

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

37.312.62

СВЕРХПРОВОДНИКИ II РОДА *)

Э. Линтон, У. Мак-Лин

I. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних лет большое число фундаментальных экспериментальных и теоретических исследований в области сверхпроводимости было посвящено так называемым сверхпроводникам II рода. Такие исследования заслуживают внимания как по той причине, что они возродили интерес к макроскопическим квантовым явлениям и к некоторым фундаментальным электродинамическим проблемам, так и потому, что они тесно связаны с применениями явления сверхпроводимости в магнитах и других устройствах.

II. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ **)

Сверхпроводник представляет собой материал, сопротивление которого электрическому току низкой частоты обращается в нуль при температурах ниже некоторой вполне определенной величины T_c . В этой области температур в сверхпроводнике, следовательно, исчезает электрическое поле E . В настоящее время известны 24 металлических элемента, становящихся сверхпроводящими, со значениями T_c , лежащими в пределах от $11,2^\circ$ до $0,01^\circ$ К. Кроме того, имеется свыше 500 сверхпроводящих веществ и сплавов с T_c , доходящими до 18° К ***); среди них имеются даже полупроводники. Сверхпроводник является не только идеальным проводником, он обладает также свойством, которое иногда называют идеальным диамагнетизмом. Если сверхпроводник поместить в слабое внешнее магнитное поле или охладить сверхпроводник в таком внешнем поле до температур ниже T_c , то магнитная индукция внутри материала исчезает, т. е. $B = H + 4\pi M = 0$, так что $M = -H/4\pi$.

Это происходит независимо от того, становится ли материал сверхпроводящим до или после приложения внешнего поля, в противоположность тому, что можно было бы ожидать от идеального проводника. Помещение идеального проводника в магнитное поле вызвало бы на его поверхности вихревые токи, которые препятствовали бы изменению магнитного потока внутри проводника. Если образец уже находился в поле до того, как произошел переход к состоянию идеальной проводимости, то поток остался бы «замороженным» в идеальном проводнике. При удалении

*) E. A. Lynton, W. L. McLean, Type II Superconductors, *Advances Electronics and Electron Phys.* 23, 1 (1967). Перевод Г. Ф. Жаркова.

***) Ссылки на большинство оригинальных работ, обзор которых дан в настоящей главе, можно найти в книге Линтона¹.

****) В настоящее время получены сплавы с $T_c = 20,4^\circ$ К (см. *Science* 156, 645 (1967)). (Прим. перев.)

внешнего источника магнитного поля в идеальном проводнике индуцировались бы вихревые токи, поддерживающие поток постоянным.

Следует заметить, что металл, потерявший свое электрическое сопротивление вследствие исчезновения механизма, вызывавшего рассеяние электронов, не является «идеальным проводником» в указанном выше смысле. Диффузия электронов проводимости сквозь металл привела бы к постепенному затуханию вихревых токов, индуцированных наложением внешнего поля. В случае типичного металла магнитный поток проник бы внутрь с постоянной времени порядка секунд².

Сверхпроводник, в отличие от идеального проводника, претерпевает в присутствии магнитного поля обратимый переход из нормального в сверхпроводящее состояние. Это очень существенно, поскольку теперь мы можем применить простые термодинамические соображения. Выталкивание магнитного потока из внутренних областей сверхпроводника приводит к росту его магнитной свободной энергии. При постепенном увеличении внешнего магнитного поля возрастает положительный магнитный вклад в полную свободную энергию до тех пор, пока не произойдет почти полная компенсация отрицательной энергии конденсации (т. е. разности свободных энергий нормальной и сверхпроводящих фаз в отсутствие магнитного поля). При таком значении внешнего поля, называемом критическим полем, нормальная и сверхпроводящая фазы сосуществуют и находятся в равновесии. Дальнейшее увеличение внешнего поля приводит к полному переходу в нормальную фазу, которая теперь обладает меньшей свободной энергией, чем обладало бы сверхпроводящее состояние. Критическое магнитное поле зависит от температуры и ниже T_c оно меняется, с очень хорошей точностью, согласно параболическому закону

$$H_c(T) = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right],$$

где $H_0 = H_c(0)$ (~ 100 э для типичных сверхпроводников).

Обратимость перехода нормальный металл — сверхпроводник при $H_c(T)$ позволяет трактовать его как обычный фазовый переход и приравнивать свободные энергии *). Для эллипсоидального образца **) в расчете на единицу объема можно написать

$$G_n(0) \sim G_n(H_c) = G_s(H_c) = G_s(0) - \int_0^{H_c} M(H) dH = G_s(0) + \frac{H_c^2}{8\pi},$$

поскольку восприимчивость нормального металла обычно пренебрежимо мала. Следовательно, имеем

$$G_n(0) - G_s(0) = \frac{H_c^2}{8\pi}.$$

Поскольку плотность энтропии $S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{H, p}$, то отсюда немедленно следует

$$S_n(0) - S_s(0) = -H_c \frac{dH_c/dT}{4\pi}.$$

При всех $T < T_c$, $H_c > 0$ и $dH_c/dT < 0$, так что $S_n(0) > S_s(0)$, за исключением точек $T = T_c$ и $T = 0$, где $S_n(0) = S_s(0)$. Таким образом, мы

*) Определение свободной энергии Гельмгольца F и свободной энергии Гиббса G даны в Приложении.

**) Эта оговорка сделана с тем, чтобы обеспечить простую связь между напряженностью магнитного поля H , внешним магнитным полем H_c и намагниченностью M , а именно $H = H_c - 4\pi nM$, где n — размагничивающий фактор для эллипсоида. В последующем изложении мы ограничимся образцами с $n \ll 1$, чтобы избежать неоправданных усложнений.

видим, что сверхпроводящая фаза обладает более высоким внутренним порядком по сравнению с нормальной. Ввиду отсутствия каких-либо изменений в решетке при T_c ясно, что происходящее упорядочение должно происходить в электронной системе. Отсюда в свою очередь следует, что упорядочение происходит скорее в импульсном, чем в конфигурационном пространстве, ибо трудно себе представить пространственную конденсацию электронов внутри металла, аналогичную конденсации жидкости из пара, которая была бы устойчива по отношению к электрическому отталкиванию между одинаковыми зарядами. Природа этого упорядочения, однако, далеко не очевидна, тем более, что при очень низких температурах электроны проводимости металла уже образуют высокоупорядоченную в импульсном пространстве систему. Из решения уравнения Шрёдингера для электронов сверхпроводника, предложенного Бардином и др.³, мы знаем, что происходит конденсация электронных пар в состоянии с наименьшим импульсом; это находится в согласии с гораздо более ранними предсказаниями Лондона⁴.

Прежде чем обсуждать работы Лондона, заметим, что термодинамическое описание сверхпроводимости возможно без знания микроскопической природы упорядоченного состояния. Описание можно вести макроскопически, в терминах параметра порядка ψ . Последний изменяется от нуля в областях, находящихся в нормальной фазе, и принимает максимальное значение в тех участках сверхпроводящих областей, которые наиболее удалены от нормальных областей и не лежат вблизи поверхности образца. Если бы мы сводили все к самым основным понятиям, нам следовало бы определить параметр порядка в терминах плотности энтропии. С другой стороны, если считать, что сверхпроводник при конечных температурах представляет собой смесь сверхпроводящих и нормальных электронов, то параметр порядка можно определить как долю сверхпроводящих электронов. Мы увидим в гл. V, что в подходе Гинзбурга и Ландау параметр порядка первоначально определяется просто как подходящая величина, по которой можно провести разложение свободной энергии.

III. УРАВНЕНИЕ ЛОНДОНА

В полной мере смысл механизма упорядочения в сверхпроводимости был впервые осознан Лондоном⁴ более тридцати лет назад с проникательностью, глубина которой стала очевидной лишь в последние годы.

Осознав, что электродинамическое описание, основанное исключительно на уравнениях Максвелла, в пределе нулевого сопротивления неизбежно будет предсказывать необратимое поведение идеального проводника и не будет давать обратимый диамагнетизм сверхпроводника, Лондон ввел дополнительное уравнение. Вид этого уравнения можно получить различными способами, например путем минимизации свободной энергии относительно распределения тока и поля⁵ или в предположении абсолютной жесткости сверхпроводящих волновых функций по отношению к воздействию внешнего поля⁴; для наших целей, однако, достаточно считать его интуитивной гипотезой, полностью оправдываемой своим успехом.

Уравнение, предложенное Лондоном, имеет вид

$$\frac{4\pi\lambda^2}{c} \operatorname{rot} \mathbf{J} + \mathbf{B} = 0,$$

где \mathbf{J} — плотность тока, \mathbf{B} — магнитная индукция, $\lambda^2 = \hbar^2 c^2 / 4\pi n q^2$, m и q — масса и заряд сверхпроводящих носителей тока, n — плотность этих носителей. При помощи уравнения Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{J} / c$ можно

записать уравнение Лондона в виде

$$\mathbf{V} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{V} - \lambda^2 \Delta \mathbf{V} = 0.$$

Решение этого уравнения в сверхпроводящей области с линейными размерами, намного большими λ , есть $V(z) = B(0) \exp(-z/\lambda)$, где $V(z)$ — индукция на глубине z под поверхностью. Беря типичное значение для плотности электронов n и значения q и m , соответствующие свободному электрону, получаем $\lambda \sim 500 \text{ \AA}$.

Уравнение Лондона дает нам ключ к пониманию природы сверхпроводящего упорядочения. Вводя векторный потенциал \mathbf{A} , где $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{V}$, используя калибровку $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ и рассматривая односвязный сверхпроводник, мы приходим к уравнению Лондона в форме

$$\frac{4\pi\lambda^2}{c} \mathbf{J} + \mathbf{A} = 0.$$

В присутствии векторного потенциала обобщенный импульс заряженной частицы дается выражением $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = \sum (m\mathbf{v} + q\mathbf{A}/c)$.

Средний импульс на одну частицу можно записать в виде

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{q}{c} \left(\frac{4\pi\lambda^2}{c} \mathbf{J} + \mathbf{A} \right) = 0.$$

Следовательно, сверхпроводящий порядок обусловлен конденсацией носителей тока в состоянии с наименьшим возможным импульсом $\mathbf{P} = 0$. При этом из принципа неопределенности вытекает, что соответствующий пространственный масштаб упорядоченности бесконечен, т. е. мы получаем бесконечную «когерентность» и невозможность воздействовать на систему электронов локализованными в пространстве полями.

IV. КВАНТОВАНИЕ ПОТОКА

Рассмотрим теперь многосвязный сверхпроводник, например кольцо или любой образец с дыркой. Предположим, что упомянутый выше дальний порядок есть фундаментальное свойство сверхпроводников и что он имеет место также и в этом случае. Тогда необходимо потребовать, чтобы волновая функция, описывающая сверхпроводящие носители, была однозначна вдоль любого пути, окружающего дырку. По аналогии со случаем атомных электронных волновых функций можно тогда применить правила квантования Бора — Зоммерфельда и потребовать, чтобы для каждого сверхпроводящего носителя было $\oint \mathbf{p} d\mathbf{l} = \omega h$, где ω — целое число, а h — постоянная Планка, причем интеграл берется по любому контуру, окружающему дырку. Используя уравнение Лондона, получаем

$$\oint \frac{4\pi\lambda^2}{c} \mathbf{J} d\mathbf{l} + \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{\omega h c}{q}.$$

Согласно теореме Стокса $\oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \iint \mathbf{V} d\mathbf{S} = \Phi$, где двойной интеграл берется по поверхности, ограниченной контуром, и Φ — полный магнитный поток, пронизывающий контур. Тогда

$$\frac{4\pi\lambda^2}{c} \oint \mathbf{J} d\mathbf{l} + \Phi = \frac{\omega h c}{q}.$$

Левую часть этого уравнения Лондон назвал флюксоидом. Уравнение можно сформулировать в виде общего утверждения: для любого контура, окружающего дырку в сверхпроводящем материале, полный магнитный поток, пронизывающий контур плюс интеграл по этому контуру от

$(4\pi\lambda^2/c) J$, равняются целому кратному от hc/q . Если путь интегрирования взят на расстояниях от дырки, больших по сравнению с глубиной проникновения λ , то там $J = 0$, и мы приходим к соотношению

$$\Phi = \frac{\omega hc}{q} = \omega \Phi_0,$$

где $\Phi_0 = hc/q$. Таким образом, в сверхпроводнике проявляется удивительное свойство квантования потока.

