hbar/\tau$ и отклонением рассеяния от чисто зеркального. Если после каждого столкновения вероятность диффузного рассеяния есть q ($q \ll 1$), то число оборотов, приводящих к практически полному рассеянию, соответствует $(1-q)^n \approx 1/2$, $n \sim 1/q$ и $(\delta\varepsilon)_q \approx \hbar\Omega_n/q$. Таким образом, необходимые условия существования квазистационарных уровней (13,7)

$$q(\varphi_n) \ll 1, \quad \Omega\tau \left(\frac{\varepsilon_0}{h\Omega} \right)^{1/3} n^{-1/3} \gg 1, \quad (13,8)$$

что может быть выполнено в слабых полях H , если $q[(\omega_0\tau)^{-1/2}] \ll 1$. Для $n \approx 1$ уравнение (13,1) дает грубое приближение; поскольку такие n могут быть существенны, можно получить более точную формулу для уровней в интересующем нас случае (найденную впервые в ⁴²), используя разложение $\varepsilon = \varepsilon(p_x, p_y)$ вблизи точки $\varepsilon(p_x^0, p_y^0) = \varepsilon_0$, $v_y(p_x^0, p_y^0) = 0$, $\dot{v}_y^0 < 0$, или уравнение (13,3) с заменой

$$x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} = \frac{ich}{eH} \frac{\partial}{\partial y}.$$

В результате

$$\varepsilon_n = \hbar v_x^0(p_z) \left(\frac{eH}{\hbar} \right)^{2/3} [2R(p_z)]^{-1/3} a_n, \quad Ai(-a_n) = 0, \quad (13,9)$$

где $Ai(x)$ — функция Эри ($Ai'' - x Ai = 0$).]

В случае, когда ферми-поверхность — цилиндр, формула (13,7) или соответствующая точная формула (13,9) для $\varepsilon_n - \varepsilon_m$ непосредственно определяют частоты Ω возможного резонанса:

$$\omega = k\Omega_n, \quad \Omega \propto \omega^{3/2},$$

которые весьма малы, не зависят от глубины скин-слоя и пропорциональны $\omega^{3/2}$ ($\hbar\omega = \varepsilon_n - \varepsilon_m$ соответствует кратности ω классической частоте обращения Ω : $\omega = (n - m) \Omega$). Соответствующие магнитные поля ограничены как снизу (вторым из требований (13,8)), так и сверху, ибо с ростом H растет $\varphi \propto H^{1/3}$, а при достаточно больших φ отражение от поверхности становится существенно диффузным.

В общем случае произвольной ферми-поверхности, когда ε_n и $\hbar\Omega_{mn} = \varepsilon_n - \varepsilon_m$ зависят от p_z , резонанс, как и в классическом случае циклотронного резонанса, имеет место при $p_z = p_0$, когда частота Ω медленнее всего отходит от резонансной: $\Omega'(p_0) = 0$. Понятно, что зеркальность отражения при малых углах может в достаточно слабом магнитном поле сказаться и на классических эффектах, в частности, на циклотронном резонансе, который исчезает ⁴³ при $q = 1$. Для этого требуется, естественно, $q [(\delta/l)^{1/2}] \ll 1$.

Полуширина резонанса определяется естественной шириной уровней, и потому (см. выше)

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_n} \approx q(\varphi_n) + (\omega\tau)^{-1}. \quad (13,10)$$

Относительная высота резонанса существенно различна для цилиндрической и нецилиндрической ферми-поверхностей. Поскольку в последнем случае в резонансе участвуют только электроны в интервале $\Delta p_z/p_0 \approx (\Delta\omega/\omega)^{1/2}$ (так как $\Omega \propto (p_z - p_0)^2$), относительная высота резонанса будет соответственно меньше.

Важно также, помещается или не помещается резонансная орбита в скин-слое, так как от этого (т. е. от величины $(\hbar\Omega/\varepsilon_0)^{2/3} r/\delta$ зависят как эффективный путь в поле, так и относительное количество ускоряющихся в поле электронов. В квазиклассической области ($n \gg 1$) для импеданса может быть получена точная формула. При $\hbar\omega \ll T$ она выглядит особенно просто, так как при этом можно воспользоваться принципом соответствия, заменив при произвольном q в формулах (9) и (10) работы ⁴⁴ $1/\tau$ на $1/\tau + i\omega$, α — на ∞ , «классическое» интегрирование по φ — на «квантовомеханическое» суммирование по φ_n и внеся под знак интеграла $E(\mu)$. При $\hbar\omega \gg T$ вместо $\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}$ входит $\{n_0(\varepsilon_{k+h'}) - n_0(\varepsilon_k)\}/(\varepsilon_{k+h'} - \varepsilon_k)$, где k — набор квантовых чисел (n, p_z, P_x).

