1968 г. Сентябрь Том 96, вып. 1

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

533.9

# КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДРЕЙФОВО-ДИССИПАТИВНЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ ПЛАЗМЫ

*А. А. Рухадзе, В. П. Силин*

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы получила существенное развитие теория колебаний и устойчивости пространственно-неоднородной плазмы, удерживаемой внешним магнитным полем. Интерес к такой теории обусловлен усилиями, прилагаемыми для решения проблемы управляемого термоядерного синтеза, настойчивыми попытками проникновения в сущность явлений, протекающих в ионосферной и межпланетной плазме, и, наконец, исследованиями в такой старой «классической» области физики, какой является физика газового разряда. Благодаря неоднородности плазмы, удерживаемой магнитным полем, а также благодаря кривизне силовых линий магнитного поля, в плазме оказываются возможными различные дрейфовые движения. Последние ведут к возникновению ряда неустойчивостей в плазме, получивших название дрейфовых неустойчивостей. Частоты и инкременты нарастания неустойчивых дрейфовых колебаний лежат в области

$$\omega \lesssim \omega_{\text{др}} \sim \frac{k_y v_T^2}{\Omega L_0} \gtrsim \frac{v_T^2}{\Omega L_0^2},$$

где $v_T = \sqrt{T/m}$ — тепловая скорость частиц, $\Omega = eB_0/mc$ — их гироскопическая частота, а $L_0$ — характерный размер неоднородности плазмы. В условиях, когда $\omega_{\text{др}} \gg \nu_\alpha$, где $\nu_\alpha$ ($\alpha = e, i$) — эффективные частоты столкновений заряженных частиц (электронов и ионов), либо когда длины волн дрейфовых колебаний меньше длины их свободных пробегов, $k_z v_{T\alpha} \gg \nu_\alpha$, при исследовании дрейфовой неустойчивости неоднородной плазмы в первом приближении столкновениями частиц можно пренебречь. Обзор результатов по теории дрейфовой неустойчивости плазмы без столкновений был дан в работе авторов [1] (см. также работы [2-15]). Среди таких неустойчивостей целый ряд связан с черенковским испусканием и поглощением плазменных колебаний частицами плазмы. В этом смысле можно говорить о диссипативном эффекте, приводящем к нарастанию плазменных колебаний.

Последующее развитие теории устойчивости магнитного удержания плазмы пошло по пути изучения влияния других диссипативных эффектов на устойчивость. Именно, появилось большое число работ, в которых изучалась роль столкновений частиц плазмы [16-28]. Можно сказать, что здесь теория устойчивости плазмы подразделилась на две части. Первая из них связана с необходимостью последовательного использования кинетической теории с решением кинетических уравнений, в которых фактически возникает необходимость детального рассмотрения интегралов столкновений частиц. Напротив, вторая часть не требует кинетической теории, и все ее результаты могут быть получены с помощью гидродинамики двух жидкостей [29] (электронов и ионов). Очевидно, что вторая часть проще. Однако она еще только начала развиваться (см., например, работы [30, 31]). В частности, поэтому мы постараемся, насколько нам это удастся, не затрагивать в нашей статье вопросов гидродинамической теории устойчивости плазмы *). Напротив, мы сосредоточим внимание на кинетической теории устойчивости плазмы. Ниже будет сделана попытка сформулировать определенный итог теории дрейфово-диссипативной неустойчивости полностью ионизированной плазмы, учитывающей кулоновские столкновения частиц в плазме. Такая теория представляет далеко не академический интерес. Дело в том, что даже в термоядерной плазме ($N \sim 10^{14}$ — — $10^{15}$ *см*$^{-3}$, $T \sim 1$—$10$ *кэв*, $L_0 \sim 10$ *см*, $B_0 \sim 10^4$—$10^5$ *э*) для наиболее опасных основных мод дрейфовых колебаний выполнены неравенства $\nu_e \sim 10^4$—$10^5$ *сек*$^{-1} \gtrsim \omega_{\text{др}} \sim v_T^2/\Omega L_0^2 \sim 10^3 - 10^4$ *сек*$^{-1} \gtrsim \nu_i \sim 10^2 -$ $- 10^{-3}$ *сек*$^{-1}$. Как правило, аналогичное соотношение выполняется для частоты дрейфовых колебаний в газоразрядной плазме, а также в ионосферной и межпланетной плазме. Построение теории дрейфовых колебаний, а тем самым и теории устойчивости магнитного удержания плазмы в таких условиях возможно лишь на основе кинетических уравнений, последовательно учитывающих столкновения частиц.

В ряде работ [22-27] кинетическая теория устойчивости магнитного удержания плазмы базировалась на кинетическом уравнении с модельным интегралом столкновений БГК [32]. Однако, как показал Питаевский [33, 34], такой интеграл столкновений в применении к полностью ионизированной плазме приводит к результатам, качественно отличающимся от истинных. Так, им было показано, что в случае коротковолновых колебаний с длиной волны меньше гироскопического радиуса частиц эффективная частота столкновений, получаемая с помощью интеграла столкновений Ландау [35], отличается от найденной с помощью модельного интеграла БГК квадратом отношения гироскопического радиуса к длине волны колебания поперек магнитного поля. Этот результат использован в работе Кадомцева и Погуце [28]. Однако заменять частоту ион-ионных столкновений на такую эффективную частоту, вообще говоря, недостаточно. Авторами настоящей статьи [36] (см. также [37]) было показано, что для исследований колебаний и устойчивости плазмы с неоднородной температурой необходимо пользоваться точными интегралами столкновений Больцмана или Ландау, поскольку в противном случае нельзя обнаружить существенные качественные эффекты, проявляющиеся как для коротковолновых, так и для длинноволновых колебаний. В этой краткой работе авторов были приведены некоторые результаты кинетической теории колебаний слабонеоднородной плазмы с учетом кулоновских столкновений частиц, позволившие сделать целый ряд заключений об устойчивости удержания плазмы магнитным полем с прямыми силовыми линиями. При этом были использованы простые приближенные методы решения кинетического уравнения, кото-

---

*) Описание колебаний с помощью гидродинамики возможно лишь для частот $\omega$, много меньших ионной $\nu_i$ и электронной $\nu_e$ эффективных частот столкновений. В работах [16-21] при построении теории плазменных колебаний в условиях, когда $\nu_e >$ $> \omega > \nu_i$, использовались приближения, основанные на модификациях уравнений двухжидкостной гидродинамики. Такой подход позволяет претендовать лишь на качественное описание, пригодное в сравнительно узких пределах, которые могут быть установлены лишь с помощью кинетического метода. Имея в виду последнее замечание, а также тот факт, что благодаря стройности и большой разработанности кинетического подхода получение конкретных результатов при его использовании оказывается не только более надежным, но и более быстрым, мы нигде не будем следовать полуколичественным методам.

рые изложены в приложениях к настоящей статье и в которых фактически показано, что интегрирование кинетического уравнения с точным интегралом столкновений не делает теорию более сложной, чем это имеет место при использовании БГК. После появления работ [36, 37] стало ясным, какие из результатов, полученных с помощью модельного интеграла БГК [22-27], являются качественно правильными и какие — ошибочными. Кроме того, эти работы позволили выяснить пределы применимости различных приближенных гидродинамических методов описания дрейфовых колебаний неоднородной плазмы в кинетической области частот (т. е. при $\omega > \nu_i$), использованных в работах [16-21].

Ниже излагается кинетическая теория дрейфово-диссипативных неустойчивостей магнитного удержания плазмы низкого давления, когда тепловое движение плазмы является пренебрежимо малым по сравнению с давлением удерживающего магнитного поля. При этом учитывается как кривизна, так и перекрещенность магнитных силовых линий. Для учета кривизны силовых линий вводится эффективное поле тяжести $g$, вектор которого ориентирован вдоль направления неоднородности плазмы (вдоль оси $x$). По порядку величины

$$|g| \approx \frac{v^2{}_{Ti} - v_s^2}{R},$$

где $v_s = \sqrt{T_e/M}$ — скорость длинноволнового ионного звука, а $R$ — кривизна силовых линий магнитного поля *).

Анализ условий неустойчивости приводится в рамках метода геометрической оптики. Как известно [1], в этом случае продуктивно понятие диэлектрической проницаемости слабонеоднородной плазмы. Выражения для такой диэлектрической проницаемости приведены в § 2 для ряда предельных случаев, необходимых для изучения влияния кулоновских столкновений заряженных частиц на дрейфовые колебания плазмы. В § 3 и 4 излагаются результаты исследования спектров низкочастотных, соответственно длинноволновых и коротковолновых, колебаний, в § 5 — спектров дрейфово-циклотронных колебаний неоднородной плазмы. Определены частоты и инкременты нарастающих колебаний, и обсуждаются области их локализации. Выяснены возможности стабилизации дрейфово-диссипативных неустойчивостей плазмы перекрещенностью силовых линий магнитного поля и указаны критерии такой стабилизации. Уделено внимание модным в настоящее время системам с минимумом **B** [38-40] **).

---

*) Введение этого эффекта поля тяжести для учета кривизны силовых линий магнитного поля можно пояснить следующим образом. На частицу, движущуюся вдоль силовых линий искривленного магнитного поля с тепловой скоростью $v_T$, действует центробежная (направленная вдоль главной нормали к силовым линиям) сила, равная $mv_T^2/R$. Эта сила в свою очередь вызывает центробежный дрейф частицы со скоростью $u = v_T^2/R\Omega$. Скорость относительного дрейфа электронов и ионов при этом равна $u_{\text{отн}} = u_e - u_i = -(v_{Ti}^2 + v_s^2)/R\Omega_i$. Легко видеть, что к такому же относительному дрейфу частиц приводит введенное нами поле тяжести $|\mathbf{g}| = (v_{Ti}^2 + v_s^2)/R$. Следует заметить, что такой учет кривизны силовых линий магнитного поля является, строго говоря, правильным лишь для колебаний с $\omega \gg ku_{\text{отн}}$, так как в противном случае существенным становится тепловой разброс частиц по скоростям. Поэтому ниже мы всюду это неравенство будем считать выполненным.

**) В системах с минимумом **B** кривизна силовых линий отрицательна, так как главная нормаль к силовым линиям направлена в сторону увеличения плотности. Это означает, что $g\,\dfrac{\partial \ln N}{\partial x} > 0$, т. е. эффективное поле тяжести параллельно направлению возрастания плотности плазмы.

## § 2. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

В теории устойчивости неоднородной плазмы фундаментальную роль играет диэлектрическая проницаемость. Этот параграф мы посвятим изложению основных положений, на которых базируется кинетическая теория диэлектрической проницаемости слабонеоднородной плазмы, удерживаемой сильным магнитным полем, а также приведем результаты такой теории, учитывающей столкновения частиц в плазме.

Соответственно реальной ситуации, имеющей место в условиях магнитного удержания плазмы, будем считать, что частота гироскопического вращения частиц $\Omega$ велика по сравнению с их характерными частотами столкновений. В связи с этим пренебрежем влиянием столкновений частиц на равновесное распределение по скоростям. При этом ось $z$ направим вдоль магнитного поля $\mathbf{B}_0$, а плазму будем считать неоднородной в направлении оси $x$. В этом же направлении ориентирован вектор эффективного поля тяжести $\mathbf{g}$. Тогда кинетическое уравнение для равновесной функции распределения может быть записано в виде

$$v_x \frac{\partial f_0}{\partial x} + g \frac{\partial f_0}{\partial v_x} + \frac{e}{mc} [\mathbf{v}\mathbf{B}_0] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0. \tag{2,1}$$

Ограничиваясь представляющим в настоящее время наибольший интерес случаем, когда давление магнитного поля значительно превышает тепловое давление плазмы $\beta = 8\pi P_0/B_0^2 \ll 1$, можно пренебречь при интегрировании уравнения (2,1) неоднородностью поля $\mathbf{B}_0$. Наконец, примем также во внимание, что в реальной плазме распределение частиц мало меняется на расстоянии порядка гироскопического радиуса ионов $\rho_i = v_{Ti}/\Omega_i$. В результате решение уравнения (2,1) для равновесной функции распределения может быть записано в виде

$$f_0 = \frac{N(C)}{[2\pi m T(C)]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{m[v_x^2 + v_z^2 + (v_y - u)^2]}{2T(C)}\right\}, \tag{2,2}$$

где $u = -g/\Omega$ — скорость гравитационного дрейфа частицы в скрещенных полях $\mathbf{g}$ и $\mathbf{B}_0$, а $C = x + (v_y - u)/\Omega$ — характеристика уравнения (2,1), посредством которой определяется зависимость от пространственных координат функции (2,2).

Для изучения устойчивости плазмы с распределением частиц (2,2) рассмотрим малые отклонения от таких распределений, сопутствующие малым возмущениям полей. Благодаря малости теплового давления плазмы можно пренебречь возмущением магнитного поля и ограничиться лишь учетом возмущенного потенциального электрического поля $\delta\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Имея в виду, что равновесное распределение не зависит от координат $y$ и $z$, будем искать неравновесные величины в виде

$$\delta f(x) \exp\{-i\omega t + ik_y y + ik_z z\}.$$

Тогда кинетическое уравнение для неравновесной добавки к функции распределения можно записать следующим образом:

$$-i(\omega - k_y u - k_y v_y - k_z v_z)\,\delta f + v_x \frac{\partial \delta f}{\partial x} - \Omega \frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} = \frac{e}{mC} \nabla\Phi \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \sum I_{\alpha\beta}. \tag{2,3}$$

Здесь $\varphi$ — азимутальный угол в пространстве импульсов (полярная ось направлена вдоль оси $z$), а $I_{\alpha\beta}$—линеаризованный интеграл столкновений заряженных частиц сорта $\alpha$ с частицами сорта $\beta$ [35]:

$$I_{\alpha\beta}=2\pi e_{\alpha}^{2}e_{\beta}^{2}L\frac{\partial}{\partial p_i}\int d\mathbf{p}'\,\frac{w^2\delta_{ij}-w_iw_j}{w^3}\times$$
$$\times\left\{f_{0\beta}\frac{\partial\delta f_{\alpha}}{\partial p_j}+\delta f_{\beta}\frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_j}-f_{\alpha 0}\frac{\partial\delta f_{\beta}}{\partial p_j'}-\delta f_{\alpha}\frac{\partial f_{0\beta}}{\partial p_j'}\right\},\qquad(2,4)$$

где $L=\ln(r_D/r_{\min})$ — кулоновский логарифм, а $\mathbf{w}=\mathbf{v}_{\alpha}-\mathbf{v}_{\beta}$. Суммирование в правой части уравнения (2,3) ведется по всем сортам заряженных частиц плазмы. Уравнение (2,3) удобно решать в системе координат, где у частиц данного сорта нет гравитационного дрейфа. В такой системе отсчета функция распределения имеет вид (2,2) с $u=0$. Ограничиваясь возмущениями с длиной волны вдоль направления $x$, много меньшей характерного размера неоднородности плазмы $L_0$, можно принять зависимость возмущенных величин от координаты $x$ в виде $\exp\left(i\int\limits_0^x k_x dx\right)$. Тогда, решая в приближении геометрической оптики систему кинетических уравнений для электронов и ионов, найдем плотность заряда, индуцированного в плазме потенциальным неравновесным полем:

$$\delta\rho=\sum e\int d\mathbf{p}\delta f=\frac{k^2}{4\pi}(1-\varepsilon)\Phi.\qquad(2,5)$$

Определенная таким образом продольная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon(\omega,\,\mathbf{k},\,x)=1+\delta\varepsilon_e+\delta\varepsilon_i\qquad(2,6)$$

в следующих параграфах будет использована нами для изучения потенциальных колебаний плазмы. Ниже в этом параграфе мы для целого ряда предельных случаев выпишем выражения для $\delta\varepsilon_e$ и $\delta\varepsilon_i$, которые соответствуют вкладам электронов и ионов в диэлектрическую проницаемость плазмы.

Всюду ниже мы пренебрегаем гироскопическим радиусом электронов по сравнению с длиной волны исследуемых колебаний плазмы. Это приводит к тому, что частóты исследуемых дрейфовых колебаний считаются меньше гироскопической частоты электронов, $\omega\ll\Omega_e$. Кроме того, будем полностью пренебрегать гравитационным дрейфом электронов, поскольку скорость дрейфа электронов $u_e$ в $M/m$ раз меньше скорости дрейфа ионов $u_i=-g/\Omega_i$. В результате число возможных предельных случаев для электронного вклада в диэлектрическую проницаемость сравнительно невелико.

Если продольная длина волны колебаний мала как по сравнению с длиной пробега электрона, так и по сравнению с расстоянием, проходимым тепловым электроном за период рассматриваемых колебаний ($\omega$, $\nu_e\ll k_z v_{Te}$), то столкновениями электронов можно пренебречь и использовать результат теории плазмы без столкновений [1]:

$$\delta\varepsilon_e=\frac{1}{k^2r_{De}^2}\left\{1+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{|k_z|v_{Te}}\left(1-\frac{k_yv_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{N}{\sqrt{Te}}\right)\right\}.\qquad(2,7)$$

Здесь диссипативный вклад обусловлен эффектом Черенкова на электронах.

Напротив, если продольная длина волны колебаний значительно превышает длину свободного пробега электронов, то эффектом Черенкова можно пренебречь, поскольку в этом случае диссипативные эффекты обусловлены столкновениями электронов. Если, кроме того, частота рассматриваемых колебаний значительно превышает частоту столкновений: $\omega \gg \nu_e > k_z v_{Te}$, то нетрудно найти решение кинетического уравнения для электронов с помощью разложения по степеням $\nu_e/\omega$. В результате получаем [36]

$$\delta\varepsilon_e = \frac{1}{k^2 r_{De}^2}\left\{\frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\partial \ln N}{\partial x} - \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\partial \ln NT_e}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left. - i\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{N}{\sqrt{T_e}}\right)\right\}, \quad (2,8)$$

где

$$\nu_{\text{эфф}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{m}}\frac{e^4 NL}{T_e^{3/2}}.$$

Величина $\nu_{\text{эфф}}$ характеризует столкновения электронов с ионами, которые для простоты принимаются однозарядными: $e_i = -e$.