Существование этого эффекта было полностью подтверждено в последние годы; оказалось, что квант потока равен

$$\Phi_0 \sim 2 \cdot 10^{-7} \text{ гс} \cdot \text{см}^2,$$

откуда $q \sim 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ к} \sim 2e$, где e — заряд электрона. Это показывает, что сверхпроводящие носители имеют удвоенный электронный заряд и, скорее всего, являются парами электронов. Успех микроскопической теории Бардина и др.³ убедительно продемонстрировал правильность такого представления.

V. УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ

Как уже упоминалось, уравнение Лондона подразумевает, что характеристические свойства сверхпроводника остаются жестко фиксированными и не меняются при воздействии внешнего поля и, более того, что плотность сверхпроводящего тока в данной точке определяется величиной векторного потенциала в той же точке. Эта локальная связь является разумным приближением, когда глубина проникновения поля λ велика по сравнению со всеми другими размерами, имеющими отношение к задаче. Нелокальные обобщения теории, допускающие значительную пространственную когерентность, не являются темой настоящего обзора.

Жесткость сверхпроводящих характеристик, вытекающая из уравнения Лондона, должна иметь место, в частности, и в отношении соответствующего параметра, описывающего степень упорядочения. В ситуациях, где этот параметр зависит от координат, мы уже не можем использовать уравнение Лондона. Так, уравнение Лондона само по себе становится неадекватным при описании поверхностных явлений и поведения вблизи границ раздела нормальных и сверхпроводящих областей, где имеется постепенный переход от сверхпроводящей к нормальной фазе, происходящий на малом, но конечном расстоянии. Наличие этого ограничения несколько не умаляет, однако, большую роль, которую уравнение Лондона играет при описании макроскопических электродинамических эффектов в массивных сверхпроводниках.

Гинзбург и Ландау⁶ в 1950 г. предложили феноменологическую теорию, оказавшуюся весьма универсальной и плодотворной при описании пространственной зависимости сверхпроводящего параметра порядка. Она использует подход, примененный Ландау в теории фазовых переходов II рода⁷ и применима при температурах, близких к температуре перехода. Микроскопический вывод результатов теории Гинзбурга — Ландау был дан Горьковым⁸.

Рассмотрим прежде всего сверхпроводник в отсутствие внешнего поля, характеризующийся пространственно-однородным упорядочением. Разложим свободную энергию по четным степеням параметра порядка $\psi(\mathbf{r})$, который в данном случае может быть комплексным числом. Имеем

$$F_s = F_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \dots,$$

где $\alpha(T) < 0$ при $T < T_c$, $\alpha(T_c) = 0$ и $(d\alpha/dT)_{T_c} \neq 0$; $\beta > 0$ при $T \leq T_c$. Предполагая α и β непрерывными функциями температуры и помня, что мы должны ограничиться значениями $|\psi|^2 \ll 1$, можно положить $\alpha = \text{const} \cdot (T - T_c)/T_c$ и $\beta = \beta_c$ — значение при $T = T_c$. Для $T < T_c$ функция F_s принимает минимальное значение при $\psi = \psi_0(T)$, где $|\psi_0(T)|^2 = -\alpha/\beta \propto (T_c - T)$ и соответствующая энергия $F_s = F_n - \alpha^2/2\beta$. Из предыдущих рассуждений следует, что $\alpha^2/2\beta = H_c^2/8\pi$.

Рассмотрим теперь, все еще в отсутствие внешнего поля, изменение $\psi(\mathbf{r})$ от точки к точке. Аргументация, аналогичная использованной при выводе первоначального разложения для F_s , указывает, что в случае достаточно медленного изменения $\psi(\mathbf{r})$ члены, содержащие пространственные производные третьего и более высоких порядков, должны быть пренебрежимо малы, но к свободной энергии необходимо добавить еще члены, пропорциональные *) $\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2$, $\left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|^2$, $\left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2$. Таким образом, отнесенная к единице объема свободная энергия изотропной системы:

$$F_s = F_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2.$$

Вошедшая сюда константа выражена через параметр m (который не обязан равняться массе электрона), так что последний член имеет квантовомеханический вид плотности кинетической энергии.

Предположим теперь, что мы приложили магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ в сверхпроводнике. Наряду с добавлением члена термодинамической энергии поля $B^2/8\pi$ Ландау и Гинзбург заменяют член $|\nabla \psi|^2$ на $(1/2m) | -i\hbar \nabla - (qA/c) \psi |^2$, точно так же, как видоизменяется кинетическая энергия в квантовой механике для учета эффектов магнитного поля. Такая замена обеспечивает калибровочную инвариантность, при условии, что если калибровка A изменяется, то и фаза $\psi(\mathbf{r})$ также меняется, снова в полной аналогии с изменением фазы волновой функции в квантовой механике. В случае, когда $\psi(\mathbf{r})$ однородна, этот член сводится к $(1/2m)(q^2/c^2)A^2 |\psi|^2$, что будет плотностью кинетической энергии сверхпроводящего тока (см. Приложение). Таким образом, свободная энергия

$$F_s = F_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{8\pi} B^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \left| \left(\frac{-i\hbar \nabla - qA}{c} \right) \psi \right|^2.$$

Для нахождения условий равновесия в присутствии магнитного поля теперь необходимо минимизировать полную свободную энергию сверхпроводника $\int F_s d^3r$ по отношению к произвольным вариациям комплексного параметра порядка $\psi(\mathbf{r})$ и векторного потенциала $A(\mathbf{r})$. Результат представляет собой так называемые уравнения Гинзбурга — Ландау

$$\alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m} \left(\frac{-i\hbar \nabla - qA}{c} \right)^2 \psi = 0,$$

$$\frac{c}{4\pi} \text{rot rot } \mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\frac{q\hbar i}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{q^2}{mc} \psi \psi^* \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Первое из этих фундаментальных уравнений описывает равновесную пространственную зависимость параметра порядка, второе — распределение тока, т. е. диамагнитный отклик сверхпроводника на приложенное внешнее поле.

Уравнения Гинзбурга — Ландау приводят к двум фундаментальным характеристическим длинам сверхпроводника. С одной из них

) Члены вида $\psi^ \nabla^2 \psi$ приводят при интегрировании по всему объему к вкладу того же типа, что и возникающие от члена $|\nabla \psi|^2$.

мы уже сталкивались, это — глубина проникновения λ . В слабом поле и в первом порядке по B величину $|\psi|^2$ можно заменить на ее равновесное значение в отсутствие поля, ψ_0^2 , которое не зависит от координат. В этом приближении второе из уравнений Гинзбурга — Ландау принимает вид, формально эквивалентный уравнению Лондона:

$$\text{rot } \mathbf{J} = -\frac{q^2}{mc} \psi_0^2 \mathbf{B},$$

что приводит к экспоненциальному затуханию приложенного поля с характеристической глубиной проникновения

$$\lambda^2(T) = \frac{mc^2}{4\pi q^2 \psi_0^2(T)} \propto \frac{1}{T_c - T}.$$

Вторая характеристическая длина следует из-за появления в первом из уравнений Гинзбурга — Ландау градиентного члена, который препятствует по энергетическим соображениям быстрому пространственному изменению $\psi(\mathbf{r})$. Масштаб, на котором это изменение происходит, можно определить следующим образом. Напишем первое уравнение Гинзбурга — Ландау в отсутствие поля для полубесконечной пластины с поверхностью, лежащей в плоскости $z = 0$; предположим, что ψ зависит лишь от z :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} + \alpha\psi + \beta\psi^3 = 0,$$

Величину ψ можно считать вещественной, если поле и ток отсутствуют. Введем обозначения

$$f(z)^2 = \frac{\psi^2}{\psi_0^2} = -\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \psi^2, \quad \xi(T)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m\alpha},$$

где $\xi(T)$ имеет размерность длины. Тогда уравнение принимает вид

$$-\xi(T)^2 \frac{d^2f}{dz^2} - f + f^3 = 0.$$

Ясно, что $\xi(T)$ является естественной единицей длины для пространственного изменения $f(z)$; используя температурную зависимость α и значения этой величины, выраженной через микроскопические параметры, можно показать, что

$$\xi(T) = \xi_0 \left[\frac{T_c}{T_c - T} \right]^{1/2},$$

где $\xi_0 = 0,18\hbar v_F / k_B T_c$, v_F — скорость Ферми, k_B — постоянная Больцмана. Величина ξ_0 называется длиной когерентности сверхпроводника при абсолютном нуле температур (см. ⁹).

Заметим, что обе длины, $\lambda(T)$ и $\xi(T)$, расходятся при $T \rightarrow T_c$, но их отношение $\kappa = \lambda(T) / \xi(T) = mc\beta / q\hbar (2\pi)^{1/2}$ в том же приближении является постоянной. Это — так называемый параметр Гинзбурга — Ландау κ , о котором пойдет речь в следующей главе.

Существование и даже приближенная величина длины когерентности ξ_0 следует из совершенно общих феноменологических рассуждений ¹⁰. Она, как только что говорилось, является минимальной длиной, на которой могут происходить изменения параметра порядка. Точнее, это означает, что наименьший естественный размер сверхпроводящей области, окруженной нормальным материалом, есть ξ_0 . Пинпард отметил, что конечная и фактически значительная величина этого размера вытекает из чрезвычайной резкости сверхпроводящего перехода. Например, в хорошо отожженном образце олова переход совершается в пределах менее одной тысячной градуса. Из малости статистических флуктуаций,

следующей из этого результата, можно оценить, что сверхпроводимость зарождается в областях с диаметром примерно 10^{-4} см.

Такая же величина для ξ_0 следует из простого соображения, основанного на принципе неопределенности. Можно считать, что длина когерентности характеризует пространственное распределение сверхпроводящих электронов, связанных с неопределенностью их импульсов соотношением

$$\xi_0 \Delta p \sim \hbar.$$

Но электроны, участвующие в сверхпроводящей конденсации, имеют энергию в пределах $k_B T_c$ от поверхности Ферми, так что

$$\Delta p \sim \frac{k_B T_c}{v_F}$$

и

$$\xi_0 \sim \frac{\hbar v_F}{k_B T_c}.$$

Для большинства сверхпроводящих элементов $\xi_0 \sim 10^{-5} - 10^{-4}$ см. Однако для переходных металлов, таких как ниобий и тантал, скорость Ферми v_F очень мала (из-за высокой плотности электронных состояний на поверхности Ферми), а T_c аномально велика. Поэтому для этих веществ ξ_0 порядка лишь 10^{-6} см. В результате значение $\kappa = \lambda/\xi$ для переходных металлов близко к единице, в то время как, например, для алюминия $\kappa \sim 0,01$.

Как длина когерентности, так и глубина проникновения зависят от средней длины свободного пробега электронов в нормальном металле. По мере того как длина пробега уменьшается с уменьшением чистоты металла, λ растет, а ξ убывает. Таким образом, κ возрастает с уменьшением средней длины пробега. Ниже мы обсудим фундаментальные различия в поведении основных характеристик сверхпроводников с малыми κ и сверхпроводников с большими значениями κ . Переход от одного типа поведения к другому можно осуществить, делая сплавы сверхпроводящего элемента, тем самым уменьшая среднюю длину пробега в нем.

VI. ПОВЕРХНОСТНАЯ ЭНЕРГИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ФАЗ

Постепенное пространственное изменение сверхпроводящего параметра порядка в сочетании с конечностью глубины проникновения приводят к вкладу в энергию образца от поверхности, разделяющей сверх-

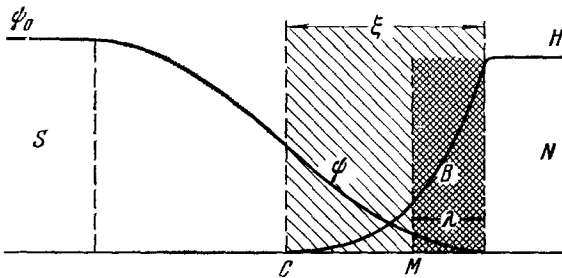


Рис. 1. Изменение ψ сверхпроводящего параметра порядка $\psi(r)$ и индукции B вблизи границы между нормальной и сверхпроводящей областями.

проводящий и нормальный материал¹¹. Рассмотрим единичную площадку поверхности раздела фаз, которую предположим перпендикулярной к плоскости чертежа. Параметр порядка $\psi(r)$ убывает от своего равновесного значения в сверхпроводящем материале до нуля в нормальном материале на расстоянии порядка ξ . Индукция B убывает до нуля от своего значения H_c в нормальном материале на расстояние порядка λ . Если заменить постепенное изменение ψ и B резким скачком, то можно считать, что граница упорядочения находится при C , а магнитная граница при M (рис. 1).

