

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

530.145

**ИЗМЕРЕНИЯ В КВАНТОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ
МЕХАНИКИ *)****У. Лэмб**

Рассмотрение идеализированных экспериментов показывает, что физические измерения в квантовой механике разбиваются на три этапа: приготовление исходного состояния, возмущение и определение вероятности того, что будет достигнуто определенное конечное состояние.

Что такое квантовая механика? Для меня было особой удачей то обстоятельство, что я смог поставить этот вопрос во время конференции физиков — нобелевских лауреатов, происходившей в Линдау в 1968 г., где присутствовали два основоположника квантовой механики — Гейзенберг и Дирак. Вопрос был задан тридцать лет спустя после открытия квантовой механики на лекции, где присутствовало еще и четыреста студентов, только-только начавших изучать этот предмет. На поставленный вопрос можно ответить по-разному. Единственный простой и легкий ответ состоит в том, что квантовая механика представляет собой науку, обеспечивающую нас удивительным набором правил расчета определенных физических свойств вещества. Для таких простейших систем, как атом водорода или атом гелия, вычисленные уровни энергии с фантастической точностью совпадают с уровнями, определенными экспериментально. В более сложных случаях вычисления гораздо труднее и точность результатов уже не столь велика, но есть все основания думать, что (по крайней мере в принципе) теория окажется адекватной, если только удастся преодолеть вычислительные трудности.

Когда пытаются интерпретировать квантовую механику на любом другом уровне, интерпретация неизбежно становится довольно туманной. Главное затруднение связано с представлением об «измерении», которое в квантовой механике означает определение значений наблюдаемых физических величин с наибольшей возможной точностью.

Я читал курс квантовой механики для студентов на протяжении двадцати лет в Колумбийском, Стэнфордском, Оксфордском и Йельском университетах. Почти всегда к вопросу об измерениях я подходил следующим образом. В начале курса лекций я говорил студентам: «Сначала вы должны освоить правила вычислений в квантовой механике. Потом я расскажу вам о теории измерений и постараюсь раскрыть смысл того, что подразумевается под измерениями». Почти всегда случалось так, что время, отведенное на лекции, заканчивалось до того, как я успевал выполнить свое обещание.

Действительная же причина нехватки времени состояла в том, что я чувствовал, что даже наиболее приемлемые варианты изложения вопроса о квантово-механических измерениях были либо слишком расплывчаты, либо слишком формальны и лишены

*) W. L a m b, Operational Interpretation of Nonrelativistic Quantum Mechanics, Phys. Today 22, 23 (1969). Автор статьи Уильям Лэмб удостоен Нобелевской премии 1955 г. за открытие, которое теперь известно под названием «лэмбовского смещения». Статья написана на основе лекции, прочитанной 3 июля 1968 г. на 6-й конференции лауреатов Нобелевских премий в Линдау (ФРГ). Такие конференции созываются регулярно, один раз в три года. Перевод В. А. Угарова.

физического содержания. Но по мере того, как проходили годы, у меня постепенно складывалась «для самого себя» некоторая интерпретация квантовой механики, в основе которой лежало разложение измерений на отдельные этапы. На мой подход к этому вопросу, несомненно, оказало влияние близкое соприкосновение с некоторыми экспериментальными исследованиями, в которых производились «манипуляции» атомными состояниями с помощью микроволновых и радиочастотных электромагнитных полей. Чтобы подойти к вопросу об измерениях определенных динамических переменных физической системы, мне необходимо точно знать, какие приборы необходимы для

этой цели и каким образом их следует, по крайней мере в принципе, использовать. Я не могу просто махнуть рукой на эту проблему или удовлетвориться формальной логической схемой, включающей в себя черные ящики.

Марк Твен сказал как-то о метеорологии: «Все говорят о погоде, но никто ничего не может с ней поделаться». Аналогичное утверждение может быть высказано и об объекте измерений в квантовой механике. Так как реально ни одна из тех экспериментальных процедур, которые я буду обсуждать, не может быть осуществлена, все они могут рассматриваться лишь как идеальный предельный случай, заслуживающий рассмотрения. Сделав разумные предпосылки, мы знаем — в той степени, в какой это вообще возможно, — что мы делаем с системой, которая нас интересует, в любой момент времени. Если же фактически мы не совсем уверены в том, что мы делаем с системой, мне представляется несомненным, что наши сведения о состоянии системы в будущем будут менее полными. Я убежден в том, что предлагаемые мной эксперименты самые точные из всех возможных. В них используются идеальные приборы, которых у нас никогда не будет. Реальные измерения далеки от идеальных. Почти во всех физических экспериментах, о которых говорят, что в них что-то «измеряется», в лучшем случае имеется весьма скверное квантовомеханическое измерение в техническом смысле этого слова. Это безусловно справедливо для экспериментов по рассеянию, производимых в атомной и ядерной

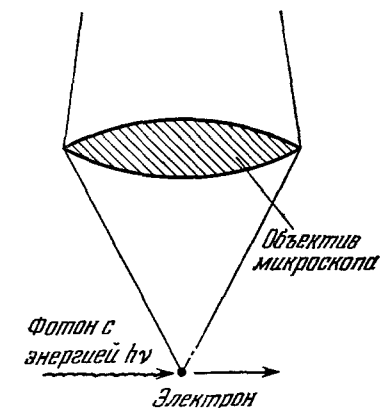


Рис. 1. Микроскоп, работающий на γ -квантах, придуманный Гейзенбергом¹ для иллюстрации смысла соотношения неопределенностей.

