1969 г. Декабрь *Том 99, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

НОВЫЕ ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

537.523/.527

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ ИНДУКЦИОННЫЙ РАЗРЯД ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ И БЕЗЭЛЕКТРОДНЫЙ ПЛАЗМОТРОН

Ю. П. Райзер

I. ВВЕДЕНИЕ

Явление высокочастотного индукционного (безэлектродного) разряда в газах известно еще с конца прошлого столетия. Однако полностью понять его удалось не сразу. Индукционный разряд легко наблюдать, если внутрь соленоида, по которому течет достаточно сильный ток высокой частоты, поместить откачанный сосуд. Под действием вихревого электрического поля, которое индуцируется переменным магнитным потоком, в остаточном газе возникает пробой и зажигается разряд. На поддержание разряда (ионизации) затрачивается джоулево тепло кольцевых индукционных токов, текущих в ионизованном газе вдоль силовых линий вихревого электрического поля (магнитные силовые линии внутри длинного соленоида параллельны оси; рис. 1).

Среди старых работ по безэлектродному разряду (ссылки можно найти в [1, 52]) наиболее обстоятельные исследования принадлежат Дж.Дж. Томсону [2], который, в частности, экспериментально доказал индукционную природу разряда и вывел теоретические условия зажигания: зависимость порогового для пробоя магнитного поля от давления газа (и частоты). Подобно кривым Пашена для пробоя разрядного промежутка в постоянном электрическом поле кривые зажигания имеют минимум. Для практического диапазона частот (от десятых долей до десятков мегагерц) минимумы лежат в области низких давлений; поэтому разряд обычно и наблюдался только в сильно разреженных газах.

Давно известны и высокочастотные разряды другого, емкостного типа. Такой разряд возникает в откачанном сосуде, находящемся между обкладками конденсатора, включенного в колебательный контур. Характерной особенностью разрядов емкостного типа является незамкнутость силовых линий высокочастотного электрического поля в зоне разряда.

В этой статье будут рассматриваться только индукционные разряды, причем разряды высокого давления, которые нашли серьезное практическое применение как средство получения плотной чистой плазмы, используемой далее для самых различных целей. Принципиальная схема процесса, в сущности, не отличается от опыта, описанного в самом начале. Индукционный разряд горит внутри соленоида (индуктора), однако для поддержания разряда при высоком, атмосферном, давлении газа требуются большие мощности, порядка киловатт. Температура плазмы при этом имеет порядок 10 000° K.

Возможен стационарный статический режим горения разряда, когда вводимое электромагнитным способом в неподвижную плазму тепло отводится теплопроводностью на охлаждаемые стенки сосуда. Однако наибольший интерес представляет режим с потоком, при котором холодный газ продувается через соленоид, нагревается в стационарно горящем разряде и вытекает из индуктора в виде плотной плазменной струи при атмосферном давлении, причем процесс может продолжаться в течение длительного времени. Такое устройство называют индукционной плазменной горелкой или безэлектродным плазмотроном *).

Безэлектродные плазмотроны обладают некоторыми важными преимуществами по сравнению с более широко распространенными — дуговыми, в которых электрическая энергия вводится в газовый поток путем дугового разряда. Прежде всего, в безэлектродном плазмотроне создается стерильно чистая плазма, не загрязненная продуктами эрозии электродов; плазменная струя получается более стабильной, практически не ограничено время работы, тогда как в дуговых плазмотронах большой мощности быстро разрушаются электроды.

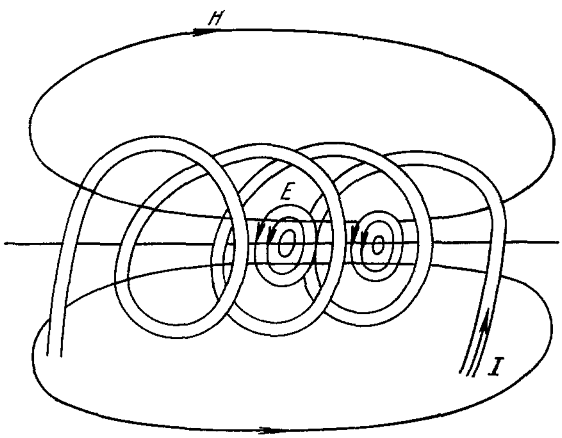

Рис. 1. Схема полей в соленоиде.

Безэлектродные плазмотроны находят все большее и большее применение в физических исследованиях и технике: плазмохимии, металлургии, для выращивания кристаллов тугоплавких веществ, словом, везде, где требуется чистая, беспримесная, плотная плазма. Все это в последнее время привлекло к безэлектродному разряду высокого давления внимание многих физиков и инженеров во всех ведущих странах.

Надо сказать, что технический процесс в этой области заметно опередил понимание физической сущности происходящих процессов и теорию. Успешно работают мощные установки, причем многие сведения, необходимые для эффективного выбора их параметров и условий работы, получены эмпирическим путем, тогда как теорию процессов начали серьезно разрабатывать буквально в самые последние годы. Между тем безэлектродный разряд высокого давления, в особенности в потоке газа, даже независимо от его прикладного значения, очень интересен просто как физическое явление. В частности, совсем недавно выяснилось, что часто употребляемый термин «плазменная горелка» отражает не только внешнее сходство плазменного факела плазмотрона с химическим пламенем обычной горелки. Оказывается, существует глубокая физическая и математическая аналогия между разрядом в потоке газа и процессом распространения пламени в горючей смеси[39].

Ниже будет рассматриваться стационарное горение уже сформировавшегося разряда. Вопросы начального поджигания, тесно связанные с механизмом высокочастотного пробоя, как правило, обсуждаться не будут.

*) Стоит отметить, что принцип нагревания проводящих тел индукционными токами высокой частоты (токами Фуко) применяется в технике очень давно. Он лежит в основе конструкций всевозможных плавильных печей, аппаратов для закалки металлических деталей и т. д. С чисто электродинамической точки зрения здесь происходит, в сущности, такой же процесс, как и при индукционном разряде в газах.

II. ЭКСПЕРИМЕНТЫ, КОНСТРУКЦИИ, ПРИМЕНЕНИЯ

Основы для современных исследований и применений безэлектродных разрядов были заложены работами Г. И. Бабата, которые проводились перед самой войной на Ленинградском электроламповом заводе «Светлана». Эти работы были опубликованы в 1942 г. [3] и стали широко известны за рубежом после публикации в Англии в 1947 г. [4]. Бабат создал высокочастотные ламповые генераторы с мощностями порядка сотни киловатт, что позволило ему получать мощные безэлектродные разряды в воздухе при давлениях вплоть до атмосферного. Бабат работал в диапазоне частот 3—62 *Мгц*, индукторы состояли из нескольких витков диаметром порядка 10 *см*.

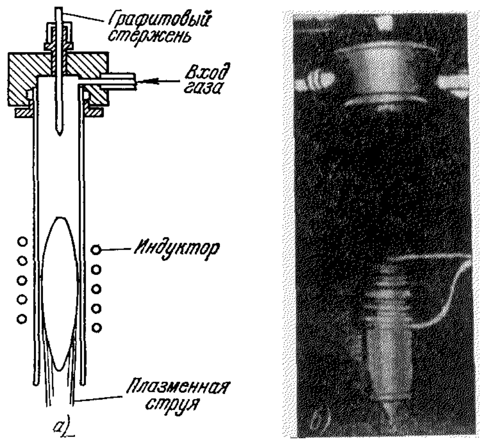

Рис. 2. Схема (*а*) и фотография (*б*) плазменной горелки Рида [8].

В разряд высокого давления вводилась огромная по тому времени мощность до нескольких десятков киловатт (впрочем, такие величины являются высокими и для современных установок). «Пробить» воздух или другой газ при атмосферном давлении, конечно, не удавалось даже при самых больших токах в индукторе, поэтому для зажигания разряда приходилось принимать специальные меры. Проще всего было возбуждать разряд при низком давлении, когда пробивные поля невелики, а затем постепенно повышать давление, доводя его до атмосферного.

Бабат отмечал, что при протекании газа через разряд последний может быть погашен, если дутье слишком интенсивно. При больших давлениях был обнаружен эффект контрагирования, т е. отрыва разряда от стенок разрядной камеры.

В 50-х годах появилось несколько статей по безэлектродному разряду [5-7]. Кабанн [5] исследовал разряды в инертных газах при низких давлениях от 0,05 до 100 *мм* рт. ст. и небольших мощностях до 1 *квт* на частотах 1—3 *Мгц*, определял кривые зажигания, калориметрическим методом измерял мощность, вводимую в разряд, с помощью зондов измерял электронные концентрации. Кривые зажигания во многих газах были также получены в [7]. В работе [6] делалась попытка использовать разряд для ультрафиолетовой спектроскопии.

Безэлектродная плазменная горелка, к которой очень близки нынешние установки, была сконструирована Ридом в 1960 г. [8]. Схема и фотография ее показаны на рис. 2. Кварцевую трубку диаметром 2,6 *см* охватывал пятивитковый индуктор, сделанный из медной трубки с расстоянием между витками 0,78 *см*. Источником питания служил промышленный высокочастотный генератор с максимальной выходной мощностью 10 *квт*; рабочая частота 4 *Мгц*. Для поджигания разряда использовался подвижной графитовый стержень. Стержень, вдвинутый в индуктор, разогревается в высокочастотном поле и эмиттирует электроны. Нагревается и расширяется окружающий газ, и в нем происходит пробой. После зажигания стержень удаляется, а разряд продолжает гореть.

Наиболее существенным моментом в этой установке было использование тангенциальной подачи газа. Рид указывал, что образовавшаяся плазма должна достаточно быстро распространяться против потока газа, стремящегося ее снести. В противном случае разряд погаснет, как это происходит с нестабилизированными пламенами. При малых скоростях потока поддержание плазмы может обеспечивать обычная теплопроводность. (Роль теплопроводности в разрядах высокого давления отмечал и Кабанн [5].) Однако при больших скоростях подачи газа необходимо принимать меры для рециркуляции части плазмы. Удовлетворительным решением этой задачи явилась примененная Ридом вихревая стабилизация, при которой газ подается в трубку по касательной и протекает через нее, совершая винтовое движение. Вследствие центробежного разбегания газа в приосевой части трубки образуется столб пониженного давления. Осевого течения здесь почти нет, и часть плазмы засасывается вверх по потоку. Чем больше скорость подачи, тем выше против потока проникает светящаяся плазма. Кроме того, при таком способе подачи газ протекает вдоль трубки в основном у ее стенок, отжимает разряд от стенок и изолирует последние от разрушительного действия высоких температур, что дает возможность работать при повышенных мощностях. Эти качественные соображения, кратко высказанные Ридом, очень важны для понимания явлений, хотя они, быть может, и не вполне точно отображают существо дела. К вопросу о поддержании плазмы, который представляется самым серьезным при рассмотрении стационарного стабилизированного разряда в потоке газа, мы еще вернемся ниже, в гл. IV.

Рид работал с аргоном и со смесями аргона с гелием, водородом, кислородом, воздухом. Он отмечал, что легче всего поддерживать разряд в чистом аргоне. Расходы аргона составляли 10—20 *л/мин* (средние по сечению трубки скорости газа 30—40 *см/сек*) при введении в разряд мощностей 1,5—3 *квт*, составляющих примерно половину мощности, потребляемой генератором. Рид определял баланс энергии в плазмотроне и оптическим методом измерял пространственное распределение температуры в плазме.