Значительный интерес представляет получение формы резонансной кривой при произвольном q (φ) (в квазиклассическом случае, учитывая сказанное выше, это нетрудно проделать). Сравнение эксперимента с теорией позволило бы получить информацию о виде $q(\varphi)$.

Действительно, переход от помещающихся в скин-слое резонансных орбит к нерезонансным, который скажется на виде кривой, позволит из соотношения $y_{\max} = R\varphi_n^2 \sim \delta_{\text{эфф}}$ (где $\delta_{\text{эфф}}$ выражается через импеданс) определить R (так как $R\varphi_n \propto R^{1/3}$; см. (13,4)). Резонансные частоты согласно (13,6) дадут v_x^0 . Зная R и v_x^0 , можно по зависимости ширины резонанса от n при $\omega\tau \gg q^{-1}$ найти $q(\varphi)$ (см. (13,10)).

Наклон магнитного поля ослабит резонанс при $p_z \neq 0$ (электроны будут уходить в глубь металла, совершая неперiodические столкновения с поверхностью металла). Однако наличие нового параметра — угла наклона поля — расширит получаемую информацию (особенно для резонанса при $p_z = 0$, когда нет дрейфа в глубь металла).

Аналогичные эффекты возможны и в сверхпроводниках ^{42,71}. В. Г. Песчанский ⁵¹ обратил внимание на существование классического резонанса в слабых полях в тонкой (толщина $d \ll l$) строго плоскопараллельной пластине на частотах, соответствующих $\sqrt{Rd}/v_0 = 2\pi n/\omega$, когда $H \propto$

$\propto (\omega/n)^2$. Природа резонансна ясна из рис. 14. Этот эффект можно также использовать для определения $q(\varphi)$, так как резонанс имеет полуширину $[\gamma + q(1/2\sqrt{R/d})]$. Для нахождения $q(\varphi)$ пригодны, естественно, и другие эффекты, чувствительные к углу столкновения электронов с поверхностью. Поиски и исследование этих эффектов, представляющих значительный интерес, сейчас, в сущности, только начинаются.

Описанные в этом разделе резонансные осцилляции были открыты Хайкиным⁴⁵ и наблюдались затем Кохом и Кипом⁴⁶ и Кохом и Куо⁴⁷. Первое классическое объяснение, связывающее осцилляции с электронами, не сталкивающимися с поверхностью, было предложено в работе⁴⁸. Хайкин⁴⁸ указал на определяющую роль зеркально отраженных от поверхности металла электронов; Ван-Гельдер⁴⁹ заметил чисто квантовый характер осцилляций и получил правильную частотную зависимость их периода; в работе⁴² была вскрыта резонансная природа осцилляций



Рис. 14.

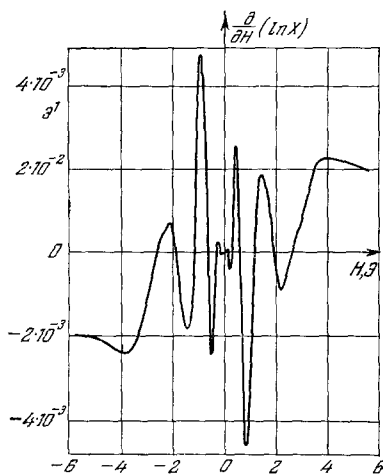


Рис. 15.

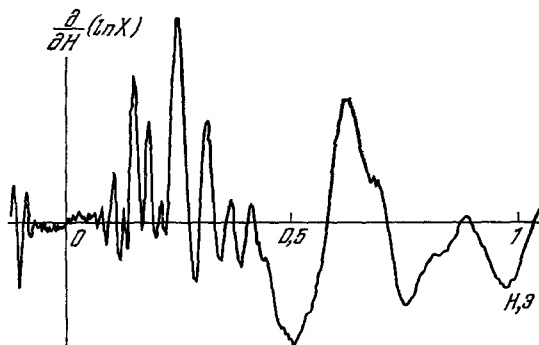


Рис. 16.

и предложена качественная их теория; в⁵⁶ дана количественная их теория; в⁵⁷ дан квазиклассический расчет поверхностных уровней, проведено экспериментальное исследование осцилляций на висмуте и проведено сравнение с теорией. Подробный обзор теоретических и экспериментальных работ по диамагнитным поверхностным уровням дан в работе⁵⁸.