Электрон нельзя наблюдать, если он не вступил во взаимодействие с фотоном. Передаваемый фотоном импульс делает невозможным одновременное точное определение положения и импульса электрона.

физике. Например, знаменитый «микроскоп на γ -излучении» (рис. 1), придуманный Гейзенбергом для качественного рассмотрения соотношения неопределенностей, отнюдь не обеспечивает измерения положения, а является типичным экспериментом по рассеянию. По моему мнению, квантовомеханическая теория неидеальных измерений, в которых устанавливается меньший контроль за системой, чем предполагается в идеальных мысленных экспериментах, еще ждет своего создания. Скорее всего она будет широко использовать теорию случайных процессов.

БЕСПИНОВЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ В ПОЛЕ

Допустим, что нас интересует физическая система, представляющая собой нерелятивистский бесспиновый электрон массы m , движущийся в заданном консервативном силовом поле с потенциалом $V(x)$. Оператор Гамильтона системы равен сумме операторов кинетической и потенциальной энергии:

$$\mathcal{H} = T + V,$$

где

$$T = -(\hbar^2/2m) \nabla^2, \quad V = V(x).$$

С электроном связывается волновая функция $\psi(x, t)$, удовлетворяющая уравнению Шрёдингера

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = (T + V) \psi(x, t).$$

Это дифференциальное уравнение возникает как результат обобщения классической механики, в которую вводится волновое поле $\psi(x, t)$, некоторым образом описывающее электрон. Согласно основному предположению квантовой механики выражение

$$dW(x, t) = |\psi(x, t)|^2 dx$$

определяет вероятность того, что в момент времени t электрон занимает положение между x и $x + dx$. Это вероятностное утверждение относится не к единичной системе, а к ансамблю систем, каждая из которых описывается той же самой волновой функцией $\psi(x, t)$. При дальнейшем развитии теории это вероятностное предположение обобщается следующим образом. Рассмотрим полный набор коммутирующих эрмитовских операторов (наблюдаемых) $F(x, p)$, собственными значениями которых будут величины F_f , а собственные функции удовлетворяют уравнению

$$F(x, p) \varphi_f(x) = F_f \varphi_f(x).$$

Функции $\varphi_f(x)$ образуют замкнутую систему ортонормированных функций данной задачи, и любая волновая функция может быть разложена в ряд по этим функциям. Такое разложение имеет вид

$$\psi(x, t) = \sum_f C_f(t) \varphi_f(x).$$

Довольно правдоподобным выглядит предположение о том, что квадрат абсолютной величины коэффициентов этого разложения $C_f(t)$

$$W_f = |C_f|^2$$

определяет вероятность того, что динамическая переменная F «принимает» значение F_f в состоянии $\psi(x, t)$. Обратите внимание на то, что мы не очень ясно представляем, как могут быть определены величины F_f . Вероятностные предположения сами по себе не дают никаких рецептов для их экспериментального подтверждения или опровержения. Неизвестно также, все ли эрмитовские операторы F , или только некоторая привилегированная часть их, могут быть измерены в том смысле, который подразумевается вероятностным предположением.

ПРИГОТОВЛЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

До того, как говорить о том, как нужно производить измерения, нужно рассмотреть еще один важный вопрос, имеющий непосредственное отношение к делу, а именно *приготовление* состояния $\psi(x, 0)$ в момент времени $t = 0$. (Хотя некоторые авторы смешивают *приготовление состояния* и *измерение*, эти понятия существенно различны как физически, так и логически.) Очевидно, временное уравнение Шрёдингера определяет волновую функцию в будущем $\psi(x, t)$ лишь в том случае, если известно значение этой функции $\psi(x, 0)$ в начальный момент времени. Поэтому было бы весьма полезно иметь в своем распоряжении некоторый способ, чтобы начать с системы, описываемой именно начальной волновой функцией $\psi(x, 0)$, с тем, чтобы извлечь некоторую физическую информацию из расчетной величины $\psi(x, t_n)$ в тот момент t_n , когда производится измерение. Вся ситуация схематически изображена на рис. 2. Незадолго до момента времени $t = 0$ проводятся некоторые процедуры, называемые *приготовлением системы*. С момента $t = 0$ до момента $t = t_n$ волновая функция системы развивается согласно уравнению Шрёдингера системы. Сразу после наступления момента $t = t_n$ над системой проводится серия процедур, составляющая измерение определенной динамической переменной $F(x, p)$.

Первый вопрос, на который нужно ответить, состоит в следующем: можно ли указать экспериментальную процедуру, позволяющую привести электрон в начальный момент времени в состояние, описываемое произвольной волновой функцией $\psi(x, 0)$? На этот вопрос мы можем ответить: «Да!» Однако при этом придется сделать некоторые предположения. Вспомним, как выглядит соответствующая проблема в классической механике для частицы, гамильтониан которой равен $\mathcal{H}(x, p)$. Начальное состояние частицы полностью определяется классической координатой $x(0)$ и импульсом $p(0)$; состояние частицы в будущем, т. е. $x(t)$ и $p(t)$, однозначно определяется

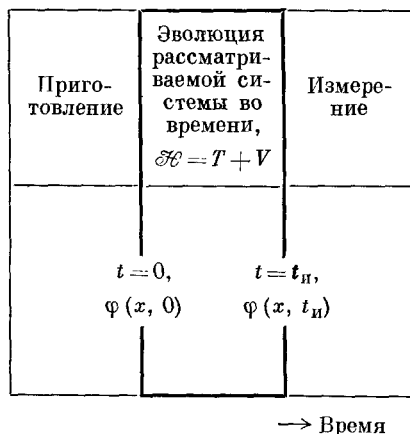


Рис. 2. Приготовление состояния и измерение.

