

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

538.66+530.145

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ТЕРМОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ В МЕТАЛЛАХ И ПОЛУПРОВОДНИКАХ

И. С. Зырянов, Г. И. Гусева

СОДЕРЖАНИЕ

I. Введение	565
II. Постановка задачи в теории термоманитных явлений	569
III. Недиссипативные электронные потоки в квантующем магнитном поле	573
IV. Диссипативные электронные потоки в приближении упругого рассеяния	580
V. Диссипативные потоки с учетом неупругого рассеяния электронов и фононов	585
VI. Потоки вдоль магнитного поля и продольные термоманитные явления	589
VII. Сравнение теории с экспериментом	593
Приложение	606
а) Кинетическое уравнение для электронов	606
б) Кинетические уравнения для электрон-фононных систем	608
Цитированная литература	611

I. ВВЕДЕНИЕ

Изучению явлений переноса в проводниках при наличии магнитного поля посвящено большое количество как теоретических, так и экспериментальных работ. Классической теории гальваномагнитных явлений посвящены обзор Лифшица и Каганова ¹, монография Бира ². Классическая теория и анализ экспериментов по термоманитным явлениям изложены в монографии Цидильковского ⁴, в обзорах Делвиса ⁵, Хармана и других ⁶, Завадского и Колодзейчика ⁷.

В основу классической теории термогальваномагнитных явлений положено кинетическое уравнение Больцмана. При изменении внешних параметров системы, таких как напряженность магнитного поля H , температура $T = kT^\circ$ (k — постоянная Больцмана, T° — абсолютная температура в градусах), могут оказаться существенными квантовые эффекты, для описания которых уравнение Больцмана уже неприменимо. Действительно, при переходе к квантовому описанию движения электрона в плоскости, ортогональной магнитному полю, возникает дискретный энергетический спектр (уровни Ландау) и проявляется зависимость энергии электрона от H . Такой дискретный спектр является следствием квантования финитного орбитального классического движения электрона. Наличие дискретного спектра при определенных условиях может приводить к существенным изменениям термодинамических и кинетических характеристик проводников. Очевидно, что с изменением магнитного поля происходит смещение уровней Ландау относительно уровня Ферми. И всякий раз, когда один из уровней Ландау совпадает с уровнем Ферми, происходит резкое увеличение плотности электронных состояний вблизи уровня

Ферми. Это обусловлено тем, что уровни Ландау сильно вырождены и кратность вырождения пропорциональна напряженности магнитного поля. Таким образом, плотность состояний у поверхности Ферми является осциллирующей функцией H . Для того чтобы эти осцилляции проявлялись в термодинамических и кинетических характеристиках проводников, необходимо, чтобы разность энергий между соседними уровнями Ландау $\hbar\Omega$ превосходила ширину теплового размытия уровня Ферми, равную $\sim kT^\circ$. Наряду с этим необходимо выполнение еще одного важного условия. Во всех реальных системах существуют столкновения электронов с различного рода рассеивателями. Эти столкновения приводят к неопределенности в энергии стационарных состояний или к уширению энергетических уровней Ландау на величину $\sim \hbar\tau^{-1}$ (\hbar — постоянная Планка, τ — характерное время релаксации электрона). Очевидно, что дискретный энергетический спектр существует только тогда, когда $\hbar\Omega \gg \hbar\tau^{-1}$, т. е. «расстояние» между уровнями Ландау значительно превосходит ширину уровня. Следовательно, в условиях $\hbar\Omega \gg kT^\circ$, $\Omega\tau \gg 1$ все термодинамические и кинетические характеристики электронов, зависящие от плотности состояний у поверхности Ферми, будут осциллирующими функциями H . Сильные магнитные поля могут существенно влиять и на процессы рассеяния электронов. Так, например, с ростом напряженности магнитного поля средний импульс электрона вдоль магнитного поля уменьшается, а длина волны де Бройля λ_z возрастает. В ультраквантовом пределе, когда все электроны находятся на нижнем уровне Ландау, может случиться, что $\lambda_z \gtrsim a$ — среднего расстояния между рассеивающими центрами. В этом случае существенно рассеяние на многих центрах.

Становится очевидным, что описание явлений переноса в сильных магнитных полях ($\Omega\tau \gg 1$) и при низких температурах ($\hbar\Omega \gg T$) должно быть квантовым.

За последнее десятилетие были достигнуты большие успехи в квантовой теории гальваномагнитных явлений, нашедшие свое отражение в обзоре Кубо, Мияке и Хашицуме³. По квантовой теории термомагнитных явлений в настоящее время не существует обзорных работ*). Такая ситуация сложилась не случайно. Дело в том, что в квантовой теории гальваномагнитных явлений достаточно рассматривать лишь пространственно-однородные системы при наличии сил только динамической природы, таких, как напряженности электрического E и магнитного H полей, которые обычным способом включаются в гамильтониан системы, что сразу же позволяет записать уравнение Шрёдингера для матрицы плотности. При построении квантовой теории термомагнитных явлений, в отличие от гальваномагнитных, мы встречаемся с более трудной задачей, поскольку необходимо рассматривать пространственно-неоднородные системы, чтобы последовательно включать в рассмотрение наряду с динамическими силами силы статистической природы, обусловленные пространственными неоднородностями температуры T и химического потенциала ζ . Далее, вычисление объемных плотностей тока проводимости и потока тепла, необходимых для построения квантовой теории термомагнитных явлений, приводит к новым усложнениям в сравнении с квантовой теорией гальваномагнитных явлений. Для того чтобы пояснить сказанное, заметим, что с помощью матрицы плотности можно вычислять средние значения квантовомеханических операторов, соответствующих физическим величинам. Так, например, можно вычислить значения операторов плотности потоков заряда и энергии. Но в силу макроскопичности опре-

*) Недавно опубликован обзор Пури и Джебалла⁸¹, в котором анализируются экспериментальные исследования термо-э. д. с. увлечения и магнитофононные осцилляции термо-э. д. с. в n -Ge и n -InSb.

делений тока проводимости и потока тепла (см. раздел II) нельзя построить квантовомеханические операторы этих величин. А поскольку в пространственно-неоднородных системах в квантующем магнитном поле, например, ток проводимости отнюдь не совпадает с объемной плотностью потока заряда, то и возникает новая задача — о выделении тока проводимости из объемной плотности потока заряда и потока тепла — из объемной плотности потока энергии.