На рис. 15 приведены результаты первого экспериментального наблюдения⁴⁵ поверхностных осцилляций на олове при температуре $T = 3,8^\circ \text{K}$ на частоте $\omega = 9,4 \text{ Гц}$ ($\mathbf{H} \parallel C_4 \perp \mathbf{N} \parallel C_2$, $\mathbf{J} \parallel C_2$); рис. 16 показывает детальную картину осцилляций, наблюдавшихся⁴⁸ на висмуте ($T = 1,7^\circ \text{K}$, $\omega = 9,7 \text{ Гц}$, $\mathbf{H} \parallel C_1 \perp \mathbf{N} \parallel C_3$). В обоих экспериментах определялась $\frac{\partial}{\partial H}(\ln X)$ в зависимости от H (X — мнимая часть поверхностного импеданса).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **78** (3), 411 (1962).
2. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **87** (3), 389 (1965).
3. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **69** (3), 419 (1959).
4. Ю. А. Бычков, ЖЭТФ **39**, 1401 (1960).
5. И. М. Лифшиц, А. М. Косевич, ЖЭТФ **29**, 730 (1955); **33**, 88 (1957); J. Phys. Chem. Sol. **4**, 11 (1958).
6. а) Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **30**, 1059 (1956); **35**, 97 (1958). б) Г. Е. Зильберман, ЖЭТФ **34**, 748 (1958). в) Г. Е. Зильберман, ЖЭТФ **32**, 296 (1957); **34**, 515 (1958).
7. D. Shoenberg, Phil. Trans. Roy. Soc. (London) **A255**, 85 (1962); D. Shoenberg, I. I. Vuillemin, Труды 10-й Международной конференции по физике низких температур (Москва, 1966), т. 3, М., Изд. ВИНТИ, 1967, стр. 67.
8. A. V. Pirard, Proc. Roy. Soc. (London) **A272**, 192 (1963).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, § 30, М., Физматгиз, 1959.
10. J. H. Condon, Phys. Rev. **145**, 526 (1966).
11. а) И. А. Привороцкий, Письма ЖЭТФ **5**, 280 (1967); ЖЭТФ **53**, 1755 (1967). б) И. А. Привороцкий, М. Я. Азбель, ЖЭТФ **50**, 388 (1969).
12. М. Я. Азбель, Письма ЖЭТФ **5**, 282 (1967); ЖЭТФ **53**, 1751 (1967).
13. J. J. Quinn, J. Phys. Chem. Solids **24**, 933 (1963); Phys. Rev. Lett. **16**, 731 (1966).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., «Наука», 1964.
15. М. Я. Азбель, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **49**, 571 (1965).
16. А. М. Косевич, ЖЭТФ **35**, 738 (1958).
17. М. Я. Азбель, ЖЭТФ **53**, 2131 (1967).
18. Ю. А. Бычков, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **41**, 1592 (1961).
19. М. Я. Азбель, ЖЭТФ **46**, 929 (1964); ДАН СССР **159**, 703 (1964).
20. М. Я. Азбель, ЖЭТФ **34**, 969 (1958).
21. Б. Давыдов, И. Померанчук, ЖЭТФ **9**, 1234 (1939).
22. М. Я. Азбель, Н. Б. Брандт, ЖЭТФ **48**, 1206 (1965).
23. С. Я. Рахманов, М. Я. Азбель, ФТТ **10**, 1650 (1968).
24. Р. Г. Архипов, ЖЭТФ **43**, 349 (1962).
25. Ю. Б. Румер, ЖЭТФ **18**, 1081 (1948).
26. М. Я. Азбель, Е. Г. Скроцкая, ЖЭТФ **47**, 1958 (1964).
27. М. Я. Азбель, ЖЭТФ **34**, 969, 1158 (1958).
28. М. Я. Азбель, Г. А. Бегиашвили, Письма ЖЭТФ **3**, 201 (1966).
29. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., «Наука», 1964.
30. М. Я. Азбель, ЖЭТФ **44**, 983 (1963).
31. а) М. Я. Азбель, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **52**, 1003 (1967). б) В. Г. Песчанский, М. Я. Азбель, ЖЭТФ **55** (11), 1980 (1968).
32. E. H. Sondheimer, Phys. Rev. **80**, 401 (1950).
33. В. Л. Гуревич, ЖЭТФ **35**, 668 (1958).
34. М. Я. Азбель, Л. Б. Дубовский, Письма ЖЭТФ **5**, 414 (1967).
35. E. A. Kaner, V. G. Skobov, Phys. Lett. **25A**, 105 (1967).
36. а) И. М. Лифшиц, ЖЭТФ **30**, 814 (1956); **32**, 1509 (1957). б) Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М., Физматгиз, 1963.
37. E. N. Adams, T. D. Holstein, J. Phys. Chem. Solids **4**, 11 (1958).
38. А. М. Косевич, В. В. Андреев, ЖЭТФ **38**, 882 (1960); **43** (9), 1060 (1962).
39. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, М., Гостехиздат, 1946; Н. Н. Боголюбов, К. П. Гуров, ЖЭТФ **17**, 614 (1947).
40. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **44** (6), 2309 (1963).
41. G. E. H. Reuter, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc. **195**, 336 (1949).
42. Tsu-Wei Nee, R. E. Prange, Phys. Rev. Lett. **25A**, 582 (1967); Techn. Rept. No. 668 (1967).
43. Э. А. Канер, ЖЭТФ **33**, 1472 (1957).
44. М. Я. Азбель, ДАН СССР **99**, 519 (1954).
45. М. С. Хайкин, ЖЭТФ **39**, 212 (1960).
46. J. F. Koch, A. F. Kip, Proc. LT-9, Columbus, Ohio, 1964, vol. B., Plenum Press, N. Y., 1965, стр. 818.
47. J. F. Koch, C. S. Kuo, Phys. Rev. **143**, 470 (1965).
48. М. С. Хайкин, Письма ЖЭТФ **4**, 113 (1966).
49. A. P. van Gelder, Phys. Lett. **22**, 7 (1966).
50. Г. Е. Зильберман, ЖЭТФ **32**, 296; **33**, 387 (1957); **34**, 515 (1958).
51. В. Г. Песчанский, Письма ЖЭТФ **7** (12), 489 (1968).