Волновая функция системы эволюционирует в промежутке времени от $t = 0$ до $t = t_n$ согласно временному уравнению Шрёдингера. Процесс приготовления начального состояния осуществляется незадолго до момента $t = 0$. Измерение некоторой физической величины начинается в момент $t = t_n$.

интегрированием гамильтоновских уравнений движения

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x},$$

удовлетворяющих начальным условиям при $t = 0$. В классической механике рассматривают приготовление начального состояния как тривиальную процедуру. В момент $t = 0$ частицу просто помещают в точку $x(0)$ и придают ей импульс $p(0)$. Все это вполне можно осуществить в рамках классической механики. Мы создаем потенциальную яму $U_1(x)$, имеющую минимум в точке $x = x(0)$. Затем любым способом захватываем рассматриваемую частицу в потенциальную яму и, используя незначительное трение, добиваемся того, чтобы частица оказалась в покое как раз в минимуме потенциальной ямы. Тогда можно считать, что частица локализована в точке $x(0)$ в момент $t = 0$. Затем мы действуем на частицу силой, имеющей характер короткого импульса, обусловленной потенциалом $U_2(x) \delta(t)$, где $\delta(t)$ — дираковская δ -функция, обладающая резким максимумом при $t = 0$. Такая сила может сообщать частице импульс $p(0)$, не меняя существенно ее положения. Сразу же после этого включается потенциал $V(x)$, который определяет поставленную нами задачу. Так как мы должны иметь возможность осуществить такую процедуру для произвольных значений $x(0)$ и $p(0)$, разумно допустить, что мы можем воздействовать на систему потенциалом произвольной формы $U(x, t)$ и что мы можем ввести достаточное малое трение, когда нам это понадобится.

КВАНТОМЕХАНИЧЕСКОЕ ПРИГОТОВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ

Теперь мы должны обратиться к вопросу о приготовлении состояния в квантовой механике. Как это ни удивительно, такое приготовление (по крайней мере в принципе) требует тех же самых экспериментальных условий, какие необходимы в классическом случае, ни больше — ни меньше.

Допустим, что нам нужно приготовить состояние $\psi(x, 0)$. Если нам известно, что $\psi(x, 0)$ является собственной функцией состояния с низшей энергией для некоторого потенциала $U_1(x)$, все, что нам нужно сделать, — это обеспечить создание такого потенциала, каким-либо способом захватить электрон в поле этого потенциала и подождать, пока трение излучения доведет частицу до ее основного состояния. Тогда мы мгновенно отключаем $U_1(x)$ и также мгновенно включаем $V(x)$ — потенциал, который интересует нас в этой задаче. (Согласно теории внезапных возмущений системы² волновая функция вовсе не сразу изменяется вслед за внезапным изменением потенциала, за исключением того случая, когда есть какая-то особенность в зависимости потенциала от времени.) Для последующих моментов времени волновая функция $\psi(x, t)$ будет определяться временным уравнением Шрёдингера рассматриваемой системы

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H} \psi \equiv (\hat{T} + V) \psi.$$

Существует, конечно, вопрос о том, как убедиться, что электрон захвачен в потенциальное поле $U_1(x)$, но мне он представляется тривиальным, и я не стану на нем здесь задерживаться.

Если требуемое начальное состояние не является известной собственной функцией, соответствующей минимальной энергии для некоторого потенциала $U_1(x)$, можно все же предложить несколько процедур его приготовления. Можно попытаться подыскать потенциал $U_1(x)$, для которого $\psi(x, 0)$ была бы собственной функцией, соответствующей некоторой энергии E , но не обязательно минимальному значению энергии. Поскольку функция $\psi(x, 0)$ удовлетворяет стационарному волновому уравнению

$$[\hat{T} + U_1(x)] \psi(x, 0) = E \psi(x, 0),$$

мы можем разрешить это уравнение относительно потенциала $U_1(x)$ и найти его явное выражение

$$U_1(x) = E - [\hat{T} \psi(x, 0) / \psi(x, 0)]. \quad (1)$$

Если потенциал $U_1(x)$ возможно создать экспериментальным путем, мы захватим электрон в поле этого потенциала. Волновая функция этого состояния будет линейной комбинацией собственных функций гамильтониана $T + U_1$, среди которых будет и необходимая нам функция $\psi(x, 0)$. Далее существует несколько возможностей. Одна из них состоит в том, чтобы провести процесс разделения по состояниям — процесс типа опыта Штерна — Герлаха, когда отбирается атом с собственным значением энергии, равным E . Если нам попадется другое собственное значение, мы забракуем этот атом и будем повторять процедуру до тех пор, пока не получим состояние, которое нам нужно.

