1969 г. Март *Том 97, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

КОЛЬЦЕВОЙ ГАЗОВЫЙ ЛАЗЕР

В. Е. Привалов, С. А. Фридрихов

ВВЕДЕНИЕ

В первых лазерах использовался резонатор Фабри — Перо (плоские зеркала). Для уменьшения дифракционных потерь позднее вместо плоских зеркал стали применять сферические. В резонаторе с плоскими зеркалами, внутри которого находятся линзы, структура поля в некоторой области подобна структуре поля в резонаторе со сферическими зеркалами, а во всей области — структуре поля кольцевого резонатора. С этой точки зрения кольцевой резонатор можно считать более общим типом резонатора.

Лазер с кольцевым резонатором может быть использован для измерения угловой скорости вращения с большой точностью, причем он выгодно отличается от других известных в настоящее время устройств [1,2]. Это является одной из причин, по которым лазер этого типа представляет большой интерес для навигационных устройств [3-5]. Высокая монохроматичность и непрерывность режима работы, необходимые в этом случае, определили тип активной среды лазера, используемого для указанных измерений. Первоначально исследования в этом направлении почти не затрагивали процессов в активной среде. Разрядная трубка в этих работах фигурировала в качестве некоего «черного ящика». По мере обнаружения новых эффектов исследователи начали обращать все большее внимание на особенности поведения активной среды в кольцевом резонаторе. Изучение физических процессов, определяющих основные свойства кольцевого лазера, становится все более актуальным. Следует также ожидать, что новые теоретические и экспериментальные исследования позволят не только увеличить возможности измерения угловой скорости вращения, но и расширят круг приложений кольцевого лазера с различными активными средами. Цель данного обзора — рассмотреть основные свойства кольцевого резонатора, газовой активной среды, помещенной в этот резонатор, и систематизировать связанные с этой темой литературные данные.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА

Из уравнений Максвелла, описывающих электромагнитное поле в свободном пространстве, можно получить волновое уравнение для электрического поля $\mathbf{E}$ [6]

$$\Box \mathbf{E} = 0, \tag{1,1}$$

где $\Box$ — оператор д'Аламбера. Функция Грина для этого уравнения $r^{-1} \exp(-i\mathbf{kr})$. В случае двух отражающих поверхностей ситуация

несколько усложняется и решение (1,1) записывается в виде [7]

$$E_1 = \frac{ik}{4\pi} \int\limits_S \frac{1+\cos\theta}{r} \exp(-i\mathbf{kr}) E_2 \, dS, \tag{1,2}$$

где E_m — поле на m-м зеркале ($m = 1, 2$), r — радиус-вектор, S — поверхность зеркала с E_2, θ — угол между $\mathbf{r}$ и нормалью к зеркалу в начале $\mathbf{r}$ (рис. 1).

Анализируя принцип Гюйгенса в форме Френеля — Кирхгофа в скалярной форме (1,2), можно получить [8] основные соотношения для оптического резонатора с двумя зеркалами (будем называть его линейным резонатором).

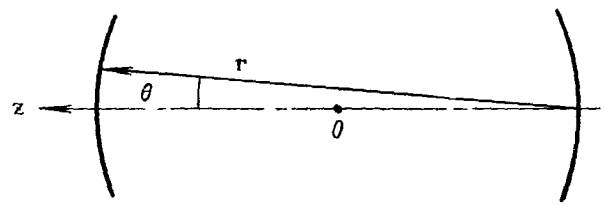

Рис. 1. Линейный резонатор с двумя сферическими зеркалами.

К настоящему времени опубликовано много фундаментальных работ, с различных позиций рассматривающих линейный резонатор (см., например, [9-14]). Наиболее удобным для анализа и часто встречающимся на практике из-за малых дифракционных потерь является конфокальный резонатор.

Спектр частот этого резонатора определяется уравнением [10]

$$\nu = \frac{c}{2L}\left[q + \frac{1}{2}(m+n+1)\right], \tag{1,3}$$

где L — радиус кривизны зеркал, равный расстоянию между ними, m, n, q — индексы, характеризующие тип колебаний (q — продольные моды, m и n — поперечные моды).

Поле внутри резонатора имеет вид

$$E = E_0 \left(\frac{2}{1+\xi^2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)} H_m\left(X\sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}}\right) H_n\left(Y\sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}}\right) \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{k(x^2+y^2)}{L(1+\xi^2)}\right] \exp\left(-i\left\{k\left[\frac{L}{2}(1+\xi) + \frac{\xi(x^2+y^2)}{(1+\xi^2)L}\right] - \right.\right.$$
$$\left.\left. -(1+m+n)\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right\}\right), \tag{1,4}$$

где

$$\xi = \frac{2z}{L}, \quad X = \frac{x\sqrt{c}}{a}, \quad Y = \frac{y\sqrt{c}}{a}, \quad c = \frac{2\pi a^2}{L\lambda}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1-\xi}{1+\xi},$$

H_m и H_n — эрмитовы полиномы соответственно m-го и n-го порядков, Γ — гамма-функция. Распределение напряженности поля в плоскости x, y для моды TEM_{00q} имеет вид, показанный на рис. 2.

Фронт волны в каждой точке z (начало отсчета в фокусе зеркала) имеет радиус кривизны

$$R(z) = \frac{L^2+4z^2}{4z}. \tag{1,5}$$

Радиус пучка (уменьшение поля в e раз по сравнению со значением на оси резонатора) для основного типа колебаний таков:

$$w(z) = \sqrt{\frac{L}{k}\left[1+\left(\frac{2z}{L}\right)^2\right]}. \tag{1,6}$$

Любому конфокальному резонатору с зеркалами *1* и *2* (рис. 3) можно сопоставить эквивалентный резонатор.

Действительно, из (1,5) следует, что если в точке z_3 кривизна фронта $1/b$, то существуют еще точки, где кривизна имеет такое же значение. Пусть координаты этих точек $z = \pm \frac{d}{2}$; тогда они попарно отстоят друг от друга на $d = b \pm \sqrt{b^2 - L^2}$. Из рис. 3 видно, что конфокальному резонатору с зеркалами *1* и *2*, отстоящими на L, эквивалентны три резонатора, зеркала которых имеют кривизны $1/b$ и отстоят друг от друга на d_1, d_2 и b.

Таким образом, анализ резонатора любого типа можно провести, взяв за основу конфокальный резонатор. В частности, спектр линейного резонатора с произвольными параметрами в общем виде можно записать [13] так:

$$\nu = \frac{c}{2L}\left(q + \frac{m+n+1}{\pi}\arccos\sqrt{g_1 g_2}\right), \tag{1,7}$$

где $g_i = 1 - (L/R_i)$ ($i = 1, 2$, R_i — радиус кривизны зеркал, L — расстояние между зеркалами.

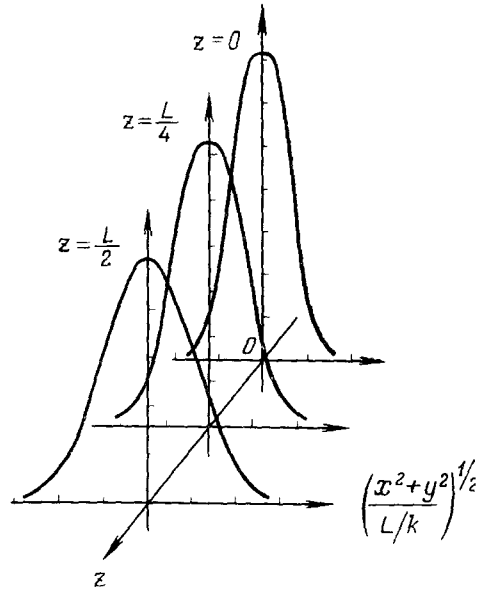

Рис. 2. Распределение напряженности поля в поперечном сечении конфокального линейного резонатора для моды TEM_{00q}.
L — длина резонатора.

Несколько иначе обстоит дело с резонатором, имеющим оба плоских зеркала. Он исследовался ранее (на эталон Фабри — Перо падало внешнее излучение) простейшими способами (метод суммирования, метод краевых значений) [7], затем иными методами [8, 11, 14, 15], пригодными, в принципе, для любых резонаторов.

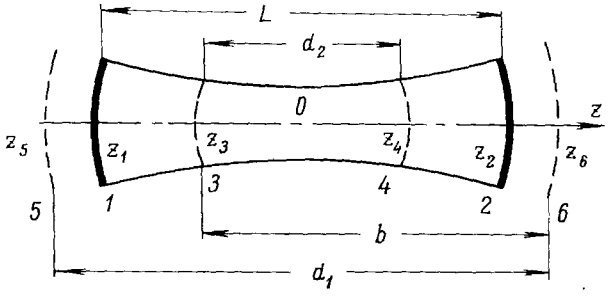

Рис. 3. Распределение поля в продольном сечении конфокального линейного резонатора.
Пунктиром показаны синфазные поверхности резонатора.

Спектр такого резонатора

$$\nu = \frac{c}{2L}\left(q + \frac{\pi m^2}{[\beta(1+i) + M]^2}\right), \tag{1,8}$$

где $M = 2\sqrt{2\pi N}$, β — параметр, определяемый коэффициентом отражения, $N = a^2/\lambda L$ — число Френеля, a — диаметр зеркала, $m = 1, 2, 3 \ldots$

В некоторых случаях (например, для создания в резонаторе с плоскими зеркалами структуры поля, эквивалентной конфокальному резонатору) [16] внутри резонатора помещают линзы. В этом случае характеристики поля в резонаторе, естественно, меняются. При этом оказывается, что любую неоднородность внутри резонатора можно свести к линзе. При

рассмотрении такого резонатора (рис. 4) поле можно искать в соответствии с принципом Гюйгенса в виде произведения, каждый сомножитель которого представляет выражение (1,2), записанное для всех остальных объектов резонатора [17]. При этом требуется, чтобы: 1) поля на зеркалах выражались подобным образом; 2) разделялись переменные; 3) поле записывалось аналогично (1,4).

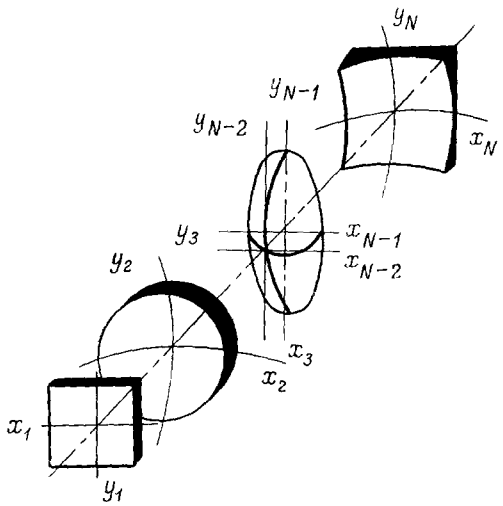

Рис. 4. Линейный резонатор с линзами.

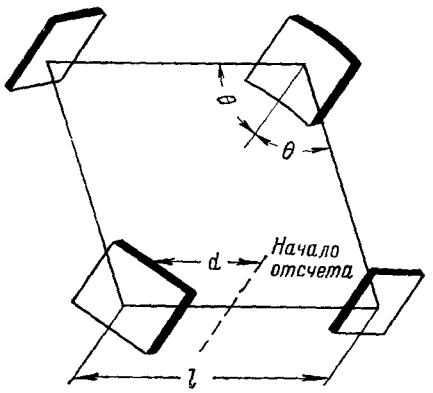

Рис. 5. Кольцевой резонатор с одним сферическим и тремя плоскими зеркалами [17].

