1969 г. Май *Том 98, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

538.1

ТЕОРИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ И РАССЕЯНИЯ СВЕТА МАГНИТНЫМИ КРИСТАЛЛАМИ *)

Тору Мория

I. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы появился ряд работ, посвященных изучению оптических явлений, связанных с возбуждениями магнонов, в частности, двухмагнонных взаимодействий [1, 2], магнонных боковых полос [3, 4], магнон-фононного поглощения [5, 6] и рассеяния света одним или двумя магнонами [7, 8] в некоторых антиферромагнетиках. Наиболее интересной особенностью этих измерений является то, что электрическая компонента поля излучения взаимодействует со спиновой системой более сильно, чем его магнитная компонента. Другими словами, электрические дипольные моменты, связанные со спинами, со спинами и фононами или со спинами и экситонами, вызывают поглощение излучения. Существует зависящая от спинов электрическая поляризуемость, которая приводит к возникновению рассеяния света спинами. То, что динамические свойства спиновой системы отражаются на электрических дипольных моментах и поляризуемостях, дает возможность изучать свойства спиновых систем, используя уже известные оптические методы.

В настоящей работе предполагается рассмотреть теорию поглощения и рассеяния света спиновой системой с учетом зависимости электрических дипольных моментов и поляризуемости от спинов. Для выявления симметрийной природы этих величин рассматривается симметрия кристалла и микроскопические выражения, полученные из теории возмущений. Предлагаемый метод позволяет обсудить относительный вклад различных микроскопических механизмов в двухмагнонное поглощение, одно- и двухмагнонное рассеяние и критическое рассеяние вблизи температуры Кюри, а также в процессы, связанные с магнонами и фононами, магнонами и орбитальными возбуждениями или экситонами.

II. ДВУХМАГНОННОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ

1. Зависящий от спина электрический дипольный момент

Спиновый гамильтониан системы, находящейся во внешнем электрическом поле **E**, должен учитывать энергию этого поля. Если при этом существуют члены, которые линейно зависят от **E**, то имеется

*) Tôru Moriya, Theory of Absorption and Scattering of Light by Magnetic Crystals, J. Appl. Phys. 39 (2), 1042 (1968). Перевод А. А. Аскоченского.

электрический дипольный момент $\mathbf{P}$, связанный со спинами:

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 - \mathbf{E}\mathbf{P},$$
$$\mathbf{P} = \sum_j \mathbf{P}_j + \sum_{j,l} \mathbf{P}_{jl} + \ldots, \tag{1}$$

где $\mathbf{P}_j$ — электрический дипольный момент, связанный со спином j-го иона, а $\mathbf{P}_{jl}$ — момент, связанный с парой спинов j-го и l-го ионов. Учитывая только квадратичные члены спиновых компонент, можно записать в общем виде

$$P_j^\alpha = \sum_{\beta,\gamma} K_j^{\alpha,\beta\gamma} S_{j\beta} S_{j\gamma},$$

$$P_{jl}^\alpha = \pi_{jl}{}^\alpha (\mathbf{S}_j\mathbf{S}_l) + \sum_{\beta\gamma} \Gamma_{jl}^{\alpha,\beta\gamma} \frac{(S_{j\beta}S_{l\gamma} + S_{j\gamma}S_{l\beta})}{2} + \sum_\beta d_{jl}^{\alpha,\beta} [\mathbf{S}_j\mathbf{S}_l]_\beta. \tag{2}$$

В приведенных выше выражениях индексы α, β и γ означали координаты x, y, z. Связанный с эффектом Штарка дипольный момент $\mathbf{P}_j$ стремится к нулю в случае, если j-е положение имеет центр инверсии. Из рассмотрения кристаллической симметрии окружения j-го иона и окружения пары j-го и l-го ионов получаются различные возможные формы тензоров K_j, $\boldsymbol{\pi}_{jl}$, Γ_{jl} и d_{jl}. Например, в случае расположения центра инверсии посредине линии, соединяющей j-й и l-й ионы, $\boldsymbol{\pi}_{jl}$ и Γ_{jl} стремятся к нулю. Однако тензор d_{jl} в общем случае не равен нулю.

Для примера рассмотрим фторид группы железа, имеющий кристаллическую структуру типа рутила. Воспользуемся системой координат, в которой ось z направлена вдоль [001], оси x и y — в направлениях [100] (или оси ξ и η — вдоль [110]). Легко видеть, что $P_j = 0$ вследствие того, что магнитный ион расположен в центре инверсии, а $\boldsymbol{\pi}_{jl}$ и Γ_{jl} равны нулю для пары эквивалентных ионов. Для пары соседних ионов, один из которых расположен в узле, а второй — в центре кристаллической ячейки, единственным элементом симметрии является зеркальная плоскость, проходящая через эти два иона и ось Z. Очевидно, что вектор $\boldsymbol{\pi}_{jl}$ параллелен этой зеркальной плоскости. Легко получить полное выражение для $\mathbf{P}_{jl}$. Как будет показано в следующих разделах, в выражении (2) для $\mathbf{P}_{jl}$ господствующее положение занимает член, содержащий $\boldsymbol{\pi}_{jl}$, если только он не равен нулю из соображений симметрии.

Рассматривая все классы кристаллической симметрии, можно сопоставить коэффициенты, которые входят в уравнение (2), для различных эквивалентных пар ионов.

2. Двухмагнонное поглощение [2, 9, 9а, 10]

Для беспримесного кристалла, используя выражение (1) для зависящего от спина электрического дипольного момента, тензор комплексной электрической поляризации можно подсчитать по формуле

$$\chi(\omega) = \int_0^\beta d\lambda \langle \exp(\lambda\mathscr{H}) \mathbf{P} \exp(-\lambda\mathscr{H}) \mathbf{P} \rangle -$$
$$- i\omega \int_0^\infty dt \exp(-i\omega t) \int_0^\beta d\lambda \langle \exp(\lambda\mathscr{H}) \mathbf{P} \exp(-\lambda\mathscr{H}) \mathbf{P}(t) \rangle, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{P}(t) = \exp\left(\frac{it\mathscr{H}}{\hbar}\right)\mathbf{P}\exp\left(-\frac{it\mathscr{H}}{\hbar}\right),$$

$$\langle A\rangle = \frac{Tr\,[\exp(-\beta\mathscr{H})\,A]}{Tr\exp(-\beta\mathscr{H})}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T},$$

$\mathscr{H}$ — спиновый гамильтониан изучаемой системы ($\mathbf{E} = 0$).