ОСЛОЖНЕНИЯ

Мы можем столкнуться с тремя затруднениями. Во-первых, потенциал $U_1(x)$, определяемый уравнением (1), может иметь особенности, если у функции $\psi(x, 0)$ есть узлы. Во-вторых, спектр энергий может оказаться непрерывным, а не дискретным и разделение частиц по состояниям окажется затруднительным. В-третьих, потенциал $U_1(x)$ может оказаться комплексной функцией, поскольку $\psi(x, 0)$ — комплексная функция. Эти неприятности можно либо игнорировать, либо преодолеть методами, подобными тому, который будет сейчас рассмотрен применительно к случаю, когда функция $U_1(x)$, определяемая уравнением (1), оказывается комплексной.

В этом случае мы записываем нужную начальную волновую функцию в виде ³

$$\psi(x, 0) = R(x) e^{iS(x)},$$

где $R(x)$ и $S(x)$ — действительные функции координаты. Затем мы используем действительный потенциал

$$U_1(x) = E - [\hat{T}R(x)/R(x)] \quad (2)$$

вместо потенциала, следующего из (1), и готовим состояние, соответствующее действительной функции $R(x)$, способом, о котором шла речь выше. Затем включается импульсный потенциал

$$U_2(x, t) = -\hbar S(x) \delta(t), \quad (3)$$

роль которого сводится к тому, чтобы превратить функцию $R(x)$ в $\psi(x, 0)$. Во время действия импульсного потенциала уравнение Шрёдингера может быть адекватно аппроксимировано следующим образом:

$$-\hbar \psi / it = -\hbar S(x) \delta(t) \psi(x, t)$$

или

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = iS(x) \delta(t) \psi(x, t).$$

Решение этого дифференциального уравнения находится без труда. Сразу после включения импульсного потенциала волновая функция приобретает вид

$$\psi(x, 0_+) = R(x) e^{iS(x)},$$

если начальная волновая функция была $R(x)$. Таким образом, используя сначала потенциал $U_1(x)$, определяемый согласно (2), затем $U_2(x)$ — согласно (3) и, наконец, $V(x)$, можно приготовить произвольное начальное состояние интересующей нас системы. Обратите внимание на очевидную параллель с той ситуацией, которая имеет место в классическом случае.

РАСПЛЫВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Эту процедуру можно проиллюстрировать простым примером. Рассмотрим свободную частицу, описываемую гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \hat{p}^2/2m$$

и волновой функцией, представляющей собой действительную гауссову функцию в момент $t=0$:

$$\psi(x, 0) = (2\pi)^{-1/4} (\Delta x_0)^{-1/2} e^{-x^2/4(\Delta x_0)^2}.$$

Соответствующая плотность вероятности равна

$$\rho(x, 0) = |\psi(x, 0)|^2 = (2\pi)^{-1/2} (\Delta x_0)^{-1} e^{-x^2/2(\Delta x_0)^2}$$

и представляет собой также функцию Гаусса с шириной $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \Delta x_0$. Согласно временному волновому уравнению волновая функция спустя промежуток времени T представляет собой уже комплексную гауссову функцию

$$\psi(x, T) = (2\pi)^{-1/4} \left[\Delta x_0 + \frac{i\hbar T}{2m\Delta x_0} \right]^{-1/2} \exp \left[-\frac{x^2/4}{(\Delta x_0)^2 + (i\hbar T/2m)} \right],$$

для которой плотность вероятности равна

$$\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = (2\pi)^{-1/2} \{ (\Delta x_0)^2 + + [(\hbar T)^2/4 (m\Delta x_0)^2] \}^{-1/2} \left\{ -\frac{x^2/2}{[(\Delta x_0)^2 + (\hbar T)^2/4 (m\Delta x_0)^2]^2} \right\}.$$

За промежуток времени T волновой пакет расплывается, оставаясь по своему общему характеру гауссовым, но один из его параметров — ширина Δx увеличивается со временем по закону

$$(\Delta x)^2 = (\Delta x_0)^2 + [\hbar^2 T^2 / 4m^2 (\Delta x_0)^2].$$

Этот результат имеет очевидное истолкование, если вспомнить соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2.$$

Начальной ширине Δx_0 по координате x соответствует неопределенность в импульсе p , а она в свою очередь спустя время T обуславливает дополнительное расплывание по x , равное $\hbar T / (2m\Delta x_0)$, квадрат которого добавляется к исходной ширине Δx_0 .

Рассмотренный выше волновой пакет расплывается в моменты времени $t > 0$. Если мы исходим в момент времени T от волнового пакета $\psi(x, T)$ и изменим направление времени на противоположное, ширина распределения вероятности будет убывать от Δx при $t = T$ до Δx_0 при $t = 0$, однако она снова начнет возрастать для моментов времени $t < 0$. К сожалению, никто не умеет менять направление течения времени, хотя многие теоретические работы оставляют это обстоятельство без внимания. Тем не менее, если мы можем в момент времени $t = 0$ начать с волнового пакета, имеющего исходную форму

$$\psi(x, -T) \equiv \psi(x, T)^* \quad (T > 0),$$

то распределение вероятностей будет уменьшаться по ширине от значения Δx при $t = 0$ до значения Δx_0 в более поздний момент времени $t = T$; в дальнейшем будет происходить увеличение ширины. В нерелятивистской квантовой механике не существует предела для «жесткости» Δx_0 волнового пакета, которой можно достичь к моменту времени T . Мы должны просто отправляться от подходящего комплексного волнового пакета $\psi(x, -T)$ с достаточно большим параметром ширины Δx .