Все эти трудности, а также отсутствие отчетливого понимания постановки задачи (выразившееся в попытках либо отождествить объемные плотности потоков заряда и энергии, вычисленные с помощью матрицы плотности, с током проводимости и потоком тепла, либо положить в основу определения термомагнитных явлений не ток проводимости и поток тепла, а некоторые другие потоки) приводили к противоречивым результатам и задерживали построение квантовой теории термомагнитных явлений.

А между тем теоретический анализ уже имеющихся экспериментов по термомагнитным явлениям в квантующем магнитном поле открывает новые перспективы и может дать весьма интересные сведения не только о структуре энергетического спектра и механизмах релаксации носителей тока, но также о характере взаимодействия фононов в твердых телах, о поглощении звука в области очень высоких частот $\sim 10^{10} \div 10^{12}$ гц, где прямое измерение коэффициента поглощения звука в настоящее время практически невозможно.

Эти перспективы открываются благодаря тому, что в области квантующих магнитных полей и при низких температурах в полупроводниках с небольшой концентрацией электронов проводимости, таких, как *n*-Ge и *n*-InSb, в дифференциальную термо-э. д. с. вносит значительный вклад отступление фононов от локального равновесия. Дифференциальная термо-э. д. с. складывается из двух частей. Первая из них обусловлена отступлением электронов от термодинамического равновесия благодаря существующему в системе градиенту температуры. Вторая часть связана с отступлением от равновесия тепловых фононов. Первую обычно называют электронной частью термо-э. д. с., а вторую — термо-э. д. с. увлечения. Электронная термо-э. д. с. в сильных магнитных полях ($\Omega\tau \gg 1$) не зависит от рассеяния в случае проводников с неравными концентрациями дырок и электронов и обычно невелика. Термо-э. д. с. увлечения возникает из-за того, что градиент температуры вызывает поток фононов, пропорциональный как градиенту температуры, так и длине свободного пробега фононов $l_p \sim v_s/\omega_{pp}$ ($v_s = s$ — скорость звука, ω_{pp} — декремент затухания фононов или частота релаксации фононов на фононах или дефектах, короче — неэлектронная частота релаксации фононов). При столкновениях этого потока фононов с электронами происходит передача импульса от фононов к электронам. При этом доля передаваемого импульса будет пропорциональна частоте столкновений фононов с электронами ω_{ep} . Таким образом, ток увлечения, а значит, и термо-э. д. с. увлечения будут пропорциональны отношению ω_{ep}/ω_{pp} . В классическом пределе ($\hbar = 0$) ω_{ep} от магнитного поля не зависит и обычно значительно меньше ω_{pp} для полупроводников с небольшой концентрацией носителей тока. В этом нетрудно убедиться с помощью закона сохранения импульса при столкновении электрона с фононом. В случае максвелловской статистики средний импульс электрона $\bar{p}_e = \sqrt{mT}$. По закону сохранения импульса электроны могут взаимодействовать лишь с фононами, импульс которых $\hbar q \lesssim \bar{p}_e$. Но для $T^\circ > 1^\circ\text{K}$ средний тепловой импульс фононов $\hbar q_T = T/v_s$ значительно превосходит \bar{p}_e . Поэтому электроны взаимодействуют лишь с длинноволновыми тепловыми фононами, количество которых сравнительно невелико.

В квантующем магнитном поле ситуация изменяется. Для простоты мы рассмотрим лишь квантовый предел $\hbar\Omega \gg T$ и электроны, подчиняющиеся статистике Максвелла. В этом случае локализация электрона в плоскости, ортогональной магнитному полю, определяется по порядку величины магнитной длиной $\alpha = (c\hbar/|e|H)^{1/2}$ (c — скорость света, e — заряд электрона) или квантовым радиусом Лармора, поскольку электроны расселены в основном на наинизшем уровне Ландау. Из соотношения неопределенностей следует, что порядок величины импульса поперечного движения $\sim \hbar/\alpha^{-1}$. Поэтому электрон при смещениях поперек магнитного поля может взаимодействовать лишь с фононами, импульс которых $\hbar q \lesssim \hbar/\alpha^{-1}$. Отсюда следует, что с ростом магнитного поля объем фазового пространства фононов, взаимодействующих с электронами, увеличивается $\sim H$, а это приводит в свою очередь к быстрому увеличению частоты релаксации фононов на электронах — ω_{ep} . Последнее обусловлено экспоненциальной зависимостью ω_{ep} от α (см., например, формулу (6,19)). Поскольку (как отмечалось выше) термо-э. д. с. увлечения определяется через отношение ω_{ep}/ω_{pp} , то с ростом H это отношение увеличивается, так как ω_{pp} от H не зависит. Именно поэтому, например, в InSb термо-э. д. с. увлечения в квантовом пределе ($\hbar\Omega \gg kT$) возрастает почти в сто раз. С помощью теоретического анализа экспериментальной зависимости термо-э. д. с. увлечения от T и H можно получить ценные сведения о механизме релаксации длинноволновых фононов на коротковолновых тепловых, найти частотную и температурную зависимости ω_{pp} для звуковых волн с длиной $\lambda \sim \sqrt{c\hbar/|e|H}$.

Необходимо также отметить и то, что по крайней мере некоторые из термомагнитных эффектов обладают определенными экспериментальными преимуществами по сравнению с гальваномагнитными. Дело в том, что измерения, например, дифференциальной термо-э. д. с. в сильных магнитных полях значительно слабее подвержены влиянию случайных неоднородностей в распределении примесей, чем гальваномагнитные измерения, так как с ростом магнитного поля поперечное электрическое поле Нернста стремится к нулю (в классическом пределе), в то время как поле Холла стремится к бесконечности. Именно поэтому при анализе измерений некоторых термомагнитных эффектов легче выделить «истинные» эффекты, обусловленные структурой зоны, вырождением, механизмом рассеяния носителей. Так, было экспериментально показано, что магнитотермо-э. д. с. имеет четко выраженную классическую область насыщения (в соответствии с предсказаниями теории), тогда как для магнетосопротивления такая область практически отсутствует. Несмотря на это, в настоящее время мы располагаем весьма ограниченным экспериментальным материалом по термомагнитным явлениям в квантующем магнитном поле, тогда как гальваномагнитные явления тщательно исследованы в многочисленных опытах. По-видимому, такая ситуация была отчасти обусловлена отсутствием вплоть до недавнего времени последовательной квантовой теории термомагнитных явлений.

Настоящий обзор представляет первую попытку последовательного изложения такой теории.