Для краткости обсудим случай простого двухподрешеточного ферромагнетика, предполагая, что в уравнении (2) существенны только те члены, которые содержат $\boldsymbol{\pi}_{jl}$. Мы полагаем, что $\boldsymbol{\pi}_{jl}$ стремится к нулю для любой пары ионов, принадлежащих одной решетке. Спиновый гамильтониан $\mathscr{H}$ и электрический дипольный момент $\mathbf{P}$ для низких температур можно выразить, используя элементы спин-волнового оператора. Электрический дипольный момент связывается с одновременным излучением (или поглощением) двух, относящихся к различным ветвям, магнонов с противоположно направленными $\mathbf{k}$-векторами. При этом процессе сохраняется не только общий момент (или волновой вектор), но и z-компонента общего спинового углового момента. Это требование надо считать необходимым, так как полный спин S_z коммутирует как с $\mathscr{H}$, так и с $\mathbf{P}$. Это условие исключает реализацию двухмагнонного поглощения в ферромагнетиках, однако оно всегда возможно в ферримагнетиках. Если принимается в расчет влияние спин-орбитального взаимодействия, иными словами, когда $\mathscr{H}$ содержит анизотропные члены и $\mathbf{P}$ берется в общем виде из уравнений (1) и (2), сохранение суммарной спиновой компоненты более не является строгим требованием. Однако при этом нельзя ожидать значительного эффекта, если только анизотропия не будет достаточно большой.

Коэффициент абсорбции при 0° К при одновременном возбуждении двух магнонов дается в виде

$$\left.\begin{aligned} \alpha(\omega) &= -\left(\frac{1}{\hbar}8\pi^2\omega S^2\right)\sum_k \boldsymbol{\pi}(\mathbf{k})\,\boldsymbol{\pi}(\mathbf{k})\,\delta(\omega - 2\omega_k) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\hbar}4\pi^2\omega S^2\right)\rho\left(\frac{\omega}{2}\right)\langle\pi(\mathbf{k})\,\boldsymbol{\pi}(\mathbf{k})\rangle_\omega, \\ \boldsymbol{\pi}(\mathbf{K}) &= \sum_j \boldsymbol{\pi}_{jl}\exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l)], \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $\rho(\omega)$ — плотность состояний на один уровень для магнонов, а $\langle\ldots\rangle_\omega$ означает усреднение величины по энергетической поверхности $\omega_k = \omega$. При наличии центра инверсии в положениях магнитных ионов имеем

$$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{k}) = -\boldsymbol{\pi}(-\mathbf{k}). \tag{5}$$

При рассмотрении уравнения (4) мы видим, что: 1) длинноволновое возбуждение двух магнонов очень слабое (см. уравнение (5)), а магноны с меньшей длиной волны возбуждены более сильно; 2) степень возбуждения определяется расположением $\mathbf{k}$ относительно кристаллических осей, поскольку в общем виде анизотропный вектор $\mathbf{k}$ зависит от $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{k})$; 3) плотность магнонных состояний отражается на форме анизотропии; можно исследовать сильные линии и крутизну излома с учетом большой плотности состояний вблизи границы зоны Бриллюэна и критических точек Ван-Хова на граничной поверхности; 4) тензор коэффициента поглощения, заданный уравнением (4), может быть достаточно анизотропным, т. е. интенсивность поглощения поляризованного света зависит от направления его поляризации.

Для примера обсудим антиферромагнитный фторид группы железа. Проведя подсчет $\boldsymbol{\pi}_{jl}$ для соседних пар, образованных ионами, один

из которых находится в узле, а другой — в центре ячейки, мы можем рассчитать π (**k**). Видно, что при поляризации света параллельно или перпендикулярно оси z наиболее сильно возбуждены магноны с **k** вблизи точки A ($\pm\pi/a$, $\pm\pi/a$, $\pm\pi/c$) или вблизи точки X ($\pm\pi/a$, 0, 0) и (0, $\pm\pi/a$, 0), т. е. только в критических точках. Детальный расчет формы кривой был проведен Алленом, Лаудоном и Ричардсом [2]. Результаты довольно хорошо совпадают с экспериментом. Недавно были опубликованы работы по экспериментальному наблюдению двухмагнонного поглощения в MnF_2, FeF_2, CoF_2 и $MnCO_3$ [9a]. У NiF_2 пик поглощения не наблюдался, хотя его и предсказывали вблизи 200—250 *см*$^{-1}$ [9, 9a]. Наблюдаемые двухмагнонные линии не сдвигаются при приложении внешнего магнитного поля. Это легко понять, так как два одновременно возбудившихся магнона принадлежат двум ветвям спиновых волн. Возбуждение уменьшает спин каждой из подрешеток на единицу, сохраняя энергию Зеемана. В случае NiF_2 ожидается, что частота поглощения линейно зависит от внешнего магнитного поля. Следовательно, это вещество является слабым ферромагнетиком с неколлинеарным расположением спинов [11, 9a].

3. Источники электрического дипольного момента, связанного с парой ионных спинов

Существует множество микроскопических механизмов, которые могут привести к возникновению дипольного момента, связанного с парой ионных спинов. Задача сводится к спиновому взаимодействию с внешним электрическим полем. Рассмотрение на основе теории возмущений приводит к случаям изотропного и анизотропного обменного взаимодействий. В качестве возмущений берем взаимодействие электрона со светом $\mathscr{H}_{eR}$, межъионное кулоновское взаимодействие $\mathscr{H}_C$ обменного и мультиполь-мультипольного типов и спин-орбитальное взаимодействие $\mathscr{H}_{SO}$.