Наконец, в условиях, когда длина свободного пробега оказывается меньше как продольной длины волны, так и расстояния, проходимого тепловым электроном за период колебаний ($\nu_e \gg \omega, k_z v_{Te}$), в кинетическом уравнении (2,3) самым старшим членом становится интеграл столкновений. При этом решение кинетического уравнения для электронов можно найти с помощью метода Чемпена — Энскога (см. приложение I). Это дает

$$\delta\varepsilon_e = \frac{1}{k^2 r_{De}^2}\left\{\frac{k_y v_{Te}^2}{\omega T_e}\frac{\partial \ln N}{\partial x} + i1{,}96\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega\nu_{\text{эфф}}}\left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\partial \ln NT_e^{1,71}}{\partial x}\right)\right\} \quad (2,9)$$

при $\omega\nu_{\text{эфф}} \gg k_z^2 v_{Te}^2$ (см. также [36]) и

$$\delta\varepsilon_e = \frac{1}{k^2 r_{De}^2}\left\{1 + i\cdot 1{,}44\frac{\omega\nu_{\text{эфф}}}{k_z^2 v_{Te}^2}\left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\partial \ln NT_e^{-0,56}}{\partial x}\right)\right\}. \quad (2.10)$$

Перейдем теперь к рассмотрению ионного вклада в диэлектрическую проницаемость. Учет гравитационного дрейфа ионов приводит к появлению в кинетическом уравнении для ионов допплеровского сдвига частоты $\omega' = \omega - k_y u_i$. С помощью простого метода последовательных приближений можно легко найти решение кинетического уравнения, соответствующего пределу $\omega' - s\Omega_i \gg \nu_i$, где $s = 0, 1, 2, \ldots$ Для ионного вклада в диэлектрическую проницаемость в этом пределе получаем

$$\delta\varepsilon_i = \frac{1}{k^2 r_{Di}^2}\left\{1 - \sum_s \frac{\omega'}{\omega' - s\Omega_i}\left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega'\Omega_i}\left[\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\partial T_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial T_i}\right]\right)\times\right.$$
$$\left.\times A_s(k_\perp^2\rho_i^2) J_+\left(\frac{\omega' - s\Omega_i}{k_z v_{Ti}}\right)\right\} + \delta\varepsilon_{ii} + \delta\varepsilon_{ie}, \quad (2,11)$$

где

$$A_s(x) = e^{-x} I_s(x),$$

а

$$J_+(x) = xe^{-x^2/2}\int_{i\infty}^{x} d\tau e^{\tau^2/2}$$

(относительно $J_+(x)$ см. [42]). Первое слагаемое здесь соответствует полученному в теории плазмы без столкновений [1]. Два других обусловлены столкновениями ионов с ионами и ионов с электронами. Эти слагаемые несущественны, если $\omega' - s\Omega_i \ll k_z v_{Ti}$. В противоположном пределе

($\omega' - s\Omega_i \gg k_z v_{Ti}$) легко получаются простые выражения для $\delta\varepsilon_{ii}$ как для длинных волн $k_\perp \rho_i \ll 1$:

$$\delta\varepsilon_{ii} = \frac{i}{10}\frac{\nu_{ii}}{\omega'}\frac{v_{Ti}^4}{k^2 r_{Di}^2}\left\{\left(16\frac{k_z^4}{\omega'^4} + 28\frac{k_z^2 k_\perp^2}{\omega'^2\Omega_i^2} + 7\frac{k_\perp^4}{\Omega_i^4}\right)\left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega'\Omega_i}\frac{d\ln N}{\partial x}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(24\frac{k_z^4}{\omega'^4} + \frac{33}{2}\frac{k_z^2 k_\perp^2}{\omega'^2\Omega_i^2} - \frac{3}{4}\frac{k_\perp^4}{\Omega_i^4}\right)\frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega'\Omega_i}\frac{\partial \ln T_i}{\partial x}\right\}, \quad (2,12)$$

так и для коротких волн $k_\perp \rho_i \gg 1$ (см. приложение II, а также[36]).

$$\delta\varepsilon_{ii} = i\sum_s \frac{\nu_{ii}\omega'}{(\omega' - s\Omega_i)^2}\frac{3(\pi+1)}{8\sqrt{\pi}}\frac{k_\perp \rho_i}{k^2 r_{Di}^2}\left[1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega'\Omega_i}\frac{\partial \ln N}{\partial x}\left(1 - \frac{3\pi - 2}{4\pi + 4}\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}\right)\right], \quad (2,13)$$

где $\nu_{ii}$ — частота ион-ионных столкновений:

$$\nu_{ii} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{M}}\frac{e^4 N L_0}{T_i^{3/2}}.$$

При получении формулы (2,12) мы приняли также, что $\omega' \ll \Omega_i$, так как только в этом случае возможны длинноволновые дрейфовые колебания в плазме.

Ион-электронные столкновения существенны лишь в области длинных волн $k_\perp \rho_i \ll 1$ и при условии $\nu_e \gg \omega$, $k_z v_{Te}$, а $\omega' \ll \Omega_i$. При этом

$$\delta\varepsilon_{ie} = \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega'^2 k^2 r_{Di}^2}\left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\partial \ln N T_e}{\partial x}\right). \quad (2,14)$$

В полученных выше формулах столкновения ионов считались сравнительно редкими, что характерно для кинетической (не гидродинамической) теории разреженных газов. Как уже отмечалось выше, решение кинетического уравнения при этом получается методом теории возмущений. Реальным примером разложения, как это можно видеть из формул (2,12) и (2,13), является $\nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2/\omega'$ либо $\nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2/(\omega' - s\Omega_i)$. Однако имеется еще один случай, требующий использования кинетической теории, в котором этот параметр не мал, а именно:

$$\nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2 \gg (\omega' - s\Omega_i),\ k_z v_{Ti},$$

где $s = 0, 1, 2, \ldots$ Этот случай осуществляется для коротких длин волн ($k_\perp \rho_i \gg 1$), когда[36] (см. приложение II)

$$\delta\varepsilon_i = \frac{1}{k^2 r_{Di}^2}\left\{1 + \frac{i\omega'}{\nu_{ii} k_\perp^3 \rho_i^3}\frac{2C_0}{3\pi}\left[1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega'\Omega_i}\frac{\partial \ln N}{\partial x}\left(1 - C_1\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}\right)\right]\right\}, \quad (2,15)$$

где $C_0 = 0{,}914$ и $C_1 = 0{,}225$. В этой области вкладом ион-электронных столкновений можно пренебречь.

Формулы (2,7) — (2,15) охватывают все предельные случаи кинетической теории дрейфовых колебаний неоднородной плазмы низкого давления. Вне поля зрения этих формул остаются лишь гидродинамические колебания, удовлетворяющие условиям $k_\perp \rho_i \ll 1$, $\Omega_\alpha \gg \nu_\alpha \gg \omega$, $k_z v_{T\alpha}$ как для электронов, так и для ионов (т. е. $\alpha = e, i$). Как уже отмечалось выше, гидродинамические дрейфовые колебания неоднородной плазмы исследованы в работах[30, 31].

## § 3. СПЕКТРЫ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ДРЕЙФОВО-ДИССИПАТИВНЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

Согласно методу геометрической оптики для определения спектра колебаний потенциального поля в неоднородной плазме следует использовать уравнение эйконала [1]

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 0. \tag{3,1}$$

Подставляя в это уравнение полученные в предыдущем параграфе выражения для продольной диэлектрической проницаемости, определим $k_x(\omega, x)$ — компоненту волнового вектора $\mathbf{k}(\omega, x)$ — как комплексную функцию координаты и комплексной частоты $\omega$. Наконец, квазиклассические правила квантования [9, 43]

$$\int\limits_{x_\mu}^{x_\nu} d_x(\omega, x)\, dx = \pi n \tag{3,2}$$

(где $n$ — целое число, значительно превосходящее единицу) определяют спектр плазменных колебаний и, в частности, дают ответ на вопрос о неустойчивости плазмы. В формуле (3,2) интегрирование ведется между комплексными точками поворота *) $x_\mu$ и $x_\nu$, в которых $k_x(\omega, x) = 0$, либо между точкой поворота и границей плазмы, на которой могут быть заданы недиссипативные граничные условия. В случае слабозатухающих (или нарастающих) колебаний эту область называют областью прозрачности плазмы.

Среди возможных колебаний, описываемых геометрической оптикой, могут быть такие, для которых, благодаря плавной зависимости диэлектрической проницаемости от координат, правильный порядок величины собственных частот и правильные ответы об устойчивости плазмы дают так называемые локальные спектры [8]. При получении локальных спектров **) с помощью уравнения эйконала (3,1) находится частота как комплексная функция координат и действительных компонент волнового вектора. Напомнив эти общие положения метода геометрической оптики, перейдем теперь к изучению спектров колебаний слабонеоднородной плазмы.

В этом разделе мы рассмотрим длинноволновые дрейфово-диссипативные колебания плазмы, для которых $k_\perp \rho_i \ll 1$ и, следовательно, $\omega' \ll \Omega_i$.

а) В области частот $|\omega + i\nu_e| \ll k_z v_{Te}$, $\omega' \gg \nu_i$, $k_z v_{Ti}$ (3,1) при подстановке выражений (2,7), (2,11) и (2,12) приводит к следующим спектрам длинноволновых дрейфово-диссипативных колебаний:

$$\omega_1 \approx -\frac{k_y v_s^2}{\Omega_i} \frac{\partial \ln N}{\partial x},$$

$$\gamma_1 \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_1^2}{|k_z| v_{Te}} \left\{ k^2 r_{De}^2 + \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial \ln N}\right) \frac{k_\perp^2 v_s^2}{\Omega_i^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} - \frac{g}{v_s^2 \frac{\partial \ln N}{\partial x}} \right\} - \frac{7}{10} k_\perp^4 \rho_i^4 \left(1 + \frac{T_e}{T_i} - \frac{3}{28} \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}\right) \nu_{ii}, \tag{3,3}$$

$$\omega_2 = \frac{k_z^2 \Omega_i}{k_y \frac{\partial \ln N}{\partial x}},$$

*) При этом, согласно Днестровскому и Костомарову [43], должен иметь место комплекс II рода. Это означает, что от каждой из двух точек поворота отходят две несвязанные области, ограничиваемые линиями $\operatorname{Im} k_x(\omega, x) = 0$, содержащие соответственно бесконечно удаленные точки действительной оси $x = +\infty$ и $x = -\infty$.

**) Реальными точками «локализации» колебаний могут быть точки поворота.

$$\gamma_2 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega_2^2}{|k_z|\,v_{Te}}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N}-\frac{g}{v_s^2\,\dfrac{\partial \ln N}{\partial x}}\right)-\frac{8}{5}\,\nu_{ii}\,\frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega^2}, \tag{3,4}$$

$$\omega_3^2 = -k_z^2 v_{Ti}^2\,\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}, \tag{3,5}$$

$$\omega_4^3 = -k_z^2 v_s^2\,\frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i}\,\frac{\partial \ln T_i}{\partial x}, \tag{3,6}$$

проявляющихся в самых различных условиях. Последняя ветвь, впервые обнаруженная в работе [2] и названная дрейфовотемпературной, соответствует гидродинамически неустойчивым колебаниям в области частот

$$1 \ll \omega_4 \Bigg/ \frac{k_y v_s^2}{\Omega_i}\,\frac{\partial \ln N}{\partial x} \ll \frac{T_i}{T_e}\,\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}$$

и возможна лишь при условии

$$\frac{T_i}{T_e}\,\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \gg 1.$$

Третья ветвь[44], также соответствующая гидродинамически неустойчивым колебаниям неоднородной плазмы, существует в области еще более низких частот, когда

$$\omega_3 \ll \frac{k_y v_s^2}{\Omega_i}\,\frac{\partial \ln N}{\partial x};$$

она также возможна лишь при условии $\frac{T_i}{T_e}\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \gg 1$. Вторая ветвь[2] соответствует слабонарастающим колебаниям ($\gamma_2 \ll \omega_2$) и существует только в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$ (так как $k_z v_{Ti} \ll \omega_2 \ll k_z v_s$); видно, что ион-ионные столкновения для таких колебаний играют стабилизирующую роль, в то время как черенковский эффект на электронах может привести к их раскачке, если $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 2$. Обратное положение имеет место для первой ветви колебаний (полученной при $k_\perp^2\omega_1^2 > k_z^2\Omega_i^2$), где черенковская диссипация на электронах при больших

$$\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 2\left[k^2 r_{De}^2 + \frac{k_\perp^2 v_s^2}{\Omega_i^2}\left(1+\frac{T_i}{T_e}\,\frac{\partial \ln NT_i}{\partial \ln N}\right)\right]$$

стабилизирует колебания, а ион-ионные столкновения могут привести к их раскачке, если

$$\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} > \frac{28}{3}\left(1+\frac{T_e}{T_i}\right).$$

Весьма характерно влияние кривизны силовых линий магнитного поля на рассматриваемые колебания. Как легко видеть из соотношений (3,5) и (3,6), для третьей и четвертой ветвей колебаний кривизна силовых линий магнитного поля совершенно не влияет на спектр, а следовательно, на устойчивость колебаний. Для первой и второй ветвей колебаний кривизна силовых линий магнитного поля влияет на устойчивость, причем в системах с положительной кривизной $\left(g\,\frac{\partial \ln N}{\partial x} < 0\right)$ в первой ветви она приводит к раскачке колебаний, а в системах с отрицательной кривизной (системы с минимумом **B**) играет стабилизирующую роль. Из выражения для $\gamma_1$ видно, что влияние кривизны становится существенным при

$$\frac{T_i}{T_e} \gtrsim k_\perp^2 \rho_i^2\,\frac{R}{L_0}.$$

На вторую ветвь колебаний кривизна силовых линий магнитного поля оказывает обратное действие. Следует заметить, что влияние кривизны силовых линий на колебания второй ветви может стать существенным лишь в условиях, когда скорость гравитационного дрейфа ионов сравнима со скоростью ларморовского дрейфа электронов, т. е. при $\frac{T_i}{T_e} \gtrsim \frac{R}{L_0} \gg 1$. В этом пределе, однако, введение эффективного поля тяжести для учета кривизны силовых линий магнитного поля, как уже отмечалось выше, несправедливо; строго можно говорить лишь о слабом влиянии кривизны на характер колебаний плазмы.

До сих пор мы ничего не говорили о перекрещенности силовых линий магнитного поля, обусловленной малой, но сильно неоднородной поперечной компонентой поля $B_{0y}(x) \ll B_{0z}$. Учет перекрещенности силовых линий достигается простой заменой [45] (см. также [1, 8, 20])

$$k_z \longrightarrow k_z^*(x) = k_z + k_y\theta(x), \tag{3,7}$$

где $\theta(x) = B_{0y}/B_{0z}$. Для определенности мы полагаем $\theta = Sx$, что соответствует линейному изменению поперечной компоненты магнитного поля с координатой [20], т. е. $B_{0y} = SxB_{0z}$, где $x$ меняется в области локализации колебаний и поэтому достигает значений порядка размера области локализации *), а $S$ характеризует прокручивание силовых линий магнитного поля на единицу длины.

Отличная от нуля перекрещенность силовых линий магнитного поля может привести к двум эффектам. Во-первых, она может влиять на область локализации дрейфовых колебаний, которая, очевидно, находится вблизи поверхности плазмы (в области ее неоднородности). Именно с ростом $\theta$, согласно (3,7), возрастает эффективное волновое число $k_z^*$ и может нарушиться условие существования дрейфовых колебаний. Для рассмотренных выше колебаний необходимо, чтобы $\omega_{\text{др}} \gg k_z v_s$, $k_z v_{Ti}$; $\omega \gg k_z v_{Ti}$ (при $\omega^2 \ll k_z^2 v_{Ti}^2$ имеет место дебаевская экранировка поля, колебания невозможны). Поэтому такое нарушение происходит при [45]

$$\theta = Sx \gtrsim \sqrt{\frac{T_e + T_i}{M}}\,\frac{1}{\Omega_i L_0}\,. \tag{3,8}$$

Если это неравенство соблюдается во всей области неоднородности, плазмы для размеров $x$ порядка области локализации колебаний, которая больше ларморовского радиуса ионов (т. е. $x \sim 1/k_\perp > \rho_i$), то рассмотренные выше ветви дрейфово-диссипативных колебаний невозможны, или, как говорят, они стабилизируются перекрещенностью силовых линий магнитного поля **). Следует заметить, что неравенство (3,8) является

---

*) Для цилиндрически неоднородной плазмы $\theta = r\,\Delta r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{B_{0\varphi}}{rB_{0z}}\right)$, где $\Delta r$ — размер области локализации колебаний. Поэтому под $S$ в цилиндрически неоднородной плазме следует понимать величину

$$S = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{B_{0\varphi}}{rB_{0z}}\right)$$

(при этом $S = \theta\,\Delta r^{-1}$). Минимальное значение $\Delta r$ (в плоском случае $x$) — порядка длины волны рассматриваемых колебаний в направлении неоднородности плазмы, а максимальное не превышает размеров области неоднородности.

**) Чем меньше размер $x$, для которого соблюдается неравенство (3,8), тем меньше длины волн возможных неустойчивых колебаний и, следовательно, тем менее опасна неустойчивость с точки зрения магнитного удержания плазмы. Это замечание относится ко всем видам рассматриваемых нами неустойчивых дрейфовых колебаний, стабилизируемых перекрещенностью силовых линий магнитного поля. Самыми опасными из них, очевидно, являются наиболее длинноволновые колебания с $\lambda_\perp \sim L_0$, которые могут возбуждаться в условиях, когда неравенство типа (3,8) не соблюдается для размеров $x \gtrsim L_0$.

достаточным (а следовательно, слишком жестким), но отнюдь не необходимым условием для стабилизации рассмотренных дрейфовых колебаний. Для отдельных конкретных ветвей колебаний необходимые и достаточные условия стабилизации легко получить из неравенства $k_z^* v_{Ti} > \omega$. Эти условия мало отличаются от (3,8), и поэтому мы их здесь не будем выписывать.

Во-вторых, перекрещенность силовых линий магнитного поля может существенно влиять на спектр частот дрейфовых колебаний. Локальные выражения для спектров колебаний, полученные непосредственно из уравнений эйконала, при наличии сильно неоднородной перекрещенности силовых линий магнитного поля могут качественно отличаться, как мы увидим ниже, от получаемых с помощью правил квантования.