52. Г. А. Зайцев, ЖЭТФ 45, 1267 (1963); Г. А. Зайцев, С. В. Степанова, В. И. Хоткевич, ЖЭТФ 48, 760 (1965).
53. Г. А. Зайцев, С. В. Степанова, В. И. Хоткевич, Тезисы 10-й Международной конференции по физике низких температур, Москва, 1966; Г. А. Зайцев, Диссертация (Харьков, 1965).
54. Г. А. Зайцев, С. В. Степанова, В. И. Хоткевич, Тезисы Международного совещания «Средняя длина свободного пробега электронов в металлах», Цюрих, 1968; Тезисы XV Всесоюзного совещания по физике низких температур, Тбилиси, 1968.
55. Ю. А. Богод, В. В. Еременко, Л. К. Чубовой, Phys. Status Solidi 28, K155 (1968); Ю. А. Богод, ЖЭТФ 56 (1), 32 (1966).
56. R. E. Prange, Tsu-Wei Nee, Phys. Rev. 168, 779 (1968); R. E. Prange, Phys. Rev. 171, 737 (1968); Э. А. Канер, Н. М. Макаров, И. М. Фукс, ЖЭТФ 55, 931 (1968); J. F. Koch, Tsu Wei Nee, R. E. Prange, Phys. Rev. 174, 758 (1968).
57. М. С. Хайкин, ЖЭТФ 55, 1696 (1968).
58. М. С. Хайкин, УФН 96 (3), 409 (1968).
59. Н. Б. Брандт, Е. А. Свистова, Г. Х. Табиева, Письма ЖЭТФ 4, 27 (1966); Н. Б. Брандт, Е. А. Свистова, Т. В. Горская, ЖЭТФ 53 (4), 1274 (1967).
60. Н. Б. Брандт, Е. А. Свистова, Р. Г. Валеев, Письма ЖЭТФ 6, 724 (1967); ЖЭТФ 55, 469 (1968).
61. Н. Б. Брандт, Е. А. Свистова, Ю. Г. Каширский, Л. В. Линько, Письма ЖЭТФ 7, 441 (1968).
62. Н. Б. Брандт, Е. А. Свистова, Ю. Г. Каширский, Л. В. Линько, ЖЭТФ 56 (1), 65 (1969).
63. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ 56 (4), 1391 (1969).
64. J. H. Condon, Phys. Rev. Lett. 21, 612 (1968).
65. И. А. Привороцкий, УФН 97 (3), 547 (1969).
66. D. Shoenberg, I. M. Templeton, Canad. J. Phys. 46, 1925 (1968).
67. М. Я. Азбель, С. Я. Рахманов, Письма ЖЭТФ 9 (4), 262 (1969).
68. М. Я. Азбель, С. Я. Рахманов, ЖЭТФ 57 (1), 295 (1969).
69. В. Я. Кравченко, Э. А. Рашба, ЖЭТФ 56 (5), 1713 (1969).
70. J. Bardeen, Phys. Rev. 71, 717 (1947); W. H. Brattain, Phys. Rev. 72, 345 (1947); В. Е. Лашкарев, В. И. Ляшенко, в сборнике, посвященном 70-летию А. Ф. Иоффе, М., Изд-во АН СССР, 1950, стр. 535.
71. P. Pincus, Phys. Rev. 158, 346 (1967); J. F. Koch, P. Pincus, Phys. Rev. Lett. 19, 1044 (1967); J. F. Koch, C. C. Kuo, Phys. Rev. 164, 618 (1967).