На основании этих трех постулатов для резонатора, изображенного на рис. 4, находятся размеры пятен поля:

$$\mu_{i0} = k\,|\rho_{\mu ii}|\sqrt{\frac{\rho^2_{\mu 1N}}{4\rho_{\mu 11}\rho_{\mu NN}} - 1}\,, \tag{1,8'}$$

где $\rho_{\mu ii}$ — коэффициенты оптических расстояний, и спектр частот дается формулой

$$\nu = \frac{c}{2\rho_0}\left[\gamma q + \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\alpha_x}{\pi} + \varepsilon + \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\alpha_y}{\pi}\right], \tag{1,9}$$

а

$$\cos\alpha_\mu = \sqrt{\frac{4\rho_{\mu 11}\rho_{\mu NN}}{\rho^2_{\mu iN}}} \quad \left(\mu = x,\ y,\ \varepsilon = 0,\ \frac{1}{2}\right).$$

Для линейного резонатора $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0$.

Эта задача может быть решена и непосредственным интегрированием основных уравнений, что приводит к тем же результатам [18–21]. Анализ, приведенный в [17–20], является обобщением теории линейного (и не только линейного) резонатора. Резонатору с неоднородностью эквивалентен кольцевой резонатор [18–21]. Поэтому схемы на рис. 5 и 6 являются эквивалентными. На рис. 6 в резонатор помещена эллиптическая линза, отображающая различные фокусные расстояния сферического зеркала рис. 5 в вертикальной и горизонтальной плоскостях ($f_x = R\cos\theta/2$, $f_y = R\sec\theta/2$).

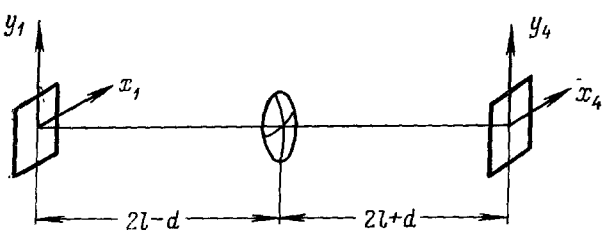

Рис. 6. Линейный резонатор с эллиптической линзой, эквивалентный кольцевому [17].

Коэффициенты оптических расстояний для такого кольцевого резонатора выглядят следующим образом [17]:

$$\rho_0 = 4l,$$

$$\rho_{\mu 11} = \rho_{\mu 44} = \frac{1 - \frac{2l}{f_\mu}}{2f_\mu\left[1 - \left(1 - \frac{2l}{f_\mu}\right)^2\right]},$$

$$\rho_{\mu 14} = \frac{1}{f_\mu\left[1 - \left(1 - \frac{2l}{f_\mu}\right)^2\right]}.$$

Зная их, можно записать основные параметры кольцевого резонатора. Спектр частот, в частности, выглядит так:

$$\nu = \frac{c}{4l}\left[q + \frac{\alpha_x}{\pi}\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha_y}{\pi}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right], \qquad (1,10)$$

$$\cos\alpha_\mu = 1 - \frac{2l}{f_\mu}.$$

Такой переход от (1,9) осуществляется благодаря тому, что для кольцевого резонатора $\gamma = 2$, а $\varepsilon \neq 0$ лишь в случае нечетного числа зеркал и нечетного n одновременно.

Спектр частот треугольного кольцевого резонатора записывается в виде [22]

$$\nu = \begin{cases} \frac{c}{L}\left[q + \frac{\alpha_x}{\pi}(n+1) + \frac{\alpha_y}{\pi}(m-1)\right], & n \text{ — четное}, \\ \frac{c}{L}\left[q + \frac{1}{2} + \frac{\alpha_x}{\pi}(n+1) + \frac{\alpha_y}{\pi}(m+1)\right], & n \text{ — нечетное}, \end{cases} \qquad (1,11)$$

где L — периметр треугольника. Спектр кольцевого резонатора может быть найден также методами геометрической оптики [23, 24].

В заключение этого раздела укажем еще на одну возможность обобщения при анализе оптических резонаторов. Подобно тому как диаграмма стабильности [17] в координатах $2\rho_{\mu NN}/\rho_{\mu 1N}$ (ось ординат) и $2\rho_{\mu 11}/\rho_{\mu 14}$, для резонатора с неоднородностью годится в случае произвольного резонатора (для линейного она была дана в [9]), диаграмма $1/R_z$ (ось ординат) и z/kw^2 может быть использована для описания свойств поля в любой точке резонатора [17]. Исключая z из (1,5) и (1,6), получим

$$\left(\frac{2}{kw^2} - \frac{1}{L}\right)^2 + \frac{1}{R_z^2} = \frac{1}{L^2}. \qquad (1,12)$$

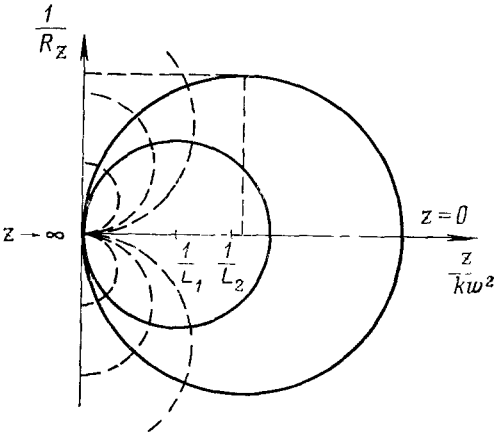

Рис. 7. Диаграмма, описывающая распределение поля в конфокальном резонаторе [17].

Уравнению (1,12) соответствует семейство окружностей (рис. 7). Для каждого конфокального резонатора с периметром L_i существует своя окружность. Точки на окружности соответствуют перемещению внутри резонатора. По мере увеличения L окружности уменьшаются.

Исключая из (1,5) и (1,6) L, получим уравнение другого семейства окружностей (пунктир на рис. 7):

$$\left(\frac{2}{kw^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{2z}\right)^2 = \left(\frac{1}{2z}\right)^2.$$

Здесь перемещению внутри резонатора соответствует переход с одной окружности на другую. Для кольцевого резонатора (четыре плоских зеркала) с линзой получим диаграмму, изображенную на рис. 8. В случае треугольного резонатора [22] получим подобную же диаграмму, причем для вертикальной плоскости одна диаграмма, для горизонтальной — другая.

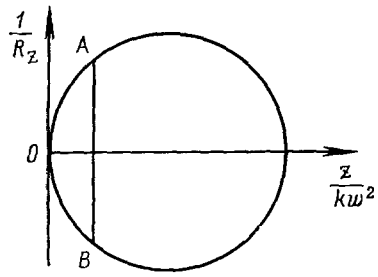

Рис. 8. Диаграмма, характеризующая распределение поля в кольцевом резонаторе с четырьмя плоскими зеркалами и линзой [17].

2. ВРАЩЕНИЕ КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА

Рассмотрим квадратный кольцевой резонатор, в котором луч света идет по периметру квадрата (рис. 9). В случае неподвижного резонатора свет имеет частоту ν в системе A (и любой другой точки резонатора). При вращении в указанном стрелкой направлении с частотой Ω в системе зеркала A частота света, распространяющегося в направлении *1*, станет иной. Преобразования Лоренца для волнового вектора **k** дают [6]

$$k_4' = \frac{k_4 + i\beta k_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (2,1)$$

$$k_4 = 2\pi i \frac{\nu}{c},$$

$$k_1 = \frac{2\pi\nu}{c}\cos\alpha_1,$$

где k_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — компонента волнового вектора **k** в неподвижной системе координат, k_i' — компоненты волнового вектора в системе координат, движущейся со скоростью v относительно неподвижной, c — скорость света, $\beta = v/c$, α_i ($i = 1, 2, 3$) — угол падения луча на зеркало.

Значит, в системе зеркала A произойдет смещение частоты света (эффект Доплера первого порядка) по сравнению с неподвижным случаем на величину

$$\Delta_1\nu = \beta\nu\cos\alpha_1 \quad (\beta \ll 1). \qquad (2,2)$$

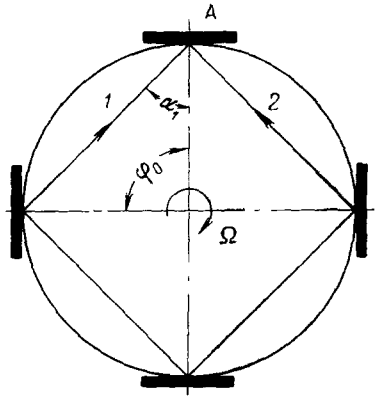

Рис. 9. Квадратный кольцевой резонатор.

α_1 — угол падения луча на зеркало, φ_0 — угол между зеркалами покоящегося лазера, Ω — угловая частота вращения кольцевого резонатора.

Аналогичные рассуждения можно провести для луча *2*. В этом случае произойдет сдвиг частоты в другую сторону на $\Delta_2\nu = |\Delta_1\nu|$. Таким образом, при вращении кольцевого резонатора на выходе зеркала A возникают две частоты, отличающиеся на

$$\Delta\nu = 2\beta\nu\cos\alpha. \qquad (2,3)$$

Из этой общей формулы расщепления частот в нерелятивистском случае можно получить подобные соотношения для резонатора любой геометрии.

В частности, для квадратного резонатора

$$\Delta\nu = \frac{\Omega\nu l}{c}, \qquad (2,4)$$

где l — сторона квадрата.

Этот результат может быть получен различными способами. Так как рассмотрение каждого из них дает некоторую информацию о кольцевом

резонаторе, то мы остановимся еще на одном варианте получения формулы (2,4) [25, 26]. При $\Omega = 0$ каждая сторона квадрата принадлежит центральному углу $\varphi_0 = \pi/2$ (см. рис. 9). В случае вращения этот угол растет или уменьшается в зависимости от направления вращения:

$$\varphi_\pm = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\Omega\tau_\pm}{4},$$

где $\tau_\pm$ — время, за которое свет вернется в исходную точку. Разность времен прохождения кольца для обоих лучей

$$\Delta\tau = \frac{8\Omega R^2}{c^2},$$

где R — радиус вращения зеркал.

Изменение частоты за счет эффекта Допплера может быть записано в виде [7]

$$\Delta\nu_\pm = \nu\frac{\Delta t}{t}, \tag{2,5}$$

где t — время одного цикла.

В нашем случае $t = \tau$, а $\Delta t = \Delta\tau/2$. Поэтому

$$\Delta\nu_+ = \nu\frac{\Delta\tau}{2\left(\tau_0 - \frac{\Delta\tau}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\beta\nu l^2}{\sqrt{2}R^2 + \frac{1}{2}\beta l^2},$$

$$|\Delta\nu_+| = |\Delta\nu_-| = \frac{1}{2}|\Delta\nu|;$$

при $\beta \ll 1$

$$\Delta\nu = \frac{\Omega\nu l}{c},$$

как и в (2,4).