Для рассмотренных выше колебаний в области частот $\omega \gg \nu_i$, $|\omega + i\nu_e| \ll k_z v_{Te}$ при учете перекрещенности силовых линий магнитного поля дисперсионное уравнение, получаемое из уравнения эйконала (3,1) и соотношения (3,2), имеет вид

$$\int d\xi \left\{ -k_y^2 + k_{\perp 0}^2 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r_{De}^2} \frac{1}{|k_y S \xi|\, v_{Te}} \left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}}\right) - \right.$$
$$\left. - i \cdot \frac{7}{10} \frac{k_{\perp 0}^4 v_{Ti}^4}{\Omega_i^4} \frac{\nu_{ii}}{r_{Di}^2} \left[1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega' \Omega_i} \frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{3}{28} \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega' \Omega_i} \frac{\partial \ln T_i}{\partial x}\right]\right\}^{1/2} = \pi n, \qquad (3,9)$$

где

$$k_{\perp 0}^2 = -\left\{\frac{1}{r_{De}^2}\left(1 + \frac{k_y v_s^2}{\omega' \Omega_i} \frac{\partial \ln N}{\partial x}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega'^2} k_y^2 S^2 \xi^2 \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega' \Omega_i} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial x}\right)\right\} \left[1 + \frac{\omega_{ii}^2}{\Omega_i^2}\left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega' \Omega_i} \frac{\partial \ln N T_i}{\partial x}\right)\right]^{-1}. \qquad (3,10)$$

При получении этих формул мы воспользовались соотношением (3,7) и произвели замену $\xi = x + k_z/k_y S$. Интегрирование в дисперсионном уравнении (3,9) ведется по области прозрачности плазмы, в которой $-k_y^2 + k_{\perp 0}^2 > 0$ (в рассматриваемом случае диссипативные члены малы и можно говорить об области прозрачности плазмы). Если в неоднородной плазме точки поворота отсутствуют, то пределы интегрирования совпадают с поверхностями неоднородного плазменного слоя (в однородной плазме рассматриваемые колебания не существуют и, следовательно, поверхность неоднородного слоя служит для них точкой поворота) либо определяются из неравенства, обратного (3,8), представляющего собой условие существования колебаний *).

*) Заметим, что в бесстолкновительной плазме это обстоятельство автоматически учитывается в дисперсионном соотношении

$$\int dx \left\{ -k_y^2 - \left[\frac{\rho_i^2}{r_{Di}^2}\left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega' \Omega_i}\left\{\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\partial T_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial T_i}\right\}\right) J_+\left(\frac{\omega'}{k_z^* v_{Ti}}\right) + 1\right]^{-1} \times \right.$$
$$\times \left[\frac{1}{r_{De}^2}\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z^*|\, v_{Te}} \left\{1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}}\right\}\right) + \frac{1}{r_{Di}^2}\left(1 - J_+\left(\frac{\omega'}{k_z^* v_{Ti}}\right)\right) - \right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{k^2 r_{Di}^2} \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega' \Omega_i} \left\{\frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\partial T_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial T_i}\right\} J_+\left(\frac{\omega'}{k_z^* v_{Ti}}\right)\right]\right\}^{1/2} = \pi n,$$

которое включает в себя соотношение (3,9) и обобщает его на область частот $\omega \lesssim k_z^* v_{Ti}$. Из этого соотношения видно, что в пределе $\omega' \ll k_z^* v_{Ti}$ колебания невозможны, происходит дебаевская экранировка поля в плазме. Это в свою очередь означает, что в области $\omega' \sim k_z^* v_{Ti}$ имеется точка поворота.

Рассматривая уравнение (3,9) в предельных случаях, в которых были найдены локальные спектры (3,3) — (3,5), получим аналогичные формулы, в которых под $k_z$ следует понимать $k_y S \xi_0$, где $\xi_0$ — точка в окрестности поверхности плазмы (определяется неравенством (3,8)). Таким образом, для этих колебаний условия существования и критерий неустойчивости плазмы качественно правильно описываются локальными спектрами. Заметим, что это, по существу, является следствием того обстоятельства, что такие колебания оказываются поверхностными, запертыми между точкой поворота и поверхностью неоднородного плазменного слоя.

Иное положение имеет место для четвертой ветви колебаний, описываемой формулой (3,6). Соотношение (3,9) для этой ветви колебаний принимает вид

$$\int d\xi \sqrt{\frac{T_e}{T_i\rho_i^2}} \left\{ \frac{\omega}{\frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i}\frac{\partial \ln T_i}{\partial x}} + \frac{k_y^2 S^2 \xi^2 v_s^2}{\omega^2} \right\}^{1/2} = \pi n. \qquad (3,11)$$

При наличии перекрещенности силовых линий магнитного поля эти колебания оказываются запертыми внутри плазмы между двумя точками поворота. Пренебрегая неоднородностью температуры ионов по сравнению с неоднородностью перекрещенности силовых линий магнитного поля, из соотношения (3,11) получаем [44]

$$\omega^2 = in\Omega_i \,|\, k_y S \,|\, \rho_i^2 \frac{T_e}{T_i} \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i} \frac{\partial \ln T_i}{\partial x}. \qquad (3,12)$$

Локальный спектр колебаний, определяемый формулой (3,6), качественно отличается от спектра (3,12). В этом как раз и проявляется указанное выше существенное влияние перекрещенности силовых линий магнитного поля на спектр колебаний неоднородной плазмы.

С ростом перекрещенности силовых линий магнитного поля, как видно из формулы (3,12), инкремент нарастания рассматриваемых колебаний растет. Однако из условия $\omega < \omega_{\text{др}}$ следует, что при

$$S \gtrsim \frac{T_i}{T_e} \frac{1}{L_0} \qquad (3,13)$$

такие колебания в плазме невозможны, или, иными словами, происходит их стабилизация перекрещенностью силовых линий магнитного поля. При $x \sim \rho_i \sqrt{T_e/T_i}$ неравенство (3,13) соответствует условию (3,8).

Следует заметить, что исследованные выше дрейфово-диссипативные колебания со спектрами (3,3) — (3,6) и (3,12) могут существовать как в бесстолкновительной плазме, так и в плазме с довольно большой частотой столкновений. В частности, они возможны в условиях, когда $\omega \lesssim \omega_{\text{др}} < \nu_e$. При этом, однако, необходимо, чтобы длина волны колебаний вдоль магнитного поля была меньше длины свободного пробега электронов в плазме, т. е. $k_z v_{Te} > \nu_e$. Что же касается столкновений ионов, то они должны быть достаточно редкими, чтобы соблюдалось условие $\omega_{\text{др}} \gtrsim \omega \gg \nu_i \sim \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$.

Заметим также, что использование модельного интеграла БГК приводит к выводу о стабилизирующем влиянии ион-ионных столкновений на рассмотренные колебания [22-25, 28]. Такой вывод, однако, как было показано выше, справедлив лишь в случае однородной температуры ионов. Кроме того, так как в модельном интеграле БГК не строго определены частоты столкновений частиц, то даже в тех случаях, когда он приводит к качественно правильным результатам, они являются количественно неточными.

б) Рассмотрим теперь длинноволновые колебания в области частот $\omega \gg \nu_e$, $k_z v_{Te}$ (а следовательно, $\omega \gg \nu_i$). Используя выражения (2,8), (2,11) и (2,12), из уравнения эйконала (3,1) в рассматриваемой области частот при условии $\omega \gg \omega_{\text{др}}$ получаем хорошо известный спектр гидродинамически неустойчивых желобковых ($k_z \approx 0$) колебаний в системах с положительной кривизной силовых линий удерживающего магнитного поля [13] *):

$$\omega^2 = \frac{k_y^2 g}{k_\perp^2 (1 + v_A^2/c^2)} \frac{\partial \ln N}{\partial x}. \tag{3,14}$$

Как было показано в работе [3], учет конечного ларморовского радиуса ионов в плазме без столкновений стабилизирует желобковую неустойчивость, если

$$k_\perp^2 \rho_i^2 \left(\frac{\partial \ln NT_i}{\partial x}\right)^2 > 4g \frac{\partial \ln N}{\partial x}. \tag{3,15}$$

В плазме со столкновениями при выполнении этого условия желобковая ветвь колебаний переходит в дрейфово-диссипативную с $k_z \approx 0$ [36]:

$$\begin{gathered}
\omega = -\frac{1}{1+v_A^2/c^2} \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i} \frac{\partial \ln NT_i}{\partial x}, \\
\gamma = \frac{\nu_{ii}}{40} \frac{k_\perp^2 \rho_i^2}{1+v_A^2/c^2} \frac{\partial \ln N}{\partial \ln NT_i} \left[ 28 \frac{v_A^2}{c^2} - \left(31 + 3\frac{v_A^2}{c^2}\right) \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \right].
\end{gathered} \tag{3,16}$$

Следовательно, при $\left(31 + 3\frac{v_A^2}{c^2}\right)\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < 28 \frac{v_A^2}{c^2}$ желобковые колебания остаются неустойчивыми даже при выполнении условия Розенблюта (3,15). При этом, однако, неустойчивость носит кинетический характер и раскачка колебаний обусловлена ион-ионными столкновениями. Этот вывод также показывает неполноту теории, использующей модельный интеграл БГК и согласно которой ионные столкновения всегда играют стабилизирующую роль [25]. Заметим, что такая неустойчивость возможна в системах как с положительной, так и отрицательной кривизной.

Рассмотренные колебания относительно легко стабилизируются перекрещенностью силовых линий магнитного поля. Действительно, если вспомнить, что такие колебания возможны лишь при $\omega \gg k_z v_{Te}$, и учесть преобразование (3,7), то условия стабилизации можно записать в виде

$$\theta = Sx > \sqrt{\left| \frac{g}{k_\perp^2 v_{Te}^2} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right|} \sim \sqrt{\frac{m}{M} \frac{L_0}{R}} \tag{3,17}$$

*) В литературе часто ветви колебаний с $k_z \neq 0$, возникающие благодаря наличию поля тяжести, называют «балонными» модами. Спектр (3,14) остается в силе и для колебаний с $k_z \neq 0$, если только

$$\frac{k_z}{k_\perp} < \sqrt{\frac{m}{M} \frac{g}{\Omega_i^2} \frac{\partial \ln N}{\partial x}}.$$

Отсюда, кстати, следует, что в системах с конечной длиной участка с положительной кривизной магнитных силовых линий $L_\parallel$ рассматриваемого типа высокочастотная балонная неустойчивость возможна, как это было показано в работе [12], только при условии

$$L_\parallel > L_0 \sqrt{\frac{M}{m} \frac{R}{L_0}}.$$

для желобковых колебаний со спектром (3,17) и

$$\theta = Sx > \sqrt{\frac{m}{M}\frac{T_i}{T_e}}\frac{\rho_i}{L_0} \qquad (3,18)$$

для дрейфово-диссипативных колебаний со спектром (3,18). При получении условия (3,18) мы учли также неравенство

$$\frac{k_z^2}{k_\perp^2} < \frac{m}{M}\frac{T_i}{T_e}\frac{\omega^2}{\Omega_i^2},$$

выполнение которого необходимо для справедливости спектра (3,16). Если эти неравенства не нарушаются для размеров, превышающих область локализации колебаний $x \gg \rho_i$, то рассматриваемые выше колебания будут стабилизированы.

Покажем теперь, что условие стабилизации (3,17) сохраняет силу также и при определении спектра колебаний с помощью правил квантования. Действительно, если учитывать, что $\omega \gg \omega_{\text{др}}$, правило квантования (3,2) приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$\int d\xi \left\{ -k_y^2 + k_y^2 \frac{g\dfrac{\partial \ln N}{\partial x} + \dfrac{M}{m} S^2\xi^2\Omega_i^2}{\omega^2 (1 + v_A^2/c^2)} \right\}^{1/2} = \pi n, \qquad (3,19)$$

где $\xi = x + k_z/k_y S$. Пренебрегая неоднородностью плотности по сравнению с неоднородностью перекрещенности силовых линий магнитного поля, из соотношения (3,19) получаем [20]

$$k_y^2 \left( 1 - \frac{g\dfrac{\partial \ln N}{\partial x}}{\omega^2 (1 + v_A^2/c^2)} \right) + 2n \sqrt{\frac{M}{m}\frac{\Omega_i^2}{\omega^2}\frac{k_y^2 S^2}{1 + v_A^2/c^2}} = 0. \qquad (3,20)$$

Видим, что рассматриваемые желобковые колебания стабилизируются перекрещенностью силовых линий магнитного поля при условии

$$S > \sqrt{\frac{m}{M}\frac{k_y^2}{\Omega_i^2}\left| g\frac{\partial \ln N}{\partial x} \right|} \sim \frac{k_y \rho_i}{L_0}\sqrt{\frac{m}{M}\frac{L_0}{R}}. \qquad (3,21)$$

При $x \sim 1/k_y \gg \rho_i$ это условие совпадает с (3,17).

Как уже отмечалось выше, для справедливости локального спектра (3,16) наряду с условием (3,15) необходимо также выполнение неравенства

$$\frac{k_z^2}{k_\perp^2} < \frac{m}{M}\frac{T_i}{T_e}\frac{\omega^2}{\Omega_i^2}.$$

В обратном пределе локальный спектр дрейфово-диссипативных колебаний определяется выражениями (при $c^2 \gg v_A^2$)

$$\omega = -\frac{k_y v_s^2}{\Omega_i}\frac{\partial \ln NT_e}{\partial x}, \qquad \gamma = \nu_{\text{эфф}} \frac{\partial \ln T_e^{3/2}}{\partial \ln NT_e}. \qquad (3,22)$$

В отличие от колебаний со спектром (3,16) эти колебания являются неустойчивыми при наличии градиента температуры, а именно когда $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 0$ либо $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < -1$, причем за раскачку колебаний ответственны столкновения электронов с ионами. При наличии перекрещенности силовых линий магнитного поля эти колебания относительно легко стабилизируются вследствие нарушения неравенства $\omega > k_z v_{Te}$. Для стабилизации колебаний необходимо, чтобы в области неоднородности плазмы для размеров $x \sim 1/k_\perp \gg \rho_i$ не нарушалось условие

$$\theta = Sx > \sqrt{\frac{m}{M}\frac{T_e}{T_i}}\frac{\rho_i}{L_0}. \tag{3,23}$$

Наконец, в области частот $\omega \ll \omega_{\text{др}}$ при выполнении неравенства (3,15) существуют еще две ветви апериодически (гидродинамически) неустойчивых дрейфовых колебаний с локальными спектрами *) [15] (при $c^2 \gg v_A^2$)

$$\omega^2 = -\frac{k_z^2}{k_\perp^2}\frac{M}{m}\frac{T_e}{T_i}\Omega_i^2\frac{\partial \ln NT_e}{\partial \ln NT_i}, \tag{3,24}$$

$$\omega^3 = \frac{k_z^2}{k_\perp^2}\frac{M}{m}\frac{T_e}{T_i}\Omega_i^2\frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i}\frac{\partial \ln N}{\partial x}. \tag{3,25}$$

Первая из этих ветвей колебаний возможна в плазме с произвольным отношением $T_e/T_i$, а вторая — лишь в неизотермической плазме, в которой $T_e \gg T_i$. Полученные спектры вообще не зависят от диссипативных процессов в плазме, и поэтому вполне естественно, что они правильно описываются любой теорией, не учитывающей столкновения частиц. Эти колебания легко стабилизируются перекрещенностью силовых линий магнитного поля; для этого достаточно выполнения одного из условий (3,18) или (3,23) во всей области неоднородности плазмы.

Выпишем теперь дисперсионное уравнение, получаемое с помощью правила квантования, для колебаний, описываемых локальными спектрами (3,16), (3,22), (3,24) и (3,25). Ограничиваясь для простоты рассмотрением лишь спектра частот $\omega$, перенебрежем в уравнении эйконала (3,1) малыми диссипативными членами и для учета перекрещенности силовых линий магнитного поля произведем замену $\xi = x + k_z/k_y S$. В результате из уравнения эйконала (3,1) при использовании правила квантования (3,2) получаем искомое дисперсионное уравнение

$$\int d\xi \left\{ -k_y^2 + \frac{k_y^2 S^2 \xi^2}{\omega^2} \frac{\omega_{Le}^2\left(1+\frac{k_y v_s^2}{\omega\Omega_i}\frac{\partial \ln NT_e}{\partial x}\right)}{1+\frac{c^2}{v_A^2}\left(1-\frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega\Omega_i}\frac{\partial \ln NT_i}{\partial x}\right)} \right\}^{1/2} = \pi n. \tag{3,26}$$

Учет диссипативных членов приводит к инкременту нарастания колебаний, который в соответствующих пределах переходит в выражения (3,16) и (3,22), усредненные по области прозрачности плазмы (в пределе, соответствующем спектрам (3,24) и (3,25), колебания являются апериодически неустойчивыми и в учете диссипативных членов нет необходимости). Условия раскачки колебаний и их стабилизации перекрещенностью силовых линий магнитного поля при этом оказываются такими же, как и для соответствующих локальных колебаний.

Рассмотренные в этом пункте неустойчивые дрейфовые колебания при $\omega \gg \nu_e$, $k_z v_{Te}$, за исключением гидродинамических желобковых колебаний со спектром (3,14), возможны лишь в условиях, когда дрейфовые частоты частиц больше частот столкновений, $\omega_{\text{др}} \gg \nu_e$. Кроме того, условие $\omega \gg k_z v_{Te}$ приводит к тому, что они могут возбуждаться только в достаточно длинных установках, в которых продольный размер плазмы больше

*) При $T_e = T_i$ спектр (3,24) переходит в полученный ранее в работе [4].

поперечного по крайней мере в $\sqrt{M/m}$ раз, и легко стабилизируются слабой перекрещенностью силовых линий магнитного поля. Однако в тех случаях, когда такие неустойчивости возможны, они более опасны, чем рассмотренные в предыдущем пункте при $\omega \lesssim \omega_{\text{др}} \ll k_z v_{Te}$, так как возмущения плотности в них охватывают, вообще говоря, большую область плазмы в продольном направлении. Что же касается желобковой неустойчивости со спектром (3,14), то инкремент ее развития больше дрейфовых частот, а поэтому она может развиваться и при $\omega_{\text{др}} \ll \nu_e$. Более того, ниже будет показано, что гидродинамическая желобковая неустойчивость развивается в системах с положительной кривизной силовых линий магнитного поля не только при $\omega > \nu_e$, но также и при $\omega < \nu_e$.