Таким образом, в диагонально заштрихованном объеме происходит утрата сверхпроводящего порядка и вследствие этого возрастает энергия на величину, равную произведению этого объема на разность энергий (в расчете на единицу объема) между нормальным и сверхпроводящим материалами, $H_c^2/8\pi$. С другой стороны, поле не равно нулю в дважды заштрихованном объеме, что приводит к уменьшению в энергии, равному произведению этого объема на энергию $H^2/8\pi$ (в расчете на единицу объема), соответствующую проникновению индукции H . Если поле в нормальной области равно H_c , мы имеем:

- 1) возрастание в энергии из-за потери порядка $\sim \xi H_c^2/8\pi$,
- 2) уменьшение в энергии из-за проникновения поля $\sim \lambda H_c^2/8\pi$;

3) результирующее изменение энергии (на единицу площади) $\sim (\xi - \lambda) H_c^2/8\pi$.

Таким образом, имеется вклад (в расчете на единицу площади поверхности раздела фаз), знак и величина которого зависят от относительных размеров длины когерентности ξ и глубины проникновения λ .

Очевидно, что знак этой поверхностной энергии и определяет, выгодно энергетически или нет образование нормальных областей в сверхпроводящей матрице при полях, меньших H_c (напомним, что при поле H_c объемные энергии двух фаз равны). Значит, следует ожидать весьма различного поведения в магнитном поле сверхпроводников с положительной и с отрицательной поверхностной энергиями. В соответствии с этим они называются соответственно сверхпроводниками I и II рода.

Попробуем применить этот же простой подход для ответа на вопрос: при каком внешнем поле нормальные включения становятся энергетически выгодными? Рассмотрим такое включение в виде тонкой нормальной нити, в центре которой имеется индукция, равная внешнему полю H , и равный нулю параметр порядка $\psi = 0$. При этом поток уменьшается на расстоянии порядка λ , а ψ возрастает на расстоянии порядка ξ . Нормальное включение становится выгодно, когда энергия, связанная с вытеснением поля, становится равной или больше чем уменьшение энергии, обусловленное конденсацией в более упорядоченное состояние, т. е. при

$$\frac{\pi \xi^2 H_c^2}{8\pi} \leq \frac{\pi \lambda^2 H^2}{8\pi},$$

или

$$H \geq \left(\frac{\xi}{\lambda}\right) H_c.$$

Таким образом, имеем два случая:

а) Тип I, $\xi \gg \lambda$. Поле, при котором появляются изолированные включения, превосходит H_c ; следовательно, материал полностью диамагнитен при $H < H_c$, что указано на рис. 3 пунктирной линией.

б) Тип II, $\xi \leq \lambda$. Нормальные области появляются при

$$H_{c1} \approx \frac{\xi}{\lambda} H_c \leq H_c,$$

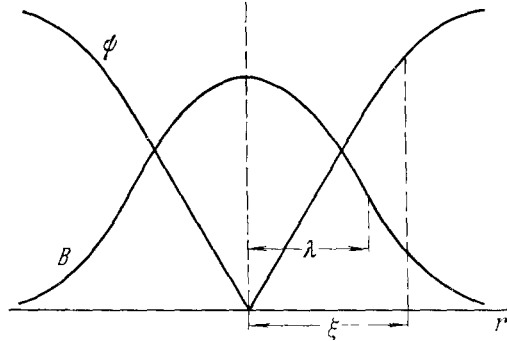


Рис. 2. Изменение параметра порядка $\psi(r)$ и индукции B в цилиндрической нормальной области, окруженной сверхпроводящим материалом.

и соответственно сверхпроводящие области сохраняются до полей, больших H_c , поскольку отрицательная поверхностная энергия компенсирует увеличение объемной энергии. Следовательно, кривая намагничивания в случае сверхпроводников II рода имеет вид, показанный сплошной линией.

Из уравнений Гинзбурга — Ландау можно найти предельное поле H_{c2} , при котором еще существует смесь нормальных и сверхпроводящих областей. Для этой цели выберем ось перпендикулярно к полю и предположим, что ψ зависит лишь от одной координаты z . Легко убедиться, что если ψ зависит от x и y , то значение H_{c2} , полученное в последнем случае, не будет превосходить значение, найденное нами. Далее, мы рассмотрим случай бесконечной среды либо участка сверхпроводника на расстояниях ξ , от поверхности, с тем, чтобы можно было пренебречь поверхностными эффектами. В нормальном состоянии поле

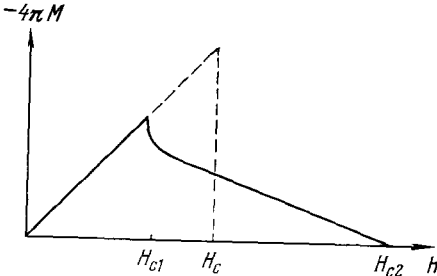


Рис. 3. Кривые намагничивания для сверхпроводников I рода (штриховая линия) и II рода (сплошная кривая).

однородно, так что в полях с $B = H \gg H_{c2}$ вектор-потенциал можно взять в виде $A = (zH, 0, 0)$. Вводя равновесный параметр порядка ψ_0 в отсутствие поля и величины κ и λ , можно записать уравнение Гинзбурга — Ландау в виде

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{\kappa^2}{\lambda^2} \left[- \left(1 - \frac{H^2 z^2}{2H_c^2 \lambda^2} \right) \psi + \frac{\psi^3}{\psi_0^3} \right].$$

Вблизи H_{c2} естественно предположить $\psi(H) \ll \psi_0$ так, что уравнение линеаризуется:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{\kappa^2}{\lambda^2} \left(1 - \frac{H^2 z^2}{2H_c^2 \lambda^2} \right) \psi = 0.$$

Это уравнение имеет решения, ограниченные при $z = \pm \infty$ лишь при условии

$$\sqrt{2} \kappa \frac{H_c}{H} = 2 \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

где n — положительное целое число или нуль. Максимальное поле, для которого это условие выполняется, очевидно, есть

$$H_{c2} = \sqrt{2} \kappa H_c.$$

Таким образом, мы видим, что H_{c2} или больше или меньше, чем H_c , в зависимости от того, больше или меньше параметр κ величины $1/\sqrt{2}$. Это как раз значение, разделяющее сверхпроводники I и II рода.

Выше мы видели, что $\kappa = \lambda(T)/\xi(T)$. Здесь мы вновь убеждаемся, что переход от поведения, характерного для типа I, к типу II происходит, когда

$$\lambda(T) \sim \xi(T) \quad \text{и} \quad H_{c2} > H_c \quad \text{при} \quad \lambda > \xi.$$

Отметим, что полученное соотношение между H_{c2} и H_c не зависит от предположения о зависимости ψ только от z ; рассмотрение полубесконечного образца также не является необходимым. Более общий вывод этого результата математически эквивалентен нахождению уровней Ландау электрона в однородном магнитном поле¹².

VII. СТАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СМЕШАННОГО СОСТОЯНИЯ

Из предыдущей главы ясно, что во внешних полях, удовлетворяющих неравенству $H_{c1} < H < H_{c2}$, сверхпроводник II рода находится в состоянии, которое не является ни полностью сверхпроводящим, ни полностью нормальным. Детализированная картина такого состояния, называемого смешанным, в принципе может быть получена из решения уравнений Гинзбурга — Ландау при соответствующих условиях. Нелинейность этих уравнений заставляет прибегать к определенным приближениям, как это впервые было сделано Абрикосовым¹³. Он вскрыл природу смешанного состояния вблизи H_{c2} путем итерационной процедуры, подставляя в нелинейные уравнения Гинзбурга — Ландау решение линеаризованного уравнения с учетом малой аддитивной функции. Это привело к замечательному результату, что в плоскости, перпендикулярной к приложенному полю, параметр порядка является дважды периодической функцией, изменяющейся от нуля на дискретном множестве точек, как изображено на рис. 4, до максимального значения посередине между соседними нулями.

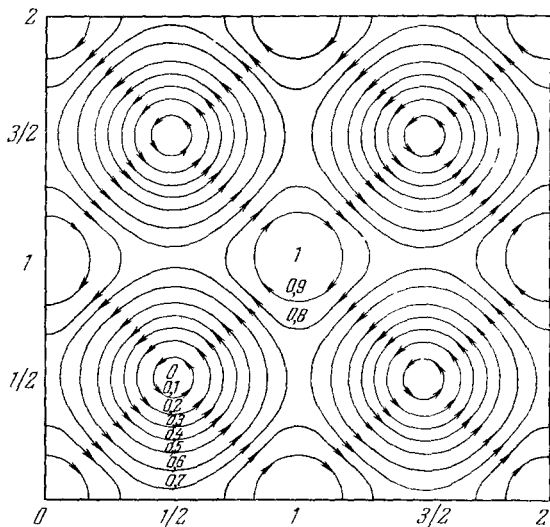


Рис. 4. Линии равного $|\psi|^2$ (которые являются также линиями электрического тока, причем касательная в любой точке дает направление J_s в этой точке) согласно модели Абрикосова (из статьи Абрикосова: Phys. Chem. Solids 2, 199 (1957)).

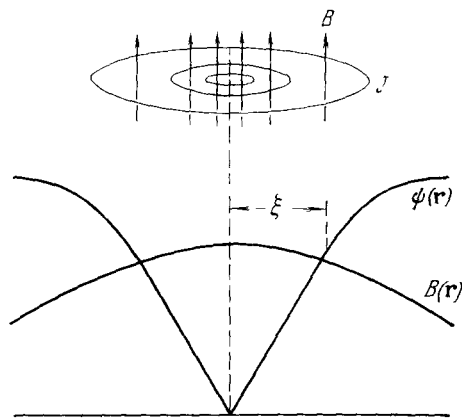


Рис. 5. Линии магнитного потока, электрического тока, изменения параметра порядка и индукция вблизи центра вихря.

Вблизи нулей симметрия является круговой. Имеется постепенный переход к почти квадратной закономерности на границе элементарной ячейки с центром в соответствующем нуле. В трехмерном пространстве поле проникает в образец и образует смешанное состояние в виде совокупности нормальных нитей, каждая из которых окружена поверхностями равного порядка; последние соответствуют также поверхностям, по которым течет сверхпроводящий ток, перпендикулярно к направлению поля. Вблизи каждой из нормальных нитей плотность тока меняется подобно изменению скорости вблизи вихря в классической жидкости.

Таким образом, в смешанном состоянии внутренность сверхпроводника содержит набор параллельных токовых вихрей. Из рассмотрения гл. VI ясно, что каждый такой вихрь

топологически эквивалентен сверхпроводнику с цилиндрической дыркой в виде нормальной нити, параллельной оси, и потому обязан нести целое число квантов потока Φ_0 .

Замечательной особенностью этой вихревой структуры, предсказанной Абрикосовым для смешанного состояния, является то, что параметр сверхпроводящего упорядочения везде отличен от нуля, за исключением пренебрежимо малого объема вдоль нитей. Смешанное состояние можно, следовательно, считать всюду сверхпроводящим и характеризовать усредненным параметром порядка. Подтверждением этой точки зрения первоначально послужило успешное объяснение на основе развитых представлений экспериментов по теплопроводности ⁶⁶.

Рассмотрим прежде всего свойства изолированного вихря. Мы будем в основном следовать де Жену ⁵ и сделаем упрощающее предположение, что $\kappa \gg 1$, т. е. $\lambda \gg \xi$. Структуру вихря мы будем представлять себе следующим образом. Параметр порядка и эффективная плотность сверхпроводящих носителей возрастают от нуля в центре до своих равновесных значений на расстоянии порядка ξ . Индукция, или плотность потока B , максимальна в центре и отлична от нуля на расстоянии порядка λ , экранируясь далее круговыми токами, текущими также на расстояниях порядка λ .

Пренебрегая энергией «нормальной сердцевины» радиуса ξ , имеем для энергии вихря, отнесенной к единице длины, выражение

$$F = \int_{r>\xi} 2\pi r dr \left[\frac{B(r)^2}{8\pi} + \frac{1}{2} n_s m v(r)^2 \right],$$

где $n_s = \text{const}$ при $r > \xi$. Из уравнений Максвелла имеем

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{4\pi \mathbf{J}}{c} = \frac{4\pi n_s e \mathbf{v}}{c}, \end{aligned}$$

поэтому, полагая $\lambda_L^2 = mc^2/4\pi n_s e^2$, получаем

$$F = \frac{\int_{r>\xi} 2\pi r dr [B(r)^2 + \lambda_L^2 (\text{rot } \mathbf{B})^2]}{8\pi}.$$

Условие минимума этого выражения дает

$$\mathbf{B} + \lambda_L^2 \text{rot rot } \mathbf{B} = 0.$$

Мы вновь получили уравнение Лондона, показывающее, как и следовало ожидать, что поле проникает на расстояние λ_L . Однако можно думать, что это уравнение справедливо лишь там, где имеется неисчезающий порядок, т. е. не в центре вихря.