Он опубликовал еще несколько статей: о мощных индукционных разрядах при низких давлениях [9], об измерениях теплопередачи к зондам, внесенным в различные точки плазменного факела [10], о выращивании кристаллов тугоплавких материалов с помощью индукционной горелки [11].

Индукционная плазменная горелка, похожая по своей конструкции на ридовскую, была несколько позднее описана в работах Ребу [45, 46]. Ребу использовал ее для выращивания кристаллов и изготовления сферических частиц тугоплавких материалов.

Начиная примерно с 1963 г., в нашей и зарубежной печати появляется много работ, посвященных экспериментальному исследованию индукционных разрядов высокого давления как в замкнутых сосудах, так и в потоке газа [12-33, 40-44, 53, 60].

Измеряются пространственные распределения температуры в области разряда и в плазменном факеле, распределения электронных концентраций. Здесь, как правило, используются известные оптические, спектральные и зондовые методы, обычно применяемые при исследовании плазмы дуговых разрядов. Измеряются мощности, вкладываемые в разряд, при разных напряжениях на индукторе, разных расходах газа, различные зависимости параметров для разных газов, частот и т. д. Трудно установить какие-то единые зависимости, скажем, температуры плазмы от мощности, вкладываемой в разряд, так как все зависит от конкретных условий: диаметра трубки, геометрии индуктора, скорости подачи газа и т. д. Общим результатом многих работ является вывод о том, что при мощности порядка нескольких или десятка киловатт температура аргоновой плазмы достигает примерно 9000—10 000° К. Распределение температуры в основном имеет характер «плато» в середине трубки и резко спадает вблизи стенок, однако «плато» не совсем ровное, в центральной части получается небольшой провал величиной обычно в несколько сотен градусов.

В других газах температуры также порядка 10 000°, в зависимости от рода газа и других условий. В воздухе температуры получаются более низкими, чем в аргоне при той же мощности, и, наоборот, для достижения тех же температур требуются в несколько раз бо́льшие мощности [31]. Температура немного

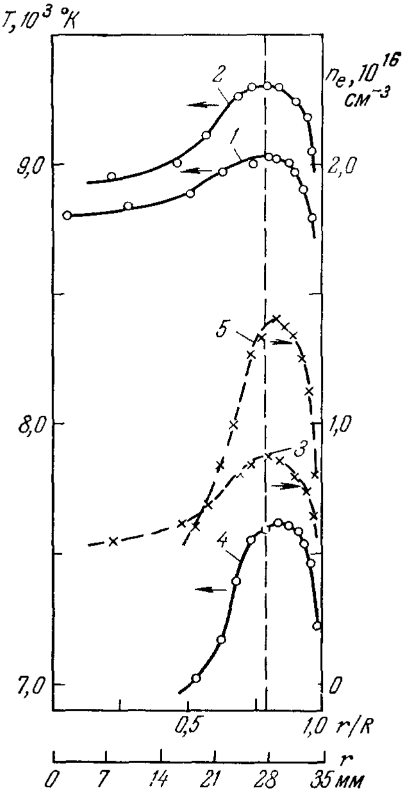

Рис. 3. Радиальные распределения температур и электронных концентраций по данным работы [24]. Разряд в неподвижной плазме; радиус трубки 35 *мм*; частота 11,5 *Мгц*. *1*, *2* — температуры T в аргоне при мощностях 4,7 и 7,2 *квт*; *3* — электронная концентрация n_e в Ar при 7,2 *квт*; *4*, *5* — T и n_e в ксеноне при 6 *квт*.

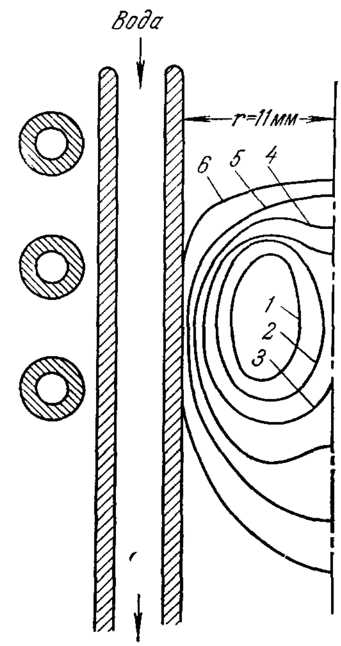

Рис. 4. Изотермы при разряде в аргоне по данным работы [16]. Радиус трубки 11 *мм*; трубка охлаждается водой; частота 26 *Мгц*; мощность 2,5 *квт*; расход 80 *см³/сек*. *1* — T = 9750, *2* — 9650, *3* — 9400, *4* — 9000, *5* — 8700, *6* — 8400° K.

растет с ростом мощности и слабо зависит от расхода газа. На рис. 3 и 4 приведены для иллюстрации распределения температуры по радиусу, поле температур (изотермы), распределения электронных концентраций. Опыты [27] показали, что при увеличении скорости подачи и расхода газа (при тангенциальной подаче) разряд все больше отжимается от стенок и радиус разряда изменяется примерно от 0,8 до 0,4 радиуса трубки. При увеличении расхода газа несколько уменьшается и вкладываемая в разряд мощность, что связано с уменьшением радиуса разряда, т. е. потока или расхода плазмы. При разрядах в замкнутых сосудах, без протока газа, светящаяся область разряда обычно очень близко подступает к боковым стенкам сосуда. Измерения электронных концентраций показали, что состояние плазмы при атмосферном давлении близко к термодинамически равновесному. Измеренные концентрации и температуры с удовлетворительной точностью укладываются в уравнение Саха́.

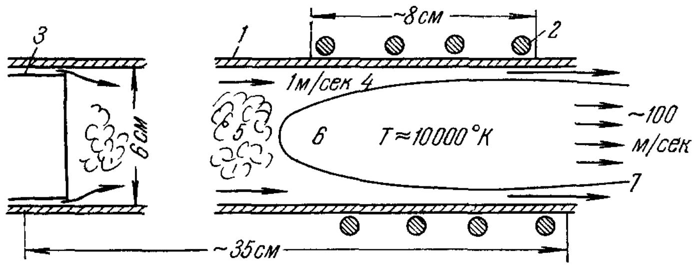

Рис. 5. Схема плазмотрона ИПМ АН СССР.

1 — трубка; 2 — индуктор; 3 — кольцевая щель, в которую по окружности подается газ; 4 — поток холодного газа; 5 — область завихрения; 6 — нагретый газ; 7 — вытекающая плазменная струя.

Приведем данные о вполне современной установке, которая была создана М. И. Якушиным в Институте проблем механики АН СССР [40]. Схема ее и основные параметры показаны на рис. 5. На рис. 6 представлена фотография разряда. Рабочим газом служит обычно аргон или

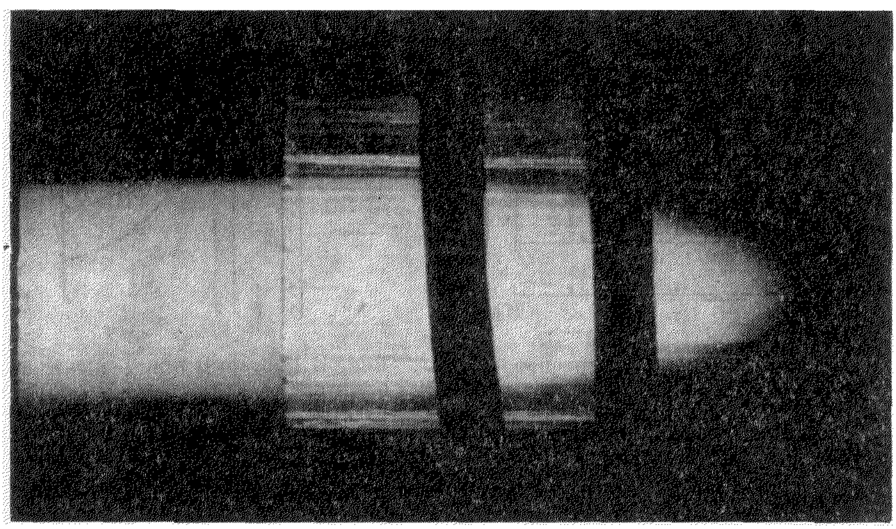

Рис. 6. Фотография разряда и плазменной струи в плазмотроне ИПМ АН СССР. Диаметр трубки 6 *см*. Воздух, мощность 27 *квт*, расход $2\cdot10^3$ *см*^{3}/*сек*, температура 9800° K.

воздух при атмосферном давлении. Индуктор питается от высокочастотного лампового генератора ЛГД-30. Диапазон частот 6—18 *Мгц*. Благодаря сделанным усовершенствованиям в плазму можно вводить мощность до 40 *квт*. Напряжения на индукторе порядка 5 *кв*. Газ подается тангенциально и протекает через кварцевую трубку диаметром 6 *см* и длиною 35 *см*. Расходы порядка 10^2—10^3 *см*^{3}/*сек*, средние по сечению осевые скорости порядка нескольких десятков сантиметров или одного метра в секунду. Осевая скорость быстро уменьшается при удалении от стенки трубки по направлению к оси. Радиусы разряда составляют 0,4—0,8 от радиуса трубки. Приведем два примера параметров: 1) воздух, расход $1{,}3\cdot 10^3$ *см³/сек*, средняя скорость 55 *см/сек*, мощность 21,3 *квт*, максимальный радиус разрядной области 0,69 от радиуса трубки, температура «плато» 9700° K; 2) аргон, расход $2{,}1\cdot 10^3$ *см³/сек*, скорость 90 *см/сек*, мощность 5,5 *квт*, отношение радиусов 0,7, температура «плато» 8000—8200° K.

Отметим еще несколько приложений индукционного разряда и плазмотрона, кроме указанных выше. Разряд использовался для подогрева газа в сверхзвуковой аэродинамической трубе низкой плотности [54] для дополнительного введения энергии в плазменную струю, полученную на дуговом плазмотроне [55], что позволяет увеличить удельный импульс в электротермических двигателях и улучшать распределение параметров потока. Плазменная струя использовалась для исследования воздействия высоких температур и тепловых потоков на различные материалы для моделирования условий, в которых находятся теплозащитные покрытия летательных аппаратов [56, 57]. Уже созданы и СВЧ плазмотроны [58, 59]. В установке [59] волновод с СВЧ волной пересекает трубка, по которой течет газ. В месте пересечения за счет поглощения СВЧ мощности поддерживается разряд, и из трубки вытекает плазменная струя. Рассмотрение СВЧ плазмотронов не входит в задачу этой статьи.

Перейдем теперь к теоретическому рассмотрению индукционного разряда. Более подробные данные о приложениях и некоторых экспериментах можно найти в обзорной статье [52], где собрана также весьма полная библиография по высокочастотным разрядам и их применениям.

III. РАЗРЯД В НЕПОДВИЖНОЙ ПЛАЗМЕ

Изучение стационарного статического режима горения разряда в неподвижной плазме позволяет выяснить многие важные черты явления, присущие и разряду в потоке. Почти во всех работах теоретически рассматривается именно статический процесс. При этом задача, как правило,

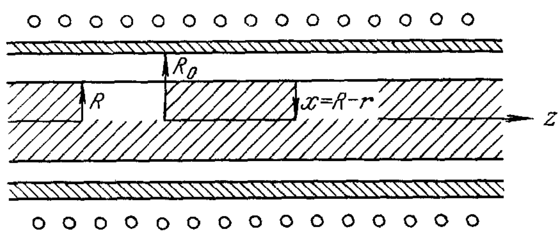

Рис. 7. Схема статического разряда.