в) Перейдем теперь к исследованию длинноволновых колебаний в области частот $\nu_e \gg \omega,\ k_z v_{Te}$; $\omega \gg \nu_i,\ k_z v_{Ti}$. Дрейфовые колебания в этой области частот интересны тем, что они могут возбуждаться также и в относительно плотной и низкотемпературной плазме, в которой $\omega_{\text{др}} \ll \nu_e$. Подставляя выражения (2,9) (или (2,10), (2,11) и (2,12)) в уравнение эйконала (3,1), видим, что диссипативный ионный член в этой области частот всегда мал. Электронный же диссипативный член в пределе $\omega\nu_e \gg k_z^2 v_{Te}^2$ (когда диффузией и теплопроводностью электронов в процессе колебаний можно пренебречь) мал лишь при условии $\omega \gg \omega_s$, где

$$\omega_s = \frac{k_z^2}{k_\perp^2}\frac{M}{m}\frac{\Omega_i^2}{\nu_{\text{эфф}}}.$$

В этих условиях уравнение эйконала (3,1) приводит к известной желобковой неустойчивости (при $k_z = 0$) со спектром (3,14) *). Так же как и в рассмотренном выше случае ($\omega \gg \nu_{\text{эфф}}$), при выполнении неравенства (3,15) желобковая ветвь колебаний переходит в дрейфово-диссипативную с $k_z = 0$, спектр которой определяется выражениями (3,16). В рассматриваемом случае, однако, иной вид имеют условия стабилизации таких колебаний перекрещенностью силовых линий магнитного поля. Именно, желобковые колебания со спектром (3,14) стабилизируются при условии

$$\theta = Sx \gtrsim \sqrt{\frac{m}{M}\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\Omega_i}\frac{\rho_i}{\sqrt{L_0 R}}}, \tag{3,27}$$

в то время как для стабилизации дрейфово-диссипативных колебаний со спектром (3,16) необходимо, чтобы

$$\theta = Sx > \sqrt{\frac{m}{M}\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\Omega_i}\frac{\rho_i}{L_0}}. \tag{3,28}$$

Если эти неравенства не нарушаются для размеров $x \gtrsim \rho_i$, то указанные колебания в плазме невозможны, или, иными словами, соответствующие неустойчивости плазмы стабилизируются.

*) Этот спектр сохраняется и при $k_z \neq 0$, но

$$\frac{k_z^2}{k_\perp^2} < \frac{m}{M}\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\Omega_i^2}\left| g\frac{\partial \ln N}{\partial x}\right|^{1/2}.$$

Отсюда, в частности, имеем, что в системах с длиной

$$L_\parallel < L_0\left(\frac{M}{m}\frac{\Omega_i^2}{\nu_{\text{эфф}}}\sqrt{\frac{RL_0}{v_{Ti}^2}}\right)^{1/2}$$

подобная неустойчивость, которая также может быть названа балонной, невозможна.

При выполнении неравенства (3,28) нарушается условие $\omega > \omega_s$. В этом случае диссипативные члены в уравнении эйконала (3,1), обусловленные столкновениями электронов, становятся сравнимыми с недиссипативными действительными членами. В результате в области частот, бо́льших, чем дрейфовые частоты частиц, появляется диссипативная ветвь колебаний, определяемая конечной проводимостью плазмы [17, 20]. Уравнение эйконала (3,1) для таких колебаний при наличии слабой перекрещенности силовых линий магнитного поля записывается в виде *)

$$\left(1+\frac{v_A^2}{c^2}\right)\frac{\eta}{4\pi}k_\perp^2\omega^2+i\omega k_z^{*}v_A^2-\frac{\eta}{4\pi}k_y^2 g\frac{\partial \ln N}{\partial x}=0, \tag{3,29}$$

где $\eta=c^2\sigma$, а $\sigma=1{,}96\omega_{ie}^2/4\pi\nu_{\text{эфф}}$ — проводимость плазмы. Производя замену $\xi=x+k_z/k_yS$ и используя правило квантования (3,2), получаем дисперсионное уравнение колебаний

$$\int d\xi\left\{-k_y^2-\frac{4\pi}{\eta\omega^2}\frac{k_y^2}{1+v_A^2/c^2}\left(\frac{\eta}{4\pi}g\frac{\partial \ln N}{\partial x}-i\omega\xi^2S^2v_A^2\right)\right\}^{1/2}=\pi n. \tag{3,30}$$

Пренебрегая неоднородностью плотности плазмы по сравнению с неоднородностью перекрещенности силовых линий магнитного поля в области прозрачности, отсюда имеем

$$k_y^2\left(1-\frac{g\dfrac{\partial \ln N}{\partial x}}{\omega^2(1+v_A^2/c^2)}\right)+2n\sqrt{\frac{k_y^2S^2 4\pi v_A^2}{-i\omega\eta\,(1+v_A^2/c^2)}}=0. \tag{3,31}$$

В случае слабой перекрещенности силовых линий магнитного поля, $S\to 0$, когда вторым членом в левой части соотношения (3,31) можно пренебречь, оно описывает обычные желобковые колебания (см. (3,14)). В обратном же пределе $\left(\text{при } \omega^2 \ll g\dfrac{\partial \ln N}{\partial x}\right)$ получаем спектр неустойчивой диссипативной ветви колебаний [17, 20]

$$\gamma=-i\omega=\left\{\frac{\eta k_y^2 g^2}{(4\pi)^2 n^2S^2v_A^2\,(1+v_A^2/c^2)}\left(\frac{\partial \ln N}{\partial x}\right)^2\right\}^{1/3}. \tag{3,32}$$

Не следует думать, что рассмотренная диссипативная ветвь колебаний существует лишь в случае достаточно большой перекрещенности силовых линий магнитного поля. С уменьшением перекрещенности силовых линий эта неустойчивость сохраняется. При этом, однако, изменяется ее инкремент. Дело в том, что область локализации колебаний со спектром (3,32) с уменьшением перекрещенности силовых линий магнитного поля растет как $S^{-4/3}$ и может стать больше размеров неоднородного плазменного слоя. В этом случае область прозрачности плазмы определяется поверхностями этого слоя и инкремент неустойчивости плазмы можно находить непосредственно из уравнения эйконала (3,29) в виде локального спектра. Имеем [20] **)

$$\omega=-i\frac{\eta}{4\pi}\frac{k_y^2}{k_z^2}\frac{g}{v_A^2}\frac{\partial \ln N}{\partial x}. \tag{3,33}$$

Отсюда, кстати, видно, что рассматриваемая диссипативная неустойчивость может развиваться лишь в системах с положительной кривизной силовых линий магнитного поля; в системах с минимумом **B** она отсутствует.

*) Такое уравнение получается также в модели одножидкостной гидродинамики [20] при условии $c \gg v_A^2$ и $k_\perp^2 \gg k_z^{*2}$.

**) Заметим, что диссипативные ветви колебаний (3,32) и (3,33) часто также называют диссипативными балонными модами.

Локальный спектр (3,33) качественно отличается от спектра колебаний (3,32). В этом примере проявляется указанное выше качественное влияние перекрещенности силовых линий магнитного поля на спектр колебаний плазмы.

Наконец, отметим, что при достаточно большой перекрещенности силовых линий магнитного поля возможна стабилизация рассмотренной диссипативной неустойчивости плазмы, обусловленная сужением области локализации неустойчивых колебаний до размеров порядка ларморовского радиуса ионов. Для этого необходимо, чтобы

$$\theta = Sx \geqslant \sqrt{\frac{m}{M}\frac{\rho_i}{L_0}\sqrt{\frac{L_0}{R}}}\,. \tag{3,34}$$

Диссипативная ветвь колебаний, так же как и желобковая, обусловлена кривизной силовых линий удерживающего магнитного поля и при выполнении условия Розенблюта (3,15) отсутствует. Точнее, в этом случае частота желобковых колебаний (3,14) становится меньше дрейфовых частот и полученные выше формулы для спектров желобковой и диссипативной неустойчивостей плазмы уже неприменимы. Выше мы убедились, что желобковая ветвь колебаний ($\omega \gg \omega_s$) при выполнении условия (3,15) переходит в дрейфовую со спектром (3,16).

Проследим теперь переход диссипативной ветви ($\omega \ll \omega_s$) в дрейфово-диссипативную с ростом поперечного волнового числа $k_\perp$, когда выполняется неравенство (3,15). Из уравнения эйконала (3,1) в области частот $\omega \lessgtr \omega_s$, $\omega \lessgtr \omega_{\text{др}}$ и $\omega^2 \ll \frac{k_z^2}{k_\perp^2}\sigma\omega_{\text{др}}$ находим следующие три локальных спектра [16, 19, 36]:

$$\omega_1 = -\frac{k_y v_s^2}{\Omega_i}\frac{\partial \ln NT_e^{1,71}}{\partial x}\,,$$

$$\gamma_1 = \frac{\omega_1^2}{1{,}96\omega_s}\left\{1 + \frac{v_A^2}{c^2} + \frac{T_i}{T_s}\frac{\partial \ln NT_i}{\partial \ln NT_e^{1,71}}\left[1 - \frac{k_z^2}{k^2}\frac{\Omega_i^2}{\omega_1^2}\left(1 + \frac{T_e}{T_i}\frac{\partial \ln NT_e}{\partial \ln NT_i}\right)\right]\right\}, \tag{3,35}$$

справедливый при $\omega_1^2 \ll \omega_s^2$,

$$\omega_2 = i\cdot 1{,}96\omega_s\frac{T_e}{T_i}\frac{\partial \ln NT_e^{1,71}}{\partial \ln NT_i}\,, \tag{3,36}$$

справедливый при $\omega_2 \sim \omega_s \ll \omega_{\text{др}}$, и, наконец,

$$\omega_3 = \frac{i}{1{,}96}\frac{m}{M}\frac{T_i}{T_e}\nu_{\text{эфф}}\frac{\partial \ln NT_i}{\partial \ln NT_e^{1,71}}\,, \tag{3,37}$$

справедливый при $\frac{k_z^2}{k_\perp^2}\Omega_i^2 \gg \omega_3^2 \ll \omega_{\text{др}}^2$.

Колебания во второй и третьей ветвях практически всегда неустойчивы, в то время как в первой ветви они неустойчивы лишь при $\omega_1^2 \sim \omega_{\text{др}}^2 \gg \frac{k_z^2}{k_\perp^2}\Omega_i^2$. Из условия применимости формулы (3,36) следует, что последнее неравенство должно выполняться также и для второй ветви колебаний. Третья же неустойчивая ветвь колебаний справедлива при выполнении обратного неравенства. Однако из условия $\omega \gg \nu_i$ следует, что такие колебания возможны лишь в неизотермической плазме с горячими ионами, когда

$$\frac{T_i}{T_e} \gg \left(\frac{M}{m}\right)^{2/5}.$$

Следует заметить, что спектры дрейфово-диссипативных колебаний (3,35) и (3,36) в пределе $\omega^2 \gg \frac{k_z^2}{k_\perp^2}\Omega_i^2$ (что эквивалентно пренебрежению продольным движением ионов) совпадают с полученными в работах [16, 19] при условии $\omega\nu_e \gg k_z^2 v_{Te}^2$, т. е. при слабой электронной теплопроводности *). Что же касается спектра (3,37), то он полностью обусловлен продольным движением ионов и в рамках приближенного метода, предложенного в этих работах, получен быть не мог.

При наличии перекрещенности силовых линий магнитного поля рассмотренные колебания будут полностью стабилизированы в условиях, когда соблюдено неравенство (3,8) в области неоднородности плазмы для размеров порядка длины локализации колебаний, которая может сравниться с гироскопическим радиусом ионов.

Наконец, выпишем «правило квантования» для колебаний, соответствующих локальным спектрам (3,35) — (3,37). Определяя из уравнения эйконала (3,1) комплексную функцию $k_x(\omega, x)$ и подставляя в соотношение (3,2), получаем

$$\int d\xi \left\{ -k_y^2 - \left[1 + \frac{c^2}{v_A^2}\left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega\Omega_i}\frac{\partial \ln NT_i}{\partial x}\right)\right]^{-1} \times \right.$$
$$\times\left[ i\cdot 1{,}96\frac{\omega_{Le}^2 k_y^2 S^2\xi^2}{\omega\nu_{\text{эфф}}}\left(1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\partial \ln NT_e^{1,71}}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{\omega_{Li}^2 k_y^2 S^2\xi^2}{\omega^2}\frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega\Omega_i}\frac{\partial \ln NT_i}{\partial x}\left(1 + \frac{T_e}{T_i}\frac{\partial \ln NT_e}{\partial \ln NT_i}\right)\right]\right\}^{1/2} = \pi n. \qquad (3,38)$$

Отсюда легко показать, что спектр частот, условия раскачки и стабилизации перекрещенностью силовых линий магнитного поля для рассматриваемых колебаний правильно описываются локальными формулами (3,35) — (3,37).

г) В заключение рассмотрим длинноволновые дрейфовые колебания неоднородной плазмы в области частот $\nu_e \gg \omega$, $k_z v_{Te}$; $\omega \gg \nu_i$, $k_z v_{Ti}$ и при условии $\omega\nu_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$. Электронный вклад в диэлектрическую проницаемость плазмы в этом случае определяется выражением (2,10), которое подобно (2,7), хотя и принципиально отличается от него. Дело в том, что в выражении (2,7) диссипативное слагаемое обусловлено бесстолкновительным черенковским поглощением волн электронами плазмы, в то время как в формуле (2,10) диссипативный член связан со столкновениями частиц, а именно с диффузией и теплопроводностью электронов. В результате спектры частот дрейфовых колебаний плазмы в рассматриваемой области оказываются совпадающими со спектрами (3,3) — (3,6). Изменяются лишь выражения для инкрементов нарастания $\gamma_1$ и $\gamma_2$, определяющиеся диссипативными процессами в плазме [41]:

$$\gamma_1 = 1{,}44\frac{\omega_1^2\nu_{\text{эфф}}}{k_z^2 v_{Te}^2}\left\{k^2 r_{De}^2 + \frac{k_\perp^2 v_s^2}{\Omega_i^2}\left(1 + \frac{T_i}{T_e}\frac{\partial \ln NT_i}{\partial \ln N}\right) - \frac{\partial \ln T_e^{0,56}}{\partial \ln N} - \frac{g}{v_s^2 \frac{\partial \ln N}{\partial x}}\right\} -$$
$$- \frac{7}{10}\nu_{ii}k_\perp^4\rho_i^4\left(1 + \frac{T_e}{T_i} - \frac{3}{28}\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}\right), \qquad (3,39)$$
$$\gamma_2 = -1{,}44\frac{\omega_2^2\nu_{\text{эфф}}}{k_z^2 v_{Te}^2}\left(1 - \frac{\partial \ln T_e^{0,56}}{\partial \ln N} - \frac{g}{v_s^2\frac{\partial \ln N}{\partial x}}\right) - \frac{8}{5}\nu_{ii}\frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega_2^2}.$$

Это приводит к изменению роли диссипации на электронах в раскачке оклебаний. Видно, что для первой ветви колебаний столкновения

*) Отметим, что в этих работах имеются досадные неточности, только после исправления которых можно получить формулы (3,35) и (3,36).

электронов играют дестабилизирующую роль при

$$\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 1{,}8\left[k^2 r_{Dc}^2 + \frac{k_\perp^2 v_s^2}{\Omega_i^2}\left(1 + \frac{T_i}{T_e}\frac{\partial \ln NT_i}{\partial \ln N}\right)\right],$$

а для второй — при $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 1{,}8$. В остальном весь проведенный выше анализ, касающийся влияния кривизны силовых линий удерживающего поля на спектр колебаний плазмы (см. анализ формул (3,3) — (3,6) и (3,9) — (3,12)), сохраняет силу и в рассматриваемой области.

Несмотря на аналогию со спектрами (3,3) — (3,6), колебания в рассматриваемой области являются более опасными (даже для термоядерной плазмы). Действительно, из условия $\nu_{\text{эфф}} \gg k_z v_{Te}$ следует, что продольная длина волны рассматриваемых колебаний больше длины свободного пробега электронов, в то время как для колебаний, исследованных в пункте а), должно выполняться обратное неравенство (так как для них $k_z v_{Te} \gg \gg \nu_{\text{эфф}}$). Это в свою очередь означает, что рассматриваемые колебания могут приводить к более крупномасштабным (а следовательно, и более опасным) неустойчивостям плазмы. Следует, однако, заметить, что такие колебания легче стабилизируются перекрещенностью силовых линий магнитного поля, а именно, для их стабилизации достаточно выполнения неравенства

$$\theta > \min\left(\frac{\rho_i}{L_0}, \frac{L_0}{v_{Te}}\nu_{\text{эфф}}\right), \tag{3,40}$$

которое, вообще говоря, слабее неравенства (3,8).

Наконец, отметим, что спектры рассматриваемых колебаний не могут быть получены из общих формул, приведенных в работе [16]. Легко показать, что переход в этих формулах к пределу $\omega\nu_{\text{эфф}} \ll k_z^2 v^2{}_{Te}$ приводит к неточным результатам. Это обстоятельство указывает на ограниченность области применимости использованного в [16] квазигидродинамического метода рассмотрения и является следствием отмеченного выше пренебрежения продольным движением ионов.

## § 4. КОРОТКОВОЛНОВЫЕ НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ДРЕЙФОВО-ДИССИПАТИВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЫ

В этом параграфе речь пойдет о низкочастотных ($\omega \ll \Omega_i$) дрейфовых колебаниях с поперечной длиной волны, значительно меньшей гироскопического радиуса ионов (но в то же время большей электронного гирорадиуса). Именно в этом смысле мы употребляем термин «коротковолновые колебания». С первого взгляда кажется, что коротковолновые дрейфовые неустойчивости не являются столь опасными для магнитного удержания плазмы, как длинноволновые, так как они приводят лишь к очень мелкомасштабным возмущениям плотности, а не к развалу плазмы как целого. Однако следует иметь в виду, что такие колебания могут быть локализованы в очень узких областях вблизи поверхности плазмы с размерами меньше гироскопического радиуса ионов, и именно поэтому их практически невозможно застабилизировать перекрещенностью силовых линий магнитного поля. В этом смысле коротковолновые дрейфовые колебания являются весьма опасными. Отметим, что теория таких колебаний всегда является кинетической. Наконец, благодаря тому, что в интересующей нас и соответствующей эксперименту ситуации характерный размер неоднородности плазмы значительно превышает гироскопический радиус ионов, для выявления условий, в которых происходит возбуждение коротковолновых колебаний, оказывается достаточным проанализировать локальные спектры. Так же, как и в предыдущем разделе, анализ коротковолновых дрейфовых колебаний мы проведем для различных областей частот и продольных волн.