В опыте Саньяка [25, 26] с интерферометром несколько иной конструкции (рис. 10) полупрозрачное зеркало A располагалось нормально по отношению к положению других зеркал на окружности. Подобно (2,1) в этом случае преобразование Лоренца для волнового вектора луча *2*, отраженного от зеркала, дает

$$\bar{k}_4' = \frac{k_4 - i\beta k_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2,6}$$

Для луча *1*, прошедшего сквозь зеркало A и замыкающего резонатор против часовой стрелки, частота в системе движущегося зеркала A преобразуется согласно формуле (2,1), т. е. в случае движущегося зеркала частота падающего луча отличается от частоты отраженного. Это отличие находится из разности k_4' и $\bar{k}_4'$:

$$\Delta\nu = 2\beta\nu\cos\alpha \quad (\beta \ll 1). \tag{2,7}$$

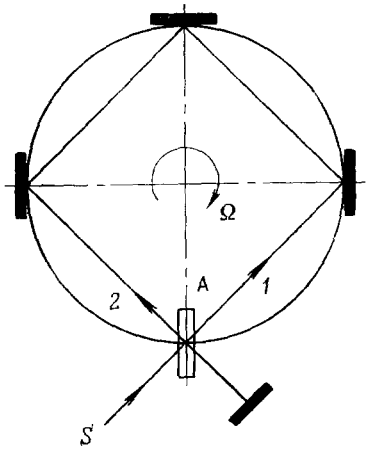

Рис. 10. Интерферометр Саньяка [25, 26].

Нетрудно показать, что изменение частоты при отражении от остальных зеркал в их системах координат не дает изменения частоты в системе зеркала A. Разность частот лучей *1* и *2*, попадающих после обхода в приемник, определяется только формулой (2,7), совпадающей с приведенной ранее формулой (2,3).

Рассмотрим теперь эту же ситуацию с несколько иных позиций. При вращении резонатора меняется длина оптического пути, причем меняются собственные частоты резонатора [27]:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{\Delta L}{L}. \tag{2,8}$$

На основании этого в [28] получена формула для смещения частот кольцевого резонатора (квадратного)

$$\Delta\nu=\frac{\Omega l}{\lambda}\cos\gamma, \tag{2,9}$$

где γ — угол между вектором Ω и нормалью к плоскости луча. Этот подход используют авторы [1], осуществившие одними из первых экспериментальное исследование расщепления частоты в He — Ne-лазере с кольцевым резонатором. Этот же подход использовался в работе [29]. Очевидно, что он не содержит ничего нового по сравнению с идеями, изложенными при анализе рис. 9. Рассмотрение резонатора в виде сплошного кольца допускает другую интерпретацию [30].

Можно рассматривать интерференцию волн, движущихся навстречу друг другу в гравитационном поле вращающегося кольцевого резонатора, и получить формулу для сдвига фаз [31]. С этих позиций удобно анализировать спектр частот вращающегося резонатора. Анализ ведется следующим образом [32]. Поле резонатора, в соответствии с [33], ищется в виде

$$E=\sum_{\alpha}E_{\alpha}\int EE_{\alpha}^{*}\,dv+\sum_{\beta}F_{\beta}\int EF_{\beta}^{*}\,dv, \tag{2,10}$$

где F — тензор электромагнитного поля. Подставляя (2,10) в уравнения Максвелла и учитывая, что во вращающейся системе координат индукция $\mathbf{D}$ заменяется на

$$\mathbf{D}_e=k_e\mathbf{E}-\frac{1}{c}\left[\frac{\mathbf{\Omega x r}}{c}\mathbf{H}\right].$$

(здесь k_e — диэлектрическая проницаемость, x — координата, $\mathbf{r}$ — вектор, характеризующий положение оси вращения и плоскости луча *), получим для плоской волны

$$\nu_a=\nu_a^0\left\{1+\frac{1}{2}(k_ek_mc^2)^{-\frac{1}{2}}\Omega\int[\mathbf{r}x([\mathbf{E}_a^*\mathbf{H}_a]+[\mathbf{E}_a\mathbf{H}_a^*])]\,dv\right\}\cos\gamma,$$

где ν_a — собственные частоты кольцевого резонатора. Поскольку таких волн две, то между ними получается сдвиг частот

$$\Delta\nu=\nu_a(k_ek_mc^2)^{-\frac{1}{2}}\Omega\int\mathbf{r}x([\mathbf{E}_a\mathbf{H}_a^*]+[\mathbf{E}_a^*\mathbf{H}_a])\cos\gamma\,dv. \tag{2,11}$$

Выражение (2,11) является наиболее общим из полученных выше для расщепления частот при вращении кольцевого резонатора. В случае квадратного резонатора, находящегося в вакууме, из (2,11) получим уже знакомую формулу

$$\Delta\nu=\frac{\Omega l\nu}{c}\cos\gamma.$$

Наличие активной среды в квадратном резонаторе приведет к выражению

$$\Delta\nu=\frac{\Omega\nu l}{c}\left\{1-\frac{a}{4l}[1-(k_ek_m)]^{-\frac{1}{2}}\right\}\cos\gamma, \tag{2,12}$$

где a — длина активной среды.

*) Аналогично преобразуется магнитная индукция $\mathbf{B}$.

Кроме активной среды, в кольцевом резонаторе могут находиться дополнительные элементы, например, движущаяся среда (назначение последней станет ясным из гл. 6). Это приведет к появлению новых членов в выражении для расщепления частот в кольцевом резонаторе. Для движущейся среды (с показателем преломления n_0) длиной d в кольцевом резонаторе это выражение имеет вид [34]

$$\Delta\nu = \nu \frac{4\frac{\Omega S}{c} - 2d\left(n_0 - 1 - \nu n_0 \frac{dn_0}{d\nu}\right)\frac{\mathbf{v}\mathbf{V}}{c}}{L + d(n_0 - 1) + \nu d\frac{dn_0}{d\nu} + a\nu\frac{dn_a}{d\nu}}, \tag{2,13}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость движения среды с показателем преломления n_0, S — площадь кольцевого резонатора, $\mathbf{V}$ — единичный вектор в направлении распространения света, n_a — показатель преломления активной среды длиной a.

Выражение (2,13) получено из рассмотрения тензора диэлектрической проницаемости среды во вращающемся резонаторе. Этим методом может быть в частном случае получено и выражение (2,12).

3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА С ГАЗОВОЙ АКТИВНОЙ СРЕДОЙ

Поведение активной среды в лазере удобно характеризовать макроскопической поляризуемостью среды $\mathbf{P}$. Общий метод анализа газового лазера [35] применим и в случае кольцевого газового лазера (например, [36]). Уравнения Максвелла с обычными для поглощающей среды граничными условиями позволяют записать для электрического поля $\mathbf{E}$ следующее волновое уравнение:

$$[\nabla[\nabla, \mathbf{E}]] + \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2} = 0, \tag{3,1}$$

где μ — магнитная проницаемость, ε — электрическая проницаемость, σ — проводимость среды.

Ограничиваясь основным типом колебаний, пренебрегая зависимостью от x и y и считая добротность резонатора для частоты ν_n равной

$$Q_n = \frac{\varepsilon\nu_n}{\sigma}, \tag{3,2}$$

можем записать (3,1) для плоскополяризованной волны таким образом:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \varepsilon\mu\frac{\nu_n}{Q_n}\frac{\partial E}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu\nu^2 P. \tag{3,3}$$

Решение (3,3) для кольцевого лазера ищется в виде двух бегущих навстречу друг другу волн*)

$$E(z, t) = \sum_n [A_n(t)U_n(z) + \widetilde{A}_n(t)V_n(z)], \tag{3,4}$$

где

$$U_n(z) = \sin k_n z,$$
$$V_n(z) = \cos k_n z,$$
$$k_n = \frac{2\pi n}{L},$$

L — периметр резонатора.

*) Разложение ведется по собственным частотам резонатора.

Разделение переменных приводит к следующим соотношениям:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+\varepsilon\mu\Omega_n^2\right)\begin{pmatrix}U_n(z)\\V_n(z)\end{pmatrix}=0, \tag{3,5}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\nu}{Q}\frac{d}{dt}+\Omega_n^2\right)\begin{pmatrix}A_n(t)\\\widetilde{A}_n(t)\end{pmatrix}=\frac{\nu^2}{\varepsilon}\begin{pmatrix}P_n(t)\\\widetilde{P}_n(t)\end{pmatrix}, \tag{3,6}$$

где P_n — соответствующие фурье-образы поляризуемости.

Из (3,6) получаются самосогласованные уравнения для определения амплитуд, частот и фаз обеих бегущих волн. Число уравнений в случае кольцевого лазера, естественно, в два раза больше, чем в случае линейного лазера [35]. Далее анализируется поляризуемость среды, знание которой необходимо для решения самосогласованных уравнений. Поляризуемость находится методом матрицы плотности. В первом приближении теории возмущений пороговые условия получаются из уравнений

$$\ddot{E}_i+\frac{1}{2}\frac{\nu}{Q}\dot{E}_i=\frac{1}{2}\frac{\nu}{\varepsilon}\sqrt{\pi}\,AE_i\exp(-\xi^2), \tag{3,7}$$

$$\nu_i=\Omega_i-\frac{\nu}{\varepsilon}AF(\xi), \tag{3,8}$$

где

$$F(\xi)=\exp(-\xi^2)\int\limits_0^{\xi_i}\exp(x^2)\,dx,$$

$$A=\frac{(p)^2\overline{N}(t)}{\hbar ku},\quad \xi=\frac{\nu_i-\nu}{ku};$$

p — матричный элемент электрического дипольного момента, $2(\ln 2)^{1/2}ku$ — ширина допплеровского контура, $\overline{N}(t)$ — средняя плотность возбужденных состояний, u — наиболее вероятная скорость атома.

Выражения (3,7) и (3,8) появляются в результате рассмотрения следующей модели: имеются две стоячие волны; при переходе от результатов, полученных для линейного лазера [35], обрезается по одной бегущей и остаются две бегущие навстречу друг другу волны с разными частотами (3,8). Именно эта ситуация реализуется во вращающемся кольцевом лазере.

Во втором приближении теории возмущений появляются два провала на кривой распределения по скоростям, причем разной глубины:

$$\Delta\rho(v_1t)=\overline{N}(t)W(v)\left\{1-2I_1\left[1+2\left(\frac{\nu-\nu_1-ku}{\Delta\omega_n}\right)^2\right]^{-1}-\right.$$
$$\left.-2I_2\left[1+2\left(\frac{\nu-\nu_1-\Delta\Omega+ku}{\Delta\omega_n}\right)^2\right]^{-1}\right\},$$

где I_i — интенсивность излучения, $\Delta\rho$ — инверсия заселенностей, W — равновесное распределение атомов по скоростям.

Далее, в третьем порядке теории возмущений получаются условия генерации. Вместо $\exp(-\xi^2)$ в (3,7) появляется сомножитель

$$\frac{z_i(\xi)}{z_i(0)}-I_1\exp(-\xi_1^2)-I_2\exp(-\xi_1^2)L(\xi),$$

где

$$z_i(\xi)=\sqrt{\pi}\exp(-\xi^2)-2\eta[1-2\xi F(\xi)]+\ldots,$$

$$\eta=\frac{\gamma_{ab}}{ku}=\frac{1}{2}\frac{\Delta\omega_n}{ku},\quad L(\xi)=\left[1+\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2\right]^{-1};$$

γ_{ab} — естественная ширина линии.

Рассматривая вопрос об устойчивости режима встречных волн, можно показать [36], что она минимальна в случае, когда частоты встречных волн равноотстоят от центра допплеровского контура. Дело в том, что в этой ситуации взаимодействие обеих волн идет через одну группу атомов, т. е. связь максимальна. Присутствие второго изотопа (например, Ne^{20} и Ne^{22} в He — Ne-смеси) увеличивает устойчивость системы, так как из-за несимметрии кривой усиления ослабевает связь между встречными волнами. Кроме того, во вращающемся кольцевом газовом лазере область неустойчивости режима встречных волн растет со скоростью вращения, причем в покоящемся кольцевом газовом лазере в данном приближении неустойчивости нет (подобно [37]).