идеализируется, а именно соленоид считается бесконечно длинным, т. е. процесс считается одномерным. Стационарность его обеспечивается отводом выделяющегося тепла в стенки охлаждаемой диэлектрической трубки (радиуса R_0; рис. 7). Главная задача теории в данном случае состоит в вычислении температуры плазмы, мощности, вкладываемой в разряд, и электротехнических параметров разряда: омического сопротивления, индуктивности—в зависимости от тока в соленоиде.

После установления зависимостей легко перейти к представлению, в котором первичной (задаваемой по желанию) является любая другая величина, например мощность.

1. Модель «металлического цилиндра»

Простейшая модель, которая неплохо описывает электродинамическую сторону процесса, заключается в уподоблении плазменного столба металлическому цилиндру с постоянной проводимостью σ и радиусом R. Газ в зазоре между соленоидом и проводником, т. е. при $R < r < R_0$, считается непроводящим. На основе такой модели оценки делались многими авторами, начиная с Томсона [2]. Электромагнитное поле подчиняется уравнениям Максвелла, в которых при практически применяемых частотах можно пренебречь токами смещения:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E},\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \tag{1}$$

(здесь учтено, что $\mu=1$). Имея в виду, что $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}\sim\exp(-i\omega t)$, и принимая во внимание, что магнитное поле имеет только осевую составляющую, а электрическое — только азимутальную, получим для комплексных амплитуд $H=H_z$, $E=E_\varphi$ уравнения

$$-\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{4\pi}{c}\sigma E,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rE=\frac{i\omega H}{c}. \tag{2}$$

В непроводящем зазоре амплитуда магнитного поля постоянна и определяется «ампер-витками» соленоида:

$$H_0=4\pi In/c; \tag{3}$$

здесь I — амплитуда тока в соленоиде в абсолютных единицах, а n — число витков на единицу длины; при этом начало отсчета времени всегда можно выбрать так, чтобы величина H_0 была действительной.

Решение системы (2) в проводнике должно удовлетворять условиям конечности на оси при $r=0$ и $H=H_0$ при $r=R$. Решение выражается через функции Бесселя первого рода (см., например, [47]):

$$H=H_0J_0(kr)/J_0(kR),\quad E=H_0(\omega/8\pi\sigma)^{1/2}(1+i)J_1(kr)/J_0(kR), \tag{4}$$

где

$$k=(2i)^{1/2}/\delta=(1+i)/\delta,$$

а

$$\delta=c(2\pi\sigma\omega)^{-1/2}=5{,}03/[\sigma(\textit{ом}^{-1}\textit{см}^{-1})\,\nu(\textit{Мгц})]\ \textit{см} \tag{5}$$

есть толщина скин-слоя, т. е. эффективная глубина, на которую поле проникает в проводник.

Фигурирующие в этих формулах функции Бесселя от комплексного аргумента типа $z\sqrt{i}$ $(z=\sqrt{2}r/\delta)$ вычисляются с помощью табулированных функций Кельвина [48] $J_0(z\sqrt{i})=\operatorname{ber}z-i\operatorname{bei}z$. Распределения амплитуд полей по радиусу показаны на рис. 8.

Мощность джоулевых потерь в проводнике (мощность, вкладываемая в «плазму») равна

$$W=\int_0^R\sigma\langle\mathbf{E}^2\rangle\cdot 2\pi r\,dr \tag{6}$$

на единицу длины цилиндра; знак $\langle\ldots\rangle$ означает операцию усреднения осциллирующих величин за период колебаний поля. Совершая известные преобразования [47], можно выразить мощность через поток электромагнитной энергии в проводник, т. е. через поля на поверхности:

$$W=2\pi R\,|S_R|,\quad S_R=c\langle[\mathbf{EH}]\rangle_{r=R}/4\pi. \tag{7}$$

Все формулы принимают особенно простой вид в том практически важном предельном случае, когда толщина скин-слоя мала по сравнению с радиусом, $\delta \ll R$. В этом случае тонкий слой проводника, в который проникает поле, по-существу, является плоским и вместо цилиндрической можно рассматривать соответствующую плоскую задачу[47]. Разумеется, такие же результаты получаются и из общих формул (4), (7), если перейти в них к асимптотическим представлениям функций Бесселя

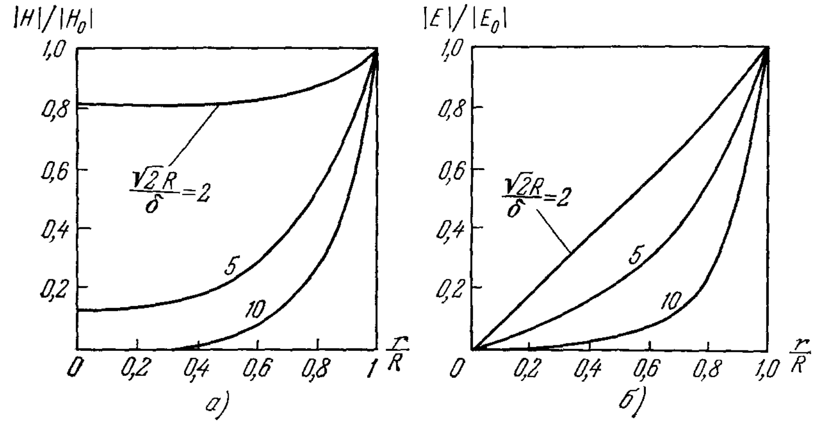

Рис. 8. Распределение модулей амплитуд полей по радиусу при разных отношениях радиуса проводника и толщины скин-слоя.

при больших значениях аргумента. Пусть x — координата, отсчитываемая от плоской поверхности в глубь проводника ($x = R - r$; см. рис. 7). Амплитуды полей H и E убывают в глубь тела как exp $(-x/\delta)$, а плотность потока электромагнитной энергии, втекающей в проводник, т. е. мощность, приходящаяся на единицу поверхности, равна

$$S_0 = (cH_0^2/16\pi)\,(\nu/\sigma)^{1/2} =$$
$$= 3{,}16\cdot 10^{-2}\,(In)^2\,(\textit{а-в/см})\,[\nu\,(\textit{Мгц})/\sigma\,(\textit{ом}^{-1}\textit{см}^{-1})]^{1/2}\ \textit{вт/см}^2. \quad (8)$$

Очень простым оказывается и другой предельный случай слабой экранировки поля проводником: $\delta \gg R$. При этом $H \approx H_0$,

$$E \approx i\omega H_0 r/2c$$

и

$$W = (\pi\sigma\omega^2 H_0^2 R^4/16c^2) = \pi^3\sigma\omega^2\,(In)^2\,R^4/c^4. \quad (9)$$

В общем случае, при произвольном соотношении R и δ, $|S_R|$ и W удобно представить в виде

$$|S_R| = S_0 f, \qquad W = 2\pi R\,|S_R| = 2\pi R S_0 f, \quad (10)$$

причем вычисление по формулам (7), (5) показывает, что множитель f зависит только от отношения R/δ и равен[49]

$$f = \sqrt{2}\,(\mathrm{ber}\,\alpha\cdot\mathrm{ber}'\,\alpha + \mathrm{bei}\,\alpha\cdot\mathrm{bei}'\,\alpha)/(\mathrm{ber}^2\,\alpha + \mathrm{bei}^2\,\alpha), \qquad \alpha = \sqrt{2}\,R/\delta.$$

Функция $f(\alpha)$ показана на рис. 9.

Чтобы применить формулы (10), (8) к разряду, необходимо знать проводимость σ и радиус R. Они задавались практически так же, как задается температура плазменного столба T_m, ибо при той высокой плотности газа, которая соответствует атмосферному давлению и температурам $T \approx 10^4\,°$K, отклонения от термодинамического равновесия, к счастью, невелики, поэтому проводимость является просто функцией температуры (и давления). Функции $\sigma(T)$ при $p = 1$ *атм* для аргона и воздуха показаны на рис. 10. Как видно из графиков, при температурах ниже 7000—8000° К проводимость чрезвычайно резко падает с уменьшением температуры (грубо говоря, пропорционально плотности электронов, т. е. $\sim \exp(-I_i/2kT)$, где I_i — потенциал ионизации газа). Поэтому граница разряда по температуре. а значит, и по радиусу должна быть весьма резкой. При этом под границей разряда мы понимаем границу, эффективным образом разделяющую слабо проводящий газ, в котором почти не происходит тепловыделения и который слабо экранирует магнитное поле и газ, обладающий сравнительно высокой проводимостью, где происходит выделение джоулева тепла.

В условиях, когда газ неподвижен и выделяющаяся в разряде энергия отводится в стенки

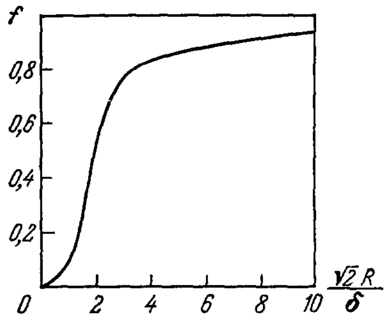

Рис. 9. Функция $f(\sqrt{2}\,R/\delta)$.

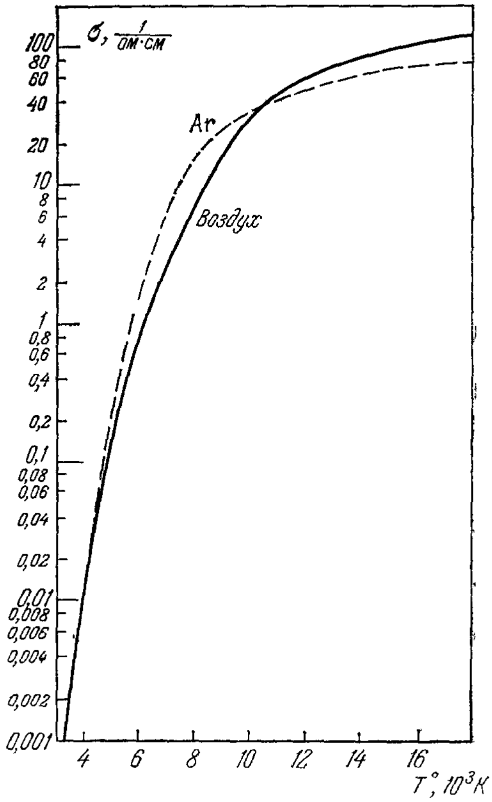

Рис. 10. Электропроводности воздуха и аргона при атмосферном давлении.

трубки путем теплопроводности, эта граница устанавливается на таком радиусе, чтобы возникающий в промежутке между плазмой и стенками градиент температуры как раз обеспечивал отвод тепла в стенки. Легко записать соответствующее уравнение для R [20, 33].

Поток тепла, в силу осевой симметрии направленный по радиусу, равен

$$\mathcal{J} = -\varkappa(T)\,dT/dr, \tag{11}$$

где $\varkappa(T)$ — коэффициент теплопроводности. Стационарное уравнение теплопроводности в области $R < r < R_0$, где практически отсутствуют источники ($\operatorname{div}\mathcal{J} = 0$), немедленно интегрируется и с очевидными условиями $T(R) = T_m$, $\mathcal{J}(R) = |S_R|$, $T(R_0) = T_w \approx 0$ дает

$$\int\limits_{T_w \approx 0}^{T_m} \varkappa(T)\,dT = \frac{W}{2\pi}\ln\left(\frac{R_0}{R}\right) \approx (R_0 - R)\frac{W}{2\pi R_0} \tag{12}$$

(температура у стенки $T_w \ll T_m$ может быть положена равной нулю).