Уравнение, применимое всюду, таково:

$$\mathbf{B} + \lambda_L^2 \text{rot rot } \mathbf{B} = \Phi_0 \delta(\mathbf{r}),$$

где $\delta(\mathbf{r})$ — двумерная дельта-функция, а Φ_0 — вектор в направлении поля, по величине равный кванту потока. Справедливость последнего уравнения легко проверить, интегрируя его по поверхности, ограниченной окружностью радиуса r и охватывающей вихрь в плоскости, перпендикулярной к его оси.

Общее решение уравнения есть $B(r) = \Phi_0 K_0(r/\lambda_L)/2\pi\lambda_L^2$, где K_0 — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента. Приведем

асимптотические выражения: при $\xi < r \ll \lambda_L$

$$B(r) = \Phi_0 \frac{\ln(\lambda_L/r)}{2\pi\lambda_L^2},$$

при $r \gg \lambda_L$

$$B(r) = \Phi_0 \left(\frac{\pi\lambda_L}{2r}\right)^{1/2} \frac{\exp(-r/\lambda_L)}{4\lambda_L^2}.$$

Это выражение можно подставить обратно в формулу для свободной энергии, проинтегрировать и найти энергию единицы длины

$$F = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L}\right)^2 \ln\left(\frac{\lambda_L}{\xi}\right).$$

Пока мы еще не учли вклада в энергию вихря от областей сердцевин $r < \xi$. Карóли и др.¹⁴ показали, что при $\kappa \gg 1$ эту сердцевину можно считать фактически находящейся в нормальном состоянии и ее дополнительный вклад в F очень мал. Полную энергию можно записать в виде

$$F = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L}\right)^2 \left[\ln\left(\frac{\lambda_L}{\xi}\right) + \varepsilon \right],$$

где $\varepsilon \sim 0,1$.

Интересно отметить, что энергия зависит квадратично от Φ_0 . Таким образом, чтобы удвоить величину потока, энергетически более выгодно удвоить число вихрей, нежели иметь два кванта потока в каждом вихре.

Взаимодействие между двумя параллельными вихрями может быть определено аналогичным способом с тем лишь отличием, что теперь распределение магнитного потока описывается уравнением

$$\mathbf{V} + \lambda_L^2 \text{rot rot } \mathbf{V} = \Phi_0 [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)],$$

где \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — векторы, задающие положения двух вихрей. Решение этого уравнения есть

$$B(\mathbf{r}) = B_1(\mathbf{r}) + B_2(\mathbf{r}),$$

где

$$B_i(\mathbf{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2} K_0\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}{\lambda_L}\right).$$

Как и раньше, подставляем эту формулу в выражение для энергии и находим наряду с собственной энергией каждой нити энергию их взаимодействия, отнесенную к единице длины,

$$F_{12} = \frac{\Phi_0 B_{12}}{4\pi},$$

где

$$B_{12} = B_1(\mathbf{r}_2) = B_2(\mathbf{r}_1) = \frac{\Phi_0}{4\lambda_L^2} K_0\left(\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{\lambda_L}\right).$$

Мы получили энергию, соответствующую отталкиванию, которая изменяется как $\exp(-r_{12}/\lambda_L)r_{12}^{1/2}$ при $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg \lambda_L$ и как $\ln(\lambda_L/r_{12})$ при $\xi < r_{12} \ll \lambda_L$.

Имея эти выражения для собственной энергии и энергии взаимодействия вихревых линий, теперь возможно, по крайней мере в принципе, детально исследовать поведение в магнитном поле сверхпроводников II рода. Плотность гиббсовской свободной энергии образца, содержащего n ($n \gg 1$) вихревых линий на единицу площади перпендикулярно к линиям, есть $G = nF + \sum_{ij} F_{ij} - H\bar{B}/4\pi$. Поскольку каждый

вихрь несет один квант потока Φ_0 , для средней плотности потока имеем $\bar{B} = n\Phi_0$.

Прежде всего выясним, при каком поле H_{c1} становится энергетически выгодным проникновение потока. При этом поле плотность вихрей мала, так что мы пренебрежем их взаимодействием и напишем

$$G \sim nF - \frac{\bar{B}H}{4\pi} \sim \bar{B} \left(\frac{F}{\Phi_0} - \frac{H}{4\pi} \right).$$

Характер зависимости G от \bar{B} изменяется при достижении $H = 4\pi F/\Phi_0$. При $H < 4\pi F/\Phi_0$ энергия G возрастает с \bar{B} и наименьшая энергия соответствует $\bar{B} = 0$, т. е. $B = 0$ — так называемое мейснеровское состояние. При $H > 4\pi F/\Phi_0$ энергия G убывает с ростом \bar{B} , так что проникновение поля становится выгодным. Поэтому ясно, что

$$H_{c1} = \frac{4\pi F}{\Phi_0} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L^2} \ln \left(\frac{\lambda_L}{\xi} \right).$$

Для $\kappa = \lambda/\xi \gg 1$ значение $H_{c1} \ll H_c$. Как только вихри начинают проникать, необходимо учесть их взаимодействие. Это взаимодействие, как мы видели, убывает экспоненциально, как $\exp(-r_{12}/\lambda_L)$, и потому при H_{c1} вихри очень быстро сближаются на расстояние $\sim \lambda_L$ друг от друга без заметного увеличения энергии. Ясно, что это приводит к бесконечному значению наклона кривой намагниченности при H_{c1} (последнее можно показать и формально математически).

Изучение детальной природы перехода при H_{c1} из мейснеровского в смешанное состояние было темой многих исследований. Если бы взаимодействие вихрей действительно происходило на конечном расстоянии, т. е. обращалось в нуль при $r_{12} \gg \lambda_L$, намагниченность менялась бы скачком, переход был бы I рода и имелось бы выделение скрытого тепла. Ничего такого не было обнаружено в измерениях теплоемкости.

Тщательное изучение намагниченности чистого ниобия, проведенное недавно Серином¹⁵, заставляет скорее считать, что переход принадлежит к так называемому λ -типу, с логарифмической зависимостью намагниченности от поля вблизи H_{c1} . Когда внешнее поле становится больше H_{c1} , вихри образуют упорядоченную структуру, чтобы уменьшить энергию взаимодействия. Подробный расчет полной энергии показал, что в смешанном состоянии наиболее выгодная структура является треугольной. Это было продемонстрировано наиболее прямо и убедительно Кривье и сотрудниками¹⁶, которые сравнивали дифракцию очень медленных нейтронов на образце в смешанном состоянии с дифракцией на том же образце в нормальной фазе.

Нейтроны рассеиваются вследствие взаимодействия их магнитных моментов с полем в вихре. Угол рассеяния численно весьма близок к отношению длины волны нейтрона к расстоянию между вихрями. Даже для самых медленных тепловых нейтронов первая величина не превышает 5 Å, а вторая превосходит ее более чем в 100 раз. Таким образом, угол рассеяния порядка лишь нескольких угловых минут и пики очень трудно наблюдать.

Чем больше возрастает поле сверх H_{c1} , тем теснее сближаются вихревые нити. Последнее очевидно из выражения для свободной энергии: член $-\bar{B}H/4\pi$ делает все более выгодным увеличение \bar{B} с ростом H . Это приводит к магнитному давлению, возникающему во все более плотной упаковке вихрей, и соответствующему росту их энергии взаимодействия.

Для полей значительно выше H_{c1} использованная до сих пор простая модель становится непригодной, поскольку теперь уже нельзя пренебрегать вкладом сердцевин вихревых линий в энергию. При этом мы принуждены вновь вернуться к уравнениям Гинзбурга — Ландау. Ниже следующее рассмотрение основано на подходе де Жена¹⁷.

Когда H лишь немного меньше H_{c2} , значение ψ_L , удовлетворяющее полному нелинейному уравнению Гинзбурга — Ландау, должно быть очень близко к значению ψ_L , удовлетворяющему линеаризованному уравнению

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}_0}{c} \right)^2 \psi_L = -\alpha\psi_L,$$

где $\text{rot } \mathbf{A}_0 = \mathbf{H}_{c2}$. Таким образом, мы предполагаем, что ψ_L удовлетворяет уравнению

$$\alpha\psi_L + \beta|\psi_L|^2\psi_L + \frac{1}{2m} \left(\frac{-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}}{c} \right)^2 \psi_L = 0.$$

Оказывается возможным сделать несколько общих утверждений о функции ψ_L без детального знания ее вида. Умножая уравнение на ψ_L^* и интегрируя по объему сверхпроводника, получаем

$$\alpha \overline{|\psi_L|^2} + \beta \overline{|\psi_L|^4} + \frac{1}{2m} \overline{\left| \left(\frac{-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}}{c} \right) \psi_L \right|^2} = 0,$$

где $\overline{X} = \int X d^3r / \int d^3r$; мы использовали интегрирование по частям для преобразования последнего члена слева.

Упростим теперь полученное выражение, используя тот факт, что ψ_L удовлетворяет линеаризованному уравнению. Это можно сделать, положив

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1,$$

где \mathbf{A}_0 — вектор-потенциал, соответствующий однородной индукции \mathbf{H}_{c2} , \mathbf{A}_1 — малая добавка, обязанная небольшому изменению плотности потока из-за наличия сверхпроводящих токов в вихрях. В первом порядке по \mathbf{A}_1 и при использовании линеаризованного уравнения написанное выше выражение принимает вид

$$\beta \overline{|\psi_L|^4} - \frac{1}{c} \overline{\mathbf{A}_1 \mathbf{j}_L} = 0,$$

где

$$\mathbf{j}_L = \frac{e}{m} \psi_L^* \left(\frac{-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}_0}{c} \right) \psi_L + \text{к.с.}$$

Это и есть ток, связанный с решением ψ_L . Полагая

$$\mathbf{b}_1 = \text{rot } \mathbf{A}_1, \quad \text{rot } \mathbf{b}_s = \frac{4\pi \mathbf{j}_L}{c}$$

и интегрируя по частям, получаем

$$\beta \overline{|\psi_L|^4} - \frac{\overline{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_s}}{4\pi} = 0. \quad (1)$$

Из определения следует, что

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{H} - \mathbf{H}_{c2} + \mathbf{b}_s. \quad (2)$$

Далее, мы уже говорили при описании вихрей (и это может быть показано формально), что поверхности токов \mathbf{j}_L совпадают с поверхностями $|\psi_L(\mathbf{r})|^2 = \text{const}$, т. е. $\mathbf{j}_L = (e\hbar/m) [\hat{\mathbf{k}}\nabla] |\psi_L|^2$, где $\hat{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, парал-

лельный магнитному полю. Следовательно, поскольку

$$\text{rot } \mathbf{b}_s = \frac{4\pi \mathbf{j}_L}{c},$$

мы имеем

$$\mathbf{b}_s = -\frac{4\pi e\hbar}{mc} \hat{\mathbf{k}} |\psi_L|^2.$$

Учитывая это и уравнения (1) и (2), приводим условие нормировки к виду

$$\beta |\psi_L|^4 + \frac{e\hbar}{mc} |\psi_L|^2 \left[H - H_{c2} - \frac{4\pi e\hbar}{mc} |\psi_L|^2 \right] = 0.$$

Вновь вводя приведенные переменные, полагая

$$|\psi_L| = f\psi_0$$

и используя определение

$$\kappa = \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{mc}{2e\hbar},$$

получаем

$$\bar{f}^4 \left(1 - \frac{1}{2\kappa^2} \right) - \bar{f}^2 \left(1 - \frac{H}{H_{c2}} \right) = 0.$$

Это уравнение справедливо вблизи H_{c2} , в независимости от вида ψ_L и, в частности, независимо от вида решетки, образованной вихревыми линиями. Последний результат был получен также Абрикосовым¹³, использовавшим менее общий вид ψ .

Это позволяет нам написать выражения для ряда важных величин вблизи H_{c2} . Средняя плотность потока есть среднее от микроскопического $B = H + b_s$, т. е.

$$\bar{B} = H + \bar{b}_s = H - \frac{4\pi e\hbar}{mc} \overline{|\psi_L|^2} = H - \frac{H_c}{\sqrt{2}\kappa} \bar{f}^2.$$

Средняя свободная энергия на единицу объема есть

$$\bar{F} = -\frac{\beta}{2} \overline{|\psi_L|^4} + \frac{\bar{B}^2}{8\pi} = -\frac{H_c^2 \bar{f}^4}{8\pi} + \frac{\bar{B}^2}{8\pi}.$$

Это можно привести к виду

$$\bar{F} = \frac{(\bar{B})^2}{8\pi} - \frac{(H_{c2} - \bar{B})^2}{4 + (2\kappa^2 - 1)\beta_2},$$

где $\beta_L = \bar{f}^4/(\bar{f}^2)^2$ — численная постоянная, близкая к единице, зависящая от конкретного вида решения, но не от \bar{B} .