Можно получить [38] две встречные бегущие волны в кольцевом газовом лазере решением уравнений Максвелла в медленно вращающейся системе координат по методике [32]. Дальнейший анализ ведется обычным образом: анализируется то же кинетическое уравнение, находится поляризуемость среды в третьем порядке теории возмущений, получаются уравнения самосогласования для амплитуд и фаз, находятся условия устойчивости режима встречных волн. Важным отличием [38] от работы [36] является учет связи между волнами через зеркала.

В этом приближении с учетом членов второго порядка малости по отношению естественной ширины линии к допплеровской появляется область неустойчивости стоячей волны вблизи центра линии усиления. Граница области неустойчивости в случае однородно уширенной линии [39]

$$|\nu_n - \nu_m|_0 = 2\sqrt{\frac{-D+\sqrt{D^2-4AC}}{2A}},$$

при $\nu_n = -\nu_m$; A, C и D — функции ширин уровней.

Для неоднородно уширенной линии симметричное расположение встречных волн относительно центра допплеровского контура неустойчиво [39]; полуширина области неустойчивости равна

$$\delta\nu = \frac{\gamma_{ab}^2}{ku}\sqrt{\frac{2}{S}}.$$

$$S = \frac{\gamma_{ab}}{\gamma_a} + \frac{\gamma_{ab}}{\gamma_b} - \frac{\gamma_{ab}\gamma_\delta}{\gamma_a\gamma_b},$$

где γ_δ обусловлена спонтанным излучением с верхнего рабочего уровня на нижний рабочий уровень.

Таким образом, учитывая модуляцию инверсии заселенностей с частотой биений, получаемую в третьем порядке теории возмущений [43-46], находим, что условия устойчивости двухволнового режима в кольцевом газовом лазере выглядят иначе, чем в лазере на твердом теле, причем эти условия различны для встречных бегущих волн и волн, бегущих в одну сторону. Соотношение амплитуд бегущих волн меняется с накачкой.

При учете связи между волнами за счет отражения на зеркалах и временнóй модуляции инверсии заселенностей возможен режим, при котором становятся устойчивыми бегущие в разные стороны волны с разными амплитудами [42].

В пятом порядке теории возмущений с учетом членов второго порядка малости по интенсивности колебаний область неустойчивости сокращается с ростом амплитуды для покоящегося лазера [40]. Поскольку добротности резонатора для встречных направлений в общем случае различны, двухволновый режим невозможен в области, верхняя граница которой может значительно превосходить границу области неустойчивости [40]. Используя методы работы [41], можно показать, что ширины области неустойчивости и области, где двухволновый режим невозможен, растут с ростом давления.

Двухволновый режим в кольцевом лазере становится возможным во всей области расстроек, где выполняются условия самовозбуждения, если примесь Ne^{22} составляет величину порядка нескольких процентов [40]. Это следует из выражения для критической концентрации примесного изотопа N_2

$$N_2 \geqslant \exp\left\{\frac{\mu_2^2}{2(ku)^2}\right\}\left[\frac{\gamma^2}{(ku)^2}+\frac{2|\delta|}{\eta_0}-\frac{3}{2}\theta_1\eta_0\right],$$

где

$$\mu_2=\nu-\nu_{02},\quad \theta_1=\frac{2\gamma^2}{3\gamma_{ab}}\left(\frac{\gamma_{ab}}{\gamma_a+2\gamma_{ab}}+\frac{\gamma_{ab}}{\gamma_b+2\gamma_{ab}}\right),$$

η_0 — превышение уровня накачки над пороговым.

Методика Лэмба [35], естественно, не является единственной при анализе кольцевого газового лазера. Можно, как обычно, рассмотреть уравнение Максвелла во вращающейся системе координат (причем вместо напряженности поля анализировать потенциалы A (r, t) и φ (r, t)), получить условия самосогласованного поля и уравнения для амплитуд и фаз, а поляризуемость активной среды рассчитать на основе уравнения Шрёдингера, записанного в пространстве чисел заполнения [47, 48].

В случае кольцевого резонатора без активной среды не приходилось задавать вопрос: с какого из зеркал снимать выходной сигнал? Для кольцевого лазера это имеет значение [49]. В линейном лазере поверхности зеркал однозначно определяют распределение в пространстве пучностей и узлов стоячей волны. В кольцевом лазере (неподвижном) встречные бегущие волны тоже образуют стоячую волну, но местоположение пучностей и узлов становится неопределенным. Вопрос приобретает особый интерес в многомодовом режиме. Вращение кольцевого лазера приводит к расщеплению частот, что можно рассматривать как медленное передвижение картины стоячих волн. На фотоприемнике это регистрируется как модуляция постоянного сигнала с частотой биений. Можно провести следующие рассуждения [49]. Если записать выражение для интенсивности поля, то из условия минимальности изменения интенсивности в активной среде можно получить связь между фазами соседних мод. Они отличаются на π. Это приводит в многомодовом режиме к разнице в амплитудах биений, полученных за зеркалами, по-разному отстоящими от разрядной трубки. Данные экспериментов, проведенных с кольцевым резонатором треугольной формы, одно из плеч которого содержало активную среду (He — Ne-смесь, $\lambda = 6328$ Å), соответствуют ожидаемым. Неравенство амплитуд соседних мод вносит дополнительный вклад в разницу амплитуд биений.

Амплитуды биений отличаются и в случае двух разрядных трубок, причем с увеличением числа мод разность амплитуд растет резче, чем в случае с одной разрядной трубкой. Неодинаковость расстояний трубок от общего зеркала приводит к дополнительному сдвигу фаз между соседними модами, что в конечном итоге меняет соотношение между амплитудами биений.

В работе [49] опровергается мнение, что изменение размеров резонатора совершенно одинаково влияет на обе встречные волны. Показано, что частота биений модулируется частотой (фазой) изменения размеров резонатора, что делает различными выходные сигналы на разных зеркалах.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНКУРЕНЦИИ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН В КОЛЬЦЕВОМ ЛАЗЕРЕ

Проводились экспериментальные исследования взаимодействия бегущих волн в кольцевом лазере. В работе [50] использовался треугольный резонатор (одно плоское зеркало, два сферических с $R = 4$ *м*, сторона правильного треугольника 121 *см*), в одном из плеч которого располага-

лась разрядная трубка с He — Ne-смесью ($\lambda = 6328$ Å). Одно из сферических зеркал имело коэффициент пропускания почти в 20 раз больше ($T = 3{,}7\%$), чем два других. За этим зеркалом находилось еще одно, вследствие чего интенсивность луча, идущего по часовой стрелке, была в 5—7 раз больше, чем у встречного луча. Если в одномодовом режиме перекрывалось возвратное зеркало, то уменьшалась связь, количество мод возрастало до трех, полная выходная мощность падала почти вдвое при той же мощности накачки. Уменьшения связи добивались не только увеличивая пропускание возвратного зеркала, но и уменьшая пропускание зеркала резонатора, стоящего перед возвратным [51]. Подобного же эффекта добивались, увеличивая пропускание остальных зеркал резонатора.

Экспериментально подтверждается отмеченная в [39] неустойчивость режима бегущих навстречу друг другу волн, частоты которых расположены симметрично относительно центра неоднородно уширенной линии. Кольцевой лазер состоял из резонатора с двумя сферическими зеркалами ($R = 1{,}8$ *м*) и работающей на преломление призмы [52]. Лазер работал на волне $\lambda = 6328$ Å, причем в He — Ne-смеси использовался изотоп Ne^{20} (99,4%). Система сканирования осуществляла изменение длины резонатора; изменение мощности встречных лучей измерялось двумя фотоприемниками и сопоставлялось на двухлучевом осциллографе. При достижении режима насыщения (но в случае одной моды в каждой встречной волне) наблюдалось подавление одной из встречных волн при проходе частоты резонатора через центр допплеровского контура. С переходом на многомодовый режим подавлялись все волны одного направления, когда выполнялось условие симметричного расположения относительно центра допплеровского контура. Очень подробно устойчивость двухволнового режима экспериментально исследовалась в работе [53].

Наряду с исследованием кольцевого газового лазера проводятся теоретические и экспериментальные исследования кольцевого лазера на твердом теле. Бóльшая часть работ посвящена изучению режима бегущей волны [54–60]. В частности, в [56] дано теоретическое рассмотрение вопроса о получении режима бегущей волны в кольцевом лазере с внешним дополнительным зеркалом. Расчет проводился при помощи методов теории длинных линий и может быть применен для кольцевого резонатора с любой активной средой.

В ряде случаев для повышения точности эксперимента может оказаться необходимой стабилизация частоты кольцевого газового лазера. Методы стабилизации частоты линейного газового лазера [61–63] полностью применимы и здесь. Не следует забывать, что частотные характеристики газового лазера еще ухудшаются за счет неустойчивостей в разряде [64, 65]. Поэтому способы устранения шумов в плазме — смешанная накачка [66] и др. — требуют пристального внимания.

5. ЯВЛЕНИЕ ЗАХВАТА ЧАСТОТЫ В ЛАЗЕРЕ С КОЛЬЦЕВЫМ РЕЗОНАТОРОМ

В случае, когда частоты автоколебательной системы и действующей на нее внешней силы близки, возможны три случая:

1) периодический режим;

2) квазипериодический режим с колебаниями, близкими к синусоидальным, амплитуда и фаза которых периодически (медленно) меняются;

3) режим биений (см., например, [67]).

Эти случаи часто встречаются в радиотехнике, поэтому указанные режимы подробно анализировались для ламповых схем. На первом из

них мы остановимся несколько подробнее. Впервые его проанализировали авторы работ [68, 69].

При рассмотрении схемы регенеративного усилителя (рис. 11) было замечено следующее явление [69]. Когда частота генератора сильно отличается от частоты сигнала внешней э. д. с. $E_{вн}$, имеет место модуляция, определяемая разностью ν_0 и ν_c. С уменьшением расстройки частота генератора затягивается внешним сигналом и при некоторой достаточно малой разнице $\Delta\nu = \nu_0 - \nu_c$ биения исчезают и остается только ν_c. Явление получило название захватывания (захвата, увлечения) частоты, принудительной синхронизации. Полоса синхронизации

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{E_{вн}}{E_0}, \qquad (5,1)$$

причем фаза меняется на 2π внутри полосы синхронизации [69].

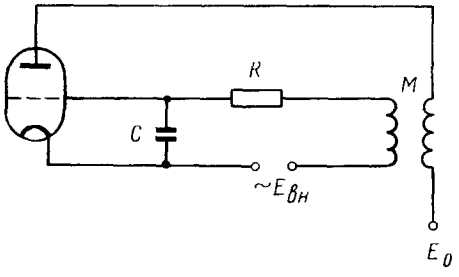

Рис. 11. Схема регенеративного лампового усилителя [69].

E_0 — напряжение источника питания, $E_{вн}$ — амплитуда внешнего сигнала.

Явление захвата частоты подробно исследовалось для ламповых схем [70–78]. Ему отведено соответствующее место в монографиях и учебниках (см. например, [79–82]). Следует отметить, что это явление может иметь место и в случае комбинационных воздействий: резонанс второго рода [87] и т. д. Позднее эта методика исследований была применена к случаю взаимной синхронизации двух генераторов [83–86].

Методы теории колебаний, используемые для анализа принудительной синхронизации ламповых генераторов, могут быть использованы в принципе для автоколебательных систем любого типа.