Последнее упрощение в (12) справедливо, если граница разряда, как это чаще всего получается, располагается близко к стенке и $R \approx R_0$.

Легко видеть, что радиус стационарного разряда устойчив. Действительно, если при прочих неизменных условиях разряд почему-либо приблизится к стенке, градиент температуры возрастет, отвод тепла в стенку станет больше тепловыделения, пристеночный слой остынет и граница отодвинется (и наоборот).

2. Более детальные расчеты и температура плазмы

Вопрос о температуре или проводимости плазмы не может быть решен в рамках чисто электродинамической теории «металлического цилиндра». При оценке мощности по формулам (10), (12) величину σ приходится как-то задавать, потому что на самом деле температура и проводимость плазмы определяются балансом энергии в самой области разряда.

В строгой постановке задача о разряде в бесконечном соленоиде была впервые сформулирована в работе Сошникова и Трехова [34]. Поскольку проводимость газа в трубке есть функция температуры, распределение которой по радиусу регулируется теплопроводностью, электродинамические уравнения (2) следует дополнить уравнением теплопроводности с источниками тепла. В стационарном случае

$$\operatorname{div}\mathfrak{J} = r^{-1}\,d(r\mathfrak{J})/dr = \sigma\langle \mathbf{E}^2\rangle - \varphi(T), \qquad (13)$$

где член $\varphi(T)$ описывает принятые во внимание в [34] потери энергии на тепловое излучение. Решение системы (2), (11), (13) для функций H, E, T, $\mathfrak{J}$ должно удовлетворять соответствующим граничным условиям. На оси при $r = 0$ $\mathfrak{J} = 0$, $E = 0$. У внутренней поверхности трубки при $r = R_0$ магнитное поле определяется «ампер-витками»: $H = H_0 = 4\pi In/c$, а поток тепла и температура подчиняются условию теплопередачи в стенки; можно, например, положить просто $T = T_w \approx 0$.

В работах [34–36] уравнения интегрировались численно. При этом, естественно, число их увеличивалось на два, так как действительная и мнимая части комплексных амплитуд H и E представляют собою независимые функции. Численное решение системы с граничными условиями, поставленными на разных концах области интегрирования, связано с известными трудностями, поэтому в [34–36] решалась как бы обратная задача. На самом деле в качестве исходных параметров следует задавать «ампер-витки» соленоида и радиус трубки: H_0 и R_0. В результате решения должны определиться температура и магнитное поле на оси $T(0)$, $H(0)$, причем в силу единственности решения имеется соответствие между парами величин H_0, R_0 и $T(0)$, $H(0)$. Авторы [34–36] для упрощения счета вместо H_0, R_0 задавали $T(0)$ и $H(0)$, что позволяет начать интегрирование уравнений от точки $r = 0$. На некотором радиусе температура очень резко падает. Радиус, соответствующий $T \approx 0$, и рассматривался как R_0, а по абсолютной величине магнитного поля в этом месте с помощью формулы (3) определялось число «ампер-витков». Мощность вычислялась по формуле (6) *). Описанная процедура в принципе вполне корректна, но, конечно, обладает тем недостатком, что приходится угадывать значения $T(0)$, $H(0)$, чтобы прийти к желаемым параметрам H_0, R_0, соответствующим эксперименту. В работах [34–36] было рассчитано много вариантов для воздуха и аргона для нескольких частот, температур и полей на оси. На рис. 11 для иллюстрации приведены полученные распределения

*) Зная распределения полей и проводимости, легко вычислить индуктивность и омическое сопротивление разряда.

величин по радиусу и соответствующие вычисленные параметры. Характерный небольшой провал температуры в приосевой области является следствием потерь на излучение: потери имеют объемный характер, а тепловыделение происходит в основном в периферийном слое, поэтому

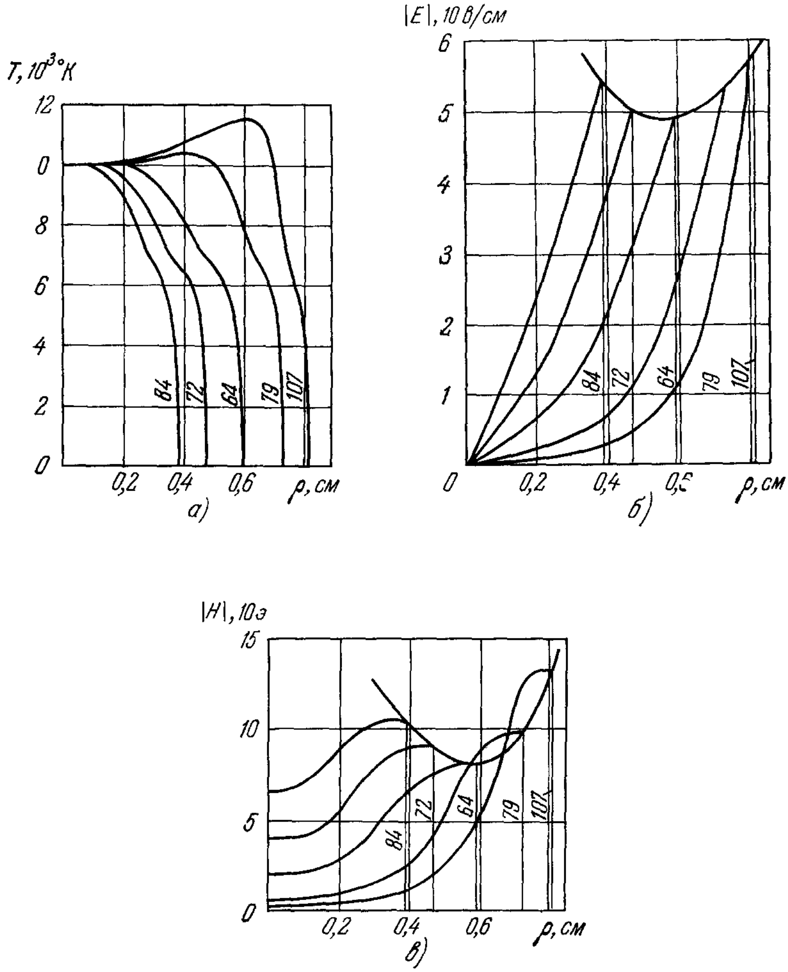

Рис. 11. Распределения температуры и амплитуд полей по радиусу [34].
Статический разряд в воздухе, частота 50 *Мгц*. Числа ампер-витков на *см* указаны около кривых. Для ряда чисел — 84, 72, 64, 79, 107 выделение энергии составляет — 2,0, 2,4, 2,8, 5,1, 10,5 *квт/см*, потери на излучение — 0,03, 0,05, 0,09, 0,35, 2,0 *квт/см* соответственно.

центральная область несколько охлаждается по сравнению с периферийной. Расчеты показали, что при температурах выше 10 000—12 000° потери на излучение становятся весьма существенными, при более низких температурах потери малы.

Заменяя кривые $T(r)$ рис. 11 эквивалентными «ступеньками», нетрудно в каждом случае выбрать эффективные значения R и $\sigma(T_m)$ для модели «металлического стержня». И действительно, оцененные по формулам (9) и (8) мощности оказываются весьма близкими к расчетным.

Для определения основных закономерностей индукционного разряда очень важно установить, чем физически определяется температура плазмы, как она зависит от величины и частоты тока в индукторе, радиуса трубки, свойств газа. Этот вопрос был решен в работе Груздева, Ровинского и Соболева [37], в которой задача о разряде рассматривается в той же исходной постановке, что и в [34–36] (но без учета потерь на излучение). Опустим в уравнении баланса энергии (13) член потерь $\varphi(T)$ и с помощью уравнений Максвелла (1) преобразуем его к дивергентной форме:

$$\operatorname{div}(\mathcal{J}+\mathbf{S})=0, \quad \mathbf{S}=c\langle[\mathbf{EH}]\rangle/4\pi. \tag{14}$$

Отсюда сразу получается первый интеграл системы — интеграл сохранения суммарного потока энергии. С учетом граничных условий на оси, вдоль радиуса сумма потоков равна нулю:

$$\mathcal{J}+S=0, \tag{15}$$

т. е. поток электромагнитной энергии, который идет от соленоида к оси ($S<0$), в каждой точке компенсируется потоком тепла, идущим по направлению к стенке (в отсутствие потерь на излучение повсюду $\mathcal{J}>0$). Оказывается, система (1), (11), (14) имеет и второй интеграл. Исключим $\mathbf{E}$ из выражения (14) для вектора Умова-Пойнтинга, воспользовавшись первым из уравнений (1). Получим

$$S=(c/4\pi)\,|\langle[\mathbf{EH}]\rangle|=-(c^2/32\pi^2\sigma)\langle d\mathbf{H}^2/dr\rangle=-(c^2/64\pi^2\sigma)\,d\,|\mathbf{H}|^2/dr, \tag{16}$$

где $|\mathbf{H}|$ — действительная амплитуда осциллирующего магнитного поля. Подставляя в уравнение (15) выражения (11) и (16), умножая все на σ и интегрируя получающееся уравнение с учетом граничных условий у трубки, где $T\approx 0$, $H=H_0=H_0$, найдем второй интеграл системы:

$$\int_0^{T(r)}\sigma(T)\,\varkappa(T)\,dT=\frac{c^2H_0^2}{64\pi^2}\left[1-\frac{|\mathbf{H}(r)|^2}{H_0^2}\right]. \tag{17}$$

Относя равенство (17) к точке $r=0$ и принимая во внимание (3), получим уравнение, которым определяется температура на оси, т. е. максимальная температура плазмы T_m:

$$\int_0^{T_m}\sigma(T)\,\varkappa(T)\,dT=\left(\frac{In}{2}\right)^2\left[1-\frac{|\mathbf{H}(0)|^2}{H_0^2}\right]. \tag{18}$$

В первом приближении температуру T_m (впрочем, как и все распределения $T(r)$) можно найти, если подставить в (17), (18) $|\mathbf{H}(r)|$, $|\mathbf{H}(0)|$ по формуле (4) для «металлического цилиндра». В качестве постоянных σ и R следует взять $\sigma=\sigma(T_m)$ и R_0. Это дает уравнение

$$\int_0^{T_m}\sigma\varkappa\,dT=\left(\frac{In}{2}\right)^2\left[1-\frac{1}{\operatorname{ber}^2(\sqrt{2}\,R_0/\delta)+\operatorname{bei}^2(\sqrt{2}\,R_0/\delta)}\right], \tag{19}$$

где δ определяется формулой (5). Уравнение (19) позволяет приближенно вычислить T_m в зависимости от In, ω и R_0 для любого газа. Уравнение сильно упрощается в предельных случаях сильной и слабой экранировки магнитного поля плазмой.