Вся теория излагается на основе кинетического уравнения для матрицы плотности в смешанном представлении Вигнера. Именно этот аппарат квантовой статистической теории оказался весьма удобным и чрезвычайно простым для вычисления потоков и широко использовался в работах Елеонского, Зырянова, Силина⁸, Ахиезера, Барьяхтара, Пелетминского^{9, 10}, Зырянова¹¹⁻¹⁴. Во втором разделе обзора обсуждается постановка задачи о термогальваномагнитных явлениях в проводниках. Третий раздел посвящен изложению методики выделения тока

проводимости из объемной плотности потока заряда и потока тепла из объемной плотности потока энергии в пренебрежении рассеянием. В четвертом разделе вычислены диссипативный (столкновительный) поток тепла и ток проводимости в приближении упругого рассеяния носителей тока. Пятый раздел посвящен вычислению также диссипативных частей тока проводимости и потока тепла, но с учетом неупругого рассеяния электронов и фононов, а также неравновесности последних (эффект увлечения фононов). В шестом разделе рассмотрены термомагнитные эффекты в случае, когда градиенты температуры и химического потенциала направлены вдоль магнитного поля (продольные эффекты). Седьмой раздел посвящен сравнению теории с экспериментом. В этом разделе дан теоретический анализ лишь наиболее существенных экспериментов, в которых установлены те или иные общие закономерности, слабо зависящие от конкретных деталей структуры энергетического спектра носителей. В приложении дан вывод кинетических уравнений, использованных для вычисления потоков заряда и энергии.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ТЕРМОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Термогальваномагнитные явления в проводящих средах, согласно Ландау и Лифшицу¹⁵, определяются с помощью формул для двух векторных потоков, а именно: объемной плотности тока проводимости $\mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r})$ и объемной плотности потока тепла $\mathbf{Q}_T(\mathbf{r})$. Таким образом, задача построения микроскопической теории термогальваномагнитных явлений сводится к вычислению $\mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{Q}_T(\mathbf{r})$. Прежде чем приступить к вычислению этих величин, остановимся на определении их. Наиболее общее определение $\mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r})$ приведено в¹⁵. Согласно¹⁵ $\mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r})$ является той частью объемной плотности потока заряда $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, которая вносит вклад в перенос заряда через поперечное сечение всего проводника. Аналогично определяется $\mathbf{Q}_T(\mathbf{r})$ — как та часть объемной плотности потока энергии $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$, которая вносит вклад в перенос энергии через поперечное сечение всего проводника при $\mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r}) = 0$. Другими словами, $\mathbf{Q}_T(\mathbf{r})$ — поток энергии теплового хаотического движения носителей. Кинетические коэффициенты в $\mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{Q}_T(\mathbf{r})$ должны удовлетворять соотношению Эйнштейна и принципу симметрии Онсагера — требованиям термодинамики необратимых процессов, предъявляемым к этим потокам. Как известно, соотношение Эйнштейна является следствием принципа максимума энтропии при термодинамическом равновесии. Максимуму энтропии соответствует состояние, в котором температура T и электрохимический потенциал $\zeta_\phi = \zeta + e\phi$ (ϕ — потенциал электрического поля) постоянны вдоль всей системы¹⁶; при этом как ток проводимости, так и поток тепла обращаются в нуль. При отклонениях от термодинамического равновесия в электронной системе возникают поток тепла и ток проводимости, которые пропорциональны в случае малых отклонений от равновесия пространственным градиентам: ∇T и $-\nabla\zeta_\phi = e\left(E - \frac{1}{e}\nabla\zeta\right)$, $E = -\nabla\phi$. Поскольку ток проводимости и поток тепла пропорциональны $\nabla\zeta_\phi$, кинетические коэффициенты перед E и $\left(-\frac{1}{e}\nabla\zeta\right)$ в этих потоках одинаковы. В этом и заключается соотношение Эйнштейна. Таким образом, ток проводимости и поток тепла имеют вид

$$(\mathbf{j}_{\text{пр}})_i = \sigma_{ik}(H) \left(E_k - \frac{1}{e} \nabla_k \zeta \right) - \beta_{ik}(H) \nabla_k T, \quad (2,1)$$

$$(\mathbf{Q}_T)_i = \chi_{ik}(H) \left(E_k - \frac{1}{e} \nabla_k \zeta \right) - \kappa_{ik}(H) \nabla_k H.$$

Принцип симметрии Онсагера, являющийся следствием обратимости во времени механических уравнений движения частиц и макроскопичности затухания флуктуаций физических величин в системе¹⁶, при наличии магнитного поля, приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\sigma_{ik}(\mathbf{H}) &= \sigma_{ki}(-\mathbf{H}), & \kappa_{ik}(\mathbf{H}) &= \kappa_{ki}(-\mathbf{H}), \\ \beta_{ik}(\mathbf{H}) &= \frac{1}{T} \chi_{ik}(-\mathbf{H}).\end{aligned}\quad (2,2)$$

Поскольку $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ и \mathbf{Q}_T лежат в основе теории термогальваномагнитных явлений и определяются с помощью объемных плотностей потоков заряда и энергии, нам необходимо прежде всего уметь вычислять эти потоки.

В классической теории \mathbf{j} и \mathbf{Q} определяются с помощью функции распределения f , являющейся решением уравнения Больцмана, линейным по электрическому полю \mathbf{E} и градиентам химического потенциала ζ и температуры T . Эти формулы имеют вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int (d\mathbf{p}) e \mathbf{v} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \quad (2,3)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int (d\mathbf{p}) \mathbf{v} \varepsilon(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \quad (2,4)$$

где e — заряд, а $\varepsilon(\mathbf{p})$ — энергия носителя. В квантовой теории аналогом этих формул являются средние значения квантовомеханических операторов, соответствующих объемным плотностям потоков заряда и энергии

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \text{Sp}(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{j}}), \quad (2,5)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \text{Sp}(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{Q}}), \quad (2,6)$$

где $\hat{\rho}$ — матрица плотности, а

$$\mathbf{j} = \frac{e}{2} (\hat{\mathbf{v}} \hat{N} + \hat{N} \hat{\mathbf{v}}), \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{2e} (\hat{\mathbf{j}} \hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}} \hat{\mathbf{j}}), \quad (2,7)$$

$\hat{\mathbf{v}}$, $\hat{\mathcal{H}}$, \hat{N} — операторы скорости, энергии и плотности носителей соответственно.