Отсюда и из соотношения $d\bar{F}/d\bar{B} = H/4\pi$ следует, что

$$\bar{M} = \frac{\bar{B} - H}{4\pi} = \frac{H - H_{c2}}{\beta_L(2\kappa^2 - 1)} \quad \text{и} \quad \frac{d\bar{M}}{dH} = \frac{1}{\beta_L(2\kappa^2 - 1)}.$$

Простая модель смешанного состояния была недавно предложена Росурфом¹⁸. Она основана на предположении, что угловой момент каждой пары электронов, входящий в теорию сверхпроводимости, равен одной атомной единице, т. е. \hbar . Каждая пара имеет магнитный момент, соответствующий этому угловому моменту, равный магнетону Бора $e\hbar/2mc$. В присутствии внешнего поля доля дипольных моментов, расположенных в данный момент параллельно полю, не равна доле моментов, расположенных против поля. Максимальный диамагнитный момент на

единицу объема равен тогда плотности диполей $n_s/2$ (n_s — плотность электронов), умноженной на момент каждого диполя, т. е.

$$M_{\max} = -\frac{\hbar_s}{2} \frac{e\hbar}{2mc} = -\frac{\Phi_0}{(4\pi\lambda_L)^2},$$

где $\lambda_L^2 = mc^2/4\pi n_s e^2$. Следовательно, максимальное внешнее поле, которое можно заэкранировать от внутренних частей, есть $-4\pi M_{\max} = \Phi_0/4\pi\lambda_L^2$. Это следует сравнить с выражением для H_{c1} , полученным выше для модели вихрей де Жена и результатом Абрикосова,

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L^2} (\ln \kappa + 0,08).$$

Выше H_{c1} Росуорф предполагает, что внутри сверхпроводника образуются нормальные цилиндры радиуса ξ ; каждый цилиндр несет поток Φ . Число цилиндров на единицу площади перпендикулярно к полю равно \bar{B}/Φ , поэтому объем диамагнитного материала уменьшается на множитель $(1 - \pi\xi^2\bar{B}/\Phi)$. Предполагается, что нормальные цилиндры не дают вклада в магнитный момент, так что средняя намагниченность есть $\bar{M} = -(H_{c1}/4\pi)(1 - \pi\xi^2\bar{B}/\Phi)$. Учитывая, что $B = H + 4\pi M$, это дает $\bar{M} = -(H_{c2} - H)/4\pi [(H_{c2}/H_{c1}) - 1]$, где $H_{c2} = \Phi/4\pi\xi^2$. Полагая $M = -H/4\pi$ при $H < H_{c1}$, написанный выше результат при $H_{c1} < H \leq H_{c2}$ дает

$$\frac{H_{c2}^2}{8\pi} = -\int_0^{H_{c2}} \bar{M}(H) dH = \frac{H_{c1}H_{c2}}{8\pi}.$$

Выражение для намагниченности становится $\bar{M} = (H - H_{c2})/4\pi(2\chi^2 - 1)$, где предполагается, что $\Phi = \Phi_0$ и $\chi = \lambda_L/\xi$. Это следует сравнить с упомянутым выше результатом Абрикосова, полученным из уравнений Гинзбурга — Ландау.

Хотя в более детальной теории Абрикосова подробно анализируются некоторые аспекты, которые предполагаются или игнорируются в этой модели, интересно, что общие результаты можно получить таким прямым путем. Росуорф недавно обобщил модель и учел магнитные эффекты, возникающие из-за движения центров масс пар; при этом получается хорошее согласие с экспериментами Кардона и др.¹⁹ по барьерным эффектам при прохождении потока через поверхность сверхпроводника.

Мы видели, что параметр κ теории Гинзбурга — Ландау характеризует магнитное поведение сверхпроводников II рода в различных условиях. Он определяет отношение H_{c1} к H_{c2} и H_{c2} к H_c , он также входит в выражение для наклона кривой намагниченности вблизи H_{c2} . Вблизи T_c значения κ , полученные для данного образца из этих трех соотношений, должны быть одинаковыми. Действительно, это было продемонстрировано тщательными измерениями намагниченности образцов из хорошо отожженных сплавов^{20, 21}, что подтвердило также, в основном, форму и обратимость кривой намагниченности, предсказываемые теорией Абрикосова. Найденные таким способом значения κ равны величине, которую можно считать фундаментальной характеристикой данного образца, а именно — отношению глубины проникновения к длине когерентности. Это отношение можно связать с величинами, описывающими поведение сверхпроводника на микроскопическом уровне.

Феноменологический подход Гинзбурга — Ландау строго применим лишь в узком интервале температур непосредственно ниже T_c . Это происходит по ряду причин. Прежде всего простой вид коэффициентов α и β

в разложении свободной энергии по степеням параметра порядка справедлив лишь очень близко к T_c . Кроме того, масштаб изменения параметра порядка должен быть велик по сравнению с масштабом когерентности, $\xi(T) \gg \xi_0$, а это опять справедливо лишь очень близко к T_c . Наконец, локальную связь между плотностью сверхпроводящего тока и векторным потенциалом можно использовать, лишь когда последний

меняется медленно на расстояниях порядка ξ_0 , т. е. $\lambda(T) \gg \xi_0$, что происходит вблизи T_c .

В последние годы теория была распространена в область меньших температур²²⁻²⁴, приводя к различным температурным зависимостям значений κ , полученных из рассмотрения разнообразных особенностей кривой намагниченности. Удобно следовать Маки и определить

$$\sqrt{2} \kappa_1(T) = \frac{H_{c2}(T)}{H_c(T)};$$

$\kappa_2(T)$ — значение, полученное из dM/dH вблизи H_{c2} , и $\kappa_3(T)$ — значение, полученное из $H_{c1}(T)$.

В пределе малости средней длины свободного пробега электронов теория предсказывает, что κ_1 и κ_2 медленно растут с уменьшением температуры, меняясь аналогичным образом, хотя и не остаются равными*). Это было доказано экспериментами на сплавах. Однако при переходе к чистым металлам такого согласия нет. Как калориметрические, так и магнитные измерения на чистом

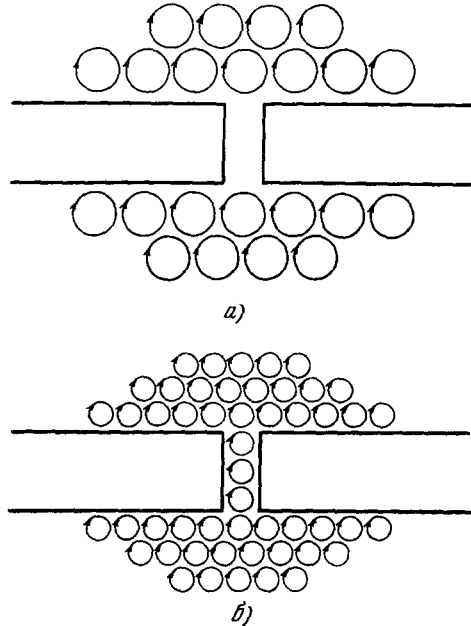


Рис. 6. Распределение вихрей в тонкой пленке (по²⁸).

а) При малых полях вихри слишком велики, чтобы поместиться в узкую щель, соединяющую две более массивные части пленки; б) при некотором поле вихри в состоянии поместиться в щель, с одновременным уменьшением свободной энергии системы.

ниобии^{25, 26} показывают, что $\kappa_1(T)$ возрастает примерно на половину при $T \rightarrow 0$, в то время как расчет предсказывает поведение ниобия, гораздо более близкое к случаю сплавов, когда $\kappa_1(T)$ возрастает примерно лишь на 20%. Более того, экспериментально найдено, что $\kappa_2(T)$ растет с уменьшением температуры также и в чистом случае, где теория предсказывает убывание.

Мы завершим настоящую главу замечанием, что вихревые токи могут при определенных условиях иметься и в сверхпроводниках I рода, а именно, когда сверхпроводник имеет форму тонкой пленки, перпендикулярной к магнитному полю, по величине несколько меньшему, чем необходимо для полного разрушения сверхпроводимости. Тинкхэм²⁷ обнаружил, что в этой ситуации квантование флюксоида играет определяющую роль. Он провел анализ на основе теории Гинзбурга — Ландау и предсказал изменение критического поля с углом наклона поля к поверхности образца, а также зависимость критического поля от температуры при поле, перпендикулярном к пленке.

*) Расчет, проведенный С. Caroli, М. Cyrot, Р. G. de Gennes (Solid State Comm. 4, 17 (1966)), показал, что для грязных сверхпроводников параметры κ_1 и κ_2 совпадают. (Прим. перев.)

Паркс и др.²⁸ недавно проделали эксперименты, в которых, как оказалось, температура перехода части тонкой пленки в перпендикулярном сильном поле зависела от размера вихрей. Пленка была однородна по толщине, но имела форму, изображенную на рис. 6. Возрастание температуры перехода мостика, соединяющего две более массивные части, наблюдалось при достижении магнитным полем значения, при котором вихри были достаточно малого диаметра, чтобы поместиться в мостике. По-видимому, это происходило по причине уменьшения свободной энергии системы, когда вихри получали возможность распространяться в мостике. Мы еще вернемся к обсуждению других экспериментов на тонких пленках, которые значительно прояснили наше понимание смешанного состояния.

VIII. ПОВЕРХНОСТНАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

В течение многих лет экспериментаторы наблюдали, что в некоторых металлах сверхпроводимость, регистрируемая по измерению сопротивления, сохранялась в магнитных полях, превышающих поле, необходимое для восстановления диамагнитного момента образца до его значения в нормальном состоянии. Это явление в общем приписывалось напряжениям или неоднородностям в образце, которые приводят к поведению металла, отличному от поведения чистой системы. Однако Сэн-Жам и де Жен²⁹ показали, что когда внешнее приложенное поле параллельно поверхности сверхпроводника, вблизи поверхности имеется слой толщины $\sim \xi$, в котором сохраняется сверхпроводимость вплоть до поля $H_{c3} = 1,69 \sqrt{2} \kappa H_c$. Этот результат был получен с помощью рассмотрения, аналогичного описанному в гл. VII при получении выражения $H_{c2} = \sqrt{2} \kappa H_c$, дающего максимальное поле, при котором происходит образование сверхпроводящих зародышей в нормальном металле. Поверхностные эффекты в том выводе не учитывались. Однако решение уравнений Гинзбурга — Ландау вблизи поверхности весьма отличаются от решения в толще образца и если магнитное поле параллельно поверхности, сверхпроводимость может зародиться при максимальном поле H_{c3} . С тех пор были проведены многочисленные эксперименты, подтвердившие существование поверхностного слоя в сверхпроводящем материале и во многих случаях получено численное согласие с количественной оценкой для H_{c3} . Розенблюм и Кардона³⁰ нашли, что поверхностная сверхпроводимость может также иметь место в сверхпроводниках I рода, поскольку хотя в них $\kappa < 1/\sqrt{2}$, но величина $1,69 \sqrt{2} \kappa$ может быть больше единицы, т. е. $\sqrt{2} \kappa H_c < H_c < 1,69 \sqrt{2} \kappa H_c$.

Если магнитное поле наклонено под углом θ к поверхности, сверхпроводящий слой разрушается в полях, меньших H_{c3} . Когда $\theta = 90^\circ$, критическое поле равно H_{c2} . Сэн-Жам³¹ получил решение уравнений Гинзбурга — Ландау вблизи поверхности во всем интервале углов $0 \leq \theta \leq 90^\circ$.

Расчет Тинкхэма²⁷ перехода в тонких пленках, упомянутый в предыдущей главе, хорошо согласуется с этим точным решением лишь для толщин пленки, много меньших ξ .