Наиболее простой и, вероятно, в большинстве случаев наиболее важный механизм предложен в работе [12]. Он задается возмущением второго порядка, содержащим недиагональные члены обменной энергии и диэлектрический дипольный момент. Следовательно, этот механизм не включает спин-орбитальное взаимодействие. Суммарный электрический дипольный момент выражается в форме первых членов уравнения (2). Порядок величины этого вклада оценивается из соотношения

$$\pi \approx \frac{|(a \mid er \mid g)|\, J}{\Delta E\,(a \leftarrow g)}\,,$$

где $(a \mid er \mid g)$ — электрический дипольный матричный элемент, J — недиагональная обменная энергия, а $\Delta E\,(a \leftarrow g)$ — энергия возбуждения нечетного состояния. В MnF_2 и FeF_2 $\Delta E\,(a \leftarrow g) \approx 10^5$ *см*$^{-1}$; J может иметь тот же порядок, что и обычная обменная постоянная, или быть больше из-за вытянутости орбит возбужденного состояния. Таким образом, мы оценили $\pi \sim 10^{-5}$—10^{-4} а. е. как приемлемую величину для объяснения наблюдаемой интенсивности двухмагнонного поглощения в этих кристаллах. Можно подсчитать энергию переноса заряда между положительными и отрицательными ионами. Она может быть сравнима по порядку с величиной π, оцененной ранее [13].

В настоящее время трудно дать теоретическое объяснение направления π, определенного экспериментально.

Можно предложить другие механизмы, включающие спин-орбитальное взаимодействие [14]. Учет энергии спин-орбитального взаимодействия вносит вклад во второй и третий члены уравнения (2), в то время как энергия нечетного состояния спин-орбитального взаимодействия — в анти-

симметричные члены уравнения (2). Эти механизмы имеют более высокий порядок, чем рассмотренный выше. Следовательно, когда спин-орбитальная энергия значительно меньше, чем энергия возбуждения нечетного состояния ΔE ($e \leftarrow g$), можно ожидать, что анизотропные второй и третий члены в уравнении (2) окажутся меньше, чем изотропный первый член. Это возможно для MnF_2, где $\lambda/\Delta E$ меньше, чем 10^{-2}, и, вероятно, для FeF_2 ($\lambda/\Delta E \lesssim 10^{-1}$) и NiF_2 ($\lambda/\Delta E \lesssim 4\cdot 10^{-2}$). Рассматриваемая задача подобна случаю обычных сверхобменных взаимодействий изотропной и анизотропной природы. Анизотропные члены должны быть более существенны в CoF_2, так как в нем наблюдается наиболее сильное спин-орбитальное взаимодействие.

Приведенное выше утверждение, что в уравнении (2) преобладают члены, содержащие π, подкрепляется фактом, что наблюдаемые интенсивности двухмагнонного поглощения для MnF_2 и FeF_2 имеют один порядок [2]. При преобладании механизмов, включающих спин-орбитальное взаимодействие, интенсивности двухмагнонного поглощения в MnF_2 и FeF_2 должны были бы значительно отличаться вследствие различия порядка величин $\lambda/\Delta E$.

Экспериментально установленная величина области $\pi_{jl} = \pi(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l)$ не слишком мала [2]; $\pi(\mathbf{R}) \sim \exp(-\mathbf{R}/0{,}4a)$ (a — постоянная решетки вдоль оси x). Этот факт не является неожиданным, так как формула преобразования содержит высокоэнергетические возбужденные состояния, которые могли бы включать орбитали в твердых телах.

Механизмы, включающие фононы через магнитоупругое взаимодействие, изучались в работе [15].

4. Некоторые перспективы

Опубликованные экспериментальные результаты ограничены фторидами группы железа, хотя двухмагнонное взаимодействие может наблюдаться у широкого класса антиферромагнетиков и у всех ферримагнетиков.

В ферримагнетиках должны всегда существовать электрические дипольные моменты, связанные с парой ионных спинов. Следовательно, два иона, принадлежащие к различным подрешеткам, не эквивалентны. Экспериментальное изучение подобных двухмагнонных поглощений создает интересное поле для исследований в далекой инфракрасной и инфракрасной спектроскопии. Следует обратить внимание на возможность линейного штарк-эффекта для пары ионов с отличным от нуля π_{jl} и линейного сдвига спин-волновых частот при приложении электрического поля, если $\pi(0) \neq 0$ [9].

III. РАССЕЯНИЕ СВЕТА СПИНОВЫМИ СИСТЕМАМИ

1. Зависящая от спина электрическая поляризуемость и рассеяние света

Теория рассеяния света магнитными кристаллами развивалась Лаудоном [16], частично Эллиотом и Лаудоном [17], Шеном и Бломбергеном [18], Флёри, Порто и Лаудоном [8] и Морией [19]. В настоящей работе обсуждается подход, который позволяет использовать зависящую от спина электрическую поляризуемость [19]. Он естественно вытекает из метода, разобранного в предыдущей главе. Зависящая от спина электрическая поляризуемость для изменения волнового вектора $\mathbf{q}$ может быть записана

в виде

$$\alpha_q^{(\omega)} = V^{-1}\sum_j \alpha_j^{(\omega)} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{R}_j) + V^{-1}\sum_{j,l} \alpha_{jl}^{(\omega)} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{R}_j), \tag{6}$$

где

$$\alpha_j^{(\omega)} = \sum_\mu \alpha_{j\mu}(\omega) S_{j\mu} + \sum_{\mu,\nu} \alpha_{j\mu\nu}(\omega) S_{j\mu}S_{j\nu} + \ldots$$

и

$$\alpha_{jl}^{(\omega)} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_{jl,\mu\nu}(\omega) S_{j\mu}S_{l\nu} + \ldots$$

являются электрическими поляризуемостями, связанными с ионным спином и с парой спинов j-го и l-го ионов; V — объем кристалла. Здесь использовалось длинноволновое приближение. Если электрическое поле падающего излучения задается формулой $\mathbf{E}_0 \exp(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t)$, k-я фурье-компонента индуцированного электрического дипольного момента имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k(t) &= \alpha_{k-k_0}^{(\omega_0)}(t)\, \mathbf{E}_0 \exp\{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t)\}, \\ \alpha_q^{(\omega)}(t) &= \exp\left(\frac{it\mathscr{H}}{\hbar}\right) \alpha_q^{(\omega)} \exp\left(-\frac{it\mathscr{H}}{\hbar}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\mathscr{H}$ — спиновый гамильтониан рассматриваемой спиновой системы. В уравнении (7) подразумевается, что индуцированный момент модулируется относительно медленным движением спиновой системы, описываемой спиновым гамильтонианом. Это приближение аналогично адиабатическому приближению в теории комбинационного рассеяния волнами решетки.