В некоторых ранних работах пытались использовать в теории термомагнитных явлений другое определение потоков заряда и энергии, а именно

$$\mathbf{j}' = e \text{Sp}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\rho}), \quad \mathbf{Q}' = \frac{1}{2} \text{Sp}(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}} \hat{\mathbf{v}}).$$

Нетрудно убедиться в том, что \mathbf{j}' и \mathbf{Q}' совпадают с $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$, определенными в (2,5) и (2,6), лишь в частном случае пространственно-однородных систем и при наличии лишь однородного электрического поля. В пространственно-неоднородных системах, когда $\nabla T \neq 0$, $\nabla \zeta \neq 0$, \mathbf{j}' и \mathbf{Q}' отличаются от \mathbf{j} и \mathbf{Q} . Классический предел ($\hbar = 0$) \mathbf{j}' , \mathbf{Q}' , в отличие от \mathbf{j} , \mathbf{Q} , не совпадает с хорошо известными результатами, вытекающими из кинетического уравнения Больцмана. Именно поэтому попытки использования \mathbf{j}' и \mathbf{Q}' в теории термомагнитных явлений приводили к ошибочным результатам.

Далее рассмотрим примеры, из которых будет видно, что не всегда $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ совпадает с $\mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r})$, а $\mathbf{Q}(\mathbf{r}) - \frac{\zeta}{e} \mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r})$ с потоком тепла $\mathbf{Q}_T(\mathbf{r})$. Если внешнее магнитное поле $\mathbf{H} = 0$ и при этом равна нулю намагниченность носителей \mathbf{M} , то потоки $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{Q}(\mathbf{r}) - \frac{\zeta}{e} \mathbf{j}(\mathbf{r})$, вызванные электрическим полем и градиентами T и ζ , удовлетворяют как всем требованиям термодинамики необратимых процессов, предъявляемым к $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ и \mathbf{Q}_T , так и при-

веденным выше определениям этих потоков. Именно поэтому можно отождествить $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ с $\mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r})$, а $\mathbf{Q}(\mathbf{r}) - \frac{\zeta}{e} \mathbf{j}(\mathbf{r})$ с потоком тепла $\mathbf{Q}_T(\mathbf{r})$.

Если в пространственно-однородной системе $\mathbf{H} \neq 0$, а потоки вызваны только однородным электрическим полем \mathbf{E} ($\nabla T = \nabla \zeta = 0$), то \mathbf{M} будет также пространственно-однородна. При этом $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ будет совпадать с $\mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r})$, но $\mathbf{Q}(\mathbf{r}) - \frac{\zeta}{e} \mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r})$ уже не будет совпадать с потоками тепла, поскольку в $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ наряду с $\frac{\zeta}{e} \mathbf{j}_{\text{пр}}$ содержится также поток магнитной энергии ($-c [\mathbf{E}\mathbf{M}]$), равный вкладу в вектор Пойнтинга от намагничивания $\frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{H} - \mathbf{B})]$. Таким образом, поток тепла в этом случае будет определяться формулой

$$\mathbf{Q}_T(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}(\mathbf{r}) - \frac{\zeta}{e} \mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r}) - \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{H} - \mathbf{B})].$$

Если потоки $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ обусловлены как \mathbf{E} , так и ∇T и $\nabla \zeta$, то при $\mathbf{H} \neq 0$ намагниченность носителей $\mathbf{M}(T(\mathbf{r}), \zeta(\mathbf{r}))$ зависит от координат. В этом случае $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ уже не будет совпадать с $\mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r})$, поскольку в $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ наряду с $\mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r})$ будут вносить вклад (равный $c \text{rot } \mathbf{M}$) пространственные неоднородности намагничивания \mathbf{M} . Аналогично в $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ наряду с потоком тепла $\mathbf{Q}_T(\mathbf{r})$ входит поток магнитной энергии $\mathbf{Q}_M(\mathbf{r})$, который, кроме слагаемого $-c [\mathbf{E}\mathbf{M}]$, возникающего и в пространственно-однородных системах, содержит члены, зависящие от $\text{rot } \mathbf{M}$. Ниже будет доказано, что вклад в перенос заряда через поперечное сечение всего проводника вносит лишь часть объемной плотности потока заряда, равная разности

$$\mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r}) = \text{Sp}(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{j}}) - c \text{rot } \mathbf{M}, \quad (2,8)$$

а в перенос тепловой энергии дает вклад также только разность

$$\mathbf{Q}_T(\mathbf{r}) = \text{Sp}(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{Q}}) - \frac{\zeta}{e} \mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r}) - \mathbf{Q}_M(\mathbf{r}), \quad (2,9)$$

$$\mathbf{Q}_M(\mathbf{r}) = -c [\mathbf{E}\mathbf{M}] + \frac{c}{e} \left\{ T \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_{\zeta} + \zeta \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right)_T \right\} \int_{-\infty}^{\zeta} d\zeta' \text{rot } \mathbf{M}(T, \zeta'). \quad (2,10)$$

Формулы (2,8) — (2,10), определяющие объемные плотности тока проводимости и потока тепла, в соответствии с ¹⁵ составляют основу для построения микроскопической теории термогальваномагнитных явлений. Кинетические коэффициенты, характеризующие $\mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{Q}_T(\mathbf{r})$, удовлетворяют как соотношению Эйнштейна, так и принципу симметрии Онсагера. Таким образом, задача микроскопической теории термогальваномагнитных явлений сводится:

1) к вычислению $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \text{Sp}(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{j}})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \text{Sp}(\hat{\rho}\hat{\mathbf{Q}})$

и

2) к выделению $\mathbf{j}_{\text{пр}}(\mathbf{r})$ из $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{Q}_T(\mathbf{r})$ из $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$

Образцов ¹⁷ предлагает определять термомагнитные коэффициенты для пространственно-однородных сред и градиентов температуры и химического потенциала с помощью так называемых полных потоков (объемные плюс поверхностные), отнесенных к площади сечения проводника. Эта постановка задачи — частный случай более общей изложенной в ¹⁵.

В случае пространственных неоднородностей T и ξ формула (2,8) хорошо известна и является следствием усреднения уравнений Лоренца для микроскопического электромагнитного поля¹⁵. Но поток магнитной энергии $Q_M(\mathbf{r})$ теперь не сводится к вкладу в вектор Пойнтинга от намагничивания, а выражается более сложной формулой (2,10), найденной в¹⁸ (см. также^{19, 20}).

В заключение этого раздела отметим, что определения термогальваномагнитных коэффициентов с помощью потоков (2,1) совершенно одинаковы для классических и квантовых систем и приведены, например, в^{15, 4}. Мы выпишем здесь формулы лишь для некоторых из них.