а) В области частот $\omega$, $\nu_e \ll k_z v_{Te}$ коротковолновые колебания $\left(\rho_e < \frac{1}{k_\perp} \ll \rho_i\right)$ возможны лишь при условии $\omega \gg \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$, причем их частоты значительно меньше дрейфовых частот частиц. Учитывая малость диссипативных членов по сравнению с недиссипативными, из уравнения эйконала (3,1) в рассматриваемой области частот находим следующий спектр коротковолновых колебаний плазмы:

$$\omega = -\frac{T_e}{T_e + T_i(1 + k^2 r_{De}^2)} \frac{k_y v_{Ti}}{\sqrt{2\pi} k_\perp} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}},$$

$$\gamma = \frac{T_i^2}{[T_e + T_i(1 + k^2 r_{De}^2)]^2} \frac{k_y^2 v_{Ti}^3}{2|k_z| k_\perp v_{Te} \Omega_i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}}\right) \times$$
$$\times \left(1 - \frac{g}{v_s^2 \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}}}\right) - \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2 \frac{3(\pi+1)}{4\sqrt{2}} \frac{\partial \ln N T_i^{-0,69}}{\partial \ln N T_i^{-0,5}}. \quad (4,1)$$

Полученное выражение для инкремента показывает, что черенковский эффект на электронах, так же как и в плазме без столкновений (см. [1, 8]), практически всегда ведет к раскачке колебаний; ион-ионные же столкновения оказывают стабилизирующее влияние, за исключением области, где $2 > \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} > 1{,}45$, в которой они, напротив, ведут к раскачке колебаний и тем самым расширяют области неустойчивости плазмы [36]. Характерна роль кривизны силовых линий удерживающего магнитного поля: при $\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < 2$ в системах с положительной кривизной она играет дестабилизирующую роль, а при $\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} > 2$ стабилизирует колебания; в системах с отрицательной кривизной (системы с минимумом **B**) кривизна силовых линий оказывает обратное воздействие. Следует отметить, что влияние кривизны силовых линий может стать значительным лишь в плазме с горячими ионами, когда $T_i/T_e \gtrsim R/L_0 \gg 1$. Но в этом случае, как уже отмечалось выше, введение эффективного поля тяжести уже не справедливо и можно говорить лишь о слабом влиянии кривизны силовых линий на характер колебаний плазмы.

Локальный спектр (4,1) сохраняется также при наличии перекрещенности силовых линий магнитного поля. Перекрещенность силовых линий поля лишь сужает область локализации колебаний, а при условии

$$\theta = Sx > \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_\perp \rho_i} \frac{\rho_i}{L_0} \quad (4,2)$$

полностью стабилизирует колебания. Такая стабилизация, однако, в реальных условиях весьма затруднительна, так как область локализации колебаний может быть порядка или даже меньше гироскопического радиуса ионов *) и необходимо, чтобы неравенство (4,2) не нарушалось для таких размеров.

*) Действительно, например, для длин волн много больше дебаевского радиуса электронов правило квантования, соответствующее частоте колебаний (4,1), имеет вид

$$\int dx \left\{-1 + \left(\frac{T_e}{T_e + T_i} \frac{v_{Ti}}{\sqrt{2\pi}\omega} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}}\right)^2\right\}^{1/2} = \frac{\pi n}{|k_y|}.$$

Очевидно, что при $n \sim k_y \rho_i \gg 1$ область локализации колебаний оказывается порядка гироскопического радиуса ионов. Также возможны колебания и с большей областью локализации. Для них легче определить условия, в которых перекрещенность силовых линий может оказаться существенной.

б) Спектр (4,1) с небольшим изменением сохраняется в области $\nu_e \gg \omega,\ k_z v_{Te}$ при условии $\omega,\ \nu_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$. Изменение касается инкремента нарастания колебаний $\gamma$ и обусловлено изменением диссипативного вклада в $\delta\varepsilon_e$, который в рассматриваемой области определяется выражением (2,10) вместо (2,7). Учитывая это обстоятельство, находим [41] (см. также [46])

$$\gamma = \frac{\sqrt{2\pi}\cdot 1{,}44 k_y^2 v_{Ti}^3 T_e^2 \nu_{\text{эфф}}}{(T_e + T_i(1+k^2 r_{Di}^2)]^2 k_z^2 v_{Te}^2} \frac{1}{k_\perp \Omega_i} \left(\frac{\partial \ln N T_e^{-0,56}}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \ln N T_i^{-0,5}}{\partial x}\right) \times$$
$$\times \left(1 - g/v_s^2 \frac{\partial \ln N T_i^{-0,5}}{\partial x}\right) - \frac{3(\pi+1)}{2\sqrt{2}} \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2 \frac{\partial \ln N T_i^{-0,69}}{\partial \ln N T_i^{-0,5}}. \qquad (4,3)$$

Проведенный выше анализ условий раскачки колебаний и стабилизации перекрещенностью силовых линий магнитного поля (4,2) при этом остается без изменений.

в) Рассмотрим теперь коротковолновые колебания в области частот $\omega \gg \nu_e,\ k_z v_{Te}$. Уравнение эйконала (3,1) при подстановке в него выражений (2,8), (2,11) и (2,13) (либо (2,15)) приводит к следующим соотношениям для локальных спектров таких колебаний [36]:

$$\omega = \frac{1}{1+k^2 r_{Di}^2} \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i} \frac{\partial \ln N}{\partial x},$$
$$\gamma = -\nu_{\text{эфф}} \frac{T_i}{T_e} \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \left(\frac{1}{1+k^2 r_{Di}^2} + \frac{T_e}{T_i} \frac{\partial \ln N T_e^{-0,5}}{\partial \ln N}\right) + \gamma_i, \qquad (4,4)$$

где

$$\gamma_i = \begin{cases} -\nu_{ii} k_\perp \rho_i \dfrac{3(3\pi+2)}{32\sqrt{\pi}} \left[\dfrac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} - \dfrac{1{,}45 k^2 r_{Di}^2}{1+k^2 r_{Di}^2} + \dfrac{1{,}45 g (1+k^2 r_{Di}^2)}{v_{Ti}^2 \dfrac{\partial \ln N}{\partial x}}\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } \omega > \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2, \quad (4,5а) \\ -\dfrac{2C_0 C_1 \omega^2}{3\pi \nu_{ii} k_\perp^3 \rho_i^3} \left[\dfrac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} - \dfrac{4{,}45 k^2 r_{Di}^2}{1+k^2 r_{Di}^2} + \dfrac{4{,}45 g (1+k^2 r_{Di}^2)}{v_{Ti}^2 \dfrac{\partial \ln N}{\partial x}}\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } \omega \ll \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2. \quad (4,5б) \end{cases}$$

Из этих формул видно, что столкновения электронов с ионами при условии

$$\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 2\left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)$$

способствуют раскачке колебаний; столкновения же ионов с ионами могут привести к раскачке, если только

$$\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < 4{,}45 k^2 r_{Di}^2.$$

Влияние кривизны силовых линий магнитного поля на рассматриваемые колебания практически всегда пренебрежимо мало, за исключением случая неизотермической плазмы, в которой

$$\frac{T_e}{T_i} \gg \frac{R}{L_0} \frac{k^2 r_{Di}^2}{(1+k^2 r_{Di}^2)^2}.$$

При этом с системах с положительной кривизной она играет дестабилизирующую роль, в то время как в системах с минимумом **B** может привести к стабилизации неустойчивых колебаний (если только $k^2 r_{Di}^2 \ll 1$).

Наконец, отметим, что рассмотренные коротковолновые колебания стабилизируются относительно небольшой перекрещенностью силовых линий магнитного поля, определяемой неравенством (3,18). Реальная трудность стабилизации неустойчивости, однако, так же как и выше, состоит в том, что это неравенство не должно нарушаться для размеров порядка области локализации колебаний, которая может быть сравнимой с гироскопическим радиусом ионов и даже меньше.

г) В заключение рассмотрим коротковолновые колебания в области частот $\nu_e \gg \omega$, $k_z v_{Te}$ при условии $\omega\nu_e \gg k_z^2 v_{Te}^2$. Подставляя выражения (2,9), (2,11) и (2,13) (либо (2,15)) в уравнение эйконала (3,1), можно показать, что спектр частот таких колебаний совпадает со спектром (4,4), а инкремент нарастания определяется формулой [36]

$$\gamma = -1{,}96\frac{T_i}{T_e}\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\nu_{\text{эфф}}}\left\{\frac{1}{1+k^2 r_{Di}^2}+\frac{T_e}{T_i}\left(1+\frac{\partial \ln T_e^{1,71}}{\partial \ln N}\right)\right\}+\gamma_i, \tag{4,6}$$

где $\gamma_i$ дается формулами (4,5). Спектр (4,6) является продолжением спектра (4,4) из области частот $\omega > \nu_{\text{эфф}}$ в область частот $\omega < \nu_{\text{эфф}}$. Это обстоятельство приводит к тому, что видоизменяется условие стабилизации колебаний перекрещенностью силовых линий магнитного поля, которое для рассматриваемых колебаний записывается в виде

$$\theta = Sx > \sqrt{\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\Omega_e}} \tag{4,7}$$

и обусловлено нарушением неравенства $\omega\nu_{\text{эфф}} > k_z^2 v_{Te}^2$ в системах с достаточно большой перекрещенностью силовых линий. Заметим, что выполнение этого условия, вообще говоря, необходимо лишь для колебаний в области частот $\omega \ll \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$. Колебания в области частот $\omega \gg \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$ можно застабилизировать перекрещенностью силовых линий магнитного поля, определяемой неравенством (3,8). В реальных условиях, однако, это неравенство часто труднее выполнить, чем неравенство (4,7). Роль столкновений ионов для рассматриваемых колебаний такая же, как для колебаний, описываемых формулами (4,4); столкновения же электронов, напротив, всегда играют стабилизирующую роль.

Весь проведенный в настоящем параграфе анализ коротковолновых дрейфово-диссипативных колебаний неоднородной плазмы показывает, что условия их неустойчивости существенным образом определяются характером неоднородности температур частиц плазмы (в особенности температур ионов). Именно поэтому для описания таких колебаний неприменим модельный интеграл столкновений БГК, не позволяющий учитывать неоднородность температуры плазмы. Проведенный в работе [22] анализ низкочастотных коротковолновых колебаний с помощью такого модельного интеграла столкновений является, к сожалению, как количественно, так и качественно неточным.

## § 5. ДРЕЙФОВО-ЦИКЛОТРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Перейдем теперь к исследованию дрейфовых колебаний в области частот ионного циклотронного резонанса $\omega \sim \omega_{\text{др}} \gtrsim s\Omega_i$. Сразу же отметим, что анализ ионно-циклотронных колебаний, так же как и коротковолновых дрейфовых колебаний, с помощью модельного интеграла столкновений БГК, как это сделано в работе [23], приводит к качественно неправильным выводам.

Поэтому полученные ниже результаты мы не будем сравнивать с результатами этой работы. В условиях, когда характерный размер неоднородности плазмы значительно больше гироскопического радиуса ионов, дрейфово-циклотронные колебания являются коротковолновыми ($k_\perp \rho_i \gg 1$). При исследовании таких колебаний, как уже отмечалось выше, можно ограничиться анализом локальных спектров. Такое приближение в рассматриваемом случае не только качественно, но и количественно достаточно хорошо описывает спектры колебаний неоднородной плазмы.

Имея в виду плазму низкого давления, в которой

$$\beta = \frac{8\pi P_0}{B_0^2} \ll 1,$$

мы здесь ограничимся анализом лишь продольных колебаний *).

а) В условиях, когда $|\omega + i\nu_e| \ll k_z v_{Te}$ (т. е. когда продольная длина волны колебаний мала как по сравнению с длиной пробега электрона, так и по сравнению с расстоянием, проходимым электроном за период колебаний поля), дрейфово-циклотронные колебания оказываются возможными лишь в области частот $|\omega - s\Omega_i| \gg \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2,\ k_z v_{Ti}$, т. е. вдали от линии резонансного циклотронного поглощения волн в плазме. Пренебрегая гравитационным дрейфом ионов (можно показать, что эффекты *кривизны магнитных силовых линий в области циклотронных частот* всегда пренебрежимо малы) и учитывая малость диссипативных слагаемых, из уравнения эйконала (3,1) находим следующий локальный спектр дрейфово-циклотронных колебаний плазмы ($\Delta = \omega - s\Omega_i$) в рассматриваемой области частот:

$$\operatorname{Re}\Delta = \frac{T_e}{T_e + T_i(1 + k^2 r_{De}^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_\perp \rho_i} \left( s\Omega_i - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}} \right), \quad (5,1)$$

$$\gamma = \operatorname{Im}\Delta = -\frac{T_i}{T_e} \frac{\sqrt{2\pi} k_\perp \rho_i}{s\Omega_i - \dfrac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i} \dfrac{\partial}{\partial x} \ln \dfrac{N}{\sqrt{T_i}}} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Re}\Delta^2}{|k_z| v_{Te}} \times \right.$$

$$\left. \times \left( s\Omega_i + \frac{k_y v_s^2}{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_e}} \right) + \frac{T_e}{T_i} \nu_{ii} k_\perp \rho_i \frac{3(\pi + 1)}{8\sqrt{\pi}} \left( s\Omega_i - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i} \frac{\partial \ln N T_i^{-0,69}}{\partial x} \right) \right\}.$$

Из этих формул видно, что при $\omega \sim s\Omega_i \gg \omega_{др}$ колебания устойчивы ($\gamma < 0$); неустойчивость ($\gamma > 0$) возможна лишь при $\omega_{др} \gtrsim s\Omega_i$. В пределе $\omega_{др} \gg s\Omega_i$ спектр (5,1) совпадает с полученным в работе [36], а при $\nu_{ii} \to 0$ — переходит в результат работы [11]. Следует заметить, что черенковский эффект на электронах (первое слагаемое в фигурных скобках в выражении для $\gamma$) в условиях, когда в плазме возможно развитие рассматриваемой дрейфово-циклотронной неустойчивости, играет всегда дестабилизирующую роль, в то время как столкновения ионов с ионами в плазме с однородной температурой частиц стабилизируют неуйсточивость. Если же температура частиц (ионов) неоднородна, то столкновения ионов, напротив, могут стать даже причиной неустойчивости. Так, из выражений (5,1) следует, что при $\omega_{др} \gg s\Omega_i$ столкновения ионов с ионами приводят к раскачке колебаний, если

$$2 > \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} > 1,45.$$

Рассмотренная неустойчивость стабилизируется перекрещенностью силовых линий магнитного поля, определяемой условием (4,2); стабилизация при этом обусловлена нарушением неравенства $\operatorname{Re}\Delta \gg k_z v_{Ti}$. Заметим, что для реальной стабилизации неустойчивости необходимо, чтобы

*) Произвольные непотенциальные дрейфово-циклотронные колебания неоднородной плазмы с учетом кулоновских столкновений частиц исследованы в работе [37].

неравенство (4,2) не нарушалось на размерах порядка гироскопического радиуса ионов, который по порядку величины определяет область локализации колебаний.

б) Рассмотрим теперь дрейфово-циклотронные колебания в области частот $|\omega - i\nu_e| \gg k_z v_{Te}$. Прежде всего заметим, что в области внутри резонансной линии поглощения, когда $|\omega - s\Omega_i| \ll \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$, а $\nu_{ii} k_\perp^2 \rho^2 \gg \gg k_z v_{Ti}$, спектры дрейфово-циклотронных колебаний определяются выражениями (4,4) и (4,6) соответственно в случаях $\omega > \nu_e$ и $\omega < \nu_e$ (при $\omega\nu_e \gg k_z^2 v_{Te}^2$); величина $\nu_i$ при этом дается формулой (4,5б). Это означает, что спектры низкочастотных дрейфовых колебаний (4,4) и (4,6) без изменения продолжаются в область циклотронных частот. Очевидно, при этом не меняются также и условия стабилизации колебаний перекрещенностью силовых линий магнитного поля, которые в случаях $\omega > \nu_e$ и $\omega < \nu_e$ соответственно имеют вид неравенств (3,18) и (4,7).

Новые характерные особенности в спектрах дрейфово-циклотронных колебаний в области частот $|\omega - i\nu_e| \gg k_z v_{Te}$ проявляются вдали от резонансной линии поглощения, когда $|\omega - s\Omega_i| \gg \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2,\ k_z v_{Ti}$. Пренебрегая малыми диссипативными членами в уравнении эйконала (3,1), при условии $\omega > \nu_e$ находим, что на пересечении дрейфовой ветви колебаний с циклотронной в узкой области частот

$$k^2 r_{Di}^2 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{s\Omega_i^2} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \approx -1$$

возможно развитие резонансной чисто гидродинамической (не диссипативной) неустойчивости со спектром, определяемым соотношением [11]

$$(\omega - s\Omega_i)^2 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_\perp \rho_i} (\omega - s\Omega_i)\,\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} k_\perp \rho_i} \omega^2 \left[ (1 + k^2 r_{Di}^2) \frac{\partial \ln \sqrt{T_i}}{\partial \ln N} - k^2 r_{Di}^2 \right]. \qquad (5,2)$$

Отсюда следует, что при

$$\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < \frac{2k^2 r_{Di}^2}{1 + k^2 r_{Di}^2}$$

и

$$k_\perp^3 \rho_i^3 > \frac{c^2}{v_A^2}$$

в плазме развивается неустойчивость с максимальным инкрементом $\gamma_{\max} \sim \sqrt[4]{m/M}\,\Omega_i$. Эта неустойчивость стабилизируется относительно небольшой перекрещенностью силовых линий, определяемой неравенством

$$\theta = sx > \sqrt[4]{\frac{m}{M}} \frac{\rho_i}{L_0}, \qquad (5,3)$$

которое не должно нарушаться при размерах порядка ларморовского радиуса ионов.