В случае тонкого скин-слоя, $\delta\ll R$ (высокие температуры, большие частоты), который представляет наибольший практический интерес, $|\mathbf{H}(0)|\ll H_0$ и

$$\int_0^{T_m}\sigma(T)\,\varkappa(T)\,dT=\left(\frac{In}{2}\right)^2, \tag{20}$$

т. е. температура плазмы не зависит от частоты и радиуса трубки и определяется только числом «ампер-витков» и свойствами газа. Этот важный вывод теории подтверждается опытом. Закономерность (20) не распространяется на случай очень больших «ампер-витков» и очень высоких температур, выше 13 000—15 000°, когда потери на излучение составляют существенную долю вкладываемой мощности и температура имеет сильный пик на периферии, как это следует из расчетов [34-36]. Однако на нынешних установках температуры не поднимаются выше примерно 10 000° и здесь выводы этой теории безусловно справедливы. В другом предельном случае слабой экранировки, $\delta \gg R$ (низкие температуры, небольшие частоты),

$$\int_0^{T_m} \sigma\varkappa\, dT = \left(\frac{In}{2}\right)^2 \frac{\pi^2\omega^2 R_0^4 [\sigma(T_m)]^2}{c^4}. \tag{21}$$

Вычислив T_m, т. е. $\sigma = \sigma(T_m)$, можно по формулам (8)—(10), (12) модели «металлического цилиндра» найти мощность и оценить эффективный радиус разряда R. В работе [37] сделаны расчеты и во втором приближении, но здесь получаются очень громоздкие уравнения. В работе также вводятся поправки, учитывающие конечность длины индуктора, и оценивается нагревание трубки.

В табл. I, взятой из [37], показаны результаты расчета температуры, мощности и относительного радиуса точки, где $T = 4500°$ К для аргона

Таблица I

T_m, 10^3 °К	In, *а-в/см*	W, *квт/см*	$r(4500°\ \mathrm{K})/R_0$
8,0	13,3	0,21	0,907
8,5	17,7	0,36	0,948
9,0	22,6	0,54	0,964
10,0	33,0	1,06	0,983
10,5	39,2	1,43	0,987

при $p = 1$ *атм*, $R_0 = 3{,}75$ *см*, $\nu = 12$ *Мгц* и нескольких чисел ампер-витков. Во всех этих вариантах практически $\delta \ll R$.

Результаты расчетов неплохо согласуются с данными эксперимента.

Уравнения (19)—(21) для температуры вместе с выражениями (6), (8), (10) для мощности позволяют установить связи между мощностью, ампер-витками и температурой. Это сделано в работе [38], где определяется частотный диапазон для разряда, оптимальный с точки зрения получения заданной температуры плазмы T_m. На рис. 12, взятом из этой работы, показано, как меняются мощность и ампер-витки при изменении параметра $\beta = 2R^2/\delta^2$, пропорционального частоте (см. формулу (3)). Из рис. 12 видно, что при естественном стремлении затрачивать меньше мощности и понизить ток в индукторе нет смысла выходить за пределы диапазона $10 < \beta < 30$, которому соответствуют диапазоны $0{,}25 < \delta/R < 0{,}45$ или $125 < \nu$ (*Мгц*)$/\sigma$ (*ом*$^{-1}$*см*$^{-1}$) R (*см*) < 380.

Из формул (20) и (8) следует также существенный вывод о том, что необходимая для достижения заданной температуры T_m мощность весьма быстро возрастает при увеличении температуры [38]. При $T > 10\,000$ — 12 000°, когда сопротивление определяется кулоновскими столкновениями электронов с ионами, $\sigma \sim T^{3/2}$. Теплопроводность также растет с температурой, и, грубо, $W \sim T^{\gamma}$, где $\gamma \approx 2{,}5$—3. Следует, однако, отметить, что необходимая мощность быстро возрастает и за счет увеличивающихся потерь на излучение. Еще не ясно, какой из двух факторов играет определяющую роль. Таких расчетов, которые позволили бы прямо оценить сравнительную роль двух основных причин, по которым при высоких температурах необходимая мощность быстро возрастает при повышении температуры, пока нет.

В работе Фримена и Чейза [33] разряд рассматривается на основе модели «металлического цилиндра». Считая заданными «ампер-витки» (т. е. H_0) и радиус трубки R_0, авторы записывают выражение (10) для мощности и уравнение (12). Последнее по своему смыслу определяет радиус стационарного разряда, при котором теплопроводность в «зазоре» как раз обеспечивает теплоотвод выделяемой мощности в стенки трубки. Как мы видели выше, третье, недостающее уравнение, по своей идее определяющее неизвестную проводимость «металлического цилиндра»,

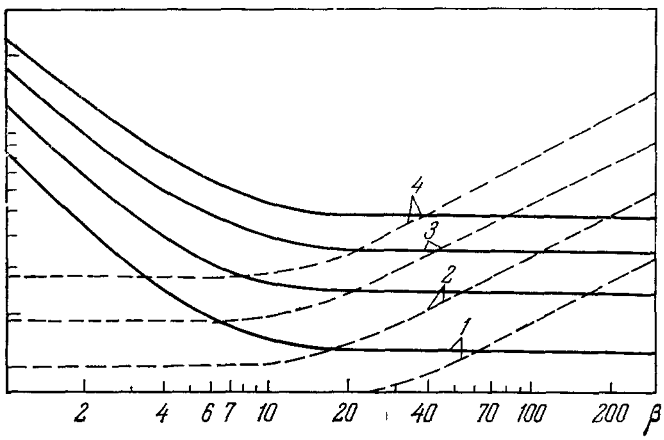

Рис. 12. Качественная зависимость ампер-витков на *см* (сплошные линии) и мощности на *см* длины индуктора (штриховые линии) от $\beta = (\sqrt{2}\, R_0/\delta)^2$ для определенных температур [38]: *1* — T = 8000, *2* — 9000, *3* — 10 000, *4* — 11 000° K.

вытекает из рассмотрения баланса энергии в самой плазме. Однако Фримен и Чейз вместо этого используют уравнение, выражающее условие минимума мощности при заданных H_0 и R_0, аргументируя такую операцию весьма туманными соображениями о минимуме «производства энтропии». По их мнению, плазма в разряде нагревается до такой температуры, чтобы при заданных токе в соленоиде, радиусе трубки и условиях теплоотвода для поддержания стационарного разряда расходовалось как можно меньше мощности.

Мы не видим никаких физических оснований для такого предположения, и результат этого предположения также представляется странным и противоречащим опыту. Именно, из условия минимума вытекает, что разряды с толщиной скин-слоя δ, меньшей 0,57 радиуса разряда, существовать не могут. Между тем в большинстве опытов скин-слой, наоборот, тонкий, а разряд прекраснейшим образом горит. Дело, по-видимому, в другом. Надо полагать, что условие минимума в какой-то мере соответствует оптимальным условиям для разряда. Выше говорилось об оптимальной частоте при прочих одинаковых условиях. Следовательно, и при данной частоте существует оптимальная температура или проводимость. Видимо, этим объясняется согласие теории Фримена и Чейза с их собственными экспериментами, которые, вероятно, как раз соответствовали оптимальным условиям. Этот вопрос еще не совсем ясен и требует специального анализа. Во всяком случае, условие минимума ни в коем случае не может подменить собой связь температуры с ампервитками (установленную в работе [37]), которая является следствием точных уравнений разряда, не подлежит сомнению, и притом безусловно допускает существование режимов с тонким скин-слоем.

IV. СТАЦИОНАРНЫЙ РАЗРЯД В ПОТОКЕ ГАЗА

Индукционный разряд в потоке газа, т. е. процесс, фактически протекающий в безэлектродном плазмотроне, теоретически рассматривался в трех работах [12, 39, 50]. Первая из них [12] принадлежит к числу ранних работ по плазменным горелкам; в ней описаны эксперименты и делается попытка общего количественного рассмотрения явления, однако та небольшая часть, которая касается разряда в потоке и гидродинамической стороны дела, основана на неверных предпосылках. Нельзя согласиться и с некоторыми принципиальными положениями третьей статьи [50]. Однако результаты проведенных в ней расчетов, если рассматривать их с правильных позиций, весьма интересны и поучительны. Работы [12, 50] будут рассмотрены ниже, в разделе 4, после того как мы познакомимся с тем, как протекает процесс разряда в потоке. В основу этой главы положены представления, развитые в работе [39].

1. Качественная картина и аналогия с распространением пламени

Мы будем рассматривать процесс, который протекает в плазменной горелке типа ридовской [8], со спиральным течением газа в трубке.

Для определенности численных оценок и расчетов будем ориентироваться на параметры установки Института проблем механики АН СССР, о которой шла речь в конце гл. II.

Рассмотрим стационарно горящий разряд. Для протекания индукционных токов в газе необходимо, чтобы газ поступал в область разряда достаточно ионизованным, т. е. уже высоко нагретым. Еще в ранних работах было установлено, что газ нагревается благодаря теплопроводной передаче тепла от ранее нагретых слоев. В этом отношении процесс аналогичен процессу медленного горения, при котором нагревание горючей смеси до температуры воспламенения происходит за счет теплопроводности. Вторым механизмом подготовки смеси к воспламенению является диффузия активных реагентов из пламени. Аналогом здесь служит диффузия электронов. Однако диффузия амбиполярна и происходит медленнее, чем передача тепла, из-за медленности диффузии ионов по сравнению с диффузией нейтральных частиц.

Как и скорость химической реакции, электропроводность растет с повышением температуры, причем особенно резко при температурах ниже $\sim 8000\,°K$. Поэтому в случае разряда также уместно говорить о температуре «воспламенения»— ионизации T_0, подразумевая под ней величину такую, что при $T < T_0$ газ ведет себя почти как непроводящий и слабо экранирует магнитное поле, а при $T > T_0$ в газе выделяется джоулево тепло индукционных токов и затухает магнитное поле. Поверхность с температурой T_0 можно условно назвать фронтом разряда.

Разряд (энерговыделение) происходит в некотором кольцевом слое внутри индуктора. Эффективная ширина разрядного кольца a, равная половине толщины скин-слоя δ для проникновения магнитного поля, практически во многих случаях оказывается довольно малой по сравнению с радиусом. Так, например, в воздухе при атмосферном давлении и $T = 10\,000°$ имеем $\sigma = 25$ *ом*$^{-1}$*см*$^{-1}$ $= 2{,}2 \cdot 10^{13}$ *сек*$^{-1}$ и при частоте

$\nu = 15$ *Мгц* $a = \delta/2 = 0{,}15$ *см* (см. формулу (5)), тогда как радиус разряда $R \approx 2$ *см*.

Толщина прогретого слоя перед фронтом разряда Δ в несколько раз больше a. Зоны разряда («химической реакции») и прогревания, которые вместе образуют «пламя», дважды заштрихованы на рис. 13, где показана общая схема процесса, каким он представляется в данной теории. Там же проведены линии тока газа, вернее, проекции спиральных линий на плоскости диаметрального сечения. Линии тока преломляются в «пламени», так как, нагреваясь, газ расширяется и ускоряется главным образом в направлении, перпендикулярном к поверхности. Внутренняя полость разрядного кольца заполнена газом («продуктами горения»), нагретым до конечной температуры $T_к$.

Схождение к оси газового потока приводит к некоторому повышению давления в приосевой области внутри индуктора, и, возможно, часть

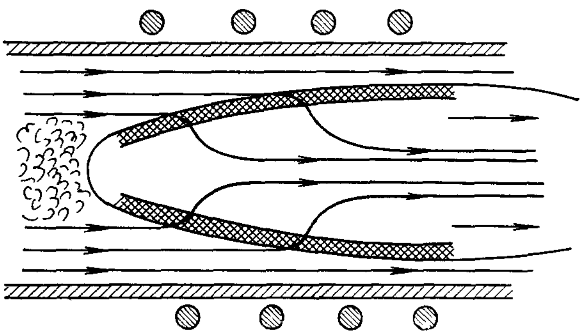

Рис. 13. Качественная схема процесса согласно представлениям [39].
«Пламя» показано двойной штриховкой.