Рассеиваемое излучение описывается как излучение электрического диполя, определяемого уравнением (7). Поток энергии рассеянного излучения с частотами $\omega \sim \omega + d\omega$ в телесный угол $d\Omega$ в направлении R дается формулой

$$d\Omega\, d\omega \left[\frac{\omega^4}{4(2\pi)^2 c^3}\right] \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(i\omega t) \langle \mathbf{P}_k^*(0)(1 - \mathbf{k}\mathbf{r})\mathbf{P}_k(t)\rangle, \tag{8}$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор рассеянного излучения, а $\mathbf{r} = \mathbf{R}/|\mathbf{R}|$. Используя уравнение (7), получим дифференциальный коэффициент поглощения в виде

$$\frac{d^2h}{d\Omega\, d\omega} = \frac{\omega_0\omega^3}{c^4}(2\pi)^{-1} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\{i(\omega - \omega_0)t\} \langle \mathbf{e}_0 \alpha_{-k+k_0}^{(\omega_0)}(0)(1 - \mathbf{r}\mathbf{r})\, \alpha_{k-k_0}^{(\omega_0)}(t)\, \mathbf{e}_0\rangle, \tag{9}$$

где $\mathbf{e}_0$ — единичный вектор, параллельный вектору электрического поля падающего излучения. Энергии потоков рассеиваемого и падающего излучений относятся как ω/ω_0. Это обычно является хорошим приближением для замены $\alpha_q^{(\omega_0)}$ на однородную поляризуемость ($\mathbf{q} = 0$), за исключением случая сильной зависимости $\mathbf{q}$ от $\alpha_\mathbf{q}$ вблизи $\mathbf{q} = 0$, что реализуется в случае критического рассеяния.

2. Симметрийное рассмотрение

Поскольку зависящая от спина поляризуемость $\alpha^{(\omega)}$ должна преобразовываться как тензор поляризуемости, ее независимые компоненты даются как коэффициенты полиномов спиновых компонент, квадратичных относительно электрического поля и инвариантных относительно кристаллических симметрийных операций и компонент электрического поля.

Для $\alpha_j^{(\omega)}$ рассматривается точечная симметрия относительно j-го иона, а для $\alpha_{jl}^{(\omega)}$ — кристаллическая симметрия относительно пары j-го и l-го ионов. Поляризуемость $\alpha^{(\omega)}$ должна удовлетворять симметрийным требованиям для основных кинетических коэффициентов или тензора полных проводимостей.

В присутствии внешнего магнитного поля тензор $\alpha_j^{\mu}(\omega)$ должен быть антисимметричным, а $\alpha_j^{\mu\nu}$ и $\alpha_{jl}^{\mu\nu}$ — симметричными. В предположении отсутствия поглощения получаем, что $\alpha^{(\omega)}$ — эрмитовский тензор. Там, где это не приведет к недоразумениям, мы будем обозначать $\alpha_j^{(\omega)}$ и $\alpha_{jl}^{(\omega)}$ сокращенно через α_j и α_{jl}.

а) Поляризуемость α_{jl}, связанная с одним ионным спином. В соответствии с изложенными выше замечаниями следует, что линейный по спиновым компонентам первый член в уравнении (6) имеет гиротропную природу и связан с вращением Фарадея [18, 22]. Из-за требований симметрии для полной проводимости этот член должен стремиться к нулю при $\omega \to 0$. Например, α_j для узлов в фториде группы железа дается в виде

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ia_4 \\ 0 & -ia_4 & 0 \end{pmatrix} S_\xi + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -ia_5 \\ 0 & 0 & 0 \\ ia_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} S_\eta + \begin{pmatrix} 0 & ia_6 & 0 \\ -ia_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S_z. \quad (10)$$

Здесь мы пренебрегли нелинейными членами спиновых компонент. Полное выражение с квадратичными членами дано в работе [19]. Выражение для α_l объемноцентрированных положений получается перестановкой индексов 4 и 5 в приведенном выше выражении (10).

б) Поляризуемость α_{jl}, связанная с парой ионных спинов. Для краткости в спиновых компонентах рассматриваются только билинейные члены. Основное выражение для компонент тензора дается в форме

$$\alpha_{jl}^{\mu\nu} = P_{jl}^{\mu\nu}(\mathbf{S}_j\mathbf{S}_l) + \sum_{\rho,\tau} Q_{jl,\rho\tau}^{\mu,\nu} S_{j\rho} S_{l\tau} + \sum_{\rho,\tau} R_{jl,\rho\tau}^{\mu\nu} S_{j\rho} S_{l\tau}; \quad (11)$$

здесь все члены симметричны относительно индексов μ и ν; Q_{jl} и R_{jl} — соответственно симметричный и антисимметричный тензоры относительно взаимодействия двух ионных спинов (или индексов ρ и τ), а $Q_{lj}^{\mu\nu}$ стремится к нулю ($\sum_\rho Q_{jl,\rho\rho}^{\mu\nu} = 0$). Если центр инверсии расположен посредине между двумя ионами, антисимметричные члены, содержащие R_{jl}, стремятся к нулю. Как будет показано позже в этой главе, в уравнении (11) доминирует первый член.

Для примера приводится выражение P_{jl} для восьми соседних пар ионов во фториде группы железа (один ион каждой пары расположен в узле, другой — в центре объема):

$$\left.\begin{matrix} P_{01} = P_{0-1} \\ P_{03} = P_{0-3} \end{matrix}\right\} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \pm p_5 \\ 0 & p_2 & 0 \\ \pm p_5 & 0 & p_3 \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{matrix} p_{02} = p_{0-2} \\ p_{04} = p_{0-4} \end{matrix}\right\} = \begin{pmatrix} p_2 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \pm p_5 \\ 0 & \pm p_5 & p_3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Индексы ± 1, ± 2, ± 3 и ± 4 соответствуют координатам $\pm(1/2, 1/2, 1/2)$, $\pm(1/2, -1/2, 1/2)$, $\pm(1/2, 1/2, -1/2)$ и $\pm(-1/2, 1/2, 1/2)$. Полное выражение для уравнения (11) дается в работе [19].

3. Происхождение зависящей от спина электрической поляризуемости

Понятие электронной поляризуемости, связанной с ионными спинами, вытекает из квантовомеханической теории возмущения. Рассеяние света, вызванное спиновой системой, задается членами ряда, полученного из теории возмущений, которые квадратичны в $\mathscr{H}_{eR}$ и линейны в $\mathscr{H}_C$ и $\mathscr{H}_{SO}$. В дальнейшем мы обсудим выражения для этих членов в соответствии с возрастанием порядков.