Встает, конечно, другой вопрос. Можно ли экспериментально реализовать такой пакет и если да, то как? Ответ на этот вопрос можно получить из нашего общего рецепта для приготовления состояния. Комплексную волновую функцию $\psi(x, -T)$ следует записать в виде

$$\Psi(x, -T) = R(x) e^{iS(x)}.$$

После простых вычислений мы найдем, что

$$R(x) = (2\pi)^{-1/4} (\Delta x)^{-1/2} e^{-x^2/4(\Delta x)^2}$$

и, с точностью до аддитивной постоянной,

$$S(x) = -[\hbar T/8m (\Delta x_0)^2] x^2/(\Delta x)^2.$$

Функция $R(x)$ — это волновая функция основного состояния для потенциала гармонического осциллятора

$$U_1(x) = [\hbar^2/2m (\Delta x)^2] x^2/(\Delta x)^2,$$

и, если Δx достаточно велико, соответствующая упругая постоянная должна быть очень малой. Импульсный потенциал

$$U_2(x, t) = -\hbar S(x) \delta(t),$$

который должен быть приложен, также имеет параболическую зависимость от пространственных координат.

Этот простой пример иллюстрирует куда более общую процедуру, допускающую несложное истолкование. Сужение волнового пакета завершается тогда, когда на широкую гауссову волновую функцию $R(x)$ действует импульсный потенциал, сообщаемый электрону — независимо от того, какая была у него координата, — именно тот импульс, который необходим, чтобы перевести его в непосредственную близость к точке $x = 0$ спустя время T . Эта процедура очень сходна с фокусировкой пучка света линзой.

Таким образом, мы показали, как готовится произвольное начальное состояние. В последующие моменты времени это состояние эволюционирует согласно временному уравнению Шрёдингера, описывающему систему. Если эта система изолированная, гамильтониан имеет вид $\mathcal{H} = T + V$. Можно даже ввести внешние возмущения, описываемые заданными консервативными силами, изменяющимися со временем. И в этом случае волновая функция будет изменяться вполне определенным образом. Если возмущение содержит в себе некоторые неопределенные или случайные

элементы, система уже не может больше описываться просто волновой функцией; она будет описываться статистической смесью различных волновых функций. Матрица плотности, введенная Нейманом ⁴, Ландау ⁵ и Дираком ⁶, в такой ситуации дает удобный способ описания. Мы ограничимся здесь рассмотрением только чистого случая.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Представьте себе, что мы хотим в некоторый момент времени t_n произвести измерение реальной динамической переменной $\hat{F}(x, p)$ в системе, которая описывается волновой функцией $\psi(x, t_n)$. Какие операции следует для этого провести? Можно ли фактически произвести такие измерения для любого эрмитовского оператора $\hat{F}(x, p)$ или это возможно только для привилегированного класса операторов? Дирак ⁷ указал на возможность измерения «наблюдаемых» величин, которые он определил как реальные динамические переменные, собственные состояния которых образуют полный набор. Вместе с тем Паули ⁸ и многие другие выражали свое сомнение в том, что этот вопрос может быть решен в рамках нерелятивистской квантовой механики.

Если оператор $\hat{F}(x, p)$ задан в виде экспериментально реализуемого гамильтонского оператора, можно безукоризненно провести измерение F следующим способом. Точно в момент времени t_n следует внезапно выключить потенциал $V(x)$ и вместо него подвергнуть электрон действию гамильтониана $\hat{F}(x, p)$.

Обозначим собственные функции оператора $\hat{F}(x, p)$ через $\varphi_f(x)$, а соответствующие собственные значения — через F_f . Для простоты будем считать, что вырождение снято, поэтому собственные значения не повторяются. Тогда можно разложить волновую функцию $\psi(x, t_n)$ в ряд по функциям $\varphi_f(x)$, т. е. записать

$$\psi(x, t_n) = \sum_f C_f \varphi_f(x).$$

В некоторый более поздний момент времени $t > t_n$ волновая функция перейдет в функцию вида

$$\psi(x, t) = \sum_f C_f \varphi_f(x) e^{-iF_f(t-t_n)/\hbar}.$$

Вероятность W_f найти систему в состоянии f , т. е. обнаружить значение оператора \hat{F} равным F_f , дается квадратом абсолютной величины коэффициента разложения C_f :

$$W_f = |C_f|^2.$$

Эта вероятность не зависит от t . Затем у нас есть достаточно времени, чтобы решить, как определить распределение вероятностей по состояниям f . Метод, обычно рассматриваемый в связи с этим, состоит в том, чтобы пропустить атомы через прибор типа примененного Штерна и Герлаха (рис. 3). Такие приборы многократно разбирались как в монографиях, так и учебниках Паули ⁹, Боме ¹⁰, Готтфрида ¹¹ и других. Мне почти нечего добавить к тому, что сказано там. На некотором этапе процесса измерения волновая функция превращается в смесь функций *) благодаря взаимодействию квантовомеханической системы с квазиклассической системой, которая эффективно взаимодействует с интересующей нас квантовой системой случайным образом. Следующий этап носит уже существенно неклассический характер. Он включает в себя установление факта регистрации электрона, например на фотолампе, и безусловно необходимым для завершения процесса измерения.