горячего газа отсюда засасывается вверх по потоку в вихревую зону с пониженным давлением. Так, по-видимому, возникает рециркуляция горячего газа, которая была отмечена Ридом [8]. При больших расходах газа образуется высокотемпературный язык, проникающий далеко вперед навстречу холодному газу. Подчеркнем, что все скорости здесь дозвуковые и перепады давления невелики.

Важнейшая особенность процесса состоит в том, что боковой фронт разряда наклонен по отношению к набегающему газовому потоку таким образом, что холодный газ, как и при горении, втекает в «пламя» по нормали с вполне определенной скоростью. По аналогии с теорией горения [51] будем называть ее нормальной скоростью распространения разряда u. Как будет показано ниже, $u \sim 10$ *см/сек*, поэтому при осевых скоростях газа $v \sim 1$ *м/сек* угол наклона фронта небольшой.

Вместе с тем ясно (и это существенно), что боковой фронт разряда никогда не может стать строго параллельным газовому потоку, отжимающему его от стенок трубки, и газ обязательно должен проникать в разряд с боковой поверхности. В самом деле, представим на мгновение, что поверхность фронта параллельна потоку. Тепло распространяется в радиальном направлении, и как только газ нагревается до температуры ионизации T_0, фронт разряда переходит на новое место. Но поскольку тепло еще и сносится потоком, дальше всего по радиусу оно распространяется в задней части индуктора, куда поступают газовые частицы, нагретые при прохождении передней части. Поэтому изотерма T_0 начнет наклоняться по отношению к потоку и стационарное состояние установится как раз тогда, когда снос тепла будет в точности компенсироваться подачей. Это произойдет, когда возрастающая скорость втекания газа в разряд по нормали достигнет значения u.

Следует отметить, что наряду со сходными чертами есть и существенное отличие безэлектродного заряда в потоке от горения. В отсутствие потерь энергии конечная температура продуктов горения не зависит от условий распространения пламени и определяется только теплотворной способностью смеси. Конечная температура при разряде зависит от внешних условий даже при заданной мощности поступления электромагнитной энергии, а фактически неизвестна и сама мощность.

Главная цель теории разряда в потоке состоит в вычислении конечной температуры и мощности, вкладываемой в разряд (как и в случае статического процесса) и расхода газа, нагревающегося до высокой температуры, что уже является новым моментом по сравнению со статическим режимом.

2. Задача о нормальном распространении разряда

Для построения количественной теории естественно поступить так, как это делается в теории горения, где сначала решается задача о нормальном распространении пламени и вычисляется фундаментальная величина — нормальная скорость распространения пламени, а затем уже рассматриваются пламена различных конфигураций. Следует подчеркнуть, что аналогия между разрядом в потоке и распространением пламени способствует пониманию физики процесса, позволяет взглянуть на разряд в потоке с иной точки зрения, открывающей неожиданные стороны явления, подсказывает эффективный путь для построения теории, но отнюдь не лежит в основе теории. Последнюю с равным успехом можно развивать в том же виде и не обращаясь к аналогии.

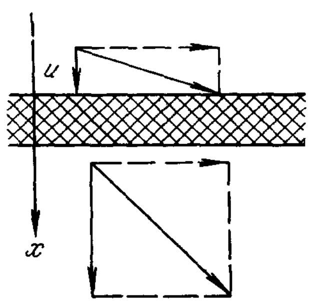

Рис. 14. Участок слоя «пламени».

Разложение скоростей показывает причину преломления линий тока.

Итак, рассмотрим идеализированную задачу о нормальном распространении разряда. Сосредоточим внимание на каком-нибудь участке «пламени» (рис. 13 и 14) и сделаем упрощающие допущения. Пользуясь тем, что слой сравнительно тонкий, будем считать его плоским и одномерным, т. е. лишенным градиентов вдоль поверхности. При составлении уравнений электромагнитного поля пренебрежем наклоном фронта разряда к оси индуктора и будем считать индуктор бесконечным соленоидом. Тогда векторы **H** и **E** касательны к поверхности. Будем пренебрегать, далее, потерями энергии на излучение $\varphi(T)$ и некоторым оттоком тепла в те слои холодного газа, которые только отжимают разряд от стенок трубки, но сами не попадают в разряд. Подчеркнем, что отвод тепла из зоны энерговыделения в те слои холодного газа, которые впоследствии попадают в разряд, не является потерей, так как это тепло остается в плазме.

Направим ось x перпендикулярно к поверхности разряда в глубь слоя, где происходит энерговыделение (см. рис. 14). Касательная составляющая скорости набегающего косого газового потока остается почти неизменной из-за малости градиента вдоль поверхности, а нормальная составляющая v_x изменяется в соответствии с уравнением непрерывности

$\rho v_x = \rho_0 u$, где ρ_0 — плотность холодного газа. Плотность $\rho(x)$ уменьшается при возрастании температуры $T(x)$, грубо говоря, как $1/T$, так как давление приближенно остается постоянным *).

Запишем уравнение энергии, имея в виду, что в стационарном процессе для газовой частицы $dT/dt = v_x dT/dx$:

$$\rho_0 u c_p dT/dx = -(d\mathcal{J}/dx) + \sigma \langle E^2 \rangle, \quad \mathcal{J} = -\varkappa\, dT/dx; \tag{22}$$

здесь c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении; уравнение (22) является обобщением уравнения (13). Уравнения Максвелла (2) в плоском случае ($H = H_z$ по-прежнему; E_φ теперь заменяется на $E_y = E$) принимают вид

$$-dH/dx = 4\pi\sigma E/c, \quad dE/dx = i\omega H/c. \tag{23}$$

Граничные условия для системы (22), (23), которая описывает процесс в рассматриваемом слое, как и в статическом случае, вытекают из физической постановки задачи. В глубину проводящей плазмы поле не проникает, а температура там приобретает некоторое постоянное, конечное значение $T_к$, т. е. исчезает и поток тепла. Достаточно далеко перед разрядом газ холодный, т. е. $T_{-\infty} \ll T_к$, поток тепла полностью поглощается и пропадает, а магнитное поле определяется «ампер-витками» индуктора по формуле (3). Таким образом, решение системы четырех уравнений первого порядка для функций H, E, T, $\mathcal{J}$ должно удовлетворять пяти граничным условиям:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при} & x = +\infty & \mathcal{J} = 0, \quad H = 0, \\ \text{при} & x = -\infty & \mathcal{J} = 0, \quad T = T_{-\infty} \approx 0, \\ & & H = H_0 = 4\pi I n/c. \end{array}\right\} \tag{24}$$

Это возможно только при избранном значении скорости распространения u, которая входит в систему в виде неизвестного параметра и должна определиться в результате решения уравнений — ситуация аналогична той, которая имеет место в теории распространения пламени.

Система (22)—(24) имеет интеграл, который выражает условие сохранения суммарного потока энергии. Действительно, интегрируя (22) от $-\infty$ до x с помощью (23), (24), получаем уравнение, обобщающее (15):

$$\rho_0 u w + \mathcal{J} + S = S_{-\infty}, \tag{25}$$

$$w = \int_0^T c_p\, dT, \quad S = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{EH} \rangle = -\frac{c^2}{32\pi^2} \frac{1}{\sigma} \left\langle \frac{d\mathrm{H}^2}{dx} \right\rangle; \tag{26}$$

здесь w — удельная энтальпия газа, S,—как и раньше, плотность потока электромагнитной энергии; величина $S_{-\infty}$ относится к точке $x = -\infty$ и представляет собой электромагнитную мощность, которая поступает от соленоида на единицу поверхности разряда. Относя уравнение (25) к точке $x = +\infty$, получаем уравнение баланса энергии слоя

$$\rho_0 u w_к = S_{-\infty}, \quad w_к = w(T_к). \tag{27}$$

Это тривиальное уравнение связывает неизвестные величины u, $w_к$, $S_{-\infty}$, подлежащие определению. С помощью (27) интеграл (25) можно переписать в виде

$$\mathcal{J} = \rho_0 u (w_к - w) - S. \tag{28}$$

*) Перепад давления на слое мал; магнитное давление еще меньше, чем перепад газового, и роли не играет.

После решения поставленной задачи мощность, вкладываемая в разряд P, и расход газа, который будет нагрет, G находятся как

$$P = \int S_{-\infty}\, dF, \quad G = \int u\, dF, \tag{29}$$

где интеграл берется по внешней поверхности разряда.

Приближенное решение системы уравнений можно построить, воспользовавшись методом, в известной мере соответствующим модели «металлического цилиндра», а именно, истинное распределение проводимости $\sigma(x)$, которое вместе с распределением температуры $T(x)$ показано на рис. 15, заменим скачком: $\sigma = 0$ при $x < 0$ и $\sigma = \text{const}$ при $x > 0$. Как видно из рисунка, где аппроксимирующая ступенчатая функция $\sigma(x)$ показана пунктиром, постоянная проводимость соответствует конечной температуре плазмы: $\sigma_к = \text{const} = \sigma(T_к)$. Введение скачка проводимости равносильно введению эффективной температуры ионизации T_0, которая, в сущности, является параметром профилирования. Как и обычно при профилировании, величина T_0, которая естественно зависит от $T_к$, должна определиться при подстановке профилирующей функции в какие-то уравнения, принадлежащие системе или вытекающие из нее.

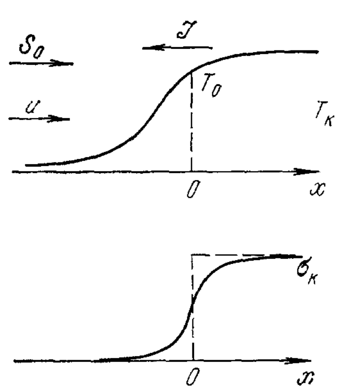

Рис. 15. Схематические распределения T и σ; профилирование σ.

Решение при $\sigma = 0$, const мы уже знаем (см. раздел 1 гл. III): в проводнике при $x > 0$ $H, E \sim e^{-x/\delta}$, $S = S_0 \exp(-x/a)$, $a = \delta/2$, где $S_0 = S_{-\infty}$ и δ даются формулами (8), (5); перед проводником при $x < 0$ $H = H_0$, $S = S_0$. Если была бы известна конечная температура плазмы $T_к$, то по формуле (8) можно было бы вычислить поток энергии (мощность), а после этого по формуле (27) — скорость распространения u.

Для приближенного определения температуры $T_к$ служит интегральное соотношение, которое является обобщением второго интеграла системы, существующего в статическом случае (см. раздел 2 гл. III и формулу (20)). Это соотношение легко вывести, если умножить (28) на $\sigma(T)$, заменить $\mathcal{J}$ и S дифференциальными выражениями (22) и (26) и проинтегрировать получающееся уравнение по x от $-\infty$ до $+\infty$. Получим

$$\int_0^{T_k} \sigma(T)\, \varkappa(T) \left[1 - \frac{\rho_0 u (w_к - w)}{\mathcal{J}}\right] dT = \left(\frac{In}{2}\right)^2. \tag{30}$$

В статическом случае $u = 0$ это уравнение переходит в (20). Соотношение (30), как и (20),— точное, однако, в отличие от статического случая (при тонком скин-слое), оно не позволяет найти температуру $T_к$ точно, так как не известна функция $\mathcal{J}(T)$. Однако можно построить приближенное решение. Пользуясь распределением потока $S = S_0 e^{-x/a}$ в качестве нулевого приближения, находим из уравнения (25) распределение температуры $T(x)$ в первом приближении. Зная $T(x)$, находим в том же приближении функцию $\mathcal{J}(T) = -\varkappa dT/dx$ и, подставляя ее в (20), получаем уравнение для $T_к$; оно содержит также T_0. Второе уравнение, определяющее T_0, можно получить, относя $T(x)$ к точке $x = 0$: $T_0 = T(0)$. В результате этих операций и получаются недостающие два уравнения для неизвестных $T_к$ и T_0; S_0 и u, как уже говорилось выше, находятся из уравнений (8), (27) (подробнее см. [39]).