В изотермических условиях при заданном градиенте температуры $\nabla_x T \perp \mathbf{H}$ дифференциальная термо-э. д. с. α_{xx} , коэффициент Нернста $N = \alpha_{xy}/H$ и теплопроводность κ_1 , характеризующая поток тепла вдоль $(-\nabla_x H)$, находятся с помощью (2,1) при условии $j_{\text{пр}} = 0$, $\nabla_y T = 0$. Для случая изотропной среды, когда все тензоры кинетических коэффициентов в (2,1) имеют структуру

$$\begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ -A_{xy} & A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & A_{zz} \end{pmatrix},$$

находим

$$\alpha_{xx} = (\sigma_{xx}\beta_{xx} + \sigma_{xy}\beta_{xy})(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xx}^2)^{-1}, \quad (2,11)$$

$$\alpha_{xy} = (\sigma_{xy}\beta_{xx} - \sigma_{xx}\beta_{xy})(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xx}^2)^{-1}, \quad (2,12)$$

$$\kappa_{\perp} = -(\chi_{xx}\alpha_{xx} + \chi_{xy}\alpha_{xy} - \kappa_{xx}), \quad (2,13)$$

а электросопротивление

$$\begin{aligned} \rho_{xx} &\equiv \rho_{\perp} = \sigma_{xx}(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2)^{-1}, \\ \rho_{xy} &= \sigma_{xy}(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (2,14)$$

Эффект Риги-Ледюка*) является адиабатическим и находится из (2,1) при условиях $\nabla_x T \neq 0$, $\nabla_y T \neq 0$, $j_{\text{пр}} = 0$, $(Q_T)_y = 0$. В изотропной среде

$$\nabla_y T = [\chi_{xx}\alpha_{xy} - \chi_{xy}\alpha_{xx} + \kappa_{xy}](\kappa'_{\perp})^{-1} \nabla_x T \quad (2,15)$$

(κ'_{\perp} — теплопроводность электронов и фононов). В случае сильных магнитных полей ($\Omega\tau \gg 1$) $\sigma_{xy} \gg \sigma_{xx}$, $\beta_{xy} \gg \beta_{xx}$, $\kappa_{xy} \gg \kappa_{xx}$, поскольку недиагональные компоненты не зависят от рассеяния, тогда как диагональные $\sim \frac{1}{\Omega\tau}$. Однако неравенство $\sigma_{xy} \gg \sigma_{xx}$ нарушается в проводниках, для которых концентрация электронов $n_e = n_d$ (n_d — концентрация дырок). Это нетрудно понять, если вспомнить, что электрическое поле $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ вызывает дрейф носителей со скоростью $\mathbf{v}_E = c[\mathbf{E}\mathbf{H}]/H^2$, не зависящей ни от знака заряда, ни от его массы. Поэтому как дырки, так и электроны дрейфуют с одной и той же скоростью, и если $n_e = n_d$, то электрический ток обращается в нуль и $\sigma_{xy} = 0$. Следовательно, при $n_e = n_d$ разложение σ_{xy} по степеням параметра $(1/\Omega\tau)$ начинается не с нулевой степени, как это имеет место при $n_e \neq n_d$, а со второй: $(1/\Omega\tau)^2$.

*) Этот эффект заключается в том, что взаимно перпендикулярные магнитное поле и поток тепла в проводниках приводят к появлению градиента температуры в направлении, ортогональном как магнитному полю, так и потоку тепла (в «холловском направлении»).

III. НЕДИССИПАТИВНЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ПОТОКИ В КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Как известно, действующая на электроны сила $\mathbf{F} \perp \mathbf{H}$ в нулевом приближении по рассеянию приводит лишь к дрейфу со скоростью

$$\mathbf{v}_F = \frac{c}{eH^2} [\mathbf{F}\mathbf{H}].$$

Такое движение электронов создают динамические силы, например, для электрического \mathbf{E} и гравитационного \mathbf{g} полей соответственно $\mathbf{F}_E = e\mathbf{E}$, $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$. Динамические силы можно учесть непосредственно в гамильтониане электронов. Существуют силы другой природы, обусловленные пространственными неоднородностями температуры T и химического потенциала ζ , которые иногда называют силами статистической природы. Эти силы можно учесть последовательно лишь при статистическом описании системы. В случае сильного магнитного поля ($\Omega\tau \gg 1$) в нулевом приближении по рассеянию функция распределения электронов по состояниям будет зависеть лишь от одночастичных интегралов движения. В качестве таких интегралов движения можно взять, например, энергию $\varepsilon(\mathbf{p})$, импульс вдоль магнитного поля p_z и x -координату центра ларморовой орбиты x_0 . Будем рассматривать в дальнейшем распределения, зависящие лишь от $\varepsilon(\mathbf{p})$ и x_0 , например, $f_0([\varepsilon(\mathbf{p}) - \zeta(x_0)]/T(x_0))$. Такие распределения описывают системы пространственно-неоднородные вдоль оси $x \perp \mathbf{H}$. В случае слабых пространственных неоднородностей, когда $\zeta(x_0)$ и $T(x_0)$ остаются почти постоянными на радиусе Лармора, x_0 можно отождествлять с x -координатой электрона; тогда $\zeta(x)$ и $T(x)$ имеют смысл локальных значений химического потенциала и температуры. Полагая $x_0 = x - (x - x_0)$, в предположении слабых пространственных неоднородностей можно разложить f_0 в ряд

$$f_0\left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p}) - \zeta(x_0)}{T(x_0)}\right) = f_0\left(\frac{\varepsilon(\mathbf{p}) - \zeta(x)}{T(x)}\right) + \\ + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \left(\nabla_x \zeta + \frac{\varepsilon(\mathbf{p}) - \zeta(x)}{T(x)} \nabla_x T \right) (x - x_0) + \dots \quad (3,1)$$

С помощью (3,1) нетрудно найти объемную плотность потока заряда. Учитывая, что

$$x - x_0 = \frac{v_{\perp}}{\Omega} \cos \varphi, \quad v_y = v_{\perp} \cos \varphi$$

($\varphi = \Omega t$) и периодичность f_0 по переменной φ , находим

$$j_y = e \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left(\nabla_x \zeta + \frac{\varepsilon(\mathbf{p}) - \zeta}{T} \nabla_x T \right) \frac{v_y^2}{\Omega}. \quad (3,2)$$

Это — хорошо известный результат, в частности, вытекающий из кинетического уравнения Больцмана (в пренебрежении рассеянием).