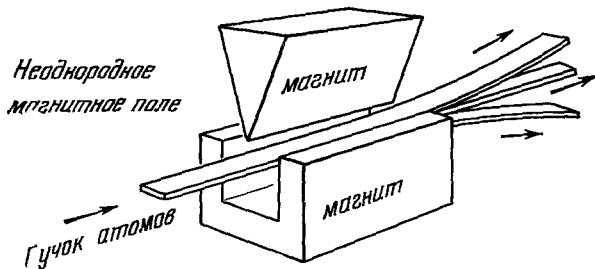


Рис. 3. Прибор Штерна — Герлаха.

Между полюсами магнита, которым придана специальная форма, создается неоднородное магнитное поле, действующее на атомы, попадающие в него. Силы, действующие на атом со стороны магнитного поля, пропорциональны магнитному квантовому числу. Благодаря этому атомы в различных состояниях могут быть отделены друг от друга. В некоторых случаях вместо неоднородного магнитного поля можно воспользоваться неоднородным электрическим полем.

*) По принятой в русской литературе терминологии, «чистое» состояние превращается в «смешанное».

Мы будем предполагать далее, что эрмитовский оператор $\hat{F}(x, p)$ можно рассматривать как возможный оператор Гамильтона для электрона. Однако в нерелятивистской квантовой механике в отсутствие магнитного поля гамильтониан всегда имеет вид $\mathcal{H} = T + V$, где потенциальная энергия может зависеть только от координаты x и времени t , но не от импульса p . Самый простой выход из положения состоит в том, чтобы игнорировать эту трудность и считать, что законы квантовой механики должны доминировать, независимо от конкретного вида гамильтониана. Однако этой теоретической возможности явно недостаточно, если нам необходимо подбирать конкретную экспериментальную процедуру для измерения.

Даже в том случае, когда оператор $\hat{F}(x, p)$ не является гамильтоновским оператором, можно указать метод его измерения. Сначала разберем несколько частных случаев, имеющих первостепенное значение. Оператор импульса \hat{p} не является гамильтоновским оператором, но выражение $\hat{p}^2/2m$ — гамильтониан свободной частицы. В лекции, прочитанной в 1929 г. в Чикаго, Гейзенберг¹² заметил, что можно измерить импульс атомных электронов внезапным выключением атомных потенциалов и наблюдением за свободным распылением электронной волновой функции. Распределение времен прибытия электронов на удаленный детектор как раз и даст искомое распределение электронов по импульсам.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КООРДИНАТЫ

Другим важнейшим оператором служит оператор координаты \hat{x} , который, очевидно, не имеет гамильтоновского вида. Тем не менее измерить этот оператор можно довольно просто. Допустим, что нужно измерить x в момент времени t_n для частицы, описываемой волновой функцией $\psi(x, t_n)$. Это означает, что нам нужно определить распределение вероятности нахождения частицы в интервале $x_n, x_n + dx_n$. Как и всегда, нам необходимо ввести в рассмотрение ансамбль большого числа тождественным образом приготовленных систем. Мы включаем внезапно очень мощный, но короткодействующий потенциал притяжения, центр которого совпадает с точкой x_n . Пусть этот потенциал обуславливает появление только одного связанного состояния с энергией E_1 и волновой функцией $u_1(x - x_n)$, как это изображено на рис. 4. Исходный потенциал $V(x)$ одновременно убирается. Для моментов времени t более поздних, чем t_n , волновую функцию $\psi(x, t)$ можно разложить по собственным функциям $u_n(x)$ с соответствующими энергиями E_n для короткодействующего потенциала:

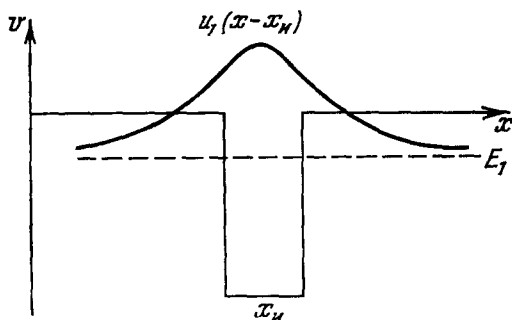


Рис. 4. Измерение положения означает определение распределения вероятности захвата частицы в короткодействующей потенциальной ловушке.

Этот потенциал имеет центр в точке x_n и обуславливает наличие одного связанного состояния $u_1(x - x_n)$ с энергией E_1 . Волновая функция $\psi(x, t_n)$, описывающая электрон, распыляется, когда короткодействующий потенциал включается, а потенциал исходной системы $V(x)$ отключается. Все слагающие волновой функции очень быстро стремятся к нулю, за исключением члена $u_1(x - x_n)$, изображенного кривой с максимумом.