Можно показать [39], что формула для скорости распространения разряда u приводится к виду, характерному для теплопроводностного механизма распространения, т. е. u пропорциональна температуропроводности нагретого газа. Скорость u также можно представить в виде, вполне аналогичном формуле Зельдовича [51] для скорости распространения пламени.

В табл. II для иллюстрации представлены результаты расчетов для воздуха и аргона, при атмосферном давлении и частоте генератора $\nu = 15$ *Мгц*.

Таблица II

In, *а=в/см*	H_0, *э*	T_m, 10^3 *град*	$T_к$, 10^3 *град*	T_0, 10^3 *град*	$w_к$, *кдж/г*	$\sigma_к$, 10^{13} *сек*$^{-1}$	$\varkappa_к \cdot 10^4$ $\frac{эрг}{см \cdot сек \cdot град}$	S_0, *квт/см*^{2}	u, *см/сек*	P, *квт*	G, *см*^{3}*/сек*
					Воздух						
19	24	7,2	7	6,4	26	0,24	40	0,085	2,6	8,5	260
37	46	8,9	8	7,1	38	0,66	35	0,20	4,1	20	410
53	66	10,4	9	6,9	43	1,38	12	0,27	4,9	27	490
60	76	11,0	10	7,6	48	2,18	10	0,28	4,6	28	450
72	91	11,9	11	8,8	53	2,92	13	0.36	5,2	36	520
94	119	13,0	12	10	62	3,71	18	0,54	6,9	54	680
					Аргон						
4,7	5,9	7,1	7	6,4	3,65	0,41	1,9	0,0040	0,62	0,4	62
10	13	8,1	8	7,3	4,23	1,35	2,5	0,011	1,5	1,1	150
20	25	9,1	9	8,1	4,96	2,34	3,6	0,031	3,5	3,1	350
32	40	10,3	10	8,8	6,06	3,15	5,2	0,070	6,5	7,0	650
52	65	11,6	11	9,5	8,17	3,87	7,0	0,16	11	16	1100
77	97	13,0	12	10,6	11,8	4,77	12	0,31	15	31	1500

Тот факт, что интервал температур $T_к - T_0$, в котором происходит выделение энергии, оказывается довольно узким, свидетельствует еще об одной существенной аналогии с процессом горения. Как известно, вследствие резкой зависимости скорости химической реакции от температуры температура воспламенения смеси лишь немного отстает от конечной температуры продуктов. Выделяющееся в зоне реакции тепло почти полностью отводится теплопроводностью в исходную смесь и затрачивается на нагревание ее до температуры воспламенения.

Аналогичная ситуация в разряде приводит к тому, что в зоне выделения энергии уравнение баланса (28) мало отличается от уравнения $\mathcal{J} + S = 0$, отвечающего статическим условиям и конечная температура $T_к$ не намного меньше максимальной температуры T_m, соответствующей статическому режиму с теми же «ампер-витками» (см. табл. II).

Таким образом, рассмотрение разряда в потоке привело к существенному выводу о слабой зависимости температуры плазмы от того, происходит ли разряд в неподвижном или протекающем газе. Температура определяется только электро- и теплопроводными свойствами газа и ампер-витками на единицу длины индуктора.

3. Реальный процесс. Нерешенные вопросы

Выше была построена идеализированная схема, которая позволила выяснить некоторые закономерности весьма сложного процесса разряда в потоке газа. Как видно из предыдущего, теория способна дать приближенный ответ на все вопросы, если известна геометрия разряда и поля. В самом деле, мы можем найти температуру плазмы, плотность потока электромагнитной энергии и плотность потока газа в разряд, и тогда, проинтегрировав по поверхности фронта (формулы (29)), определим мощность и расход плазмы. Однако эта теория не может дать ответ на вопрос о геометрии разряда. Это и понятно: поверхность фронта разряда устанавливается в соответствии с распределением осевых скоростей потока газа. Начиная от передней точки «носика» разряда, поверхность при данном распределении внешнего магнитного поля выстраивается таким образом, чтобы проекция на нормаль к поверхности от скорости холодного газа на данном радиусе строго совпадала с нормальной скоростью распространения разряда. Это условие определяет наклон поверхности к оси в каждой точке, т. е. всю поверхность по распределению осевой скорости холодного газа в трубе при спиральном течении.

К сожалению, это распределение скорости пока не известно: нет ни экспериментов, ни теории. Теоретическое рассмотрение представляет известные трудности, так как необходимо учитывать вязкость газа и торможение о стенки трубки, потому что трубка — длинная. Тем более, нет теории, в которой рассматривалась бы полная картина течения газа с учетом тепловыделения в зоне разряда. Такое исследование позволило бы лучше понять и механизм рециркуляции плазмы, т. е. засасывания плазмы далеко вверх по потоку, в зону, где заведомо нет электромагнитного поля и где нет, следовательно, токов и выделения энергии.

Чтобы оценить значение полной мощности, вкладываемой в разряд, и расхода газа, превращающегося в плазму, на основе идеализированной задачи о нормальном распространении пламени положим, что область разряда представляет собой цилиндр радиуса $R = 2$ *см* и длины $L = 8$ *см*, независимо от мощности. Значения мощности $P = 2\pi RLS_0$ и расхода газа, превращающегося в плазму, $G = u \cdot 2\pi RL$, приведены в последних столбцах табл. II. Эти значения находятся в качественном согласии с экспериментальными данными. Заметим, что расход плазмы не совпадает с расходом газа, так как часть газа отжимает разряд от стенок трубки и не превращается в плазму.

В изложенной выше схеме не учитывались потери на излучение, т. е. она применима лишь к не очень высоким температурам, видимо, не превышающим 10 000—12 000°. Не исключено, что при очень высоких температурах излучение наряду с обычной теплопроводностью участвует в прогревании холодного газа и подготовке его к «воспламенению»— это может сказаться на скорости распространения разряда.

4. Прямой поток

Вернемся к работам [12, 50], о которых говорилось в начале этой главы. В работе [12] вообще не рассматриваются ни теплопроводность, ни любой другой механизм распространения разряда, а ведь именно механизм распространения определяет скорость подачи газа, необходимую для обеспечения стационарного «горения» разряда при данных условиях работы генератора. Вместо этого произвольно принимается условие равенства скорости потока плазмы на выходе из зоны разряда и местной скорости звука. Это условие не имеет абсолютно никаких оснований и вообще расходится с данными эксперимента, которые свидетельствуют о том, что движение здесь дозвуковое: скорость истечения плазмы не превышает 100 *м/сек*.

В работе Сошникова, Трехова и Хошева [50] рассматривается разряд в прямом, не спиральном, потоке газа, когда осевая скорость холодного газа в трубке постоянна по сечению (или максимальна на оси, если течение — пуазейлево). Трубка вставлена в полубесконечный соленоид. Поле внутри соленоида (при $z > 0$; ось z совпадает с осями трубки и соленоида) описывается уравнениями (2), как если бы соленоид был бесконечным. Уравнение энергии в этой области берется в виде

$$\rho_0 u_0 c_p \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\mathcal{J} + \sigma\langle \mathbf{E}^2\rangle - \varphi, \quad \mathcal{J} = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial r} \tag{31}$$

(оно записано в принятых выше обозначениях) *); здесь u_0 — осевая скорость холодного газа. В уравнении не учитывается поток тепла в осевом направлении. Для того чтобы оправдать такое пренебрежение, авторы полагают, что скорость подачи газа u_0 велика и скорость нагревания

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \rho_0 u_0 c_p \frac{dT}{dz}$$

гораздо больше опущенного слагаемого $-\frac{\partial}{\partial z}\varkappa\frac{\partial T}{\partial z}$.

Область перед соленоидом $z < 0$ не рассматривается вообще, а вместо этого на входе в соленоид, в сечении $z = 0$, задается параболический профиль температуры с произвольно выбираемой высокой температурой на оси $T_0 = 5000$—$7000°$ K (при недостаточно высоких T_0 потери в стенки оказываются больше тепловыделения и разряд не развивается). Скорость u_0 также задается произвольно. Система уравнений решается численно, примерно таким же методом, как и в статическом случае (см. [34-36] и начало раздела 2 гл. III). Газ в соленоиде нагревается, и температура асимптотически достигает конечного значения $T_m > T_0$, соответствующего статическому режиму с теми же радиусом трубки и «ампер-витками». В силу подобия, которое следует из уравнения (31) с опущенным членом осевой теплопроводности, вариация скорости u_0 влечет за собой только изменение характерной длины зоны нагревания Δz. Результаты расчетов показаны на рис. 16.

Несовершенство описанной модели становится ясным после ознакомления с соображениями, высказанными в разделах 1—2 гл. IV. В самом деле, механизмом нагревания холодного газа до температуры «ионизации», при которой может начаться достаточно интенсивное тепловыделение (а в данном случае это температура T_0 на входе в соленоид), является теплопроводность. Точнее, эту роль выполняет поток тепла в осевом направлении, идущий навстречу потоку холодного газа, а именно им авторы пренебрегают. Скорость подачи газа u_0 при этом не произвольна, она ограничена сверху.

Поток тепла через сечение $z = 0$ должен нагреть поступающий холодный газ до температуры ионизации, т. е. должно соблюдаться условие равенства потоков энергии типа

$$\rho_0 u_0 w(T_0) = |\mathcal{J}_z|_0 = \left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0} \tag{32}$$

(строго говоря, это равенство следует проинтегрировать или усреднить по сечению). Благодаря условию (32) и производные

$$\rho_0 u_0 c_p \frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial z}\varkappa\frac{\partial T}{\partial z}$$

в области нагревания неизбежно должны быть сравнимыми, в противоположность предположению, сделанному в [50].

При большой скорости подачи такой, что

$$\rho_0 u_0 c_p \frac{\partial T}{\partial z} \gg \frac{\partial}{\partial z}\varkappa\frac{\partial T}{\partial z},$$

*) Сравни с уравнениями (13), (22).

в сечении $z=0$ просто не может возникнуть необходимая температура T_0 и разряд не устанавливается На опыте это положение выглядит так, что разряд («пламя») «сдувается» быстрым потоком. Таким образом, при более корректной формулировке задачи следует учитывать осевую теплопроводность и включать в рассмотрение зону перед соленоидом или в крайнем случае задавать в сечении $z=0$ не только температуру T_0, но и поток тепла, связанный со скоростью u_0 условием типа (32).