а) Возмущение третьего порядка. В антисимметричную часть электрической поляризуемости, связанной с единичным ионом, дают вклад члены третьего порядка в ряде теории возмущений, которые линейны в $\mathscr{H}_{SO}$ (уравнение (10)). В то же время члены, линейные в $\mathscr{H}_C$, дают вклад в симметричную часть поляризуемости, связанной с парой ионных спинов (первый член в уравнении (11)). Это легко показать в предположении, что все матричные элементы для **p** и **l** могут быть взяты мнимыми, а элементы для $\mathscr{H}_C$ — вещественными. Полное выражение получено в работе [19]. Порядок величины этих членов может быть оценен по соотношениям

$$\alpha_m \approx \frac{\Theta\,|(g\,|\,er\,|\,a)|^2\,\lambda}{\Delta E_0 \Delta \overline{E}}\,,$$
$$p_m \approx \left(\frac{J}{\lambda}\right)\Theta^{-1} a_m, \tag{13}$$

где $\Delta E_0 \approx E_a - E_g - \hbar\omega_0$ — энергия возмущения нечетного состояния с вычетом энергии фотона, ΔE меньше $\Delta \overline{E}_0$ и энергии возмущения четного состояния, а Θ — фактор редукции, стремящийся к нулю, если $\omega_0 \to 0$. Если энергия фотона $\hbar\omega_0$ меньше энергии возмущения нечетного состояния, то

$$\Theta \approx \frac{\hbar\omega_0}{\Delta E_0 + 2\hbar\omega_0}\,. \tag{14}$$

Роль фактора Θ особенно важна в случае, когда удовлетворяется неравенство $\Delta E_0 \gg \hbar\omega_0$. Для переходов металлических ионов, где наинизшая энергия возмущения нечетного состояния порядка 10^5 *см*$^{-1}$, $\Theta \approx 1/6$ при энергии света, равной $2\cdot 10^4$ *см*$^{-1}$. Переход электронов между различными ионами можно также рассматривать как возбуждения нечетного состояния. Хотя энергия возбуждения в этих процессах меньше (6—7 *эв* в фторидах), матричные элементы для **p** также будут меньше. Для $\hbar\omega_0 \approx 2\cdot 10^4$ *см*$^{-1}$ имеем $\Theta \approx 1/4$.

б) Возмущение более высокого порядка. Поскольку ряды, полученные из теории возмущений, представляют собой разложение по степеням $(\lambda/\Delta E)$ и $(J/\Delta E)$, члены более высоких порядков менее важны, когда параметры разложения малы, как это бывает в обычных случаях. Детали вопроса разобраны в работе [19]. Однако здесь мы отметим, что члены четвертого порядка, билинейные в $\mathscr{H}_C$ и $\mathscr{H}_{SO}$, вносят основной вклад в R_{jl}, а члены пятого порядка, линейные в $\mathscr{H}_C$ и квадратичные в $\mathscr{H}_{SO}$, увеличивают Q_{jl} в уравнении (11).

4. Рассеяние света спиновыми волнами

При низких температурах зависящая от спина поляризуемость может быть выражена через элементы спин-волновых операторов, и в результате мы получим одномагнонные процессы, двухмагнонные процессы и т. д. В подобных процессах рассеяния сохраняется полный момент.

Хотя момент фотона пренебрежимо мал (длинноволновое приближение), в одномагнонных процессах рассеяния рассеивают свет только магноны с $\mathbf{k} = 0$, а два магнона могут одновременно рассеивать свет при наличии противоположных компонент ($\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}$). Хотя расчет интенсивности рассеяния простой, но он должен проводиться для каждого объекта. Здесь мы обсудим случай антиферромагнитных фторидов группы железа.

а) Одномагнонные процессы. Запишем не равные нулю элементы тензора поляризуемости, связанной с одномагнонными процессами, для случая фторидов группы железа в виде

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{matrix}\alpha_q^{\eta z}\\ \alpha_q^{z\xi}\end{matrix}\right\} = \pm i\,(a_+ S_{q\xi} + a_- S'_{q\xi}),\\ &\left.\begin{matrix}\alpha_q^{z\xi}\\ \alpha_q^{\xi z}\end{matrix}\right\} = \pm i\,(a_+ S_{q\eta} - a_- S'_{q\eta}),\\ &\qquad a_\pm = \frac{1}{2}(a_4 \pm a_5),\\ &\left.\begin{matrix}\mathbf{S}_q\\ \mathbf{S}'_q\end{matrix}\right\} = \mathbf{S}_{1q} \pm \mathbf{S}_{2q}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $\mathbf{S}_{1q}$ и $\mathbf{S}_{2q}$ есть $\mathbf{q}$-фурье-компоненты спинов в первой и второй подрешетках. В случае, когда падающее излучение поляризовано вдоль направления η, свет, рассеивающийся в направлении ξ, поляризован вдоль направления z. Дифференциальное поглощение получается из уравнений (9) и (15), при использовании флуктуационно-диссипативной теоремы, в виде

$$\frac{d^2h}{d\Omega\, d\omega} = \frac{\omega_0\omega^3}{c^4}\frac{\hbar}{\pi g^2\mu_B^2}\,[\exp(\beta\hbar\nu) - 1]^{-1}\times$$

$$\times\,[a_+^2\chi''_{\xi\xi}(\mathbf{q},\nu) + a_-^2\bar{\chi}''_{\xi\xi}(\mathbf{q},\nu)] \qquad (\nu = \omega - \omega_0), \tag{16}$$

где $\chi''(\mathbf{q},\nu)$ и $\bar{\chi}''(\mathbf{q},\nu)$ — мнимые части волнового вектора и частотно-зависимых магнитных восприимчивостей для однородного и быстроменяющихся полей. Стоксову и антистоксову процессам соответствуют отрицательная и положительная величины ν. Проблема сводится к расчету частотно-зависимых восприимчивостей, которые могут быть выведены с помощью различных приближенных методов, например в приближении молекулярного поля [19]. Во всяком случае, мы видим из уравнения (16) и температурной зависимости χ'' и $\bar{\chi}''$, что интенсивность рассеяния уменьшается при увеличении температуры. Это утверждение удовлетворительно согласуется с экспериментом. Грубо оцененный теоретический порядок величины коэффициентов поглощения для FeF_2 равен 10^{-12}—10^{-10}. Меняющийся во времени фактор $\Theta \approx 1/30$ оценивался по величине энергии возбуждения нечетного состояния, равной 10^5 *см*$^{-1}$, и энергии фотона, равной $2\cdot10^4$ *см*$^{-1}$. Рассчитанные величины дают удовлетворительное согласие с полученными экспериментально [7]. Для MnF_2 необходимо ввести множитель 10^{-2} — 10^{-4}.