можно малыми, за исключением члена $u_1(x - x_n)$. Амплитуда вероятности C_1 определится выражением

$$C_1 = \int u_1^*(x - x_n) \psi(x, t_n) dx,$$

а независимая от времени вероятность захвата электрона в потенциальное поле

$$W_1 = |C_1|^2. \quad (4)$$

Если область, где функция $u_1(x - x_n)$ отлична от нуля, мала по сравнению с расстоянием, на котором функция $\psi(x, t_n)$ испытывает существенное изменение,

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = \\ = \sum_n C_n u_n(x - x_n) e^{-iE_n(t - t_n)/\hbar}, \end{aligned}$$

где в сумме содержится единственный дискретный член при $n = 1$ и подразумевается интегрирование по непрерывному спектру несвязанных состояний. Нужно подождать совсем немного, и все части волновой функции распылятся, так что вблизи точки x_n все члены станут пренебре-

соотношение (4) можно приближенно записать так:

$$W_1 \sim |\psi(x_n, t_n)|^2.$$

Если эта вероятность нормирована, можно написать

$$dW(x_n) = |\psi(x_n, t_n)|^2 dx_n$$

в соответствии с обычным определением вероятности в квантовой механике. Этот метод напоминает способ определения распределения числа мух в комнате. Можно быстро сжать пальцы, охватив небольшую область пространства, и без особого труда выяснить, попала ли муха или нет. Затем эта процедура многократно повторяется в точности в таких же комнатах, после чего уже нетрудно построить распределение вероятности.

ИЗМЕРЕНИЕ ЭРМИТОВСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Вообще говоря, неэрмитовский оператор $\hat{F}(x, p)$ не позволяет произвести над собой измерение столь простыми способами, и возникает даже сомнение в том, что можно измерять любые эрмитовские операторы. Тем не менее можно предложить следующий рецепт, следуя предложениям Ааронова из университета в Ешиве. Эти предложения указывают тесное формальное, а возможно даже и физическое, соответствие между оператором $\hat{F}(x, p)$ и экспериментальной процедурой, о которой пойдет речь. Сначала мы должны подобрать набор операторов $\hat{G}(x, p)$, которые вместе с оператором $\hat{F}(x, p)$ образуют полный набор коммутирующих операторов. Это не очень трудно осуществить в любом конкретном случае, хотя невозможно дать общий рецепт на все возможные случаи.

Общие собственные функции операторов \hat{F} и \hat{G} могут составлять замкнутую систему базисных функций, перекрывающих гильбертово пространство интересующей нас задачи. Они удовлетворяют уравнениям вида

$$\begin{aligned}\hat{F}(x, p) \varphi_{fg}(x) &= F_f \varphi_{fg}(x), \\ \hat{G}(x, p) \varphi_{fg}(x) &= G_g \varphi_{fg}(x),\end{aligned}\tag{5}$$

где индексами f и g отмечены собственные функции и собственные значения. (Для простоты записи написано только одно уравнение типа (5).) Волновая функция $\psi(x, t_n)$, с помощью которой производится измерение \hat{F} , может быть разложена в ряд вида

$$\psi(x, t_n) = \sum_f \sum_g C_{fg} \varphi_{fg}(x),$$

коэффициенты разложения в котором определяются по формулам

$$C_{fg} = \int \varphi_{fg}^*(x) \psi(x, t_n) dx.\tag{6}$$

Квадрат абсолютной величины C_{fg} дает вероятность того, что оператор \hat{F} принимает значение F_f , а оператор \hat{G} — значение G_g . Если нас интересуют только значения \hat{F} , можно провести суммирование по g .

Теперь мы укажем экспериментальную процедуру, позволяющую найти значение распределения вероятности

$$W_{fg} = |C_{fg}|^2.$$

Допустим, что собственные функции φ_{fg} выражены через две действительные функции R и S :

$$\varphi_{fg}(x) = R_{fg}(x) e^{-iS_{fg}(x)},$$

причем обе функции R и S зависят от индексов f и g . Первый шаг на пути к интересующему нас измерению состоит в преобразовании волновой функции системы $\psi(x, t_n)$ в новую волновую функцию $\psi_S(x)$, определяемую согласно

$$\psi_S(x) = \psi(x, t_n) e^{iS_{fg}(x)}\tag{7}$$

приложением импульсного потенциала

$$U_2(x, t) = -\hbar S_{fg}(x) \delta(t - t_n)$$

к системе. Тогда амплитуда вероятности C_{fg} , получаемая согласно (6), запишется в виде

$$C_{fg} = \int R_{fg}(x) \psi_S(x) dx.$$

Это выражение учитывает только области перекрытия новой волновой функции системы $\psi_S(x)$ и действительной нормированной волновой функции R_{fg} . Из предыдущего обсуждения вопроса о приготовлении состояния нам уже известно, как следует подбирать потенциал $U_{fg}(x)$, для которого функция $R_{fg}(x)$ является собственной функцией, соответствующей энергии E . Этот потенциал находится по формуле

$$U_{fg}(x) = E - [\hat{T}R_{fg}(x)/R_{fg}].$$

Таким образом, второй шаг в процессе измерения состоит в том, что внезапно включается потенциал U_{fg} и отключается потенциал $V(x)$ от системы, волновая функция которой задается согласно (7). Следующая задача состоит в том, чтобы определить вероятность того, что частица находится в состоянии с энергией E . Ее можно решить, применяя какой-либо вариант обычной процедуры Штерна — Герлаха. Таким способом мы найдем искомую вероятность того, что операторы \hat{F} и \hat{G} принимают значения F_f и G_g в том состоянии рассматриваемой системы, которое описывается волновой функцией $\psi(x, t_n)$. Следует подчеркнуть, что вопрос об измерении для эрмитовских операторов сложнее, чем для гамильтоновских операторов, так как потенциал $U(x, t)$, который должен быть приложен, зависит от значений f и g , и, следовательно, для каждого набора значений f и g придется проводить свою серию измерений.

ОГРАНИЧЕНИЯ

В заключение необходимо сделать еще несколько замечаний.