Как отмечалось выше, резонансная область частот, в которой развивается гидродинамическая дрейфово-циклотронная неустойчивость, является весьма узкой, и даже редкие столкновения могут привести к стабилизации такой неустойчивости. Действительно, простой анализ уравнения (5,2) показывает [37], что при $\nu_{ii} \gtrsim (m/M)^{5/4}\,\Omega_i$ резонансная область вследствие столкновений ионов с ионами полностью замазывается и рассмотренная неустойчивость отсутствует. При этом, однако, в плазме возможно развитие нерезонансной диссипативной неустойчивости, спектр которой определяется выражениями ($\Delta = \omega - s\Omega_i$)

$$\operatorname{Re}\Delta = \frac{s\Omega_i\left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{s\Omega_i^2}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{N}{\sqrt{T_i}}\right)}{\sqrt{2\pi}k_\perp\rho_i\left[1 + k^2 r_{Di}^2 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{s\Omega_i^2}\frac{\partial \ln N}{\partial x}\right]}, \tag{5,4}$$

$$\gamma = \operatorname{Im}\Delta = -\nu_{ii}k_\perp^2\rho_i^2\frac{3(\pi+1)}{4\sqrt{2}}\frac{\left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{s\Omega_i^2}\frac{\partial \ln NT_i^{-0,69}}{\partial x}\right)}{\left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{s\Omega_i^2}\frac{\partial \ln NT_i^{-0,5}}{\partial x}\right)} + \gamma_e,$$

где

$$\gamma_e = -\sqrt{2\pi}\frac{T_i}{T_e}k_\perp\rho_i\frac{\nu_{\text{эфф}}k_z^2 v_{Te}^2\operatorname{Re}\Delta^2}{s^4\Omega_i^4}\frac{1 + \frac{k_y v_s^2}{s\Omega_i^2}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{N}{\sqrt{T_e}}}{1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{s\Omega_i^2}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{N}{\sqrt{T_i}}}. \tag{5,5}$$

в) Можно легко показать, что спектр колебаний (5,4) с небольшим изменением сохраняется также и при $\omega < \nu_e$, если только $\omega, \nu_e \gg k_z^2 v_{Te}^2$. Изменяется лишь электронный вклад $\gamma_e$ в декремент затухания колебаний $\gamma$, который в этом случае имеет вид

$$\gamma_e = -1,96\sqrt{2\pi}\frac{T_i}{T_e}k_\perp\rho_i\frac{k_z^2 v_{Te}^2\operatorname{Re}\Delta^2}{\nu_{\text{эфф}}s^2\Omega_i^2}\frac{1 + \frac{k_y v_s^2}{s\Omega_i^2}\frac{\partial \ln NT_e^{1,71}}{\partial x}}{1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{s\Omega_i^2}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{N}{\sqrt{T_i}}}. \tag{5,6}$$

(Это является следствием различия диссипативных частей выражений (2,8) и (2,9), обусловленных столкновениями электронов.) Из формул (5,4) — (5,6) видно, что дрейфово-диссипативная неустойчивость в области ионных циклотронных частот может развиваться лишь при условии [36] $\omega_{\text{др}} > s\Omega_i$. При этом столкновения электронов практически всегда приводят к раскачке колебаний, если $s\Omega_i > \nu_{\text{эфф}}$; если же $s\Omega_i < \nu_{\text{эфф}}$, то они раскачивают колебания лишь при $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 2$. Что же касается столкновений ионов, то они всегда играют стабилизирующую роль, за исключением области

$$2 > \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} > 1,45,$$

где они дестабилизируют колебания, расширяя область неустойчивости плазмы.

Для стабилизации рассмотренной нерезонансной дрейфово-диссипативной неустойчивости вблизи циклотронных частот необходима перекрещенность силовых линий магнитного поля, удовлетворяющая условию

$$\theta = sx > \frac{1}{\sqrt{2\pi}k_\perp^2\rho_i^2} \sim \frac{\rho_i^2}{L_0^2}. \tag{5,7}$$

Это условие не должно нарушаться для размеров порядка области локализации колебаний, которая может быть сравнимой с ларморовским радиусом ионов.

г) Наконец, в области $|\omega + i\nu_e| \gg k_z v_{Te}$ при условии $\omega\nu_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$ дрейфово-циклотронные колебания возможны лишь вдали от резонансной линии, когда $|\omega - s\Omega_i| \gg \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$. При этом спектр частот колебаний совпадает со спектром (5,1), а инкремент нарастания $\gamma$ отличается от (5,1) и имеет вид

$$\gamma = -\frac{T_i}{T_e} \frac{\sqrt{2\pi}\, k_\perp \rho_i}{1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{s\Omega_i^2} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}}} \left\{ 1{,}44 \frac{\nu_{\text{эфф}} \operatorname{Re} \Delta^2}{k_z^2 v_{Te}^2} \left( 1 - \frac{k_y v_s^2}{s\Omega_i^2} \frac{\partial \ln N T_e^{-0{,}56}}{\partial x} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{T_e}{T_i} \nu_{ii} k_\perp \rho_i \frac{3(\pi+1)}{8\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{s\Omega_i^2} \frac{\partial \ln N T_i^{-0{,}69}}{\partial x} \right) \right\}. \quad (5{,}8)$$

Изменение выражения для $\gamma$ обусловлено изменением диссипативного вклада в $\delta\varepsilon_e$, который в рассматриваемой области частот определяется выражением (2,10), а не (2,7), как это имело место в исследованном выше случае. Из выражения (5,8) видно, что столкновения электронов приводят к раскачке колебаний, в особенности при $s\Omega_i < \omega_{\text{др}}$. Роль столкновений ионов и условие стабилизации неустойчивости перекрещенностью силовых линий магнитного поля при этом остаются неизменными (см. анализ после формул (5,1)).

## § 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше мы рассмотрели практически все возможные спектры неустойчивых колебаний неоднородной плазмы, удерживаемой сильным магнитным полем, за исключением длинноволновых колебаний, для которых выполнены условия $k_\perp \rho_i \ll 1$ и $\nu_e \gg \omega$, $k_z v_{Te}$, а $\nu_i \gg \omega$, $k_z v_{Ti}$. (Для описания таких колебаний применимы уравнения двухжидкостной гидродинамики [29]; исследование неустойчивости неоднородной плазмы по отношению к таким гидродинамическим колебаниям начато в работах [30, 31].) Подводя итог проведенному анализу, можно сделать следующие выводы:

1. Ион-ионные столкновения отнюдь не всегда стабилизируют дрейфовые неустойчивости неоднородной плазмы (как это следует из теории, использующей модельный интеграл столкновений), а даже, напротив, в ряде случаев приводят к расширению области неустойчивости плазмы, в особенности если речь идет о плазме с неоднородной температурой или о коротковолновых колебаниях плазмы.

Столкновения электронов (трение электронов об ионы), как правило, приводят к раскачке дрейфово-диссипативных колебаний плазмы, однако для некоторых коротковолновых ветвей колебаний они играют также и стабилизирующую роль (см. формулы (4,4) и (4,6)).

2. Отличная от нуля, но малая кривизна силовых линий удерживающего магнитного поля ($R \gg L_0$) оказывает существенное влияние лишь на относительно высокочастотные колебания неоднородной плазмы, с частотой больше дрейфовых частот частиц. Именно, в системах с положительной кривизной силовых линий магнитного поля существуют известные желобковая и диссипативная неустойчивости. Напротив, влияние кривизны силовых линий поля на низкочастотные дрейфово-диссипативные неустойчивости, вообще говоря, несущественно. Лишь в случае сильно неизотермической плазмы ($T_e/T_i \gtrsim R/L_0 \gg 1$ либо $T_i/T_e \gtrsim R/L_0 \gg 1$) это влияние может стать значительным, причем в системах с положительной кривизной оно, как правило, сводится к расширению области неустойчивости плазмы, а в системах с минимумом **B** —носит стабилизирующий характер.

3. Анализ показывает, что эффективным средством стабилизации дрейфово-диссипативных неустойчивостей неоднородной плазмы может

Таблица 1

| Условия существования | Спектры длинноволновых колебаний $k_\perp \rho_i \ll 1$, $k_z v_{Te} \gg \omega$, $\nu_e$; $\omega \gg \nu_i$, $k_z v_{Ti}$ | Роль столкновений электронов | Роль столкновений ионов | Стабилизация shear'ом |
|---|---|---|---|---|
| $\omega_1 \gg k_z v_s$, $\frac{k_z^2}{k_\perp^2} < \frac{\omega_1^2}{\Omega_i^2}$ | $\omega_1 \approx -\frac{k_y v_s^2}{\Omega_i}\frac{\partial \ln N}{\partial x}$, $\gamma_1 \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_1^2}{\mid k_z \mid v_{Te}}\left\{\frac{k_\perp^2 v_s^2}{\Omega_i^2}\left(1+\frac{T_i}{T_e}\frac{\partial \ln NT_i}{\partial \ln N}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} - \frac{g}{v_s^2 \frac{\partial \ln N}{\partial x}}\right\} - \frac{7}{10}\nu_{ii}k_\perp^4\rho_i^4\left(1+\frac{T_e}{T_i}-\frac{3}{28}\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}\right)$ | Несущественны | Дестабилизируют при $\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} > \frac{28}{3}\left(1+\frac{T_e}{T_i}\right)$ | $\theta > \sqrt{1+\frac{T_e}{T_i}}\,\frac{\rho_i}{L_0}$ |
| $\omega_2 \ll k_z v_s$, $T_e \gg T_i$ | $\omega_2 = k_z^2\Omega_i/k_y\frac{\partial \ln N}{\partial x}$, $\gamma_2 \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_2^2}{\mid k_z \mid v_{Te}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} - \frac{g}{v_s^2\frac{\partial \ln N}{\partial x}}\right) - \frac{8}{5}\nu_{ii}\frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega_2^2}$ | То же | Всегда стабилизируют | $\theta > \sqrt{\frac{T_e}{T_i}}\,\frac{\rho_i}{L_0}$ |
| $\omega \ll \omega_{др}$, $\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \gg 1$ | $\omega_3^2 = -k_z^2 v_{Ti}^2\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}$, | То же | Несущественны | $\theta > \sqrt{1+\frac{T_e}{T_i}}\,\frac{\rho_i}{L_0}$ |
| | $\omega_4^3 = -k_z^2 v_s^2\frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i}\frac{\partial \ln T_i}{\partial x}$, | » » | » | $\theta > \sqrt{1+\frac{T_e}{T_i}}\,\frac{\rho_i}{L_0}$ |
| | $\omega_5^2 = in\Omega_i \mid k_y S \mid \rho_i^2\frac{k_y v_s^2}{\Omega_i}\frac{\partial \ln T_i}{\partial x}$ | » » | » | $S > \frac{T_i}{T_e}\frac{1}{L_0}$ |

Таблица II

| Условия существования | Спектры длинноволновых колебаний $k_\perp \rho_i \ll 1$, $\omega \gg \nu_{e,\,i}$, $k_z v_{Te,\,i}$ | Роль столкновений электронов | Роль столкновений ионов | Стабилизация shear'ом |
|---|---|---|---|---|
| $k_\perp^2 \rho_i^2 < 4\frac{L_0}{R}$ | $\omega_1^2 \approx \frac{1}{1+(v_A^2/c^2)}\, g\, \frac{\partial \ln N}{\partial x}$ | Несущественны | Несущественны | $\theta > \sqrt{\frac{m}{M}\frac{L_0}{R}}$ |
| $k_\perp^2 \rho_i^2 > 4\frac{L_0}{R}$ | $\omega_2 = \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i\,[1+(v_A^2/c^2)]}\frac{\partial \ln NT_i}{\partial x}$, $\gamma_2 = \frac{7}{10}\frac{\nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2}{1+(v_A^2/c^2)}\frac{\partial \ln N}{\partial \ln NT_i}\left[\frac{v_A^2}{c^2} - \left(\frac{31}{28}+\frac{3}{28}\frac{v_A^2}{c^2}\right)\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}\right]$ | То же | Дестабилизируют при $-1 < \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < \frac{28}{31}\frac{v_A^2}{c^2}$ | $\theta > \sqrt{\frac{m}{M}\frac{T_i}{T_e}\frac{\rho_i}{L_0}}$ |
| $k_\perp^2 \rho_i^2 > 4\frac{L_0}{R}$ | $\omega_3 \approx -\frac{k_y v_s^2}{\Omega_i}\frac{\partial \ln T_e}{\partial x}$, $\gamma_3 \approx \nu_{эфф}\frac{\partial \ln T_e^{3/2}}{\partial \ln NT_e}$ | Дестабилизируют при $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 0$, $\frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < -1$ | Несущественны | $\theta > \sqrt{\frac{m}{M}\frac{T_e}{T_i}\frac{\rho_i}{L_0}}$ |
| $\omega_4 \ll \omega_{др}$ | $\omega_4^2 = -\frac{k_z^2}{k_\perp^2}\frac{M}{m}\frac{T_e}{T_i}\Omega_i^2\frac{\partial \ln NT_e}{\partial \ln NT_i}$ | Несущественны | То же | $\theta > \sqrt{\frac{m}{M}\frac{\rho_i}{L_0}}$ |
| $\omega_5 \ll \omega_{др}$, $T_e \gg T_i$ | $\omega_5^2 = \frac{k_z^2}{k_\perp^2}\frac{M}{m}\frac{T_e}{T_i}\Omega_i^2\frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i}\frac{\partial \ln NT_e}{\partial x}$ | То же | То же | $\theta > \sqrt{\frac{m}{M}\frac{T_i}{T_e}\frac{\rho_i}{L_0}}$ |

Таблица III

| Условия существования | Спектры длинноволновых колебаний $k_\perp\rho_i \ll 1$, $\nu_e \gg \omega$, $k_z v_{Te}$, $\omega\nu_e \gg k_z^2 v_{Te}^2$, $\omega \gg \nu_i$, $k_z v_{Ti}$ | Роль столкновений электронов | Роль столкновений ионов | Стабилизация shear'ом |
|---|---|---|---|---|
| $k_\perp^2\rho_i^2 < 4\frac{L_0}{R}$ | $\omega_1^2 \approx g\frac{\partial \ln N}{\partial x}$ | Несущественны | Несущественны | $\theta > \sqrt{\frac{m}{M}\frac{\nu_{эфф}}{\Omega_i}\frac{\rho_i}{\sqrt{RL_0}}}$ |
| $k_\perp^2\rho_i^2 > 4\frac{L_0}{R}$ | $\omega_2 \approx \frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i}\frac{\partial\ln NT_i}{\partial x}$, $\gamma_2 \approx \frac{7}{10}\nu_{ii}k_\perp^2\rho_i^2 \frac{\partial \ln N}{\partial \ln NT_i}\left(\frac{v_A^2}{c^2} - \frac{31}{28}\frac{\partial\ln T_i}{\partial \ln N}\right)$ | То же | Дестабилизируют при $-1 < \frac{\partial\ln T_i}{\partial\ln N} < \frac{28}{31}\frac{v_A^2}{c^2}$ | $\theta > \sqrt{\frac{m}{M}\frac{\nu_{эфф}}{\Omega_i}\frac{\rho_i}{L_0}}$ |
| $k_\perp^2\rho_i^2 < 4\frac{L_0}{R}$ | $\gamma_3 = -i\omega_3 = \left\|g\frac{\partial\ln N}{\partial x}\right\|^{2/3}\left(\frac{k_y^2c^2}{4\pi S^2\sigma v_A^2}\right)^{1/3}$ | Всегда дестабилизируют | Несущественны | $\theta > \sqrt{\frac{m}{M}\frac{\rho_i}{L_0}\sqrt{\frac{L_0}{R}}}$ |
| $k_\perp^2\rho_i^2 > 4\frac{L_0}{R}$ | $\gamma_4 = -i\omega_4 = -\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{k_y^2 g}{k_z^2 v_A^2}\frac{\partial\ln N}{\partial x}$ | То же | То же | $\theta > \sqrt{\frac{m}{M}\frac{\rho_i}{L_0}\sqrt{\frac{L_0}{R}}}$ |
| $\omega_{др} \ll \omega_s$ | $\omega_5 = -\frac{k_y v_s^2}{\Omega_i}\frac{\partial \ln NT_e^{1,71}}{\partial x}$, $\gamma_5 = \frac{\omega_5^2}{1,96\,\omega_s}\left(1+\frac{T_i}{T_e}\frac{\partial\ln NT_i}{\partial\ln NT_e^{1,71}}\right)$ | То же | То же | $\theta > \min\begin{cases}\sqrt{1+\frac{T_e}{T_i}\frac{\rho_i}{L_0}}\\ \sqrt{\frac{\nu_{эфф}}{\Omega_e}}\end{cases}$ |
| $\omega_s \ll \omega_{др}$ | $\gamma_6 = -i\omega_6 = 1,96\,\omega_s\frac{T_e}{T_i}\frac{\partial\ln NT_e^{1,71}}{\partial \ln NT_i}$ | То же | То же | $\theta > \min\begin{cases}\sqrt{\frac{T_e}{T_i}\frac{\rho_i}{L_0}}\\ \sqrt{\frac{\nu_{эфф}}{\Omega_e}\frac{\rho_i'}{L_0}}\end{cases}$ |
| $\frac{k_z^2}{k_\perp^2}\Omega_i \ll \omega_{др}^2$, $T_i \gg T_e$ | $\gamma_7 = -i\omega_7 = \frac{m}{M}\frac{\nu_{эфф}T_i}{1,96\,T_e}\frac{\partial\ln NT_i}{\partial\ln NT_e^{1,71}}$ | То же | То же | $\theta > \min\begin{cases}\rho_i/L_0\\ \frac{\nu_{эфф}}{\Omega_e}\frac{T_i}{T_e}\end{cases}$ |