Перейдем теперь к рассмотрению случая квантующего магнитного поля. Одночастичные состояния электрона будем описывать в представлении Ландау. Гамильтониан электрона в этом представлении имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 / 2m, \quad \mathbf{A}_0 = \{0, Hx, 0\}, \quad (3,3)$$

а собственные функции и собственные значения его

$$|v\rangle \equiv |n, p_z, x_0\rangle = (L_y L_z \alpha)^{-1/2} \exp\left(\frac{i p_y y}{\hbar} + \frac{i p_z z}{\hbar}\right) \Phi_n\left(\frac{x - x_0}{\alpha}\right), \\ E_v \equiv E(n, p_z) = \hbar\Omega(n + 1/2) + \frac{p_z^2}{2m},$$

где $x_0 = \frac{c}{eH} p_y$ — проекция центра ларморовой орбиты на ось x , $\Phi_n(x)$ — собственная функция гармонического осциллятора, нормированная на единицу, $\alpha^2 = \hbar c / |e| H$, и, наконец, L_y и L_z характеризуют нормировочный объем. При наличии электрического поля E , направленного вдоль оси x , собственные функции (3,3) остаются теми же, но

$$x_0 = \frac{c}{eH} p_y + \frac{mc^2}{eH^2} E_x,$$

а собственные значения

$$E(n, p_z, x_0) = E(n, p_z) - ex_0 E_x + \frac{mc^2}{2H^2} E_x^2.$$

В пренебрежении рассеянием матрица плотности в представлении Ландау диагональна: $\rho_{vv'} = f_v \delta_{vv'}$, и имеет смысл функции распределения электронов по состояниям n, p_z, x_0 . Так же, как и в классическом случае, будем рассматривать распределения, зависящие лишь от двух интегралов движения $E(n, p_z), x_0$. В предположении слабых пространственных неоднородностей

$$f(n, p_z, x_0) = f\left(\frac{E(n, p_z) - \zeta(x)}{T(x)}\right) + \frac{\partial f}{\partial E} \left(\nabla_x \zeta + \frac{E(n, p_z) - \zeta}{T} \nabla_x T \right) (x - x_0) + \dots \quad (3,4)$$

С помощью (3,4) и определений (2,5), (2,6) находим объемные плотности потоков заряда и энергии:

$$j_y(x) = -\frac{ceN}{H} E_x - \frac{c}{H} \frac{2}{(2\pi\alpha)^2 \hbar} \sum_n E_n \int dp_z \frac{\partial f}{\partial E} \left[\nabla_x \zeta + \frac{E(n, p_z) - \zeta}{T} \nabla_x T \right], \quad (3,5)$$

$$Q_y(x) = -\frac{cN}{H} (\bar{E} + \bar{E}_\perp) E_x - \frac{c}{eH} \frac{2}{(2\pi\alpha)^2 \hbar} \times \\ \times \sum_n E_n \int dp_z E(n, p_z) \frac{\partial f}{\partial E} \left[\nabla_x \zeta + \frac{E(n, p_z) - \zeta}{T} \nabla_x T \right], \\ N(\bar{E} + \bar{E}_\perp) = \frac{2}{(2\pi\alpha)^2 \hbar} \sum_n \int dp_z [E(n, p_z) + E_n] f(n, p_z), E_n = \hbar \Omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (3,6)$$

Из формул (3,5) и (3,6) видно, что соотношение Эйнштейна для кинетических коэффициентов, характеризующих j_y и Q_y , не выполняется, т. е. коэффициенты перед $\left(-\frac{1}{e} \nabla_x \zeta\right)$ и E_x различны.

Впервые на этот факт обратили внимание японские физики Касуя²¹, Накаджима²² (см. также работу Кубо²³). Однако фактическая причина нарушения соотношения Эйнштейна была вскрыта в работе Зырянова и Силина²⁴, где было показано, что в случае пространственно-неоднородных систем в объемную плотность потока заряда $j_y(x)$ при наличии квантующего магнитного поля вносит вклад ток $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$, обусловленный зависимостью диамагнитной восприимчивости Ландау от $\zeta(x)$. Там же было показано, что разность $j_y(x) - c \operatorname{rot}_y \mathbf{M}$ удовлетворяет соотношению Эйнштейна. В работе¹⁸ была дана физическая интерпретация результатов²⁴ и показано, что объемная плотность потока заряда не совпадает с плотностью тока проводимости и отличается от него на величину $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$; другими словами, была получена из микроскопической теории хорошо известная формула¹⁵

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + c \operatorname{rot} \mathbf{M},$$

в которой намагничение обусловлено орбитальным движением электронов проводимости (диамагнетизм Ландау).

Таким образом, задача о выделении тока проводимости из $j_y(x)$ оказалась сравнительно простой, в то время как задача о выделении потока тепла $Q_T(x)$ из объемной плотности потока энергии $Q(x)$ оказалась значительно труднее. Для решения этой задачи при наличии квантующего магнитного поля выделим прежде всего ту часть объемных плотностей потоков заряда и энергии, которая зависит от пространственных неоднородностей намагничивания, обусловленных градиентами температуры и химического потенциала. Из общих соображений ясно, что от вектора намагничивания \mathbf{M} могут зависеть только недиагональные компоненты тензоров кинетических коэффициентов в \mathbf{j} и \mathbf{Q} . Действительно, поскольку \mathbf{j} и \mathbf{Q} являются полярными векторами, а \mathbf{M} — аксиальный вектор, то в линейном по \mathbf{M} приближении наиболее общая зависимость \mathbf{j} и \mathbf{Q} от \mathbf{M} может быть представлена в виде линейного функционала от $\text{rot } \mathbf{M}$. В случае пространственных неоднородностей \mathbf{M} , обусловленных лишь зависимостью \mathbf{M} от T и ζ ,

$$\text{rot } \mathbf{M} = \left[\left(\nabla_r T \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_{\zeta} + \nabla_r \zeta \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right)_T \right) \mathbf{M} \right]. \quad (3,7)$$

Из этой формулы видно, что в рамках линейной теории переноса от \mathbf{M} могут зависеть лишь недиагональные компоненты тензоров кинетических коэффициентов в \mathbf{j} и \mathbf{Q} . С другой стороны, в условиях $\Omega\tau \gg 1$ недиагональные компоненты тензоров кинетических коэффициентов не зависят от рассеяния. Поэтому задачу выделения $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ из \mathbf{j} и \mathbf{Q}_T из \mathbf{Q} достаточно решить в пренебрежении рассеянием. Для этого выразим кинетические коэффициенты в (3,5), (3,6) через термодинамические функции электронного газа. Такая возможность очевидна, поскольку потоки вычислялись, во-первых, в пренебрежении рассеянием и, во-вторых, в локально равновесном состоянии.

Введем в рассмотрение термодинамический потенциал электронного газа

$$\Phi(H, T, \zeta, V) = -\frac{2TV}{(2\pi\alpha)^2 \hbar} \sum_n \int dp_z \ln [1 + \exp \{(\zeta - E(n, p_z))/T\}],$$

где V — объем системы.