а) Мы предположили, что все потенциалы $U(x, t)$, описываемые классически, могут быть реализованы экспериментально. Это предположение вполне аналогично и тесно связано с предположениями Бора и Розенфельда¹³, выдвинутыми при обсуждении вопроса об измерениях электромагнитных полей. Они предполагали, что рассматриваемые пробными телами достаточно большой массы и с достаточно большой плотностью заряда, так что квантовомеханическими флуктуациями их координаты и импульса можно было пренебречь.

б) Мы рассматривали измерение какой-то одной динамической переменной, например A . Но вместо A мы можем измерять какую-то другую динамическую переменную, скажем B , в том же самом состоянии $\psi(x, t_n)$. Для каждого оператора можно определить меру дисперсии ΔA или ΔB . Проведение двух мер дисперсий должно подчиняться соотношению Робертсона¹⁴ и Шрёдингера¹⁵

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq |\langle [A, B] \rangle|/2,$$

являющемуся обобщением соотношения неопределенностей Гейзенберга. Заметим, однако, что это соотношение неопределенностей не относится к измерению — одновременно или неодновременно — пары наблюдаемых. В специальных случаях, где встречаются коммутирующие операторы, может оказаться возможным измерение сначала одной динамической наблюдаемой и затем другой. Вообще же говоря, прямые измерения первой наблюдаемой настолько нарушат фазовые соотношения, что последующее измерение второй наблюдаемой на образовавшейся смеси не может служить никаким физическим целям.

Одновременное измерение двух некоммутирующих наблюдаемых A и B (например, x и p) требует знания потенциала $U(x, t)$, зависящего как от A , так и от B . Я не думаю, что в общем случае это можно было бы сделать так, чтобы нужная информация возникла в результате измерения. Можно, конечно, из двух эрмитовских операторов \hat{A} и \hat{B} построить эрмитовский оператор. Приведем несколько примеров: $(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})$, $-i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$, $\hat{A}^2\hat{B} + \hat{B}\hat{A}^2$, $\hat{A}\hat{B}\hat{A}$ и т. д. Любой из этих эрмитовских операторов может быть измерен, как это было уже показано, но это вовсе не будет желаемое одновременное измерение \hat{A} и \hat{B} .

в) Вполне возможно распространить описанную методику на системы, состоящие из многих тел; поэтому измерения могут проводиться и в таких системах.

г) Я не знаю, каким образом можно применять описанные выше процедуры в релятивистской квантовой механике или в полевой теории.

До тех пор, пока не сделано такое обобщение, всегда останется сомнение в том, что все то, о чем я рассказывал, имеет отношение к подлинному смыслу квантовой механики. Верно также, что почти все способы изложения квантовой механики опираются на довольно сомнительное убеждение в том, что какие-то виды измерений возможны и в квантовой механике. Я описал некоторые экспериментальные процедуры для осуществления таких измерений. Возможно, что существуют и другие пути. Если же их вообще нельзя провести ни указанными мною способами, ни какими-либо другими, это означало бы, что наше понимание смысла квантовой механики значительно меньше, чем это нам кажется. Наше понимание, по всей вероятности, значительно возрастет, когда появится лучшая теория измерений для более общих случаев —

релятивистской квантовой механики и полевой теории. Несомненно, может случиться, что будут найдены правила расчета без того, чтобы иметь ясное представление о том, какие процедуры вроде тех, которые я описал, должны производиться над системами. Для преподавания квантовой механики в ее современном состоянии, безусловно, очень удобно делать вид, что те обычные предположения относительно измерений, которые делаются в учебниках, безусловно, имеют смысл, хотя с точки зрения практической реализации этих измерений они смысла не имеют. Формулировка квантовой механики, предложенная Дираком, превосходно описывается в представлении об измеряемости. Вместе с тем несомненно, что здесь еще много такого, о чем следует подумать *).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Гейзенберг, Физические принципы квантовой механики, М.—Л., ГТТИ, 1932, стр. 21.
2. В. Паули, Общие принципы волновой механики, М., Гостехиздат, 1947, стр. 139.
3. E. Merzbacher, Quantum Mechanics, J. Wiley, New York, 1961, стр. 158.
4. J. von Neumann, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1, 245, 273 (1927).
5. Л. Д. Ландау, Собрание трудов, т. 1, М., «Наука», 1969, стр. 19.
6. P. A. M. Dirac, Proc. Camb. Phil. Soc. 25, 62 (1929).
7. П. А. М. Дирак, Принципы квантовой механики, М., Физматгиз, 1960.
8. См. ².
9. См. ², стр. 111—114.
10. Д. Бом, Квантовая теория, гл. 22, М., Физматгиз, 1961.
11. K. Gottfried, Quantum Mechanics, vol. 1, ch. IV, W. A. Benjamin, Inc. New York, 1966.
12. См. ¹, стр. 29.
13. N. Bohr, L. Rosenfeld, Det. Kgl. Dan. Vid. Selsk. 12, 8 (1933).
14. H. P. Robertson, Phys. Rev. 35, 667A (1930).
15. E. Schrödinger, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 296 (1930).

*) Следует обратить внимание читателей на книгу Д. И. Блохинцева «Принципальные вопросы квантовой механики» (М., «Наука», 1966), где также рассмотрена проблема измерения в квантовой механике. (Прим. ред.)