Одномагнонное рассеяние может наблюдаться для широкого круга магнитоупорядоченных кристаллов. Правила их отбора легко вытекают из теоретико-группового рассмотрения магнонных типов колебаний [17] или получаются указанным в данной работе путем. Можно рассмотреть интересную возможность изучения рассеяния света на магнонах в спиральных антиферромагнетиках. В ферромагнетиках обычно имеются только акустические типы колебаний спиновых волн. В связи с этим может представить интерес изучение бриллюэновского рассеяния [16]. Общая формула для интенсивности рассеянного света, приведенная

в данной работе, использована для конечных температур. Температурная зависимость интенсивности рассеяния света спиновой системой может быть рассчитана с помощью различных приближенных методов.

б) Двухмагнонные процессы[8, 19]. Основной вклад в двухмагнонные процессы дает первый член уравнения (11), билинейный по ионным спинам. С помощью спин-волнового оператора рассматриваемая часть поляризуемости может быть выражена в форме

$$\alpha = \frac{S}{2} \sum_{k} \{P(\mathbf{k})\, a_k b_{-k} + \text{э. с.}\},$$
$$P(\mathbf{k}) = \sum_{j} P_{jl} \exp\{i\mathbf{k}(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l)\}. \tag{17}$$

В случае фторидов группы железа из рассчитанного $P(\mathbf{k})$ можно видеть, что компоненты $\xi\xi$ и $\eta\eta$ тензора рассеяния связаны с магнонами главным образом вблизи Г-точки или M-точек $(\pm\pi/a,\ \pm\pi/a,\ 0)$, zz-компонента — вблизи Г-точки, а ξz- и ηz-компоненты — вблизи R-точек $(0,\ \pm\pi/a,\ \pm\pi/c)$, $(\pm\pi/a,\ 0,\ \pm\pi/c)$. Это утверждение совпадает с наблюдениями[7, 8].

Флёри, Порто и Лаудон[8] провели численный расчет интенсивности рассеянного света в зависимости от частоты и получили удовлетворительное согласие со своим экспериментом на MnF_2. Интересно отметить, что правила отбора в $\mathbf{k}$-пространстве двухмагнонного рассеяния значительно отличаются от правил для двухмагнонного поглощения. Относительная интенсивность двух- и одномагнонного рассеяния описывается формулой[19]

$$\frac{(4Sp_m)^2 \langle \gamma_{3k}^2 (1+d)^2 [(1+d)^2 - \gamma_{0k}^2]^{-1} \rangle}{a_+^2 S \left(\frac{K}{4Nz_1J_1S^2}\right)^{1/2} + a_-^2 S \left(\frac{Nz_1J_1S^2}{4K}\right)^{1/2}}, \qquad d = \frac{2D}{8J_1},$$

где D — константа одноосной анизотропии, а d — обычно малая величина. В FeF_2, где $(Nz_1J_1S^2/4K)^{1/2} \approx 1$, d порядка 0,1—1, хотя в MnF_2, где $(K/4Nz_1J_1S^2)^{1/2} \sim 0{,}07$, эта величина может быть равна 1,5—15, поскольку можно ожидать, что a_- на порядок меньше, чем a_+.

Интенсивность двухмагнонного рассеяния зависит от магнитного упорядочения. Наибольший член электронной поляризуемости с P_{jl} в уравнении (11) вносит значительный вклад в двухмагнонное рассеяние в антиферромагнетиках и ферримагнетиках. Это не осуществляется в ферромагнетиках, за исключением случая, когда энергия магнитной анизотропии сравнима с обменной энергией.

5. Критическое рассеяние

Ранее было показано, что рассеяние света магнонами при повышении температуры становится слабым, а линии уширяются, выше точки Кюри парамагнитное рассеяние света слабое и размытое. Однако вблизи T_C ожидается критическое рассеяние света рассматриваемой спиновой системой. Для обсуждения можно использовать общую формулу (9), данную в начале этой главы.

а) Ферромагнетики. Допустим для краткости, что в элементарной ячейке находится только один магнитный ион, и рассмотрим действие электронной поляризуемости, связанной со спином одного иона, которая, как предполагается, описывается уравнением (10).

В качестве примера рассмотрим падающий свет, поляризованный в направлении ξ $(\mathbf{E}_0 \parallel \xi)$, с волновым вектором $\mathbf{k}_0$, параллельным оси η. Тогда свет, рассеиваемый в направлении z, поляризован в направле-

нии η, а свет, рассеиваемый в направлении ξ, имеет эллиптическую поляризацию. Нами будет обсуждаться интенсивность рассеяния для волнового вектора рассеиваемого света $\mathbf{k}$, лежащего в плоскости η, z. Обозначим угол рассеяния через θ, вектор рассеяния $\mathbf{q}$ зададим соотношением $|\mathbf{q}| \approx \approx 2k_0 \sin(\theta/2)$, а дифференциальный коэффициент затухания рассеиваемого света, поляризованного в направлении η ($\mathbf{E} \parallel \eta$),— формулой

$$\left(\frac{d^2h}{d\Omega\, d\omega}\right)_{\mathbf{E}\parallel\eta} = \frac{\omega_0\omega^3}{2\pi c^4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \exp\{i(\omega-\omega_0)t\}\, a_6^2 \sin^2\theta \langle S_{-qz} S_{qz}(t)\rangle =$$

$$= \frac{1}{\nu} \frac{\omega_0\omega^3}{c^4} \frac{\hbar}{\pi g^2\mu_B^2} \frac{\nu}{\exp(\beta\hbar\nu)-1} a_6^2 \sin^2\theta \cdot \chi''_{zz}(\mathbf{q}, \nu). \qquad (18)$$

Выражение для случая, когда $\mathbf{E} \parallel z$, может быть получено заменой $a_6^2 \sin^2\theta$ и z в предыдущем выражении на $a_5^2 \cos^2\theta$ и η. Проинтегрировав выражение (18) по ω, используя квазистатическое приближение, мы приходим к

$$\left(\frac{dh}{d\Omega}\right)_{\mathbf{E}\parallel\eta} \approx \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^4 \frac{k_B T}{g^2\mu_B^2} a_6^2 \sin^2\theta \cdot \chi_{zz}(\mathbf{q}, 0) =$$

$$= \frac{A(\omega_0)\sin^2\theta \cdot \chi_{zz}(\mathbf{q}, 0)}{C/T} \text{ и т. д.,} \qquad (19)$$

где C — постоянная Кюри. Эти выражения могут быть использованы для анализа критического рассеяния света ферромагнетиками. В соответствии с приближением молекулярного поля для изотропного ферромагнетика получается

$$\chi(\mathbf{q}, 0) = \frac{C}{T}\left\{\frac{T-T_C}{T_C} + \gamma q^2 + \zeta q^4 + \ldots\right\}^{-1}. \qquad (20)$$

Выражения (19) и (20) качественно представляют поведение критического рассеяния для ферромагнетиков.