Поскольку $\Phi = -\mathcal{F}V$, давление \mathcal{F} численно равно с обратным знаком термодинамическому потенциалу единицы объема. Поэтому энтропия S , число частиц N и намагниченность \mathbf{M} , отнесенные к единице объема, выражаются следующими формулами:

$$S = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right)_{V, H, \zeta}, \quad N = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta} \right)_{V, T, H}, \quad \mathbf{M} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H} \right)_{V, T, \zeta}. \quad (3,8)$$

Кинетические коэффициенты в формулах (3,5) и (3,6) можно выразить через термодинамические функции (3,8). Если при этом пренебречь сжимаемостью электронного газа, то (3,5) и (3,6) можно записать в следующем виде:

$$j_y = -\frac{c}{H^2} \text{rot}_y ((\mathcal{F} + eN\Phi) \mathbf{H}) + c \text{rot}_y \mathbf{M}, \quad (3,9)$$

$$Q_y = -\frac{c}{eH^2} \left[\zeta \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right)_T + T \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_{\zeta} \right] \int_{-\infty}^{\zeta} d\zeta' \{ \text{rot}_y ((\mathcal{F} + eN\Phi) \mathbf{H}) - \\ - H^2 \text{rot}_y \mathbf{M} \} - c [\mathbf{EM}]_y; \quad (3,10)$$

здесь

$$E_x = -\nabla_x \varphi, \\ -\frac{1}{H} \operatorname{rot}_y (\mathcal{F} + eN\varphi) \mathbf{H} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} \right)_{V, T, H} \nabla_x \xi + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V, \xi, H} \nabla_x T + eN \nabla_x \varphi. \quad (3,11)$$

Из этих формул видно, что бесстолкновительные или недиссипативные потоки являются существенно вихревыми, поэтому для выделения тока проводимости и потока тепла нельзя использовать уравнение непрерывности.

Формулы (3,9) и (3,10) замечательны прежде всего тем, что как \mathbf{j} , так и \mathbf{Q} выражены через макроскопические величины \mathbf{M} и $(\mathcal{F} + eN\varphi)$, для которых известны граничные условия на поверхности проводника; кроме того, эти формулы допускают обобщение их на случай явной зависимости \mathbf{M} и $(\mathcal{F} + eN\varphi)$ от пространственных координат. Из электродинамики известно¹⁵, что тангенциальная составляющая \mathbf{M} испытывает разрыв на поверхности намагниченного проводника и обращается в нуль вне проводника, а $(\mathcal{F} + eN\varphi)$ в пренебрежении сжимаемостью является электрохимическим потенциалом, отнесенным к единице объема, который постоянен всюду в состоянии термодинамического равновесия и непрерывен всюду, включая и границы раздела сред, при малых отклонениях от термодинамического равновесия (см.¹⁶). Учитывая эти граничные условия, можно заметить, что слагаемые в (3,9) и (3,10), содержащие $\operatorname{rot} \mathbf{M}$, вклада в перенос заряда и энергии через поперечное сечение всего проводника не вносят¹⁵. В этом легко убедиться. Проинтегрируем (3,9) по площади поперечного сечения всего проводника и воспользуемся теоремой Стокса

$$\int (\mathbf{j} \, ds) = -\frac{c}{H^2} \int \operatorname{rot} ((\mathcal{F} + eN\varphi) \mathbf{H}) \, ds + c \int \operatorname{rot} \mathbf{M} \, ds = \\ = -\frac{c}{H^2} \oint_L (\mathcal{F} + eN\varphi) (\mathbf{H} \, d\mathbf{l}) + c \oint_L (\mathbf{M} \, d\mathbf{l}). \quad (3,12)$$

Контур интегрирования L должен охватывать площадь сечения всего проводника. Контур L можно выбрать так, чтобы он лежал всюду вне проводника, нигде не касаясь его поверхности. Поскольку $\mathbf{M} = 0$ вне проводника, а значит, и на контуре L , то $\oint_L \mathbf{M} \, d\mathbf{l} = 0$. В силу непрерывности $(\mathcal{F} + eN\varphi)$ всюду *)

$$\oint_L (\mathcal{F} + eN\varphi) (\mathbf{H} \, d\mathbf{l}) \neq 0,$$

если состояние системы отличается от термодинамического равновесия, характеризуемого условием $(\mathcal{F} + eN\varphi) = \text{const}$. Таким образом, в состояниях, отличных от термодинамического равновесия, вклад в перенос заряда через поперечное сечение всего проводника дает лишь первое слагаемое в (3,9), которое в соответствии с определением и является плотностью тока проводимости:

$$\mathbf{j}_{\text{пр}} = -\frac{c}{H^2} \operatorname{rot} ((\mathcal{F} + eN\varphi) \mathbf{H}). \quad (3,13)$$

Полученный результат допускает следующую наглядную интерпретацию. Пусть $\operatorname{rot} \mathbf{M} \neq 0$ в любой точке поперечного сечения проводника,

*) На поверхности проводника как \mathcal{F} , так и $eN\varphi$ терпят разрыв, но сумма их непрерывна, поскольку скачок \mathcal{F} компенсируется скачком φ , обусловленным двойным электрическим слоем на поверхности проводника.

тогда с $\text{rot } \mathbf{M}$ вносит вклад в перенос заряда, но на поверхности проводника \mathbf{M} испытывает конечный скачок и $\text{rot } \mathbf{M} = \infty$. Последнее обстоятельство приводит к возникновению поверхностного тока, который полностью компенсирует вклад в перенос заряда через сечение проводника от объемного тока с $\text{rot } \mathbf{M}$. Именно благодаря этому $\int \text{rot } \mathbf{M} ds = 0$. Функция $(\mathcal{F} + eN\phi)$ не имеет конечных скачков нигде, в том числе и на поверхности проводника, поэтому ее производные всюду ограничены. Это приводит, в частности, к отсутствию поверхностного тока проводимости.