Таблица IV

| Условия существования | Спектры длинноволновых колебаний $k_\perp \rho_i \ll 1$, $\nu_e \gg \omega$, $k_z v_{Te}$, $\omega\nu_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$, $\omega \gg \nu_i$, $k_z v_{Ti}$ | Роль столкновений электронов | Роль столкновений ионов | Стабилизация shear'ом |
|---|---|---|---|---|
| $\omega_1 \gg k_z v_s$, $\dfrac{k_z^2}{k_\perp^2} < \dfrac{\omega_1^2}{\Omega_i^2}$ | $\omega_1 \approx -\dfrac{k_y v_s^2}{\Omega_i}\dfrac{\partial \ln N}{\partial x}$, $\gamma_1 \approx 1{,}44\dfrac{\omega_1^2 \nu_{эфф}}{k_z^2 v_{Te}^2}\left\{\dfrac{k_\perp^2 v_s^2}{\Omega_i^2}\left(1+\dfrac{T_i}{T_e}\dfrac{\partial \ln NT_i}{\partial \ln N}\right) - 0{,}56\dfrac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} - \dfrac{g}{v_s^2 \dfrac{\partial \ln N}{\partial x}}\right\} - \dfrac{7}{10}\nu_{ii} k_\perp^4 \rho_i^4 \left(1+\dfrac{T_e}{T_i} - \dfrac{3}{28}\dfrac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}\right)$ | Дестабилизируют при $\dfrac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} < 1{,}8\dfrac{k_\perp^2 v_s^2}{\Omega_i^2}\left(1+\dfrac{T_i}{T_e}\dfrac{\partial \ln NT_i}{\partial \ln N}\right)$ | Дестабилизируют при $\dfrac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} > \dfrac{28}{3}\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}\right)$ | $\theta > \min\left\{\begin{array}{l}\sqrt{1+\dfrac{T_e}{T_i}}\,\dfrac{\rho_i}{L_0}\\ \dfrac{L_0 \nu_{эфф}}{v_{Te}}\end{array}\right.$ |
| $\omega_2 \ll k_z v_s$, $T_e \gg T_i$ | $\omega_2 = \dfrac{k_z^2 \Omega_i}{k_y \dfrac{\partial \ln N}{\partial x}}$, $\gamma_2 \approx -1{,}44\dfrac{\omega_2^2 \nu_{эфф}}{k_z^2 v_{Te}^2}\left(1-\dfrac{\partial \ln T_e^{0,56}}{\partial \ln N}\right) - \dfrac{8}{5}\nu_{ii}\dfrac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega_2^2}$ | Дестабилизируют при $\dfrac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 1{,}8$ | Всегда стабилизируют | $\theta > \min\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{T_e}{T_i}}\,\dfrac{\rho_i}{L_0}\\ \dfrac{L_0 \nu_{эфф}}{v_{Te}}\end{array}\right.$ |
| $\omega \ll \omega_{др}$, $\dfrac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} \gg 1$ | $\omega_3^2 \quad -k_z^2 v_{Ti}^2 \dfrac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}$, | Несущественны | Несущественны | $\theta > \min\left\{\begin{array}{l}\sqrt{1+\dfrac{T_e}{T_i}}\,\dfrac{\rho_i}{L_0}\\ \dfrac{L_0 \nu_{эфф}}{v_{Te}}\end{array}\right.$ |
| | $\omega_4^3 \quad -k_z^2 v_s^2 \dfrac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i}\dfrac{\partial \ln T_i}{\partial x}$, | » | » | $\theta > \min\left\{\begin{array}{l}\sqrt{1+\dfrac{T_e}{T_i}}\,\dfrac{\rho_i}{L_0}\\ \dfrac{L_0 \nu_{эфф}}{v_{Te}}\end{array}\right.$ |
| | $\omega_5^2 = in\,\Omega_i \mid k_y S \mid \rho_i^2 \dfrac{k_y v_s^2}{\Omega_i}\dfrac{\partial \ln T_i}{\partial x}$ | » | » | $\theta > \min\left\{\begin{array}{l}\dfrac{T_i}{T_e}\,\dfrac{1}{L_0}\\ \dfrac{L_0 \nu_{эфф}}{v_{Te}}\end{array}\right.$ |

Таблица V

| Условия существования | Спектры низкочастотных коротковолновых колебаний $\omega \ll \Omega_i$, $k_\perp\rho_i \gg 1$ | Роль столкновений электронов | Роль столкновений ионов | Стабилизация shear'ом |
|---|---|---|---|---|
| $\omega,\ \nu_e \ll k_z v_{Te}$,<br>$\omega \gg k_z v_{Ti}$,<br>$\omega \gg \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$ | $\omega \approx -\frac{T_e}{T_e+T_i(1+k^2r_{De}^2)}\frac{v_{Ti}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{N}{\sqrt{T_i}}$,<br>$\gamma \approx \frac{\pi\omega^2}{\lvert k_z\rvert v_{Te}}k_\perp\rho_i\frac{\partial\ln N/\sqrt{T_e}}{\partial\ln N/\sqrt{T_i}}\left(1-\frac{g}{v_s^2\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{N}{\sqrt{T_i}}}\right)-$<br>$-\nu_{ii}k_\perp^2\rho_i^2\frac{3(\pi+1)}{4\sqrt{2}}\frac{\partial\ln NT_i^{-0,69}}{\partial\ln NT_i^{-0,5}}$ | Несущественны | Дестабилизируют при<br>$1,45<\frac{\partial\ln T_i}{\partial\ln N}<2$ | $0>\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k_\perp\rho_i}\frac{\rho_i}{L_0}$ |
| $\omega \gg \nu_e k_z v_{Te}$,<br>$\omega \gtrless \nu_{ii}k_\perp^2\rho_0^2$ | $\omega \approx \frac{1}{1+k^2r_{Di}^2}\frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i}\frac{\partial\ln N}{\partial x}$,<br>$\gamma = -\frac{T_i}{T_e}\nu_{эфф}\frac{k_z^2v_{Te}^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{1+k^2r_{Di}^2}+\frac{T_e}{T_i}\frac{\partial\ln NT_e^{-0,5}}{\partial\ln N}\right)+\gamma_i$ *) | Дестабилизируют при<br>$\frac{\partial\ln T_e}{\partial\ln N}>2\left(1+\frac{T_i}{T_e}\right)$ | Дестабилизируют при<br>$\frac{\partial\ln T_i}{\partial\ln N}<4{,}45\,k^2r_{Di}^2$ | $\theta>\sqrt{\frac{m}{M}\frac{T_e}{T_i}\frac{\rho_i}{L_0}}$ |
| $\nu_e \gg \omega, k_z v_{Te}$,<br>$\omega\nu_e \gg k_z^2v_{Te}^2$,<br>$\omega \gtrless \nu_{ii}k_\perp^2\rho_i^2$ | $\omega \approx \frac{1}{1+k^2r_{Di}^2}\frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i}\frac{\partial\ln N}{\partial x}$,<br>$\gamma = -1{,}96\frac{T_i}{T_e}\frac{k_z^2v_{Te}^2}{\nu_{эфф}}\left[\frac{1}{1+k^2r_{Di}^2}+\right.$<br>$\left.+\frac{T_e}{T_i}\left(1+\frac{\partial\ln T_e^{1,71}}{\partial\ln N}\right)\right]+\gamma_i$ *) | Всегда дестабилизируют | Дестабилизируют при<br>$\frac{\partial\ln T_i}{\partial\ln N}<4{,}45\,k^2r_{Di}^2$ | $\theta>\min\times$<br>$\times\begin{cases}\sqrt{\frac{M}{m}\frac{T_i}{T_e}\frac{\nu_{эфф}}{\Omega_e k_\perp\rho_i}}\\ \sqrt{\frac{\nu_{эфф}}{\Omega_e}\frac{T_i}{T_e}\frac{1}{k_\perp\rho_i}\frac{\rho_i}{L_0}}\end{cases}$ |

Продолжение табл. V

| Условия существования | Спектры низкочастотных коротковолновых колебаний $\omega \ll \Omega_i$, $k_\perp \rho_i \gg 1$ | Роль столкновений электронов | Роль столкновений ионов | Стабилизация shear'ом |
|---|---|---|---|---|
| $\nu_e \gg \omega,\ k_z v_{Te}$, $\omega\nu_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$, | $\omega \approx -\frac{T_e}{T_e+T_i(1+k^2 r_{De}^2)} \frac{v_{Ti}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}}$, $\gamma \approx 1,44 \frac{\sqrt{2\pi}\,\omega^2 k_\perp \rho_i}{k_z^2 v_{Te}^2} \nu_{эфф} \frac{\partial \ln N T_e^{-0,56}}{\partial \ln N T_i^{-0,5}} \times \left(1 - \frac{g}{v_s^2 \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}}}\right) -$ | Всегда дестабилизируют | Дестабилизируют при $1,45 < \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < 2$ | $0 >$ $> \min \begin{cases} \sqrt{\frac{M}{m} \frac{T_i}{T_e}}\, \frac{\nu_{эфф}}{\Omega_e k_\perp \rho_i} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k_\perp \rho_i} \frac{\rho_i}{L_0} \end{cases}$ |
| $\omega \gg \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$ | $-\frac{3\pi+3}{4\sqrt{2}} \frac{\nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2\, \partial \ln N T_i^{-0,69}}{\partial \ln N T_i^{-0,5}}$ | | | |

*) Здесь $\gamma_i = -\frac{\omega^2}{\nu_{ii}} \frac{2C_0 C_1}{3\pi k_\perp^3 \rho_i^3} \left(\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} - \frac{4,45 k^2 r_{Di}^2}{1+k^2 r_{Di}^2}\right)$ при $\omega \ll \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$,

$$\gamma_i = -\frac{3\,(3\pi+2)}{32\sqrt{\pi}} \nu_{ii} k_\perp \rho_i \left(\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} - \frac{1,45 k^2 r_{Di}^2}{1+k^2 r_{Di}^2}\right) \text{ при } \omega \gg \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2 .$$

Таблица VI

| Условия существования | Спектры дрейфово-циклотронных колебаний $\omega \approx s\Omega_i,\ k_\perp \rho_i \gg 1$ | Роль столкновений электронов | Роль столкновений ионов | Стабилизация shear ом |
|---|---|---|---|---|
| $k_z v_{Te} \gg \omega,\ \nu_e,$ <br> $\Delta \gg \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$ | $\mathrm{Re}\,\Delta = -\dfrac{T_e}{T_e + T_i(1+k^2 r_{Di}^2)} \dfrac{v_{Ti}}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\partial}{\partial x} \ln \dfrac{N}{\sqrt{T_i}},$ <br> $\gamma = \dfrac{\pi k_\perp \rho_i\, \mathrm{Re}\,\Delta^2}{\lvert k_z \rvert v_{Te}} \dfrac{\partial \ln N/\sqrt{T_e}}{\partial \ln N/\sqrt{T_i}} -$ <br> $- \dfrac{3(\pi+1)}{4\sqrt{2}} \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2 \dfrac{\partial \ln N T_i^{-0,69}}{\partial \ln N/\sqrt{T_i}}$ | Несущественны | Дестабилизируют при <br> $1{,}45 < \dfrac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < 2$ | $\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\rho_i^2}{L_0^2}$ |
| $\omega \gg \nu_e,\ k_z v_{Te},$ <br> $\Delta \ll \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$ | $\omega = \dfrac{1}{1+k^2 r_{Di}^2} \dfrac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i} \dfrac{\partial \ln N}{\partial x},$ <br> $\gamma = -\dfrac{\omega^2}{\nu_{ii}} \dfrac{2C_0 C_1}{3\pi k_\perp^3 \rho_i^3} \left( \dfrac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} - \dfrac{4{,}45 k^2 r_{Di}^2}{1+k^2 r_{Di}^2} \right) -$ <br> $- \nu_{эфф} \dfrac{T_i}{T_e} \dfrac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} \left( \dfrac{1}{1+k^2 r_{Di}^2} + \dfrac{T_e}{T_i} \dfrac{\partial \ln N/\sqrt{T_e}}{\partial \ln N} \right)$ | Дестабилизируют при <br> $\dfrac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N} > 2\left(1 + \dfrac{T_i}{T_e}\right)$ | Дестабилизируют при <br> $\dfrac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < 4{,}45 k^2 r_{Di}^2$ | $\theta > \sqrt{\dfrac{m}{M} \dfrac{T_e}{T_i}} \dfrac{\rho_i}{L_0}$ |
| $\nu_e \gg \omega,\ k_z v_{Te},$ <br> $\Delta \ll \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$ | $\omega = \dfrac{1}{1+k^2 r_{Di}^2} \dfrac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i} \dfrac{\partial \ln N}{\partial x},$ <br> $\gamma = -\dfrac{\omega^2}{\nu_{ii}} \dfrac{2C_0 C_1}{3\pi k_\perp^3 \rho_i^3} \left( \dfrac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} - \dfrac{4{,}45 k^2 r_{Di}^2}{1+k^2 r_{Di}^2} \right) -$ <br> $- 1{,}96 \dfrac{T_i}{T_e} \dfrac{k_z^2 v_{Te}^2}{\nu_{эфф}} \left( \dfrac{1}{1+k^2 r_{Di}^2} + \dfrac{T_e}{T_i} \dfrac{\partial \ln N T_e^{1,71}}{\partial \ln N} \right)$ | Всегда стабилизируют | Дестабилизируют при <br> $\dfrac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < 4{,}45 k^2 r_{Di}^2$ | $\theta > \dfrac{\nu_{эфф}}{\Omega_e} \sqrt{\dfrac{M}{m} \dfrac{T_i}{T_e}} \dfrac{\rho_i}{L_0}$ |
| $\omega > \left(\dfrac{M}{m}\right)^{5/4} \nu_{ii},\ k_z v_{Te},$ <br> $\Delta \gg \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$ | $\mathrm{Re}\,\Delta \approx \dfrac{s\Omega_i}{2\sqrt{2\pi} k_\perp \rho_i},\ \gamma \lesssim \left(\dfrac{m}{M}\right)^{1/4} \Omega_i$ | Несущественны | Несущественны | $\theta > \left(\dfrac{m}{M}\right)^{1/4} \dfrac{\rho_i}{L_0}$ |

Продолжение табл. VI

| Условия существования | Спектры дрейфово-циклотронных колебаний $\omega \approx s\Omega_i$, $k_\perp \rho_i \gg 1$ | Роль столкновений электронов | Роль столкновений ионов | Стабилизация shear ом |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta \gg \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$,<br>$k_z v_{Te} \ll \omega < \left(\frac{M}{m}\right)^{5/4} \nu_{ii}$ | $\mathrm{Re}\,\Delta = \frac{s\Omega_i}{\sqrt{2\pi} k_\perp \rho_i} \frac{\partial \ln N/\sqrt{T_i}}{\partial \ln N}$,<br>$\gamma = -\frac{3(\pi+1)}{4\sqrt{2}} \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2 \frac{\partial \ln N T_i^{-0,69}}{\partial \ln N/\sqrt{T_i}} +$<br>$+ \frac{\nu_{эфф} \mathrm{Re}\,\Delta^2 k_z^2 v_{Te}^2}{\omega^4} \sqrt{2\pi} k_\perp \rho_i \frac{\partial \ln N/\sqrt{T_e}}{\partial \ln N/\sqrt{T_i}}$ | Всегда дестабилизируют | Дестабилизируют при $1,45 < \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < 2$ | $0 > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\rho_i^2}{L_0^2}$ |
| $\nu_e \gg \omega$, $k_z v_{Te}$,<br>$\omega \nu_e \gtrsim k_z^2 v_{Te}^2$,<br>$\Delta \gg \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$ | $\mathrm{Re}\,\Delta = \frac{s\Omega_i}{\sqrt{2\pi} k_\perp \rho_i} \frac{\partial \ln N/\sqrt{T_i}}{\partial \ln N}$,<br>$\gamma = -\frac{3(\pi+1)}{4\sqrt{2}} \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2 \frac{\partial \ln N T_i^{-0,69}}{\partial \ln N/\sqrt{T_i}} +$<br>$+ 1,96 \frac{\mathrm{Re}\,\Delta^2 k_z^2 v_{Te}^2}{\omega^2 \nu_{эфф}} \sqrt{2\pi} k_\perp \rho_i \frac{\partial \ln T_e^{1,71}}{\partial \ln N/\sqrt{T_i}}$ | Дестабилизируют при $\frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} > 2$ | Дестабилизируют при $1,45 < \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < 2$ | $\theta > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\rho_i^2}{L_0^2}$ |
| $\nu_e \gg \omega$, $k_z v_{Te}$,<br>$\omega \nu_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$,<br>$\Delta \gg \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2$ | $\mathrm{Re}\,\Delta = -\frac{T_e}{T_e + T_i(1 + k^2 r_{Di}^2)} \frac{v_{Ti}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{\sqrt{T_i}}$,<br>$\gamma = 1,44 \frac{\sqrt{2\pi}\, \mathrm{Re}\,\Delta^2 \nu_{эфф}}{k_z^2 v_{Te}^2} k_\perp \rho_i \frac{\partial \ln N T_e^{-0,56}}{\partial \ln N/\sqrt{T_i}} -$<br>$- \frac{3(\pi+1)}{4\sqrt{2}} \nu_{ii} k_\perp^2 \rho_i^2 \frac{\partial \ln N T_i^{-0,69}}{\partial \ln N/\sqrt{T_i}}$ | Всегда дестабилизируют | Дестабилизируют при $1,45 < \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N} < 2$ | $\theta > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\rho_i^2}{L_0^2}$ |

служить перекрещенность силовых линий удерживающего магнитного поля. При этом труднее всего осуществить стабилизацию коротковолновых колебаний, так как для их стабилизации необходимо, чтобы перекрещенность силовых линий поля была значительной для размеров порядка области локализации колебаний, сравнимой с гироскопическим радиусом ионов. Если же речь идет о представляющихся наиболее опасными длинноволновых колебаниях (желобковых или дрейфово-диссипативных), то для их стабилизации требуется меньшая перекрещенность силовых линий магнитного поля, чем для коротковолновых.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### I. ВЫЧИСЛЕНИЕ $\delta\varepsilon_e$

Уравнение (2,3) для электронов можно записать в интегральной форме (гравитационным дрейфом электронов пренебрегаем):

$$\delta f(x) = -\frac{1}{\Omega_e}\int_{\infty}^{\varphi} d\varphi' \left(\frac{e}{mc}\nabla\Phi\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + I_{ee} + I_{ei}\right)\times$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{\Omega_e}\int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi''\,(\omega - k_z v_z - k_y v_\perp \sin\varphi'')\right\}. \quad (I,1)$$

Интегрирование в этом уравнении ведется вдоль характеристики $x + \frac{v_\perp \sin\varphi}{\Omega_e} = x' + \frac{v_\perp \sin\varphi'}{\Omega_e} = \mathrm{const}$. Это позволяет записать под интегралом

$$\frac{\partial f_{0e}}{\partial v_i} = \left(-\frac{v_i}{v_{Te}^2} + \frac{\delta_{yi}}{\Omega_e}a_e\right) f_{0e},$$
$$a_e = \frac{\partial \ln N}{\partial x} + \frac{\partial \ln T_e}{\partial x}\left(-\frac{3}{2} + \frac{v^2}{2v_{Te}^2}\right). \quad (I,2)$$

Интегральное уравнение (I,1) будем решать в приближении геометрической оптики, записав функции $\Phi$ и $\delta f_e$ в виде $\exp\left(i\int_0^x k_x d_x\right)$. При этом, учитывая неравенства $\omega \ll \Omega_e$ и $kv_{Te} \ll \Omega_e$, из (I,1) получаем

$$(\omega - k_z v_z)\,\delta f_e = \frac{e\Phi}{T_e}\left(k_z v_z - \frac{k_y v_{Te}^2}{\Omega_e}a_e\right) f_{0e} + i\,(I_{ee} + I_{ei}). \quad (I,3)$$

При решении этого уравнения следует различать три предельных случая.