Численная величина $A(\omega)$ для типичных диэлектрических ферромагнетиков $CrBr_3$ и EuO оценивалась по данным фарадеевского вращения *):

EuO: $A \sim 10^{-7}$ для $\lambda = 7750$ Å,

$CrBr_3$: $A \sim 5 \cdot 10^{-7}$ для $\lambda = 5000$ Å.

б) Антиферромагнетики. В антиферромагнетиках не всегда возможно наблюдать критическое рассеяние, поскольку вектор $\mathbf{q}$ обычно мал и далек от антиферромагнитного волнового вектора $\mathbf{Q}_0$. В случае, если в элементарной кристаллической ячейке находится более одного ферромагнитного иона, что справедливо для фторидов группы железа, появляется возможность осуществления критического рассеяния. Для примера рассмотрим случай фторидов группы железа. Выражение для рассеяния получается из общей формулы (9), а электронная поляризуемость, связанная с одноионным спином, дается выражением (10). Как обсуждалось в гл. III, п. 2, а, a_6 одинакова для всех позиций ионов, в то время как a_4 и a_5 взаимно заменяются в двух различных позициях. Из этого следует, что критическое рассеяние может наблюдаться для $z\xi$- и ηz-компонент тензора рассеяния и не может — для $\xi\eta$-компоненты. Здесь рассматривается случай падающего света с $\mathbf{k}_0$, параллельным оси z и поляризованным в направлении η. Рассеиваемый свет вблизи T_C поляризован

*) Автор признателен Диллону (J. F. Dillon) за сообщение магнитооптических данных и за обсуждение явления критического рассеяния света магнитными кристаллами.

в основном в направлении z, а его интенсивность определяется из выражения (16). В критической области важен только член, содержащий $\overline{\chi}(\mathbf{q}, \nu)$. Поэтому

$$\frac{dh}{d\Omega} = \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^4 a_-^2 \frac{k_B T_C}{g^2 \mu_B^2} \sin^2\theta \cdot \overline{\chi}_{\xi\xi}(\mathbf{q}, 0), \tag{21}$$

где θ — угол рассеяния. Эффект появления критических флуктуаций малой $\mathbf{q}$-компоненты в выражении $\overline{\chi}(\mathbf{q}, \nu)\,\overline{\chi}(\mathbf{q}, 0)$ в приближении молекулярного поля описывается выражением, подобным (20). Рассеяние при другой геометрии может быть рассмотрено тем же путем. При сравнении выражений (21) и (16) можно ожидать, что в FeF_2, в котором одномагнонное рассеяние имеет достаточную интенсивность, будет наблюдаться критическое рассеяние.

IV. МАГНОН-ФОНОННОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ

Разработанный в предыдущей главе метод может быть применен к случаю индуцированного магнон-фононного электрического перехода. Спиновый гамильтониан включает энергию внешнего электрического поля, заданную в форме ионных смещений. Эти члены, билинейные по $\mathbf{E}$ и смещению, представляют спин- и фонон-зависимые электрические дипольные моменты. Они повышают поглощение светового потока излучения при одновременном возбуждении двух магнонов и фонона. Это особенно важно в случае, когда в кристаллах существует независящий от спина электрический дипольный момент. Этот механизм впервые был разобран Мицуно и Коидэ [23] для объяснения боковой полосы инфракрасного поглощения в NiO [5]. Позже Цушида [6] наблюдал аналогичное поглощение в $KNiF_3$ и интерпретировал его согласно этой теории.

Так как в этом механизме участвуют два магнона и фонон, расчет по сравнению со случаем двухмагнонного поглощения значительно усложняется. Используя модель Эйнштейна для колебаний решетки и приближение молекулярного поля для спиновой системы, Мицуно и Коидэ упростили проблему, описав качественно коротковолновые компоненты для фононов и магнонов. До сих пор не разработана детально теория, включающая выражение для магнонов. Не изучались микроскопические механизмы констант взаимодействия: они могут быть получены распространением рассмотренной в предыдущей главе теории на случай деформированной решетки. Магнон-фононное рассеяние света может обсуждаться при использовании поляризуемостей, зависящих от спинов и фононов.

V. БОКОВЫЕ МАГНОННЫЕ ПОЛОСЫ

Магнонные боковые полосы, возникающие при экситон-магнонном поглощении, могут рассматриваться с помощью развития теории, приведенной в гл. II. При этом учитываются орбитальные возмущения, т. е. используются зависящие от спина электрические дипольные моменты перехода. Простейший механизм, приводящий к повышению этого перехода, задается электрическим дипольным моментом, связанным с парой ионов, $j_{-\text{м}}$ и $l_{-\text{м}}$, в виде

$$\mathbf{P}_{jl} = \sum_{a,\,b} \boldsymbol{\pi}_{jl}(b \leftarrow a)\,[\mathbf{S}_j(b \leftarrow a)\,\mathbf{S}_l] \tag{22}$$

с

$$\mathbf{S}_j(b \leftarrow a) = \sum_{m,\,m'} c^*_{jbm'} c_{jam}\,(m' \,|\, \mathbf{S} \,|\, m),$$

где индексами a, b отмечаются орбитальные состояния, а индексами

m, m' — спиновые состояния; c^*_{jam} и c_{jam} — операторы рождения и уничтожения для a,m-состояний j-го атома. Симметрийное рассмотрение, как и в предыдущей главе, приводит к более общему выражению для момента перехода. Однако это усложнит рассмотрение, так как приходится учитывать состояние с возбужденной орбитой. До настоящего времени дипольный момент в форме (22) использовался только для объяснения магнонных боковых полос. В теории возмущений, как обсуждалось в предыдущей главе, этот вклад вносят процессы второго (наинизшего) порядка, содержащие недиагональные обменные интегралы [12]. Члены более высоких порядков, содержащие спин-орбитальное взаимодействие, повышают электрические дипольные моменты переходов с различными комбинациями спиновых компонент.