Уже в линейном лазере мы встречаемся с явлением захватывания частоты [35]. В нормальном трехмодовом режиме, когда расстояние между частотами биений $\nu_2 - \nu_1$ и $\nu_3 - \nu_2$ становится достаточно малым, происходит скачок частоты биений. Наименьшее расстояние между частотами биений, прежде чем они захватятся (своеобразная полоса принудительной синхронизации), таково:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{1}{8Q}\,\frac{\overline{N}+2N_2}{\overline{N}_T}\left(\frac{pE_2}{\hbar\Delta}\right)^2, \qquad (5,2)$$

где Q — добротность резонатора, $\overline{N}$ — плотность возбужденных атомов, усредненная по объему резонатора, N_2 — заселенность верхнего рабочего уровня, $\overline{N}_T$ — пороговое значение возбуждения при $\nu_1 = \nu_0$, p — дипольный момент, E_2 — амплитуда поля с частотой ν_2, $\hbar$ — постоянная Планка.

Эффект захватывания частоты в кольцевом лазере вначале рассматривался с позиций воздействия внешней силы на генератор (а не взаимной синхронизации) [88]. Рассматривался случай малой амплитуды внешнего воздействия. Полагалось, что в треугольном резонаторе (одно из плеч с активным элементом) существует только одна бегущая волна.

Из граничных условий для электрической составляющей поля находится частота автоколебаний в случае отсутствия внешнего сигнала. Появление внешнего сигнала приводит к новым граничным условиям. Частота автоколебаний совпадает с частотой внешнего воздействия в случае, если они отличаются на величину, меньшую определенного ε. Условия максимума ε дают полосу захвата

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\lambda}{\pi L}\,\frac{ET}{U_0}, \qquad (5,3)$$

где L — периметр кольцевого резонатора, E — внешнее поле, U_0 — амплитуда автоколебаний, T — пропускание зеркала, через которое осуществляется внешнее воздействие.

Принудительная синхронизация в лазере с кольцевым резонатором более полно может быть проанализирована в случае учета взаимной синхронизации встречных волн [89]. Полагая взаимодействие достаточно малым, можем записать уравнение для поля

$$\ddot{E}_1 + \frac{\nu}{Q}\dot{E}_1 + \nu_1^2 E_1 = -4\pi\ddot{P}_1, \tag{5,4}$$

где

$$P_1 = \varkappa(E_1 + \overline{m}_1 E_2),$$
$$\overline{m}_1 = m_1 \exp(i\nu_1).$$

Аналогичное уравнение имеет место для встречной волны E_2. Полагая

$$\begin{aligned} E_1 &= e_1 E_0 \exp[i(\nu t + \varphi)], \\ E_2 &= e_2 E_0 \exp[i(\nu t + \psi)], \end{aligned} \tag{5,5}$$

где e_i — переменная часть амплитуды, в приближении медленно меняющихся фаз и амплитуд можно получить уравнения для последних.

В режиме синхронизации

$$\frac{d(\varphi - \psi)}{dt} = 0. \tag{5,6}$$

Обозначим $\Phi = \varphi - \psi$. Условие устойчивости синхронного режима таково:

$$\frac{d\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)}{d\Phi} \geqslant 0. \tag{5,7}$$

Равенство в (5,7) дает полосу синхронизации:

1) $\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\gamma}{2k}\frac{\sqrt{4\beta^2+\mu^2}}{\mu} m$ при $m_1 = m$, $m_2 = 0$;

2) $\frac{\delta\nu}{\nu} = Cm\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1 + \frac{32D^2m^2}{C^2}}\right)\left\{1 - \frac{C^2}{32D^2m^2} + \frac{C^2}{32D^2m^2}\sqrt{1 + \frac{32D^2m^2}{C^2}}\right\}^{1/2}$

при $m_1 = m_2 = m$.

Для $C \neq 0$, $Dm \ll C$

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = Cm;$$

для $C \ll Dm$

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = Dm^2.$$

Положим $m_2 = m_1(1 + M)$; получим

3) $\begin{cases} \frac{\delta\nu}{\nu} \approx \frac{\gamma m_1}{k}\left(\frac{2\beta}{\mu}\cos\chi + \sin\chi\right)(1 + M) \text{ для } M \ll 1; \\ \frac{\delta\nu}{\nu} \approx \frac{\gamma m_1}{2k}\left(\frac{4\beta^2}{\mu^2} + 1\right)^{1/2} M \text{ для } M \gg 1. \end{cases}$

Уравнение [47]

$$(\varphi_x - \Omega C_x)\alpha_x = -\mathrm{Re}(\mathbf{j}_x + \mathbf{P}_x)$$

$\left(\text{здесь } C_x = \frac{1}{4\pi C^2}\mathrm{Im}\int \mathbf{R}_x[\mathbf{A}_x[\nabla, \mathbf{A}_x]]\,dv\,dk \text{ — амплитуда волн}\right)$, описывающее фазы генерируемых лазером волн, приводится к следующей

системе уравнений для встречных волн:

$$\dot{y}_x = (\Omega C_x) + \frac{\omega_x}{2Q_x} - \mathrm{Re}\,\sigma_{-x,-x} - \frac{\alpha_x}{\alpha_{-x}}\,\mathrm{Re}\,\{(i-1)\,\eta_{-x,x}\exp(i\psi_{x,-x})\},$$

$$\dot{y}_{-x} = -(\Omega C_x) - \frac{\omega_x}{2Q_{-x}} - \mathrm{Re}\,\sigma_{-x,x} - \frac{\alpha_x}{\alpha_{-x}}\,\mathrm{Re}\,\{(i-1)\,\eta_{-x,x}\exp(i\psi_{-x,x})\},$$

где $\sigma_{x,x}$ — характеристика затягивания частоты (через рассеяние).

Из этих уравнений следует, что при скорости вращения $\Omega \leqslant \Omega_3$ биения между встречными волнами будут отсутствовать. Ширина зоны захвата равна

$$\Omega_3 = \frac{1}{C_x}\,|\eta|\,\sqrt{(1+\rho)^2 + L_x^2}, \tag{5,8}$$

где η — суммарный коэффициент связи, ρ и L_x учитывают соответственно добротность резонатора и расстройку. Полоса принудительной синхронизации пропорциональна коэффициенту обратной связи [47]. Зависимость этой полосы от добротности резонатора и расстройки частоты генерации относительно допплеровского контура имеет минимум.

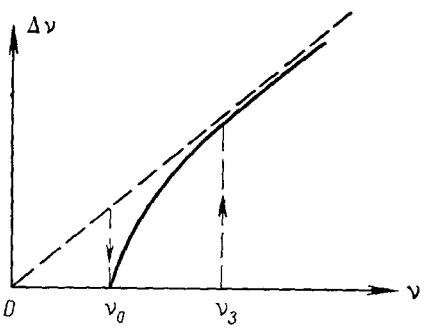

Рис. 12. Гистерезис зависимости частоты биения $\Delta\nu$ от частоты генерации ν [47].

ν_0 — нижняя частота захвата; ν_3 — верхняя частота захвата.

Анализируя условия устойчивости и существования двухволнового режима, можно найти, что в определенной области частота биений является двузначной функцией от частоты генерации ν [47]. При этом выбор ветви, которая соответствует реальному ходу кривой, зависит от предыстории (рис. 12). Это явление гистерезиса обусловлено изменением показателей преломления для встречных волн под действием излучения лазера. Увеличение связи между волнами и уменьшением расстройки приводит к расширению зоны гистерезиса.

Рассматривая интенсивности встречных лучей, получаем линейную зависимость разности интенсивности встречных лучей от угловой скорости вращения внутри зоны захвата частоты [47].

Эта зависимость может быть использована для измерения угловой скорости вращения внутри зоны захвата. Кроме этого, можно измерять угловую скорость в зоне захвата по разности фаз встречных волн [90]. Связь угловой скорости вращения кольцевого лазера с разностью фаз φ находится из системы волновых уравнений, полученных с учетом обратного рассеяния на зеркалах и неоднородностях среды. Считая, что частота генерации лазера значительно удалена от центра допплеровской линии, получаем [90]

$$\nu_1 - \nu_2 = \frac{\nu}{Q}\,\varepsilon\sin(\varphi - \varphi_0), \tag{5,9}$$

где

$$(2\varepsilon)^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\cos(\Delta_1 - \Delta_2),$$

$$\varphi_0 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \mathrm{arctg}\left\{\left[\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right]\mathrm{tg}\left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2}\right)\right\}.$$

После экспериментального определения ε и φ_0 нахождение скорости вращения в соответствии с (2,3) сводится к измерению φ с помощью «оптического фазометра» [90]. Предложенный «фазовый метод» измерения скоростей вращения внутри зоны захвата дополняет метод биений, применяемый вне зоны захвата.

Можно продолжить список работ, посвященных анализу условий захвата (см., например, [91, 92]). Но воспользоваться результатами этих работ для решения прикладных задач пока еще трудно.

Проводилось также и экспериментальное изучение принудительной синхронизации в лазере с треугольным резонатором [89]. Зависимость частоты биений от расстройки приведена на рис. 13. Соответствует ожидаемому и зависимость полосы захвата от связи между волнами (рис. 14). При большем коэффициенте связи (регулируется внешним зеркалом)

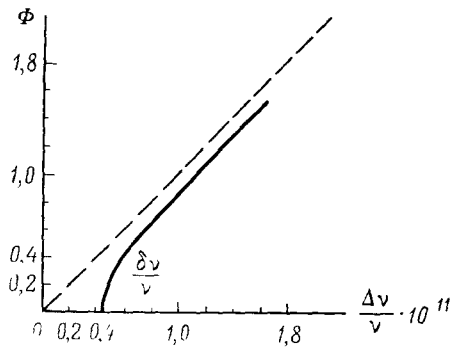

Рис. 13. Зависимость частоты биений от расстройки [89].

Ф — разность фаз встречных волн; $\Delta\nu/\nu$ — относительная частота биений; $\delta\nu/\nu$ — относительная полоса захвата.

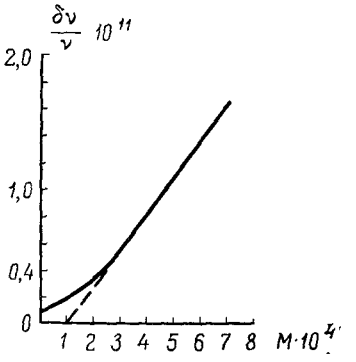

Рис. 14. Зависимость полосы захвата $\delta\nu$ от связи M между волнами [89].

частичное увлечение исчезает (это наблюдается и в радиотехнике). Фаза отраженной волны также влияет на величину полосы захвата. К сожалению, в работе [89] не приведены абсолютные значения $\delta\nu$. Их можно найти в [93–95]. Здесь описывается система с квадратной конфигурацией резонатора (плечо 0,5 *м*). Без специально принятых мер полоса синхронизации равнялась 300—1000 *гц*. Регулируя прозрачность зеркал, можно снизить полосу захвата до 50 *гц* [95].

6. НЕВЗАИМНЫЙ ЭФФЕКТ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В КОЛЬЦЕВОМ РЕЗОНАТОРЕ

Расщепление частоты в кольцевом резонаторе называют невзаимным явлением (эффектом) [96]. Этот эффект имеет место не только при вращении кольцевого резонатора; например, расщепление частоты обнаружено при введении штыря в луч лазера [97]. Эксперимент проводился в квадратном резонаторе (плечо 92 *см*) с генерацией на волне $\lambda = 3{,}39$ *мкм*. Были получены биения порядка 5 *кгц* при погружении острия иглы в луч (около 1 *мм* от оси поля). Эффект проявляется сильнее при введении острия около окна Брюстера. Предполагается, что это явление связано с эффектом насыщения мощности. Предмет, вносимый в луч лазера, меняет амплитуды встречных лучей на разную величину, что приводит к разнице в коэффициенте преломления. Не существует строгой модели этого эффекта и нет попыток получения зависимости расщепления частот от параметров системы. Может быть, для анализа этого явления удачным окажется подход, примененный авторами работы [49]. Возможно, это явление обусловлено различным пространственным распределением поля встречных волн.