Здесь стоит пояснить различие между прямым и спиральным потоками, в силу которого при рассмотрении последнего мы не обращали внимания на осевую теплопроводность. В случае спирального потока в центральной части трубки имеется вихревой столб; осевая скорость газа здесь очень

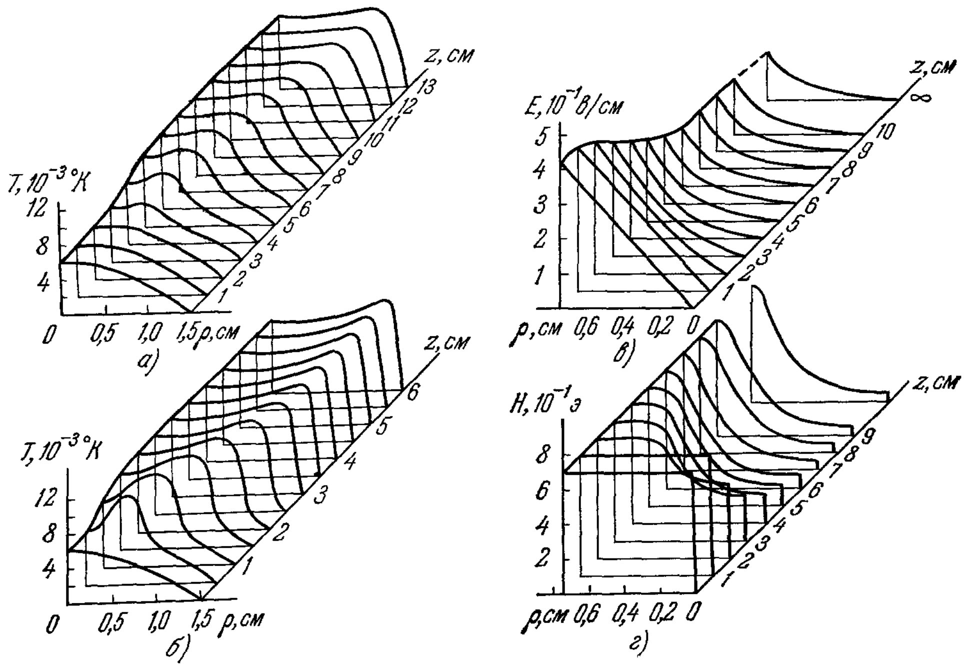

Рис. 16. Распределения температур и полей по расчету [50].

Аргон, расход 830 $см^3/сек$, радиус обозначен ρ. *а)* $In = 20$ *а-в/см*, $T_0 = 6000°$ К, радиус трубки $\rho = 1{,}5$ *см*; *б)* $In = 55$ *а-в/см*, $T_0 = 6000°$ К, $\rho_0 = 1{,}5$ *см*; *в)* $In = 55$ *а-в/см*, $T_0 = 7000°$ К, $\rho_0 = 0{,}75$ *см*; *г)* $In = 55$ *а-в/см*, $T_0 = 7000°$ К, $\rho_0 = 0{,}75$ *см*.

мала, а может быть, даже часть газа идет вверх по потоку. Поэтому в центральной части разряд не «сдувается» и осевой поток тепла не играет существенной роли для нагревания газа до температуры «ионизации». Почти весь газ поступает в разряд с боковой поверхности, и прогревание осуществляет радиальный поток тепла. В прямоточной же трубке осевая скорость в центральной части относительно большая, и, несмотря на существенную роль радиального потока тепла и втекания газа в разряд сбоку, стремлению центральной части потока «сдуть» разряд обязательно должно противостоять прогревающее действие осевой теплопроводности.

Несмотря на отмеченные недостатки, расчеты работы [50] дают некоторое представление о распределении температуры в области нагревания и в качественном отношении согласуются с экспериментом. Правда, для сопоставления с опытными данными авторам пришлось снизить скорость u_0 на порядок как раз до такого значения, при котором величины

$$\rho_0 u_0 c_p \frac{\partial T}{\partial z} \text{ и } \frac{\partial}{\partial z} \varkappa \frac{\partial T}{\partial z}$$

оказались сравнимыми, так как на опыте скорость u_0 была, естественно, именно такой. Однако осевая теплопроводность, видимо, не меняет кардинальным образом распределения температуры $T(z, r)$, так как расчетные изотермы оказались похожими на опытные, изображенные на рис. 4.

Результаты расчетов, показанные на рис. 16, весьма полезны и в том отношении, что наглядно демонстрируют, как фронт разряда наклоняется по отношению к потоку (до тех пор, пока фронт практически не достигает стенок трубки). Это обстоятельство подробно обсуждалось в разделе 1 гл. IV. Из рис. 16 видно, как место резкого подъема (или максимума) температуры, т. е. разрядный слой, приближается к стенке, если идти вниз по потоку. Проекция скорости потока на нормаль к полученной косой линии разряда как раз соответствует нормальной скорости распространения разряда, о которой говорилось в разделах 1—2 гл. IV.

Решение задачи о прямом потоке в корректной постановке безусловно представило бы значительный интерес для понимания явлений, хотя на опыте прямой поток почти не используется — слишком много тепла уходит в стенки трубки (это видно и из рис. 16).

Институт проблем механики
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Капцов, Электрические явления в газах и вакууме, М. — Л., Гостехиздат, 1950.
2. J. J. Thomson, Phil. Mag. 2, 674 (1926); 4, 1128 (1927).
3. Г. И. Бабат, Вестн. электропром., № 2, 1; № 3, 2 (1942).
4. G. I. Babat, J. Inst. Electr. Engrs. (Lond.) 94, 27 (1947).
5. F. Cabannes, Ann. de phys. 10, 1026 (1955).
6. G. Birkhoff, Zs. ang. Phys. 10, 204 (1958).
7. H. J. Strauß Ann. d. Phys. 1, 281 (1958).
8. T. B. Reed, J. Appl. Phys. 32, 821 (1961).
9. T. B. Reed, J. Appl. Phys. 34, 3146 (1963).
10. T. B. Reed, J. Appl. Phys. 34, 2266 (1963).
11. T. B. Reed, J. Appl. Phys. 32, 2534 (1961).
12. A. Mironer, F. Hushfar, AIAA Electric Propulsion Conference in Colorado Springs, March 11—13, 1963.
13. А. Миронер, Ракетн. техн. и космонавтика 1, 225 (1963).
14. С. В. Мариновский, А. Дж. Монро, Исследования при высоких температурах, Труды II Международного симпозиума по высокотемпературным исследованиям (под ред. В. А. Кириллина и А. Е. Шейндлина), М., «Наука», 1967, стр. 73.
15. Б. М. Дымшиц, Я. П. Корецкий, ЖТФ 34, 1677 (1964).
16. В. М. Гольдфарб, С. В. Дресвин, Теплофиз. высоких температур 3, 333 (1965).
17. Ф. Б. Вурзель, Н. Н. Долгополов, А. И. Максимов, Л. С. Полак, В. И. Фридман, Низкотемпературная плазма, Труды XX Международного конгресса по теоретической и прикладной химии (Москва, 1965), М., «Мир», 1967, стр. 419.
18. Р. В. Митин, К. К. Прядкин, ЖТФ 35 (7), 1205 (1965).
19. С. В. Дресвин, А. В. Донской, В. М. Гольдфарб, ЖТФ 35 (9), 1646 (1965).
20. Р. Е. Ровинский, Л. Е. Белоусова, В. А. Груздев, Теплофиз. высоких температур 4 (3), 328 (1966).
21. И. Т. Аладьев, И. Г. Кулаков, О. Л. Магдасиев, Л. П. Шатилов, Изв. СО АН СССР, сер. техн., 10 (3), 50 (1966).
22. F. Molinet, Compt. rend., Ser. B (1966).
23. P. D. Jonston, Phys. Lett. 20 (51), 499 (1966).
24. Р. Е. Ровинский, В. А. Груздев, Т. М. Гутенмахер, А. П. Соболев, Теплофиз. высоких температур 5 (4), 557 (1967).
25. D. W. Hughes, E. R. Wooding, Phys. Lett. 24 A, (1) 70 (1967).

26. М. Я. Смелянский, С. В. Кононов, М. И. Якушин, Электротермия, № 58, 15 (1967).
27. М. Я. Смелянский, С. В. Кононов, М. И. Якушин, Электротермия, **61**, 21 (1967).
28. В. М. Гольдфарб, А. В. Донской, С. В. Дресвин, В. С. Клубникин, Теплофиз. высоких температур **5** (4), 549 (1967).
29. М. Я. Смелянский, С. В. Кононов, М. И. Якушин, в сб. «Электротермические установки», М., Изд. МЭИ, 1967.
30. К. А. Егорова, А. И. Перевертун, Изв. СО АН СССР, сер. хим., **4** (9) (1967).
31. Ю. А. Буевич, В. М. Николаев, Ю. А. Пластинин, Г. Ф. Сипачев, М. И. Якушин, ПМТФ, № 6, 111 (1968).
32. С. И. Андреев, М. П. Ванюков, А. А. Егорова, Б. М. Соколов, ЖТФ **37** (7), 1252 (1967).
33. М. Р. Freeman, J. D. Chase, J. Appl. Phys. **39** (1), 180 (1968).
34. В. Н. Сошников, Е. С. Трехов, Теплофиз. высоких температур **4**, 166 (1966).
35. В. Н. Сошников, Е. С. Трехов, Теплофиз. высоких температур **4** (3), 324 (1966).
36. В. Н. Сошников, Е. С. Трехов, Теплофиз. высоких температур **5** (3), 522 (1967).
37. В. А. Груздев, Р. Е. Ровинский, А. П. Соболев, ПМТФ, № 1, 143 (1967).
38. Р. Е. Ровинский, А. П. Соболев, Теплофиз. высоких температур, **6** (2), 219 (1968).
39. Ю. П. Райзер, ПМТФ **3**, 3 (1968).
40. С. В. Кононов, М. И. Якушин, ПМТФ **6**, 67 (1966).
41. F. X. Powell, O. Fletcher, E. R. Lippincoff, Rev. Sci. Instrum. **34** (1), 36 (1693).
42. M. Plato, Zs. Naturforsch., XI, **9a** (11), 1324 (1964).
43. M. H. Clarkson, R. E. Field, D. R. Keefer, AIAA Jorn. **4** (3), 546 (1966).
44. А. В. Донской, С. В. Дресвин, Электротермия, № 5, 37 (1963).
45. Y. Reboux, Ingrs et techn. Nr. 166, 109 (1963).
46. Y. Reboux, Ingrs. et techn., Nr. 157 (Sept. 1962); Rev. gen. d'electron., Nr. 196, 36 (1963).
47. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Физматгиз, 1957.
48. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции (перевод с 6-го перераб. нем. изд. под ред. Л. И. Седова), М., «Наука», 1964.
49. А. М. Вайнберг, Индукционные плавильные печи, М., «Энергия», 1967.
50. В. Н. Сошников, Е. С. Трехов, Ю. М. Хошев, в сб. «Физика газоразрядной плазмы», вып. 1, М., Атомиздат, 1968, стр. 83.
51. Я. Б. Зельдович, Теория горения и детонации газов, М.— Л., Изд-во АН СССР, 1944.
52. М. И. Якушин, ПМТФ, № 3, 143 (1969).
53. С. Sherman, J. F. McCoy, J. Appl. Phys. 36, 2080 (1965).
54. A. J. Carswell, Rev. Sci. Instrum. **34** (9), 1015 (1963).
55. P. J. Vermeulen, W. Lee Boddy, F. A. Wierum, AJAA Journ. **5** (5), 1015, (1967).
56. Ю. А. Буевич, М. И. Якушин, ПМТФ, № 1, 56 (1968).
57. Ю. А. Буевич, О. К. Егоров, М. И. Якушин, ПМТФ, № 4, 72 (1968).
58. I. D. Cobine, D. A. Wilbur, J. Appl. Phys. **22**, 835 (1951).
59. В. П. Аксенов, Л. М. Блинов, В. П. Марин, Л. С. Полак, В. С. Щипачев, в сб. «Кинетика и термодинамика химических реакций в низкотемпературной плазме» М., «Наука», 1965.
60. П. А. Арсентьев, Е. Ф. Кустов, Теплофиз. высоких температур **6** (1), 44 (1968).