При низких температурах полный электрический дипольный момент перехода может быть записан с помощью выражений для экситонов и магнонов. Расчет может быть доведен до конца с помощью точных канонических преобразований в каждом соответствующем случае. Например, в случае двухподрешеточного антиферромагнетика суммарный дипольный момент может быть записан в виде

$$\mathbf{P} = \sum_k \sum_n [\boldsymbol{\pi}^{(1)}_{nk} A^*_{nk} b^*_{-k} + \text{э. с.} + \boldsymbol{\pi}^{(2)}_{nk} B^*_{nk} d^*_{-k} + \text{э. с.}], \tag{23}$$

где A^*_{nk} и B^*_{nk} — операторы рождения n-х экситонов, распространяющихся в основном в первой и второй подрешетках, соответственно a^*_k и b^*_k — операторы рождения спиновых волн, которые могут быть рассмотрены как экситоны без орбитального возмущения; $\boldsymbol{\pi}^{(\alpha)}_{nk}$ является соответствующей линейной комбинацией фурье-преобразований $\boldsymbol{\pi}_{jl}$ $(b \leftarrow a)$. Если выбрана определенная экситонная область n, зависимость вектора $\boldsymbol{\pi}^{(\alpha)}_{nk}$ от $\mathbf{k}$ может быть получена из симметрийных рассмотрений. Так как дисперсия экситонной области считается малой [9], форма линии магнонной боковой полосы определяется главным образом вектором $\boldsymbol{\pi}^{(\alpha)}_{nk}$ и магнонными дисперсионными соотношениями. В случае MnF_2 наблюдались возбуждения, соответствующие переходу $^6A_{1g} \rightarrow {}^4T_{1g}$ и их магнонным боковым полосам. Танабе и Гондаира [24] и Сэлл, Грин и Уайт [25] независимо получили форму $\boldsymbol{\pi}^{(\alpha)}_{nk}$. Расчет $\boldsymbol{\pi}_{jl}$ дан только для ближайших соседей. Таким образом можно качественно объяснить наблюдаемую форму линий боковых магнонных полос. Порядок величины интенсивности поглощения для этих боковых полос удовлетворительно согласуется с результатами работ [1, 13].

Не вдаваясь в детали проблемы магнонных боковых полос, сделаем несколько замечаний.

1) Магнонные боковые полосы могут наблюдаться во всех антиферромагнетиках и ферримагнетиках, но не могут наблюдаться в ферромагнетиках, кроме случая, когда энергия анизотропии сравнима с обменной энергией.

2) Воздействие магнон-экситонного взаимодействия на форму линий боковых полос может быть значительным в ряде случаев [9]. Эта проблема аналогична действию примеси на спиновые волны в антиферромагнетиках.

3) Одновременное возбуждение экситона и двух магнонов и т. д. может быть возможным при учете более высокого порядка, чем те, которые использовались при выводе уравнения (22). Обычно эти поглощения слабее, чем рассмотренные раньше одномагнонное и одноэкситонное поглощения, так что они могут наблюдаться в исключительных случаях.

Институт физики твердого тела
Университета Токио

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. W. Halley, I. Silvera, Phys. Rev. Lett. **15**, 654 (1965).
2. S. J. Allen, R. Loudon, P. L. Richards, Phys. Rev. Lett. **16**, 463 (1966).
3. R. L. Green, D. D. Sell, W. M. Yen, A. L. Schawlow, R. M. White, Phys. Rev. Lett. **15**, 565 (1965); J. Appl. Phys. **37**, 1229 (1966).
4. P. G. Russell, D. S. McClure, Y. W. Stout, Phys. Rev. Lett. **16**, 776 (1966).
5. R. Newman, R. M. Chrenko, Phys. Rev. **114**, 1507 (1959); см. также [24].
6. A. Tsuchida, J. Phys. Soc. Japan **21**, 2497 (1966).
7. P. A. Fleury, S. P. S. Porto, L. E. Cheesman, H. J. Guggenheim, Phys. Rev. Lett. **17**, 84 (1966).
8. P. A. Fleury, S. P. S. Porto, R. Loudon, Phys. Rev. Lett. **18**, 658 (1967).
9. T. Moriya, J. Phys. Soc. Japan **21**, 926 (1966).

9a. P. L. Richards, J. Appl. Phys. **38**, 1500 (1967).

10. J. W. Halley, I. Silvera, Phys. Rev. **149**, 415 (1966).
11. T. Moriya, Magnetism, Academic Press Inc., New York, 1963, vol. 1, ch. 3.
12. Y. Tanabe, T. Moriya, S. Sugano, Phys. Rev. Lett. **15**, 1023 (1965).
13. K. Gondaira, Y. Tanabe, J. Phys. Soc. Japan **21**, 1527 (1966).
14. J. W. Halley, Phys. Rev. **149**, 423 (1966).
15. J. W. Halley, Phys. Rev. **154**, 458 (1967).
16. R. Loudon (готовится к печати).
17. R. J. Elliott, R. Loudon, Phys. Lett. **3**, 189 (1963).
18. Y. R. Shen, N. Bloembergen, Phys. Rev. **143**, 372 (1967); Y. R. Shen, J. Appl. Phys. **38**, 1490 (1967).
19. T. Moriya, J. Phys. Soc. Japan **23**, 490 (1967).
20. M. Born, K. Huang, Dynamical Theory of Crystal Lattices, Clarendon Press, London, 1964 (см. перевод: М., ИЛ, 1968); M. Born, M. Bradburn, Proc. Roy. Soc. (London) **A188**, 161 (1947).
21. А. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
22. P. S. Pershan, J. P. van der Ziel, L. D. Malmstrom, Phys. Rev. **143**, 574 (1966).
23. Y. Mizuno, S. Koide, Phys. Kondens. Materie **2**, 166 (1964).
24. Y. Tanabe, K. Gondaira, J. Phys. Soc. Japan **22**, 573 (1967).
25. D. D. Sell, R. L. Greene, R. M. White, Phys. Rev. **158**, 489 (1967).