Можно было бы считать, что в экспериментах, проведенных на цилиндрических образцах с осью параллельно магнитному полю, внешние сверхпроводящие области цилиндра играют роль идеально проводящего слоя, экранирующего магнитный поток, и не позволяют магнитному потоку проникать внутрь образца, пока внешнее магнитное поле не достигнет H_{c3} . Простой расчет показывает, что положительный магнитный вклад в свободную энергию, обязанный выталкиванию поля, намного превосходит отрицательный вклад, связанный с энергией конденсации поверхностного слоя ($H_{c2} < H < H_{c3}$), так что такая картина выталки-

вания магнитного потока будет термодинамически нестабильной. Таким образом, мы приходим к представлению о максимальном, или критическом, результирующем потоке, который может нести поверхностный слой. Если бы плотность потока была одинаковой на обеих сторонах слоя, внутри и вне цилиндра, то имелись бы диамагнитные токи, экранирующие внутреннюю часть слоя от магнитного поля, но полный ток отсутствовал бы. Постепенное увеличение внешнего поля привело бы к появлению результирующего тока, пропорционального разности плотностей потока внутри и снаружи; при этом ток в конце концов достигнет критического значения, после чего поток внутри цилиндра возрастет. За исключением весьма тщательных экспериментов Сэндифорда и Швейцера³², измерения магнитного момента на массивных образцах, которые обязаны были бы иметь сверхпроводящие поверхностные слои, всегда указывали на отсутствие какого-либо экранирования поверхностными слоями. Экранирование проявило бы себя очевидным гистерезисным поведением. В смешанном состоянии с $H_{c1} < H < H_{c2}$ отсутствие вихрей в области толщиной ξ вблизи поверхности приводило бы и здесь к наличию небольших экранирующих эффектов, так же как в случае $H_{c2} < H < H_{c3}$. На практике при измерениях магнитного момента на массивном образце эти эффекты замаскированы наличием замороженного внутри потока, определяющего гистерезисные явления.

Росуорф³³ развил простую модель, упомянутую в главе VII, в которой орбитальное движение электронных пар вокруг их центров масс трактуется иначе, чем движение самих центров масс. Он предсказал, что высокочастотный импеданс должен изменяться линейно с полем в интервале между H_{c2} и H_{c3} . Такое поведение было недавно наблюдено Карлсоном³⁴ в измерениях поверхностного реактанса при 2 *Mcyc/sec* и Гиттлеманом и Розенблюмом³⁵ в измерениях микроволнового поверхностного сопротивления. Линейный ход поверхностного импеданса был предсказан также Маки³⁶ из решения уравнения Горькова⁸ для случая поверхностного слоя очень грязных сверхпроводников. Однако даже наиболее грязные из изученных до настоящего времени систем, по-видимому, еще недостаточно грязны, чтобы можно было применить развитую теорию.

IX. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ

Явления, обсужденные в предыдущих главах, относились к равновесному состоянию сверхпроводников II рода — параметр порядка считался меняющимся пространственно, но не во времени, а соответствующая свободная энергия системы минимизировалась для нахождения состояния термодинамического равновесия. В этой главе мы рассмотрим эффекты, в которых параметр порядка зависит также и от времени. В идеале можно было бы стремиться получить из микроскопической теории не только решение, найденное Абрикосовым (см. гл. VII) и применимое к равновесным системам, но также и решения, которые применимы при возмущениях равновесия приложенным внешним полем или которые описывали бы переходные процессы при изменении магнитного поля от одного статического значения к другому. Хотя микроскопический подход и привел к некоторым успехам, все же более ясная физическая картина динамических эффектов возникает из гидродинамического описания движения вихрей через сверхпроводящую жидкость. Экспериментальные результаты во многих случаях усложнены наличием структурных дефектов в металле. Мы ограничимся главным образом обсуждением ситуаций, где имеется вполне четкое существенное согласие или расхождение с предсказаниями вихревой модели.

1. Стационарное течение магнитного потока

В эксперименте было обнаружено, что при прохождении стационарного тока через сверхпроводник II рода, находящийся в смешанном состоянии, может появиться электрическое сопротивление, хотя большая часть материала при этом является сверхпроводящей³⁷. Интерпретация этого результата на основе представления о движении магнитного потока сыграла важную роль в развитии моделей движения вихрей³⁸.

На рис. 7 изображено падение потенциала на сверхпроводниках II рода $Nb_{50}Ta_{50}$ и $Pb_{83}In_{17}$ как функция тока при различных значениях магнитного поля. При малых токах сопротивления не обнаруживается. По мере роста тока появляется падение напряжения, указывая на наличие электрического поля внутри сверхпроводника. Это поле генерируется электромагнитной индукцией благодаря движению вихрей, либо индивидуальных либо объединенных в группы. Вихри вынуждаются к движению силой, которую несколько двусмысленно называют «силой Лоренца», имеющей вид $[J\Phi_0]/c$ на единицу длины вихря, где J — плотность приложенного, или транспортного, тока, Φ_0 — поток в вихре. Это выражение было получено Фриделем и др.³⁹ из термодинамических соображений. Можно отметить, что эта сила противоположна по направлению силе Лоренца $[JB]/c$ на единицу объема, которая действует на носители тока, проходящие сквозь поток в вихре. То, что некоторая осторожность необходима при использовании простого классического подхода для описания заряженной частицы, движущейся в магнитном поле, очевидно из попытки рассмотреть движение электронов в единенном вихре. Для объяснения движения тока по круговым орбитам необходимо привлечь наряду с силой Лоренца еще какую-то силу. В следующем разделе мы вернемся к обсуждению природы этих сил.

При малых токах «сила Лоренца» недостаточна для преодоления сил, удерживающих вихри у дефектов в кристаллической решетке. Вероятность того, что вихри покинут свои потенциальные ямы, растет с увеличением тока, а также с увеличением температуры. При больших токах удерживающий механизм играет малую роль и вихри «текут», т. е. движутся сквозь металл со скоростью, ограниченной вязкой силой, которую мы обсудим позже. Движение потока при промежуточных значениях

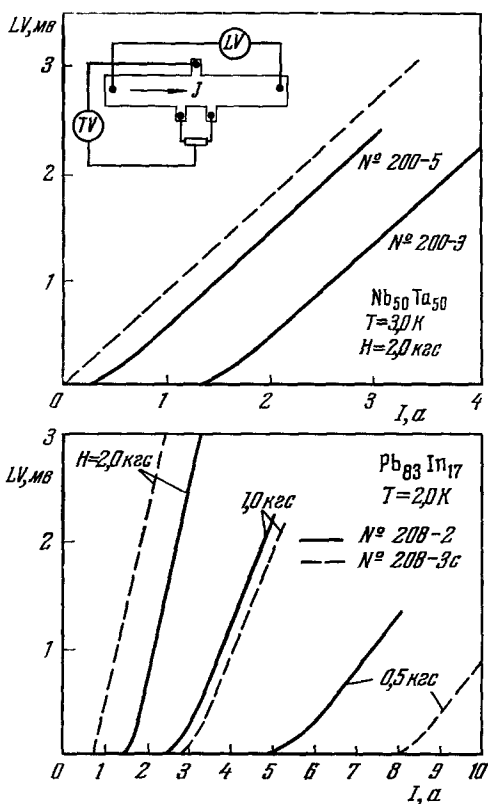


Рис. 7. Сопротивление двух различных сверхпроводников II рода, вызванное течением потока (по³⁷).

тока происходит путем «просачивания потока», процесса, при котором вихри часть времени «текут», а остальное время захвачены дефектами.

Кроме характеристик, указанных на рис. 7, было найдено, что удельное сопротивление изменяется с полем как $\rho/\rho_n = H/H_{c2}$. Из теории Абрикосова следует, что $H \sim B \sim \Phi_0/d^2$, где d — среднее расстояние между вихрями, а $H_{c2} \sim \Phi_0/\xi^2$, так что $H/H_{c2} = \xi^2/d^2$ (доля объема, находящегося в нормальном состоянии). Отсюда следует, как было показано Карбли и др.¹⁴, что сердцевину вихря можно представлять себе в виде цилиндра радиуса ξ , состоящего из нормального материала. Изменение удельного сопротивления с полем, таким образом, пропорционально доле нормального металла и приводит к неожиданному выводу, что ток течет однородно сквозь нормальные и сверхпроводящие части вместо того, чтобы избегать нормальных сердцевин и проходить лишь сквозь сверхпроводящие участки. Микроволновые измерения поверхностного сопротивления⁴⁰ также подтверждают этот вывод. Мы вернемся к обсуждению этого результата в следующем разделе.

Тот факт, что электрическое сопротивление в сверхпроводниках II рода, по-видимому, возникает из-за электромагнитной индукции, вызывал серьезные недоумения и споры. Упомянутые выше эксперименты были проведены в стационарных условиях, так что поток сквозь измерительную цепь не менялся во времени. С другой стороны, имелось движение потока сквозь сверхпроводник, из-за которого возникало электрическое поле внутри сверхпроводника. Наиболее ясное и общее объяснение этого парадокса было дано Джозефсоном⁴¹, показавшим, что в стационарном состоянии разность в электрохимическом потенциале между двумя точками в сверхпроводнике равна скорости изменения, с которой поток пересекает линию в сверхпроводнике, соединяющую две точки. Этот подход основан на предположении, что движущая сила для тока в сверхпроводнике пропорциональна электрическому полю и градиенту химического потенциала μ_c , т. е. что

$$\frac{\partial j_s}{\partial t} \propto eE - \nabla \mu_c \quad \text{или} \quad \frac{\partial j_s}{\partial t} \propto -\nabla \mu - \frac{e}{c} \frac{\partial A}{\partial t},$$

где $\mu = \mu_c + eV$ — электрохимический потенциал, а V — скалярный электрический потенциал. Это предположение, по-видимому, приводит к правильному объяснению наблюдаемого термоэлектрического и магнетозлектрического поведения сверхпроводников (см. также⁴²) и находится в согласии с теорией, упомянутой в последнем абзаце этого раздела.

Можно отметить, что движение потока квантовыми порциями не означает, что поток входит с одной стороны сверхпроводника и выходит с другой. Когда вихрь приближается к границе, распределение его токов уже не круговое, поскольку ток не может пересекать границу. Аналогично тому, как учитывается наличие границ в электростатике и магнитостатике в методе изображений, действительное распределение токов в сверхпроводнике можно найти путем суперпозиции токов двух невозмущенных вихрей, одного — расположенного в центре реального вихря, а другой представляет собой зеркальное изображение первого относительно границы сверхпроводника. Когда центр вихря приближается к границе, происходит перекрытие токов двух продольных вихрей. Поскольку их направления вращения противоположны, они стремятся компенсировать друг друга. В конце концов первый вихрь полностью аннулируется вторым, когда они оба достигают границы. Пучок вихрей не выходит из сверхпроводника, а постепенно пропадает.

2. Движение вихрей

Целый ряд выводов из перечисленных выше экспериментов был получен с помощью гидродинамического описания движения единичного вихря, движущегося сквозь сверхпроводящую электронную жидкость^{43, 44}. Исходным пунктом этих теорий было применение уравнения Эйлера: $\rho [\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}] =$ полной плотности сил, к сверхпроводящей жидкости, которая предполагалась подчиняющейся уравнению Лондона (см. гл. III) в каждой точке, за исключением сердцевин вихря. Самосогласованное внутреннее электромагнитное поле в этом случае аналогично градиенту давления, дающему важный вклад в плотность сил в незаряженной невязкой классической жидкости. Рассматривалась задача об изолированном вихре с протекающим по нему транспортным током. Согласно уравнению Эйлера поля в сверхпроводящей жидкости связаны с движением вихрей: поле и ток в сердцевине вихря связаны с полями в окружающей сверхпроводящей жидкости условиями непрерывности на границе сердцевин. Первый из двух упомянутых выше подходов приводит к неожиданному результату, о котором говорилось в предыдущем разделе, что плотность приложенного или транспортного тока одинакова как в сердцевине вихря, так и вне его, т. е. ток течет одинаково в нормальных и сверхпроводящих частях. Это равенство плотности тока принимается во втором подходе как единственное упрощающее вычисления предположение и приводит к наличию сопротивления того же порядка, что и наблюдается на опыте. Объясняется также зависимость сопротивления, связанного с движением магнитного потока, от магнитного поля.