а) $|\omega + i\nu_e| \ll k_z v_{Te}$; в этом случае интегралом столкновений в уравнении (I,3) можно пренебречь. В результате имеем

$$\delta f_e = -\frac{e}{T_e}\Phi f_{0e} + \frac{e}{T_e}\Phi\frac{f_{0e}}{\omega - k_z v_z}\left(\omega - \frac{k_y v_{Te}^2}{\Omega_e}a_e\right). \quad (I,4)$$

Это выражение приводит к формуле (2,7). Можно показать, что учет столкновений дает поправки порядка $\nu_e^2/k_z^2 v_{Te}^2$.

б) $|\omega + i\nu_e| \gg k_z v_{Te}$, $\omega \gg \nu_e$; в этом случае интеграл столкновений в уравнении (I,3) также является малым, и в первом приближении имеем выражение (I,4), в котором $\omega \gg k_z v_z$. Однако именно благодаря этому неравенству учет столкновений частиц становится необходимым, так как при $\omega \gg k_z v_z$ выражение (I,4) приводит к экспоненциально малому диссипативному члену в $\delta\varepsilon_e$. Поправка к (I,4), обусловленная столкновениями, равна

$$\delta f_e^{(1)} = \frac{i}{\omega}(I_{ee} + I_{ei}). \quad (I,5)$$

Здесь в интеграл столкновений следует подставлять выражение (I,4). При вычислении с помощью (I,5) поправки к плотности заряда, индуцированного в плазме, вклад дает лишь слагаемое, обусловленное электрон-ионными столкновениями; электрон-электронные столкновения вследствие сохранения импульса вклада не дают. Окончательно для $\delta\varepsilon_e$ получим формулу (2,8).

в) $|\omega+i\nu_e|\gg k_z v_{Te}$, $\nu_e\gg\omega$; в этом случае столкновительный член в уравнении (I,3) становится главным и его следует решать методом Чепмена—Энскога. Введем функцию

$$\delta f_e = -\frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{e}{T_e}a_e\Phi f_{0e}+F_e. \tag{I,6}$$

Из уравнения (I,3) получим

$$\frac{ie}{T_e}k_z v_z\Phi f_{0e}\left[1-\frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\partial\ln NT_e}{\partial x}+\frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\partial\ln T_e}{\partial x}\left(\frac{5}{2}-\frac{v^2}{2v_{Te}^2}\right)\right]=I_{ee}+I_{ei}. \tag{I,7}$$

Разлагая $F_e$ по полиномам Сонина—Лагерра и ограничиваясь двумя членами разложения (подробнее см. [47]):

$$F_e = v_z f_{0e}\left[a_0+a_1\left(\frac{5}{2}-\frac{v^2}{2v_{Te}^2}\right)\right], \tag{I,8}$$

из уравнения (I,7) получаем следующую систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов $a_0$ и $a_1$:

$$\begin{gathered}\frac{e}{T_e}k_z\Phi\left(1-\frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\partial\ln NT_e}{\partial x}\right)=i\nu_{\text{эфф}}\left(a_0+\frac{3}{2}a_1\right),\\ \frac{e}{T_e}k_z\Phi\,\frac{5}{2}\frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\partial\ln T_e}{\partial x}=i\nu_{\text{эфф}}\left(\frac{3}{2}a_0+\frac{13+4\sqrt{2}}{4}a_1\right).\end{gathered} \tag{I,9}$$

Из найденного таким образом выражения для $F_e$ находим ток, обусловленный $F_e$, и затем с помощью уравнения непрерывности определяем соответствующий вклад в плотность заряда электронов, индуцированного в плазме. Именно так и было получено выражение (2,9) при условии $\omega\nu_e\gg k_z^2 v_{Te}^2$. Заметим, что в отличие от случая б) в рассматриваемом случае существенны как электрон-ионные, так и электрон-электронные столкновения.

Для вычисления $\delta\varepsilon_e$ в рассматриваемой области частот весьма удобным является метод, предложенный в работе [41]. Будем исходить из уравнений непрерывности и баланса тепла для электронов

$$\begin{gathered}\frac{\partial eN_e}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}_e=0,\\ \frac{3}{2}\frac{\partial N_eT_e}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{q}_e=\mathbf{E}\mathbf{j}_e+Q,\end{gathered} \tag{I,10}$$

где $Q$—передача тепла от электронов к ионам. Ограничиваясь колебаниями с $\omega\gg\gg\frac{m}{M}\nu_{\text{эфф}}$, можно положить $Q=0$. Выражения для $\mathbf{q}_e$ и $\mathbf{j}_e$ в условиях $\nu_{\text{эфф}}\gg\omega$, $\nu_{\text{эфф}}\gg k_z v_{Te}$ и $\Omega_e\gg\nu_{\text{эфф}}$, $k_\perp v_{Te}$ имеют вид [47, 48]

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{j}_{\perp e}&=e\int f_e v_\perp\,dp=-\frac{eNT_e}{m\Omega_e}\frac{1}{B}\left[\mathbf{B}\left(\frac{e\mathbf{E}}{T_e}-\frac{\partial\ln NT_e}{\partial\mathbf{r}}\right)\right],\\ j_{ze}&=e\int f_e v_z\,dp=1{,}96\frac{eNT_e}{m\nu_{\text{эфф}}}\left(\frac{eE_z}{T_e}-\frac{\partial\ln NT_e^{1,71}}{\partial z}\right),\\ \mathbf{q}_{\perp e}&=\frac{m}{2}\int f_e v^2\mathbf{v}_\perp\,dp=-\frac{5}{2}\frac{NT_e^2}{m\Omega_e}\frac{1}{B}\left[\mathbf{B}\left(\frac{e\mathbf{E}}{T_e}-\frac{\partial\ln NT_e^2}{\partial\mathbf{r}}\right)\right],\\ q_{ze}&=\frac{m}{2}\int f_e v^2 v_z\,d\mathbf{p}=\frac{5}{2}\cdot 2{,}52\frac{NT_e^2}{m\nu_{\text{эфф}}}\left(\frac{eE_z}{T_e}-\frac{\partial\ln NT_e^{2,21}}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\} \tag{I,11}$$

Варьируя эти выражения по малым отклонениям от равновесия

$$N_e\longrightarrow N_e+\delta N_e,\quad T_e\longrightarrow T_e+\delta T_e,\quad \mathbf{E}\longrightarrow\delta\mathbf{E}=-\nabla\Phi \tag{I,12}$$

и используя уравнения (I,10), в приближении геометрической оптики легко найти $\delta N_e$, а следовательно,

$$\delta\varepsilon_e = -\frac{4\pi e\delta N_e}{k^2\Phi} = \frac{\omega_L^2}{k^2 v_{Te}^2}\times$$

$$\times\frac{\left(\frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\partial \ln N}{\partial x}+i\cdot 1{,}96\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega\nu_{\text{эфф}}}\right)\left(1+i\cdot 9{,}28\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega\nu_{\text{эфф}}}\right)-i\cdot 3{,}35\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega\nu_{\text{эфф}}}\left(\frac{k_y v_{Te}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\partial \ln NT_e}{\partial x}+i\cdot 4{,}2\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega\nu_{\text{эфф}}}\right)}{\left(1+i\cdot 1{,}96\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega\nu_{\text{эфф}}}\right)\left(1+i\cdot 9{,}28\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega\nu_{\text{эфф}}}\right)-i\cdot 3{,}35\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega\nu_{\text{эфф}}}\left(1+i\cdot 4{,}2\frac{k_z^2 v_{Te}^2}{\omega\nu_{\text{эфф}}}\right)}. \quad (I,13)$$

В пределах $\omega\nu_{\text{эфф}} \gg k_z^2 v_{Te}^2$ и $\omega\nu_{\text{эфф}} \ll k_z^2 v_{Te}^2$ это выражение переходит в (2,9) и (2,10) соответственно.

## II. ВЫЧИСЛЕНИЕ $\delta\varepsilon_i$

Совершенно аналогично уравнение (2,3) для ионов в интегральной форме имеет вид (с учетом гравитационного дрейфа ионов)

$$\delta f_i(x) = -\frac{1}{\Omega_i}\int_{\infty}^{\varphi} d\varphi' \left(-\frac{e}{Mc}\nabla\Phi\frac{\partial f_{0i}}{\partial \mathbf{v}}+I_{ie}+I_{ii}\right)\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{i}{\Omega_i}\int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi''\,(\omega-k_y u_i-k_z v_z-k_y v_\perp \sin\varphi'')\right\}. \quad (II,1)$$

Здесь также интегрирование ведется вдоль характеристики $x+\frac{v_\perp \sin\varphi}{\Omega}=\text{const}$ и поэтому $\frac{\partial f_{0i}}{\partial \mathbf{v}}$ определяется формулами, аналогичными (I,2), но только для ионов. Отличие уравнения (II,1) от (I,1) состоит в том, что в нем фигурирует не только ионная функция $\delta f_i$, но также и электронная $\delta f_e$, а именно:

$$I_{ie} \approx \frac{1}{N_i}\frac{\partial f_{0i}}{\partial \mathbf{p}}\int d\mathbf{p}\,\mathbf{p}I_{ei} = -\frac{4\pi e^4 L}{m}\frac{\partial f_{0i}}{\partial \mathbf{p}}\int d\mathbf{p}\frac{\mathbf{v}\delta f_e}{v^3}. \quad (II,2)$$

Поэтому при решении уравнения (II,1) используются выражения для $\delta f_e$, полученные в приложении I. Вводя функцию $F_i$:

$$\delta f_i = \int \frac{e}{T_i}\Phi f_{0i}+F_i, \quad (II,3)$$

в нулевом приближении геометрической оптики из уравнения (II,1) получаем

$$(\omega'-\mathbf{kv})F_i-\Omega_i\frac{\partial F_i}{\partial\varphi} = -\frac{e}{T_i}\left(\omega'-\frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i}a_i\right)f_{0i}+i\,(I_{ie}+I_{ii}). \quad (II,4)$$

а) При $|\omega'+i\nu_i| \ll k_z v_{Ti} \ll \Omega_i$ интегралом столкновений в уравнениях (II,1) и (II,4) можно пренебречь. При этом для $\delta f_i$ и, следовательно, $\delta\varepsilon_i$ получаем известное [1] выражение теории неоднородной плазмы без столкновений (выражение (2,11) без последних двух слагаемых). Учет столкновений приводит к пренебрежимо малым поправкам.

б) Если $\omega' \gg \nu_i$, $k_z v_{Ti}$ либо $|\omega'-s\Omega_i| \gg \nu_i$, $k_z v_{Ti}$, то интеграл столкновений в уравнениях (II,1) и (II,4) также является малым членом, но его учет необходим для правильного описания диссипативных эффектов, связанных со столкновениями ионов. Используя разложение по степеням $\nu_i/\omega'$ или $\nu_i/|\omega'-s\Omega_i|$, путем прямых вычислений получаем поправки (2,12), (2,13) и (2,14), обусловленные столкновениями частиц в плазме. Заметим, что при выводе формулы (2,13) для коротковолновых колебаний ($k_\perp\rho_i \gg 1$) удобно пользоваться упрощенным интегралом столкновений ионов с ионами, полученным в работе [33] (см. также [49]):

$$I_{ii} = \frac{2\pi e^4 LN}{M^2}\frac{f_{0i}}{v}\left\{\left(A-B\frac{v_\perp^2}{v^2}\right)\frac{\partial^2\delta f_i}{\partial v_\perp^2}+\frac{A}{v_\perp^2}\frac{\partial^2\delta f_i}{\partial\varphi^2}\right\}, \quad (II,5)$$

где

$$A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\sqrt{\pi}\,\Phi(t)\left(1-\frac{1}{2t^2}\right)+\frac{e^{-t^2}}{t}\right\},$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\sqrt{\pi}\,\Phi(t)\left(1-\frac{3}{2t^2}\right)+3\,\frac{e^{-t^2}}{t}\right\}, \qquad (II,6)$$

$$\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t dx\, e^{-x^2}, \quad t=\frac{v}{\sqrt{2}\,v_{Ti}}.$$

в) Особенно удобным оказывается использование интеграла столкновений (II,5) для вывода формулы (2,15), справедливой при $\nu_{ii}k_\perp^2\rho_i^2 \gg k_z v_{Ti}$, $(\omega'-s\Omega_i)$. В этом случае членом $I_{ie}$ в уравнении (II.4) можно пренебречь и записать это решение в виде (при этом учитывается, что $\Omega_i \gg \nu_{ii}k_\perp^2\rho_i^2$)

$$F_i=\frac{ie}{T_i}\Phi f_{0i}\cdot\frac{\left(\omega'-\frac{k_y v_{Ti}^2}{\Omega_i}a_i\right)J_s\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_i}\right)\exp\left[i\,\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_i}\sin(\varphi-\alpha)-is\varphi\right]}{\frac{4\pi e^4 N}{M^2 v}\frac{k_\perp^2}{\Omega_i^2}\left(A-\frac{3}{4}\frac{v_\perp^2}{v^2}B\right)}, \qquad (II,7)$$

где $\alpha$ — полярный угол вектора $k$ (т. е. $k_x=k_\perp\cos\alpha$, $k_y=k_\perp\sin\alpha$). Определяя с помощью формул (II,3) и (II,7) плотность заряда, индуцированного ионами в плазме, окончательно для ионного вклада в диэлектрическую проницаемость получаем выражение (2,15).

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН **82** (3), 499 (1964).
2. Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев, ДАН СССР **138**, 581 (1961); Ядерный синтез, Дополнение, **2**, 481 (1962).
3. N. Krall, N. Rostoker, M. Rosenbluth, Ядерный синтез, Дополнение, **1**, 143 (1962).
4. Б. Б. Кадомцев, А. В. Тимофеев, ДАН СССР **146**, 581 (1962).
5. А. Б. Михайловский, Л. И. Рудаков, ЖЭТФ **44**, 912 (1963).
6. А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖЭТФ **44**, 902 (1963).
7. Л. М. Коврижных, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, ЖЭТФ **44**, 1958 (1963).
8. А. Б. Михайловский, в сб. «Вопросы теории плазмы», т. 3, 1963, стр. 141.
9. В. П. Силин, ЖЭТФ **44**, 271 (1963).
10. Б. Б. Кадомцев, в сб. «Вопросы теории плазмы», т. 4, 1964, стр. 183.
11. А. Б. Михайловский, А. В. Тимофеев, ЖЭТФ **44**, 919 (1963).
12. В. Ф. Кулешов, А. А. Рухадзе, Ядерный синтез **4**, 169 (1964).
13. M. Rosenbluth, C. Longmire, Ann. Phys. **1**, 120 (1957).
14. Б. Б. Кадомцев, в сб. «Вопросы теории плазмы», т. 2, 1963, стр. 132.
15. Л. М. Коврижных, Е. Е. Ловецкий, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, ДАН СССР **149**, 1052 (1963).
16. А. А. Галеев, С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, Атомная энергия **15**, 451 (1963).
17. H. Furth, J. Killeen, M. Rosenbluth, Phys. Fluids **6**, 456 (1963).
18. А. В. Тимофеев, ЖТФ **33**, 909 (1963).
19. С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, ЖЭТФ **44**, 763 (1963); ЖТФ **34**, 249 (1964).
20. K. Roberts, J. Taylor, Phys. Fluids **8**, 315 (1965).
21. H. Furth, J. Killeen, M. Rosenbluth, B. Coppi, Доклад 21/106 на конференции в Калэме, 1965.
22. А. Б. Михайловский, О. П. Погуце, ДАН СССР **156**, 64 (1964); ЖТФ **36**, 205 (1965).
23. О. П. Погуце, ЖЭТФ **47**, 941 (1964).
24. B. Coppi, Phys. Lett. **12**, 213 (1964); **14**, 172 (1964).
25. T. Stringer, Bull. Amer. Phys. Soc. **10**, 208 (1965); Доклад 21/40 на конференции в Калэме, 1965.
26. B. Coppi, M. Rosenbluth, Доклад 21/105, там же.

27. E. Triemen, K. Weimer, P. Rutherford, Доклад 21/118, там же.
28. Б. Б. Кадомцев, О. П. Погуце, Доклад 21/127, там же.
29. С. И. Брагинский, в сб. «Вопросы теории плазмы», т. 1, 1963, стр. 183.
30. С. С. Моисеев, Письма ЖЭТФ 4, 81 (1966).
31. И. С. Байков, Письма ЖЭТФ 4, 299 (1966).
32. P. Batnagar, E. Gross, M. Krook, Phys. Rev. **94**, 511 (1954); E. Gross, M. Krook, Phys. Rev. **102**, 593 (1956).
33. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **44**, 969 (1963).
34. Я. Л. Альперт, А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, Искусственные спутники в разряженной плазме, М., «Наука», 1964.
35. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **7**, 206 (1937).
36. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, ДАН СССР **169**, 558 (1966); Доклад на конференции по замкнутым ловушкам, Принстон, США, 1966.
37. Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ **51**, 628 (1966).
38. C. Mercier, Nucl. Fussion **3**, 89 (1963); **4**, 213 (1964).
39. H. Furth, M. Rosenbluth, Phys. Fluids, **7** 764 (1964).
40. В. Д. Шафранов, Л. С. Соловьев, Ядерный синтез **6**, 1 (1966).
41. Л. С. Богданкевич, Б. Милич, А. А. Рухадзе, ЖТФ **37** (10), 1936 (1967).
42. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., Госатомиздат, 1961.
43. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖВММФ **4**, 267 (1964).
44. B. Coppi, M. Rosenbluth, R. Sagdeev, Preprint JC/66/24, Trieste (1966).
45. M. Rosenbluth, Preprint Harwell, September 21—26, 1962.
46. А. М. Фридман, ПМТФ **1**, 99 (1964).
47. Л. М. Горбунов, В. П. Силин, ДАН СССР **145**, 1265 (1962); ЖТФ **34**, 1213 (1964).
48. С. И. Брагинский, в сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 1, 1958, стр. 178.
49. Ю. Б. Иванов, А. А. Рухадзе, Изв. вузов (Радиофизика) **7**, 232 (1964).