При другом способе расщепления частоты кольцевого лазера [97, 98] в резонатор помещается диск, материал которого имеет показатель преломления n. Остальная часть резонатора пусть имеет показатель

преломления n_0. Если диск вращать вокруг оси, не лежащей в одной плоскости с лучом лазера, то диск будет иметь составляющую скорости v_m вдоль оптического пути. Поэтому свет, пересекая вращающийся диск, будет иметь скорость

$$v_l = \frac{c}{n_0} \pm v_m \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

(коэффициент при v_m называют коэффициентом увлечения Френеля). При этом показатель преломления диска равен

$$n' = n \pm v_m \frac{n^2-1}{c}.$$

Длина волны, генерируемая лазером, находится из соотношения

$$N\lambda = (L-l)\,n_0 - ln' = Ln_0 - l\,(n-n_0) \pm lv_m \frac{n^2-1}{c},$$

где N — целое число. Отсюда на основании выражения (2,8), расщепление частот дается формулой

$$\Delta\nu = 2lv_m \frac{n^2-1}{L\lambda}. \tag{6,1}$$

Помещая в кольцевой резонатор кварцевый диск под углом Брюстера, можно наблюдать биения на частотах 1—20 *кгц* при эффективном пути в кварце 17 *мм* и продольной составляющей скорости $v_m = 125 \div 2500$ *мм/сек*. Экспериментальные точки хорошо совпадают с расчетными [89]. Невзаимным элементом, как отмечается в [89], может служить не только твердое тело, но также движущиеся газы или жидкости. Например, можно продувать воздух по трубке, размещенной в одном из плеч кольцевого лазера [49]. При малых скоростях вращения необходимо учитывать расщепление, обусловленное вращением Земли [4].

В качестве еще одного невзаимного элемента могут быть использованы ячейки Фарадея с поляроидами [2, 53, 99, 100], причем ячейки Фарадея могут использоваться не только в основном резонаторе, где они затрудняют работу лазера, но и помещаться во внешнем вспомогательном резонаторе [101, 102].

При отражении от диэлектрической поверхности плоскость поляризации поворачивается на некоторый угол A, который легко найти с помощью формулы Френеля, связывающей амплитуды электрического поля падающей E и отраженной R волн (см., например, [7]):

$$R_p = E_p \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$$

(p-поляризация, электрический вектор лежит в плоскости падения),

$$R_s = -E_s \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

(s-поляризация), где α — угол падения, β — угол преломления. Отсюда

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg} A_1 = \frac{E_p}{R_p}, \quad \operatorname{tg} A_2 = \frac{E_s}{R_s}, \quad A = A_1 - A_2, \\ &\frac{\operatorname{tg} A_1}{\operatorname{tg} A_2} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}. \end{aligned}\right\} \tag{6,2}$$

Поворота плоскости поляризации при отражении от диэлектрика не будет в трех случаях: а) в случае нормального падения, б) в случае, когда плоскости поляризации и падения совпадают, в) в случае, когда плоскости поляризации и падения ортогональны.

В линейном лазере реализуется первый случай, поэтому возможна работа с окнами Брюстера при любом положении плоскости окон.

Если подходить с этой точки зрения к кольцевому лазеру, остаются два других случая, причем из них случай s-поляризации лучше по следующим причинам. Во-первых, система менее чувствительна к расстройкам, ибо A меняется значительно слабее в окрестности $\pi/2$, чем в окрестности 0 и при том же изменении $\operatorname{tg} A_i$. Во-вторых, имеет место автоподстройка плоскости поляризации в окрестности $A_i = \pi/2$ при отражении от зеркала, в то время как в окрестности $A_i = 0$ имеет место обратное явление. К сожалению, оба эти положения не имеют практического применения в кольцевом лазере, ибо здесь плоскость поляризации излучения определяется резонатором. Поэтому внешние воздействия, например, вращение разрядной трубки с окнами Брюстера, не приведут к одновременному изменению и мощности излучения, и плоскости поляризации излучения [103].

Таким образом, в кольцевом лазере возможна генерация только с двумя направлениями вектора **E** электрического поля: **E** лежит в плоскости резонатора или перпендикулярно к ней. Из (6,2) видно, что для p-поляризации фазы **E** и **R** совпадают лишь для углов падения, бо́льших угла Брюстера. Поэтому появляется еще дополнительное ограничение на p-поляризацию (в [103] оно ошибочно вводится для s-поляризации), с которым на практике (треугольный и четырехугольный резонаторы) не приходится сталкиваться (углы падения меньше угла Брюстера).

Наиболее полный анализ поляризации излучения лазера проведен в [104], где широко используется метод сфер Пуанкаре. Этот метод использован также авторами работы [105] для исследования кольцевого лазера с анизотропным элементом.

7. ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА

Мощность излучения лазера определяется в первую очередь величиной инверсии заселенностей ΔN. Чтобы сделать ее максимальной, параметры активной среды стремятся подобрать оптимальным образом: создают определенную концентрацию электронов n_e в плазме, определенную электронную температуру T_e. Практически это сводится к выбору режима питания разряда и параметров газа (смеси газов).

Распределение поля основной моды по сечению резонатора $E(x, y)$ имеет гауссову форму [8-10]. Если в резонаторе используются сферические зеркала, то и продольное распределение поля резонатора не является постоянным. В случае резонатора «плоскость — сфера» распределение поля резонатора — кривая гауссова типа, максимум которой понижается, а ширина увеличивается по мере перехода от плоского зеркала к сферическому. Вид распределения поля на зеркалах полуконфокального резонатора приведен на рис. 15.

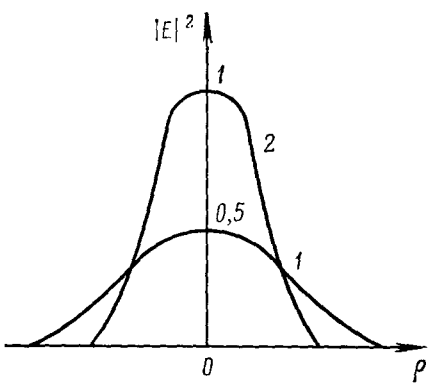

Рис. 15. Радиальное распределение поля в полуконфокальном резонаторе.

1 — распределение поля на сферическом зеркале, 2 — на плоском зеркале.

Инверсия заселенностей в активной среде лазера тоже распределена неравномерно. В газовом разряде концентрация возбужденных атомов в бесконечном цилиндре должна удовлетворять уравнению [106-108]

$$D_a\left(\frac{d^2N}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dN}{dr}\right)+\alpha_a n_a q_e=\beta_a N q_e+\gamma_a N, \qquad (7,1)$$

где D_a — коэффициент диффузии; n_a и N — концентрация нормальных и возбужденных атомов; $q_e = n_e(r)/n_e(0)$, $n_e(0)$ — концентрация электронов на оси цилиндра, $n_e(r)$ — радиальное распределение концентрации электронов; α_a — вероятность ударов I рода между атомами и электронами на оси цилиндра; γ_a — вероятность атомных столкновений II рода (на оси); β_a — вероятность ударов II рода атомов с электронами.

Граничные условия:

$$\left.\frac{dN}{dr}\right|_{r=0} = 0, \quad N|_{r=a} = 0.$$

Возможны два предельных случая:

1) $\gamma_a \gg \beta_a$; тогда решением (7,1) является

$$N(r) = N(0) J_0\left(\mu_1 \frac{r}{a}\right),$$

где

$$N(0) = \frac{n_a \alpha_a}{\gamma_a + \frac{\mu_1^2 D_a}{a^2}};$$

$J_0(\mu_1 r/a)$ — функция Бесселя нулевого порядка, μ_1 — первый корень этой функции, a — радиус цилиндра.

2) $\beta_a \gg \gamma_a$; решение (7,1) имеет вид

$$N = N_{Ba}\left[1 - \frac{I_0\left(\sqrt{B_a}\,\frac{r}{a}\right)}{I_0\left(\sqrt{B_a}\right)}\right],$$

где N_M — концентрация возбужденных атомов при максвелловском распределении по энергиям: $B_a = \beta_a a^2/D_a$; $I_a(\sqrt{B_a})$ — функция Бесселя мнимого аргумента. При малых B_a (менее 10) оба решения имеют близкий вид.

Если мы хотим рассматривать инверсию заселенностей ΔN, то мы должны учитывать не один возбужденный уровень, как в (7,1), а по крайней мере два уровня. Например, для He — Ne-лазера надо решить уравнения для уровней $3s_2$ и $2p_4$ неона (речь идет о линии излучения с $\lambda = 0{,}6328$ *мкм*), кроме этого, нужно учесть уровень $1s$ неона [125] и d-уровни неона [109, 110]. В первом приближении можно упростить задачу для He — Ne-смеси и рассматривать раздельно лишь два рабочих уровня. Для возбужденных атомов гелия (2^1S) может быть записано аналогичное (7,1) уравнение [111]

$$D_a\left(\frac{d^2N_{\text{He}}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dN_{\text{He}}}{dr}\right) + \alpha n_{\text{He}} n_e = \beta N_{\text{He}} n_e + \gamma N_{\text{He}} N_{\text{Ne}}, \tag{7,2}$$

где $\alpha n_e n_{\text{He}}$ — число атомов гелия, возбужденных электронным ударом, в состояние 2^1S, $\beta n_e N_{\text{He}}$ — число разрушенных электронным ударом метастабилей гелия N_{He}, $\gamma N_{\text{He}} N_{\text{Ne}}$ — число атомов неона, возбужденных атомами гелия, находящимися в состоянии 2^1S, $n_e = n_e(0) J_0(\mu_1 r/a)$ [112]. Полагая, что число возбужденных в состояние $2p_4$ атомов неона $N(2p_4)$ пропорционально n_e, а число возбужденных в состояние $3s_2$ атомов неона $N(3s_2)$ пропорционально N_{He}, можно считать [111], что инверсия заселенностей в этом случае $\Delta N(r/a) = \text{const} \times J_0(\mu_1 r/a)$. Экспериментально, вместо $\Delta N(r/a)$ измеряли коэффициент усиления He — Ne-смеси для излучения с $\lambda = 0{,}6328$ *мкм*, имеющий такое же радиальное распределение, что и $\Delta N(r/a)$, и получили хорошее совпадение [111].

Радиальное распределение инверсии заселенностей в He — Ne-разряде меняется с током разряда: сначала увеличивается подобным образом,

потом размывается, и, наконец, образуется провал на оси, обусловленный насыщением. Меняется распределение с давлением (есть оптимальное давление, при котором ΔN на оси максимально), начиная с некоторого давления наблюдается поглощение излучения; с соотношением компонент смеси (по мере увеличения доли гелия — обостряется); существует оптимальное соотношение компонент смеси, когда ΔN на оси максимально [113–115] (рис. 16).

Итак, поле резонатора и инверсия заселенностей в активной среде распределены неравномерно. По-видимому, мощность излучения лазера определяется не абсолютной величиной ΔN в активной среде, а той ее частью, которая оказывается в области распределения поля резонатора и эффективно взаимодействует с ним [115]. Иначе говоря, мощность излучения лазера определяется областью, где указанные выше распределения перекрываются.