Мы резюмируем здесь теоретические предсказания в отношении действительного движения вихря под действием вынуждающей силы, обусловленной наличием транспортного тока, и вязкой силы, возникающей в результате диссипаций энергии внутри и снаружи сердцевин вихря. Бардин и Стивен получили соотношение $v_{L \parallel \tau} = v_{L \perp \tau} \operatorname{tg} \alpha = v_{\tau} H / H_{c2}$, где $v_{L \parallel \tau}$ и $v_{L \perp \tau}$ — составляющие скорости вихревой нити, а v_{τ} — дрейфовая скорость транспортного тока. Относительные ориентации этих двух скоростей и скорости электронов в сердцевине v_c иллюстрируются на рис. 8. При этом E_c — однородное электрическое поле в сердцевине вихря, J_{τ} — плотность транспортного потока (параллельно v_{τ}), а F_L — «сила Лоренца»; α — холловский угол для нормальной сердцевин, находимый из соотношения $\alpha = \omega_c \tau$, где $\omega_c = eB/m$, а τ — время релаксации в нормальном состоянии. В случае очень грязных металлов $\omega_c \tau \ll 1$, и нить движется перпендикулярно к току в направлении «силы Лоренца». В другом крайнем случае, когда $\omega_c \tau \gg 1$, нить движется вместе с транспортным током, как можно ожидать, по аналогии с классической жидкостью. Твердый цилиндр, помещенный в первоначально однородный поток жидкости, движущейся со скоростью v_1 с осью перпендикулярно к направлению течения жидкости, подвержен действию силы, направленной перпендикулярно как к оси цилиндра, так и к v_1 . Эта сила называется

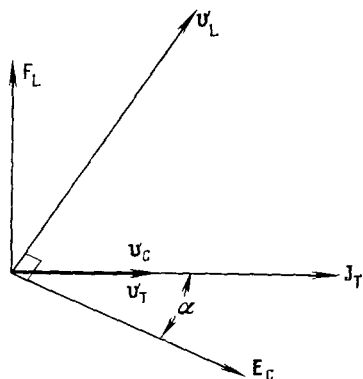


Рис. 8. Относительные ориентации «силы Лоренца» F_L , электрического поля E_c и дрейфовой скорости v_c в сердцевине вихря, а также скорости наложенного сверхпроводящего течения v_T (параллельно транспортному току J_T) (по⁴³).

силой Магнуса и ее величина равна $\rho k v_1$ на единицу длины цилиндра, где $k = \oint v dl$ — циркуляция жидкости вокруг цилиндра (контур интегрирования проходит на малом расстоянии вне цилиндра), а ρ — плотность жидкости. Если цилиндр движется со скоростью v_L , сила Магнуса принимает вид $\rho k |v_1 - v_2|$. В стационарных условиях полная сила равна нулю, поэтому цилиндр движется вместе с жидкостью и $v_L = v_1$. Аналогично этому сердцевину вихря в сверхпроводящей жидкости можно считать твердым цилиндром и получить такое же поведение для движения вихревой нити. Следует отметить, что сила Магнуса той же природы, что и центробежная сила в круговом движении, и она должна обеспечиваться некоторой физической причиной. В случае классической жидкости она возникает из-за градиента давления. В сверхпроводнике она вызывается действием электромагнитного поля.

Аналогия с классической жидкостью подсказывает, что в чистых сверхпроводниках II рода возможно обнаружить эффект Холла в смешанном состоянии, с большим значением угла Холла⁴⁵. (Угол Холла в сверхпроводниках I рода равен нулю.) Упомянутое выше теоретическое исследование предсказывает величину угла Холла, равную углу в нормальном металле в магнитном поле, равном полю в сердцевине вихря. Недавние наблюдения на сверхпроводниках II рода^{46, 47} показали, что угол Холла большой, но не столь велик, как в нормальном состоянии, возможно, из-за эффектов задержки вихрей на дефектах, препятствующих их свободному движению под действием вынуждающей и вязкой сил. Детального сравнения теории со сложными результатами, сообщенными в первой из цитированных работ, пока не производилось.

3. Волны вдоль вихрей

Если натянутую струну вывести из положения равновесия, то в ней возникают колебания, которые можно описать в терминах бегущих вдоль струны волн. Аналогично, при возмущении вихревой линии от ее положения равновесия в магнитном поле, например путем пропускания локализованного импульса тока вблизи некоторой части вихря, она должна начать прецессировать вокруг напряжения стационарного поля. Это движение можно описать в терминах циркулярно поляризованных волн, распространяющихся вдоль вихря. Вывод соответствующего волнового уравнения был дан де Женом⁵. Поиск таких волн в смешанном состоянии сверхпроводников II рода был предпринят в ряде лабораторий, однако не привел к успеху (см., например, статью Борчердса и др.⁴⁸). Анализ ситуации, проведенный Нозье и де Женом⁴⁴, а также Бардином и Стивенсом⁴³, показал, что критерий для распространения таких волн есть $\omega_c \tau \gg 1$, где ω_c — циклотронная резонансная частота, eB/m , при индукции B , равной плотности потока в сердцевинах вихрей в смешанном состоянии; τ — время релаксации в нормальном состоянии металла. Во всех изучавшихся до сих пор случаях $\omega_c \tau$ было много меньше единицы (в большинстве случаев в качестве сверхпроводников II рода использовались сплавы с малым значением τ). При этом наибольшее поле, при котором еще можно изучать смешанное состояние, т. е. H_{c2} , было относительно мал по сравнению со значениями полей, при которых проявляются магнитные свойства нормальных металлов.

Рассмотрение движения вихрей является, конечно, удобной моделью при анализе временных изменений параметра порядка в смешанном состоянии. Нозье и де Жен⁴⁹ рассматривали также движение «трубок потока» — таких, какие могут быть образованы в промежуточном состоя-

нии сверхпроводников I рода (см., например, ⁵⁰). Они предсказали, что при движении фазовой границы в такой ситуации вновь возникает возможность распространения циркулярно поляризованных волн, имеющих закон дисперсии $q^2 = \omega/\lambda_L^2 \omega_0$. Здесь q и ω — соответственно волновой вектор и угловая частота волны, $\lambda_L^2 = mc^2/4\pi ne^2$ — циклотронная резонансная частота, соответствующая плотности потока H_c (критическое поле), в независимости от величины внешнего поля H , если только $H \ll H_c$. Эта формула аналогична дисперсионной формуле для геликондальных волн ⁵¹ в нормальном металле, с тем лишь отличием, что ω_0 там заменяется на циклотронную частоту в поле H . Методы возбуждения и обнаружения таких волн подобны имеющимся в случае геликонов. Циркулярно поляризованные волны с зависимостью дисперсии от внешнего поля, похожей на предсказанную Нозье и де Женом, были наблюдаемы в очень чистом индии Хэйсом ⁵² и в последнее время Кушниром ⁵³, а также Максфилдом и Джонсоном ⁵⁴. Затухание этих волн было намного меньше того, что можно было бы ожидать в случае совокупности несвязанных цилиндрических сверхпроводящих областей. Отсюда следует некоторое указание на то, что в индии в промежуточном состоянии образуется филаментарная структура, типа обнаруженной Фабером ⁵⁰ в алюминии.

Эlegantное доказательство существования циркулярно поляризованных или прецессионных мод колебаний в промежуточном состоянии дали Нэнслер и Риндерер ⁵⁵. Они обнаружили, что наложение поля перпендикулярно к сверхпроводящему индиевому диску, на который был напылен мелкий порошок диамагнитного ниобия, приводило к возникновению спиральной картины проникновения потока (или его исчезновения при уменьшении поля). Аналогичный результат был получен в работе де Сорбо ⁵⁶, где использовался метод киносъемки поверхности, непосредственно под которой была помещена пластинка из фосфата церия с большим коэффициентом Фарадея. При падении линейно поляризованного света плоскость его колебаний вращалась на угол, величина которого зависела от плотности потока, выходящего из поверхности расположенного сразу под пластиной сверхпроводника.

4. Поверхностный барьер

В экспериментах на сверхпроводниках II рода было замечено, что имеется значительная необратимость; например, намагничение зависит не только от значения приложенного магнитного поля и температуры, но также и от предшествующих значений магнитного поля, от того, увеличивалось ли перед этим поле, или оно уменьшалось. Бин и Ливингстон ⁵⁷ предположили, что, кроме эффектов, связанных структурным дефектам, имеется собственная необратимость, вызванная наличием потенциального барьера для вихрей вблизи поверхности металла. По мере приближения вихря к границе он искажается, как обсуждалось выше, и притягивается к границе (между двумя противоположно направленными вихрями — неискаженным и его изображением — имеется притяжение). Однако если сверхпроводящий параметр порядка отличен от нуля, магнитная индукция убывает под поверхностью, приводя к градиенту магнитного давления, который отталкивает вихрь от поверхности. Вторая из этих двух сил преобладает, за исключением случая, когда вихрь близок к границе. В работе де Жена и Матрикона ⁵⁸ барьер вводился путем учета наличия границы при решении уравнений Гинзбурга — Ландау. Полученный результат состоит в том, что хотя энергетически образование вихря может быть выгодным в толще материала при достижении поля H_c , превышающего H_{c1} , однако зарождение вихря

на самой границе не происходит, пока не будет достигнуто поле $H = H_c$ — термодинамическое критическое поле. Убедительное подтверждение этого результата было получено в работе де Блуа и де Сорбо⁵⁹.

На основании изложенной модели можно ожидать, что вблизи поверхности всегда будет иметься меньшая плотность вихрей, чем в толще сверхпроводника. Другими словами, на расстоянии порядка ξ от границы не должно происходить уменьшения параметра порядка, как это имеет место вблизи сердцевины вихря; в то же время толщина материала может быть плотно упакована вихрями. Эти заключения следуют из детальных расчетов на основе уравнений Гинзбурга — Ландау (см. 60).

5. Движение вихрей в тонких пленках

Как уже упоминалось в главе VII, вихри могут возникать не только в сверхпроводниках II рода, но также и в тонких пленках сверхпроводников I рода в сильном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости пленки.

Из экспериментов на тонких сверхпроводящих мостиках⁶¹ следует любопытная связь между движением вихрей и более фундаментальной теоретической формулировкой динамических эффектов, в терминах временной зависимости параметра порядка $\psi(r)$. Согласно микроскопической теории сверхпроводимости (Горьков⁸) энергетическая щель Δ и, следовательно, параметр порядка электронов сверхпроводника, содержат изменяющийся со временем фазовый множитель $\exp(-2i\mu t/\hbar)$, где μ — электрохимический потенциал. Во многих случаях фаза не приводит к наблюдаемым эффектам, поскольку при измерениях, проводимых над системой, обычно существенны лишь величины типа $|\psi|^2$ или $\psi^*\nabla\psi$ и т. д. Однако фазовый множитель необходимо учитывать, например, в эффекте Джозефсона, где ток туннелирует из одного сверхпроводника в другой через разделяющий их изолирующий слой⁶². В частности, если между двумя сверхпроводниками имеется разность потенциалов V , то через изолирующий слой протекает переменный ток с частотой f , даваемой соотношением $hf = 2eV$. Тонкий сверхпроводящий мостик, очевидно, ведет себя так же, как изолирующий слой в туннельном эксперименте, обеспечивая слабую связь двух более массивных частей сверхпроводника по обе стороны мостика. При прохождении тока через мостик может возникнуть разность потенциалов, как это происходит в экспериментах по течению потока, благодаря движению вихрей в направлении, имеющему составляющую, перпендикулярную к приложенному току. В эксперименте Андерсона и Дэйма наложение осциллирующего с частотой f тока вызывало резонанс, по-видимому, с осцилляциями джозефсоновского типа, который проявлялся на кривых постоянное напряжение — ток в виде ступенек напряжения δV , причем $hf = 2e\delta V$. Андерсон и Дэйм указали, что такие эффекты можно попытаться объяснить, введя в рассмотрение, как они называют, «дополнительное» уравнение Гинзбурга — Ландау

$$4e\lambda_D^2\Delta V = i\hbar \left(\frac{\psi^* \partial\psi}{\partial t} - \frac{\psi \partial\psi^*}{\partial t} \right) - 4eV\psi\psi^*,$$

дающее явную зависимость ψ от времени. Здесь λ_D — длина дебаевского экранирования, связанная с лондоновской глубиной проникновения λ_L и фермиевской скоростью v_F соотношением $\lambda_D = \lambda_L v_F / \sqrt{3c}$. Феноменологический вывод этого уравнения был недавно дан Андерсоном и др.⁶³. Аналогичный результат получили Абрагамс и Цунето⁶⁴ при помощи обобщения теории Горькова⁸.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ СВЕРХПРОВОДНИКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Задачи магнетизма обычно формулируются в терминах магнитных полюсов либо амперовских токов. В последнем подходе магнитный материал гипотетически заменяют немагнитной средой, в которой имеется распределение токов, приводящих к такой же плотности потока в каждой точке пространства, какая существует в реальном случае. Если магнитный момент на единицу объема магнетика есть $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, то плотность амперовских токов дается выражением $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{M}(\mathbf{r})$. Как амперовские токи, так и токи проводимости (плотностью $\mathbf{J}_{\text{пров}}$) связаны с магнитным потоком соотношением $\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{\text{пров}})$. Магнитные свойства сверхпроводников возникают благодаря полям, генерируемым сверхпроводящими токами, текущими в сверхпроводнике. Последние не должны учитываться дважды, как амперовские токи, так и токи проводимости. Здесь мы предпочтем рассматривать их как амперовские токи, а плотность намагничивания связать с ними приведенным выше соотношением.