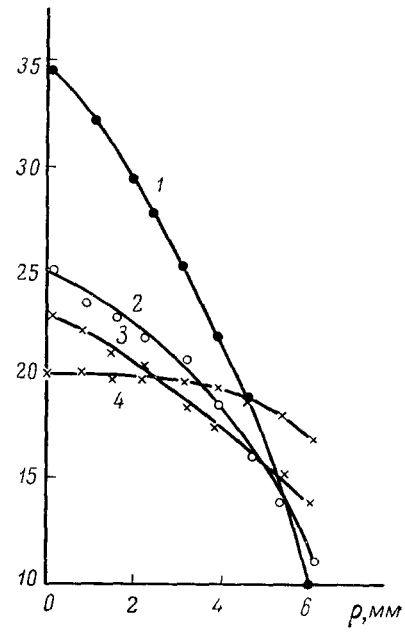

Рис. 16. Распределение инверсии заселенностей (усиления) по сечению ρ разрядной трубки [114, 115].

1 — $P_{He}/P_{Ne} = 7:1$; *2* — $5:1$; *3* — $3:1$; *4* — $1:1$; $P = 0{,}8$ *тор*.

Поскольку распределение инверсии заселенностей меняется с накачкой и параметрами смеси, с помощью последних можно регулировать «область перекрытия», а значит, и выходную мощность лазера. В свою очередь это означает, что параметры He — Ne-смеси являются оптимальными в зависимости от типа резонатора, используемого в He — Ne-лазере [115]. Распространенным является мнение, что для He — Ne-лазера (с $\lambda = 0{,}6328$ *мкм* и с $\lambda = 3{,}39$ *мкм*) оптимальным является соотношение компонент смеси $P_{He}/P_{Ne} = 5:1$, а давление определяется из соотношения $pD = 2{,}9—3{,}6$ *тор·мм* [116]. Известны работы (см., например, [117]), где подтверждаются результаты авторов [116]. Дело в том, что эти измерения проводились в конфокальном (полуконфокальном) резонаторе, причем длина разрядного промежутка примерно равнялась длине резонатора. Если в полуконфокальный резонатор поместить разрядную трубку, значительно уступающую по длине резонатору (рис. 17, *а*), то оптимальные параметры He — Ne-смеси определяются местоположением трубки в резонаторе [118]. Поле резонатора у сферического зеркала более размыто, чем у плоского. Полагая, что мощность излучения лазера максимальна, когда распределение поля резонатора и инверсии заселенностей подобны, можем ожидать (на основании результатов [114–115]), что, располагая трубку около сферического зеркала, можно получить одно оптимальное соотношение компонент смеси $n_1 = P_{He}/P_{Ne}$, а располагая ее около плоского зеркала — другое оптимальное соотношение компонент n_2, причем $n_2 > n_1$. Действительно, в работе [118] в резонатор длиной $L = 1$ *м* помещалась трубка длиной $l = 20$ *см* (диаметр трубки 3 *мм* значительно превышал «пятно поля» на сферическом зеркале резонатора для основного типа колебаний), получено $n_1 = 3{,}5:1$, а $n_2 = 6{,}5:1$ ($\lambda = 0{,}6328$ *мкм*). В случае неконфокального резонатора отклонение оптимального значения P_{He}/P_{Ne} от $5:1$ будет наблюдаться при трубках любой длины. В соответствии

с изложенными выше соображениями, оптимальное n в резонаторе «плоскость — сфера» при $L \approx l$ будет больше 5 : 1, если $R < 2L$ (R — радиус кривизны зеркала). При $R > 2L$ оптимальное n станет меньше 5 : 1. Так, в [119] в резонаторе с $L \approx 1$ *м* ($l \approx L$, диаметр трубки 6 *мм*) использовалось одно сферическое зеркало с $R = 1{,}5$ *м*. Получено оптимальное соотношение $P_{He}/P_{Ne} = 9 : 1$ при давлении $p \approx 2$ *тор* ($\lambda = 0{,}6328$ *мкм*).

В кольцевом He — Ne-лазере при наличии сферических зеркал следует также учитывать описанное выше явление. В силу того, что распределение поля резонатора в разных плечах будет различным, следует ожидать изменения оптимальных параметров для трубок, помещенных в плечи с разным распределением поля. Рассуждения, приведенные для резонатора на рис. 17, *а*, могут быть использованы для резонатора, приведенного на рис. 17, *б*. Следует ожидать, что в плече *III* оптимальное соотношение компонент смеси n будет больше, чем 5 : 1, а в плече *IV* — меньше, чем 5 : 1. Для кольцевого лазера с резонатором, изображенным на рис. 17, *б* (плечо 120 *см*, трубка с $l = 1$ *м*, $D = 6$ *мм*, $R = 3$ *м*), получено оптимальное соотношение компонент смеси ($\lambda = 0{,}6328$ *мкм*) 3 : 1 в плече *IV* и 6 : 1 в плече *III* [120]. Используя сферические зеркала с R, бо́льшими периметра треугольника, в [120] наблюдали сглаживание различий между плечами, что связано, по-видимому, с изменением конфигурации поля резонатора.

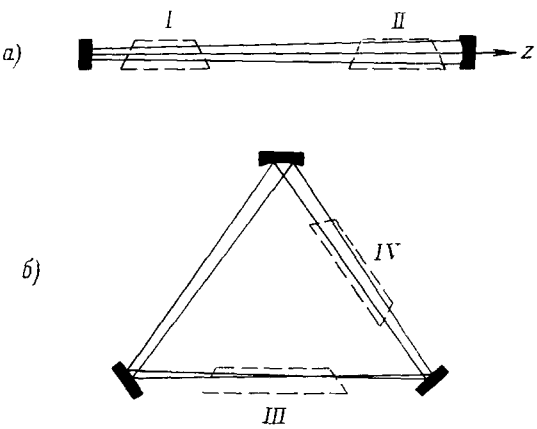

Рис. 17. *а*) Полуконфокальный резонатор с короткими трубками; *б*) кольцевой резонатор.

До сих пор мы рассматривали лишь возможность изменения радиального распределения инверсии заселенностей. Следует учесть еще продольное распределение инверсии заселенностей. В цилиндрической трубке оно практически однородно.

В трубке конусообразного сечения [121] оно становится неоднородным и общее усиление возрастает. Действительно, коэффициент усиления на единицу длины разрядного промежутка на оси цилиндрической трубки He — Ne-лазера $G = G_0 k_0$ [122], где G_0 — функция состояния активной среды, определяемая током разряда, давлением и соотношением компонент смеси, а k_0 определяется геометрией трубки ($k_0 \approx 1/a$ для He — Ne-лазера). Интересуясь лишь зависимостью от геометрии сечения, остальные условия мы можем сделать одинаковыми. Поэтому ищем геометрическую часть коэффициента усиления для цилиндрической трубки в виде

$$k = \frac{1}{S} \int k_0 f(S)\, dV, \tag{7,3}$$

где V — объем трубки, S — площадь поперечного сечения. Для цилиндрической трубки в предположении $f(S) = J_0(\mu_1 r/a)$ имеем $k = 0{,}43 l/a$. Для трубки с квадратным сечением такой же площади $k = 0{,}45 l/a$. Применяя (7,3) для трубки, предложенной в [121], получим

$$k = \frac{2\pi}{S_{ср}} \int_0^l \int_0^{r_0} \frac{1}{r_0} J_0\left(\mu_1 \frac{r}{r_0}\right) r\, dr\, dz, \tag{7,4}$$

где

$$r_0 = b + \frac{a-b}{l} z,$$

$$S_{\text{ср}} = \frac{1}{l} \int_0^l \pi r_0^2 \, dz = \frac{\pi}{3} (a^2 + ab + b^2),$$

a и b — радиусы торцов конусообразной трубки. Помещая трубку конусообразного сечения в конфокальный кольцевой резонатор (рис. 18), получим в соответствие с (7,4) $k = 0{,}475 l/a$ для $a/b = 1{,}2$ (примерно во столько раз отличаются пятна на зеркалах этого резонатора). Еще большее усиление можно получить, используя параболические образующие в конусообразной трубке. Следовательно, применение трубки конусообразного сечения в кольцевом He — Ne-лазере выгоднее, чем применение цилиндрической трубки. Дальнейшая оптимизация кольцевого лазера может быть проведена, если поместить в разные плечи резонатора трубки разных диаметров [123] и разных сечений.

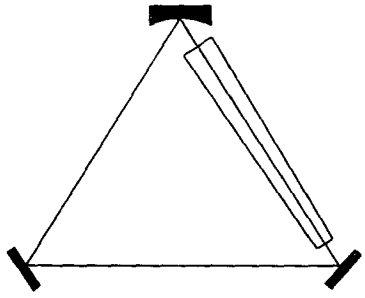

Рис. 18. Трубка конусообразного сечения в кольцевом резонаторе.

Таким образом, использование распределения инверсии заселенностей является еще одним резервом повышения мощности газового лазера, в том числе кольцевого. Повышение эффективности использования этого резерва, естественно, связано с необходимостью всестороннего исследования плазмы газового лазера. Это позволит, в частности, дать более строгую интерпретацию результатов работ [111, 113, 114]. Проведенные до сих пор зондовые и резонаторные измерения параметров плазмы [124–127], а также теоретическое рассмотрение вопроса (см., например, [128]) не позволяют считать, что зависимость мощности излучения от параметров плазмы полностью определена. Отдельные попытки, используя известные данные о поведении плазмы [129, 130], прогнозировать зависимость мощности He — Ne-лазера от параметров разряда (см., например, [62, 131]) позволяют делать лишь качественные оценки. Поэтому для решения вопроса о роли параметров плазмы в процессах, имеющих место в газовом лазере, необходимо дальнейшее совершенствование методики исследования лазерной плазмы.

Ленинградский политехнический институт
им. М. И. Калинина

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. W. M. Macek, D. T.M. Davis, Appl. Phys. Lett. **2**, 67 (1963).
2. E. J. McCartney, Navigation **13**, 260 (1966).
3. P. J. Klass, Aviation Week and Space Techn. 85, 103 (1966).
4. A. L. Shawlow, Sci. Amer. **209**, 34 (1963) (см. перевод: УФН 81 (4), 745 (1936)).
5. R. C. Langford, Sciences et Techn. de l'arm. **39**, 399 (1965).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., Физматгиз, 1962.
7. А. Зоммерфельд, Оптика, М., ИЛ, 1953.
8. A. G. Fox, T. Li, Bell Syst. Techn. J. **40**, 453 (1961).
9. G. D. Boyd, H. Kogelnik, Bell Syst. Techn. J. **41**, 1347 (1962).
10. G. D. Boyd, J. P. Gordon, Bell Syst. Techn. J. **40**, 489 (1961).
11. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ **44**, 1050 (1963).
12. В. С. Булдырев, Э. Е. Фрадкин, Оптика и спектроскопия **17**, 583 (1964).
13. Э. Е. Фрадкин. Оптика и спектроскопия **20**, 316 (1966).

14. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы, М., «Сов. радио», 1966.
15. C. L. Tang, Appl. Optics 1, 768 (1962).
16. P. Smith, T. Li, Proc. IEEE 53, 459 (1965).
17. S. A. Collins, Appl. Optics 3, 1263 (1964).
18. В. А. Киселев, Ж. прикл. спектр. 4, 37 (1966).
19. В. А. Киселев, Ж. прикл. спектр 4, 230 (1966).
20. В. А. Киселев, Ж. прикл. спектр. 5, 23 (1966).
21. В. А. Киселев, Ж. прикл. спектр. 6, 45 (1967).
22. S. A. Collins, D. T. M. Davis, Appl. Optics 3, 1314 (1964).
23. В. С. Булдырев, М. М. Попов, Оптика и спектроскопия 20, 905 (1966)
24. М. М. Попов, Вестник ЛГУ 4, 42 (1967).
25. M. G. Sagnac, Compt. Rend. 157, 708 (1913).
26. M. G. Sagnac, J. Phys. 4, 5, 177 (1914).
27. M. P. Langevin, Compt. Rend 173, 831 (1921).
28. A. H. Rosental, JOSA 52, 1143 (1962).
29. И. П. Мазанько, Ж. прикл. спектр. 1, 153 (1964).
30. E. O. Shulz-DuBois, IEEE-QE 2 (8), 299 (1966).
31. C. V. Heer, Bull. Amer. Phys. Soc. 6, 58 (1961).
32. C. V. Heer, Phys. Rev. 134, A799 (1964).
33. Дж. К. Слэттер, Электроника СВЧ, М., ИЛ, 1948.
34. А. М. Хромых, ЖЭТФ 50, 281 (1966).
35. W. E. Lamb, Phys. Rev. 134, A1429 (1964).
36. F. Aronowitz, Phys. Rev. 139, A635 (1965).
37. J. A. White, Phys. Rev. 137, A1651 (1965).
38. Б. Л. Желнов, А. П. Казанцев, В. С. Смирнов, ЖЭТФ 50, 1291 (1966).
39. С. Г. Зейгер, Э. Е. Фрадкин, Оптика и спектроскопия 21, 386 (1966).
40. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, В. А. Ларионцев, ЖЭТФ 52, 1616 (1967).
41. С. Г. Раутиан, И. И. Собельман, УФН 90 (2), 209 (1966).
42. Б. Л. Желнов, В. С. Смирнов, Оптика и спектроскопия 23, 331 (1967).
43. С. Г. Зейгер, Изв. вузов (Радиофизика) 10, 1671 (1967).
44. С. Г. Зейгер, ДАН СССР 177, 554 (1967).
45. С. Г. Зейгер, ЖТФ 38, 68 (1968).
46. С. Г. Зейгер, Кандидатская диссертация (ЛГУ, 1967).
47. Г. С. Круглик, К теории биений в кольцевом ОКГ, Минск, 1967.
48. Г. С. Круглик, Ж. прикл. спектр. 7, 569 (1967).
49. И. Л. Берштейн, Ю. М. Зайцев, ЖЭТФ 49, 953 (1965).
50. С. Н. Багаев, В. С. Кузнецов и др., Письма ЖЭТФ 1 (4), 21 (1965).
51. Э. М. Беленов, Е. П. Маркин и др., Письма ЖЭТФ 3, 54 (1966).
52. В. Н. Лисицин, Б. И. Трошин, Оптика и спектроскопия 22, 66 (1967).
53. T. J. Hurchings et al., Phys. Rev. 152, 467 (1966).
54. C. L. Tang et al., Phys. Rev. 136, 1A (1964).
55. M. Hercher et al., J. Appl. Phys. 36, 3351 (1965).
56. В. Ю. Петрунькин и др., Радиотехн. и электрон. 12, 467 (1966).
57. А. М. Бонч-Бруевич, В. Ю. Петрунькин и др., Ж. прикл. спектр. 6, 540 (1967).
58. А. М. Бонч-Бруевич, В. Ю. Петрунькин и др., ЖТФ 37, 2031 (1967).
59. В. Ю. Петрунькин и др., Тезисы ВТК ЛПИ им. Калинина, Секция радиоэлектроники, М., 1967.
60. А. М. Бонч-Бруевич, В. Ю. Петрунькин и др., Материалы конференции по КЭ НТОРЭ им. Попова, М., 1967.
61. A. D. White, IEEE-QE 1, 349 (1965).
62. М. И. Дьяконов, С. А. Фридрихов, УФН 90, 565 (1966).
63. А. Б. Бирнбаум, ТИИЭР 55, 308 (1967).
64. А. В. Недоспасов, УФН 94 (3), 439 (1968).
65. Л. Пекарек, УФН 94 (3), 463 (1968).
66. С. А. Алякишев, Д. В. Гордеев, Е. П. Остапченко, Л. М. Пяткова, Радиотехн. и электр. 12, 1769 (1967).
67. Ю. Б. Кобзарев, ЖТФ 5, 216 (1935).
68. B. Van der Pol, Radio Revue 1, 701 (1920).
69. H. G. Møller, Jahrb drahtlosen Telegr. u. Teleph. (Brl.) 17, 256 (1920).
70. J. Golz, Iahrb. d. drahtlosen Telegr. u. Teleph. (Brl.) 19, 28 (1922).
71. E. Appleton, Proc. Cambridge Phil. Soc. 21, 231 (1922).
72. F. Ollendorf, Arch. Electrotech. 16, 280 (1926).
73. B. Van der Pol, Phil. Mag., ser. 7, 3, 65 (1927).
74. А. А. Андронов, А. А. Витт, ЖПФ 7, 3 (1930).
75. Г. Петросян, П. Рязин, К. Теодорчик, ЖТФ 3, 1051 (1933).

76. П. Рязин, ЖТФ 5, 38 (1935).
77. Е. Секарская, ЖТФ 5, 253 (1935).
78. Z. Jelonek, H. Techn. El. Ak. 46, 164 (1935).
79. Н. И. Крылов, Электрические процессы в нелинейных элементах радиоприемников, М., Гос. из-во. литературы по вопросам связи и радио, 1949.
80. К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, М., Гостехиздат, 1952.
81. И. М. Капчинский, Методы теории колебаний в радиотехнике, М., Гостехиздат, 1954.
82. И. С. Гоноровский, Основы радиотехники, М., Связьиздат, 1957.
83. А. Г. Майер, Tech. Phys. USSR 2, 465 (1935).
84. В. И. Гапонов, ЖТФ 6, 801 (1936).
85. К. Ф. Теодорчик, Радиотехника 1, 3 (1946).
86. И. Есафов, ЖТФ 6, 803 (1947).
87. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, ЖТФ 2, 775 (1932).
88. И. Л. Берштейн, ДАН СССР 163, 60 (1965).
89. Ю. Л. Климонтович, В. Н. Курятов, П. С. Ланда, ЖЭТФ 51, 3 (1966).
90. Н. Н. Розанов, Г. И. Винокуров, О. Б. Данилов, Оптика и спектроскопия 23, 624 (1967).
91. F. Aronowitz, R. J. Collins, Appl. Phys. Lett. 9, 55 (1966).
92. C. L. Tang, J. A. Statz, J. Appl. Phys. 38, 323 (1967).
93. В. С. Летохов, Е. П. Маркин, ЖЭТФ 48, 770 (1965).
94. Н. Г. Басов и др., Труды ФИАН (Квантовая радиофизика) 31, 113 (1965).
95. Э. М. Беленов, Е. П. Маркин и др., Письма ЖЭТФ 3, 54 (1966).
96. P. K. Cheo, C. V. Heer, Appl. Optics 3, 788 (1964).
97. W. M. Macek et al., J. Appl. Phys. 35, 2556 (1964).
98. H. Yee, Sciences et Techn. de l'arm. 39, 443 (1965).
99. Н. Д. Миловский, Изв. вузов (Радиофизика) 7, 1095 (1964).
100. А. Л. Микаэлян и др., Радиотехн. и электрон. 11, 12 (1966).
101. R. S. Smith, L. S. Watkins, Proc. IEEE 53, 188 (1965).
102. L. S. Watkins, R. S. Smith, Sciences et Techn. de l'arm. 39, 451 (1965).
103. С. Н. Багаев, Ю. В. Троицкий, Б. И. Трошин, Оптика и спектроскопия 21, 768 (1966).
104. H. de Lang, Polarization Properties of Optical Resonators..., Eindhoven, Netherlands, 1966.
105. Б. И Трошин, С. И. Багаев, Оптика и спектроскопия 23, 781 (1967).
106. В. А. Фабрикант, ЖЭТФ 8, 549 (1938).
107. В. А Фабрикант, ДАН СССР 19, 385 (1938).
108. В. А. Фабрикант, Труды ВЭИ 41, 236 (1940).
109. А. С. Хайкин, Письма ЖЭТФ 3, 110 (1966).
110. А. С. Хайкин, ЖЭТФ 51, 38 (1966).
111. C. Herziger И. А., Zs. Phys. 189, 385 (1966).
112. А. Энгель, Ионизованные газы, М., Физматгиз, 1959.
113. Ю. В. Троицкий, В. П. Чеботаев, Оптика и спектроскопия 20, 362 (1966).
114. В. Е. Привалов, С. А. Фридрихов, Ж. прикл. спектр. 9, 320 (1968).
115. Ю. М. Голубев, В. Е. Привалов, С. А. Фридрихов, В. А. Ходовой, ЖТФ 38, 1097 (1968).
116. A. D. White, J. D. Rigden, Appl. Phys. Lett. 2, 211 (1962).
117. А. Ф. Королев, А. И. Одинцов, В. Н. Мицай, Оптика и спектроскопия 19, 71 (1965).
118. В. Е. Привалов, В. А. Ходовой, Оптика и спектроскопия 25, 318 (1968).
119. Ю. М. Голубев, В. Е. Привалов, Оптика и спектроскопия 22, 499 (1967).
120. Ю. М. Голубев, В. Е. Привалов, С. А. Фридрихов, В. А. Ходовой, ЖТФ 38, 1990 (1968).
121. Б. П. Мирецкий, Е. П. Остапченко, С. Г. Седов, А. А. Федотов, Тезисы докладов НТК по квантовой электронике, М., 1967.
122. В. Р. Беннет, УФН 81 (1), 119 (1963).
123. См. [121], стр. 6.
124. А. Э. Фотиади, С. А. Фридрихов, ЖТФ 37, 566 (1967).
125. Л. Ф. Велликок, А. Э. Фотиади, С. А. Фридрихов, ЖТФ 37, 1127 (1967).
126. И. М. Белоусова, О. Б. Данилов, И. А. Елькина, ЖТФ 37, 1681 (1967).

127. И. М. Белоусова, О. Б. Данилов, И. А. Елькина, В. М. Киселев, Оптика и спектроскопия **24**, 779 (1968).
128. А. И. Максимов, Оптика и спектроскопия **22**, 188 (1967).
129. В. Е. Голант, М. В. Кривошеев, В. Е. Привалов, ЖТФ **34**, 953 (1964).
130. E. F. Labuda, E. J. Gordon, J. Appl. Phys. **35**, 1647 (1964).
131. В. Е. Привалов, С. А. Фридрихов, ЖТФ **38**, 1607 (1968).

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

132. Э. М. Беленов, А. Н. Ораевский, ДАН СССР **180**, 56 (1968).
133. Э. М. Беленов, Е. П. Маркин, Письма ЖЭТФ **7**, 497 (1968).
134. С. Г. Зайгер, Э. Е. Фрадкин, Изв. вузов (Радиофизика) **11**, 519 (1968).
135. В. Ю. Петрунькин, Н. А. Есепкина, С. В. Кружалов, Л. Н. Пахомов, В. А. Чернов, Радиотехн. и электрон. **12**, 146 (1967).
136. А. М. Бонч-Бруевич, В. Ю. Петрунькин, Н. А. Есепкина, С. В. Кружалов, А. М. Пахомов, В. А. Чернов, Ж. прикл. спектроскопии **6**, 540 (1967).
137. П. С. Ланда. Е. Г. Ларионцев, Г. А. Чернобровкин, Радиотехн. и электрон. **13**, 2026 (1968).
138. В. Е. Привалов, С. А. Фридрихов, ЖТФ **38**, 2080 (1968)