Чтобы избежать усложнений, возникающих из-за эффектов размагничивания, мы ограничимся рассмотрением образцов с пренебрежимо малыми коэффициентами размагничивания, такими как длинные тонкие цилиндры во внешнем поле, параллельном их осям.

Получим прежде всего выражение для свободной энергии Гельмгольца F , отнесенной к единице объема, используя то, что изменение F равно работе, совершенной над системой в течение изотермического перехода. Из теоремы Пойнтинга следует, что скорость изменения потока энергии через замкнутую поверхность, близко охватывающую границы сверхпроводника, такова:

$$\frac{dW}{dt} = - \left(\frac{c}{4\pi} \right) \int [\mathbf{E}\mathbf{B}] \mathbf{n} dS = \left(\frac{1}{4\pi} \right) \int \left(\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) d^3r + \int \mathbf{E}\mathbf{J} d^3r.$$

Предполагая, что электрическое поле существует лишь в течение переходной стадии установления магнитного поля, получим для работы, совершенной над сверхпроводником, выражение

$$\begin{aligned} \int (F(B, T) - F(0, T)) d^3r &= \int d^3r \left\{ \left(\frac{1}{4\pi} \right) \int_0^B \mathbf{B} d\mathbf{B} + \int_{-\infty}^0 \mathbf{E}\mathbf{J} dt \right\} = \\ &= \int d^3r \left\{ \frac{B^2}{8\pi} + \int_{-\infty}^0 \mathbf{E}\mathbf{J} dt \right\}, \end{aligned}$$

где верхний предел интегрирования B есть стационарная плотность потока, достигнутая к моменту $t=0$ в элементе объема d^3r .

Таким образом, можно положить *)

$$F(B, T) - F(0, T) = \frac{B^2}{8\pi} + \int_{-\infty}^0 \mathbf{E}\mathbf{J} dt.$$

Второй член представляет плотность кинетической энергии сверхпроводящего тока и равен работе, затраченной на создание тока. Термодинамический потенциал, минимум которого дает условие равновесия в присутствии фиксированного внешнего поля, есть свободная энергия Гиббса

$$G = \frac{F - \mathbf{H}\mathbf{B}}{4\pi},$$

где \mathbf{H} — плотность потока одного внешнего поля или напряженность магнитного поля. Таким образом,

$$G(B, T) - G(0, T) = \frac{B^2 - 2\mathbf{H}\mathbf{B}}{8\pi} + \text{плотность кинетической энергии.}$$

Та часть свободной энергии, которую имела бы система, будучи немагнитной, т. е. при $B = H$, не представляет интереса, и мы ее вычтем; в результате

$$G(B, T) - G(0, T) = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{H})^2}{8\pi} + \text{плотность кинетической энергии.}$$

*) В общем случае энергию системы нельзя представлять себе локализованной в определенных частях системы (см. 65).

Плотность кинетической энергии можно записать в различных видах. Например, если сверхпроводящий ток удовлетворяет уравнению Лондона $\Lambda \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \mathbf{E}$, где $\Lambda = 4\pi\lambda^2/c^2$, то

$$\int \mathbf{E} \mathbf{J} dt = \int \Lambda \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \mathbf{J} dt = \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \Lambda J^2 \right) dt = \frac{1}{2} \Lambda J^2. \quad (59)$$

Подставляя $\mathbf{J} = nev$ и $\Lambda = m/ne^2$, получаем

$$\frac{1}{2} \Lambda J^2 = n \left(\frac{1}{2} m v^2 \right).$$

С другой стороны, используя еще одно уравнение Лондона, $c\Lambda \mathbf{J} = -\mathbf{A}$, имеем

$$\frac{1}{2} \Lambda J^2 = \frac{ne^2 A^2}{2mc^2}.$$

Это следует сравнить с выражением, приведенным на стр. 500, и вспомнить, что в теории Гинзбурга—Ландау $n = |\psi|^2$.

Наконец, укажем связь между

$$dW = \int \left[\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} d\mathbf{B} + \int \mathbf{E} \mathbf{J} dt \right] d^3r$$

и более привычной формой для dW :

$$\begin{aligned} dW &= \int d^3r \left[\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} d\mathbf{B} + \int \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{M} dt \right] = \\ &= \int d^3r \left[\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} d\mathbf{B} + \int \mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{E} dt \right] + \int dt [\mathbf{E} \mathbf{M}] dS = \\ &= \int d^3r \left[\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} d\mathbf{B} - \int \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt \right] = \int d^3r \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} - \mathbf{M}) d\mathbf{B} = \int d^3r \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} d\mathbf{B} \end{aligned}$$

($\mathbf{M} = 0$ на поверхности интегрирования, которая расположена вне сверхпроводника).

Опять вычитая работу, которую пришлось бы совершить, если бы сверхпроводник был немагнитным, получим для вклада на единицу объема выражение $\mathbf{H} d\mathbf{M}/4\pi$.

* * *

Мы весьма признательны тем из авторов работ, упомянутых в списке литературы, которые сообщили нам свои результаты до их опубликования. Мы благодарим Д. Е. Карлсона за помощь в изготовлении рисунков. Мы признательны проф. Э. Абрагамсу и проф. П. Р. Вейссу, указавшим нам на некоторые неточности и неясности изложения, имевшиеся в рукописи.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. E. A. L y n t o n, Superconductivity, 2nd ed., Methuen, London, 1964.
2. A. B. P i p p a r d, The Dynamics of Conduction Electrons, в сб. «Low Temperature Physics» (C. De Witt, B. Dreyfus, and P.G. de Gennes, Eds.), Gordon and Breach, New York, 1962.
3. J. V a r d e e n, L. N. C o o p e r, J. R. S c h r i e f f e r, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).
4. F. L o n d o n, Superfluids, Vol. 1. Wiley, New York, 1950.
5. P. G. d e G e n n e s, Superconductivity of Metals and Alloys. Benjamin, New York, 1966 (см. перевод: М., «Мир», 1968).
6. В. Л. Г и н з б у р г, Л. Д. Л а н д а у, ЖЭТФ 20, 1064 (1950).
7. Л. Д. Л а н д а у, Е. М. Л и ф ш и ц, Статистическая физика, М., «Наука», 1964.
8. Л. П. Г о р ь к о в, ЖЭТФ 36, 1918 (1959); 37, 1407 (1959).
9. В. В. G o o d m a n, Rev. Mod. Phys. 36, 12 (1964).
10. A. B. P i p p a r d, Proc. Roy. Soc. A216, 547 (1953).
11. A. B. P i p p a r d, Proc. Cambridge Phil. Soc. 47, Pt. 3, 617 (1951).
12. R. V. D i n g l e, Proc. Roy. Soc. A211, 500 (1952).
13. А. А. А б р и к о с о в, ЖЭТФ 5, 1174 (1957); Phys. Chem. Solids 2, 199 (1957).
14. C. C a r o l i, P. G. d e G e n n e s, J. M a t r i c o n, Phys. Lett 9, 307 (1964).
15. В. S e r i n, Phys. Lett 16, 112 (1965).

16. D. Cribier, B. Jacrot, B. Farnoux, L. Madhav Rao, 11th Conf. on Magnetism and Magnetic Materials, San Francisco, 1965; J. Appl. Phys. **37**, 952 (1966).
17. P. G. de Gennes, Superconductivity of Metals and Alloys, Benjamin, New York, 1966.
18. A. Rothwarf, Phys. Lett. **16**, 217 (1965).
19. M. Cardona, J. Gittleman, B. Rosenblum, Phys. Lett. **17**, 92 (1965).
20. T. Kinsel, E. A. Lynton, B. Serin, Rev. Mod. Phys. **36**, 105 (1964).
21. G. Bon Mardion, B. B. Goodman, A. L. L. Casaze, Phys. Chem. Solids **26**, 1143 (1965).
22. Л. П. Горьков, ЖЭТФ **37**, 1407 (1959).
23. P. G. de Gennes, Phys. Condensed Matter **3**, 79 (1964).
24. K. Maki, Physics (N.Y.) **1**, 27 (1964).
25. T. McConville, B. Serin, Phys. Rev. **140**, A1169 (1965).
26. A. R. Strnad, Y. B. Kim (частное сообщение).
27. M. Tinkham, Phys. Rev. **129**, 2413 (1963); Rev. Mod. Phys. **36**, 268 (1964).
28. R. D. Parks, J. M. Mochel, L. V. Surgent, Jr., Phys. Rev. Letters **13**, 331a (1964).
29. D. Saint-James, P. G. de Gennes, Phys. Lett. **7**, 306 (1963).
30. B. Rosenblum, M. Cardona, Phys. Lett. **9**, 220 (1964).
31. D. Saint-James, Phys. Lett. **16**, 218 (1964).
32. D. J. Sandiford, D. G. Schweitzer, Phys. Lett. **13**, 98 (1964).
33. A. Rothwarf (частное сообщение, 1965).
34. D. E. Carlson (частное сообщение).
35. J. Gittleman, B. Rosenblum (частное сообщение).
36. K. Maki, On Surface Superconductivity in the Sub-Critical Region, Publ. coo-264. Univ. of Chicago, Chicago, Illinois, 1964.
37. Y. B. Kim, C. F. Hempstead, A. R. Strand, Phys. Rev. **139**, A1163 (1965).
38. P. W. Anderson, Y. B. Kim, Rev. Mod. Phys. **36**, 39 (1964).
39. J. Friedel, P. G. de Gennes, J. Matricon, Appl. Phys. Lett. **2**, 119 (1963).
40. B. Rosenblum, M. Cardona, Communicated at Conf. Phys. Type II Superconductivity, Cleveland, 1964.
41. B. D. Josephson, Phys. Lett. **16**, 242 (1965).
42. J. M. Luttinger, Phys. Rev. **136**, A1481 (1964).
43. J. Bardeen, M. J. Stephen, Phys. Rev. **140**, A1197 (1964).
44. P. Nozières, P. G. de Gennes, Magnus Force and Flux Flow in Superconductors (частное сообщение); Preprint.
45. W. F. Vinen, Rev. Mod. Phys. **36**, 48 (1964).
46. A. K. Niessen, F. A. Staas, Phys. Lett. **15**, 26 (1965).
47. W. A. Reed, E. Fawcett, Y. B. Kim, Phys. Rev. Lett. **14**, 790 (1965).
48. P. H. Borchers, C. E. Gough, W. F. Vinen, A. C. Warren, Phil. Mag. **10**, 349 (1964).
49. P. Nozières, P. G. de Gennes, Phys. Lett. **15**, 216 (1965).
50. T. E. Faber, Proc. Roy. Soc. **A248**, 460 (1958).
51. Обзоры по данной теме см. в сб. «Plasma Effects in Solids», Proc. 7th Intern. Conf. Phys. Semicond., Paris, 1964. Academic Press, New York, 1964.
52. D. A. Haas (частное сообщение).
53. A. J. Kushnir (частное сообщение).
54. B. W. Maxfield, E. J. Johnson, Phys. Rev. Lett. **15**, 677 (1965).
55. F. Haenssler, L. Rinderer, Phys. Lett. **16**, 29 (1965).
56. W. De Sorbo, Phil. Mag. **11**, 853 (1965).
57. C. P. Bean, J. D. Livingston, Phys. Rev. Lett. **12**, 14 (1965).
58. P. G. de Gennes, J. Matricon, Rev. Mod. Phys. **36**, 45 (1964).
59. R. W. De Blois, W. De Sorbo, Phys. Rev. Lett. **12**, 499 (1964).
60. H. J. Fink, Phys. Rev. Lett. **14**, 853 (1965).
61. P. W. Anderson, A. H. Dayem, Phys. Rev. Lett. **13**, 195 (1964).
62. B. D. Josephson, Phys. Lett. **1**, 251 (1962); Rev. Mod. Phys. **36**, 216 (1964).
63. P. W. Anderson, N. R. Werthamer and J. M. Luttinger, Phys. Rev. **138**, A1157 (1965).
64. E. Abrahams, T. Tsuneto, Phys. Rev. **152**, 416 (1966).
65. V. Heine, Proc. Cambridge Phil. Soc. **52**, 546 (1956).
66. L. Dubock, P. Lindenfeld, E. A. Lynton, H. Rohrer, Phys. Rev. Lett. **10**, 98 (1963).