Перейдем к выделению потока тепла из (3,10). Так же как и в предыдущем случае проинтегрируем (3,10) по площади поперечного сечения всего проводника:

$$\int Q ds = \int ds \left\{ -\frac{c}{eH} \left[\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + T \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_{\zeta} \right] \int_{-\infty}^{\zeta} d\zeta' (\text{rot } (\mathcal{F} + eN\phi) \mathbf{H} - H^2 \text{rot } \mathbf{M}) \right\} - c \int ds [\mathbf{E}\mathbf{M}]. \quad (3,14)$$

В случае слабых пространственных неоднородностей (т. е. в линейной по ∇T и $\nabla \zeta$ теории переноса) в операторе $\left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + T \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_{\zeta} \right) \int_{-\infty}^{\zeta} d\zeta' \dots$ следует заменить ζ и T на их средние значения по сечению проводника. Учет отличия ζ и T от их средних значений в этом операторе приведет к членам второго порядка по ∇T и $\nabla \zeta$, которыми мы всюду пренебрегаем. Учитывая это, переставим порядок интегрирования по ds и $d\zeta$; тогда анализ полученного выражения ничем не будет отличаться от анализа формулы (3,12), приведенного выше. Вклад в перенос энергии через сечение проводника от слагаемого $-c [\mathbf{E}\mathbf{M}]$ полностью компенсируется поверхностным потоком, обусловленным скачком тангенциальной составляющей \mathbf{M} . Следовательно, вклад в перенос энергии через поперечное сечение всего проводника вносит лишь слагаемое, пропорциональное $\mathcal{F} + eN\phi$. Используя определение потока тепла, получим для него следующую формулу:

$$\begin{aligned} (Q_T)_y = Q_y - \frac{\zeta}{e} (j_{\text{пр}})_y - (Q_M)_y = -\frac{c}{eH^2} T \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_{\zeta} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\zeta} d\zeta' \text{rot}_y (\mathbf{H} (\mathcal{F} + eN\phi)), \end{aligned} \quad (3,15)$$

входящий сюда поток магнитной энергии Q_M описывается формулой (2,10).

С помощью (3,8), (3,11) формулам (3,13) и (3,15) можно придать иной вид, а именно:

$$\begin{aligned} (j_{\text{пр}})_y = \frac{c}{H^2} Ne \left[\left(\mathbf{E} - \frac{1}{e} \nabla \zeta \right) \mathbf{H} \right]_y + \frac{c}{H^2} S [\mathbf{H} \nabla T]_y, \\ (Q_T)_y = \frac{c}{H^2} TS \left[\left(\mathbf{E} - \frac{1}{e} \nabla \zeta \right) \mathbf{H} \right]_y + \\ + \frac{c}{eH^2} T \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_{\zeta} \int_{-\infty}^{\zeta} d\zeta' S(\zeta', T) [\mathbf{H} \nabla T]_y. \end{aligned} \quad (3,16)$$

Из такой записи $j_{\text{пр}}$ и Q_T видно, что эти потоки удовлетворяют как соотношению Эйнштейна, так и принципу симметрии Онсагера. В случае сильно вырожденного электронного газа соответствующие коэффициенты в (3,16) и (3,17) связаны законом Видемана — Франца¹⁸ (см. также²⁵).

Формула, аналогичная (3,16), и вытекающая из нее дифференциальная термо-э. д. с. в пренебрежении рассеянием, $\alpha_{xx} \approx \beta_{xy}/\sigma_{xy} = S/(eN)$, (см. (2,11)), были впервые найдены Образцовым¹⁷. Пелетминский и Барьяхтар²⁵ вычислили все коэффициенты в $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ и \mathbf{Q}_T и получили результаты, отличающиеся от (3,16) и (3,17) лишь формой записи. Формулы (3,16) и (3,17) сохраняются при учете спина¹³, а также при произвольном изотропном законе дисперсии носителей²⁰. Недавно в работе Цэндина и Эфроса²⁶ была подтверждена справедливость (3,16) при учете спин-орбитального взаимодействия носителей в двухзонной модели кристалла с изотропным законом дисперсии. В проводниках с анизотропным законом дисперсии носителей пространственные неоднородности температуры и химического потенциала в плоскости, ортогональной магнитному полю, вызывают потоки вдоль магнитного поля. Вычисление потока тепла и тока проводимости в таких проводниках в пренебрежении рассеянием проведено Окуловым²⁷. Пелетминским²⁸ изложен метод выделения тока проводимости и потока тепла в пространственно-однородных проводниках при произвольном соотношении между частотой Лармора и частотой релаксации носителей.

Отметим, что формулы (2,8) — (2,10), определяющие плотность тока проводимости и потока тепла, имеют более широкую область применимости, выходящую за рамки тех модельных ограничений, при которых они получены из микроскопической теории в работах^{18–20}. В частности, можно думать, что эти формулы справедливы для произвольных магнетиков и при произвольном значении $\Omega\tau$. Действительно, входящий в (2,8) ток, связанный с намагничиванием носителей, для любых магнетиков и, конечно, при любом $\Omega\tau$ выражается формулой¹⁵. Эта формула есть следствие макроскопических граничных условий для \mathbf{M} на поверхности проводника, а поток магнитной энергии, входящий в (2,9), также выражается через $\text{rot } \mathbf{M}$ (см. (2,10)).

В заключение этого раздела остановимся на строгом обосновании методики вычисления недиссипативных потоков. При получении формул (3,5), (3,6) и (3,13), (3,15) молчаливо предполагалось, что функция распределения $f_0([E(n, p_z) - \zeta(x_0)]/T(x_0))$ является функцией Ферми и описывает пространственно-неоднородные распределения электронов вдоль оси x и в случае слабых неоднородностей служит определением локальных термодинамических характеристик электронного газа, таких, как температура $T(x)$ и химический потенциал $\zeta(x)$. Докажем эти предположения.

В достаточно плотном электронном газе термодинамическое равновесие устанавливается благодаря межэлектронным столкновениям. В случае слабых пространственных неоднородностей интеграл столкновений электронов (II, 14) (см. приложение) можно разложить в ряд по малому параметру:

$$\alpha^2 q_y / L = \left(\frac{r_L}{L} \right) \left(\frac{\hbar q_y}{p_e} \right) \ll 1;$$

здесь

$$L \sim f |\partial f / \partial x_0|^{-1}, \quad r_L = \bar{p}_e / m\Omega,$$

\bar{p}_e — средний импульс электрона, а $\hbar q_y$ — изменение импульса электрона при столкновении. Член нулевого порядка по этому параметру приводит к кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} = \sum_{v, v', v''} W_{vv''}^{xv'} \{f_v(1-f_x)f_{v'}(1-f_{v''}) - f_x(1-f_v)f_{v''}(1-f_{v'})\}, \quad (3,18)$$

являющемуся обычным уравнением баланса частиц в ячейке κ . Первый член в фигурной скобке описывает приход частиц в ячейку κ , а второй — уход. Вероятность перехода на единицу времени равна

$$W_{\nu\nu'}^{\kappa\nu'} = \sum_q \frac{2\pi}{\hbar} |C_q|^2 F_{n_\nu n_\kappa} (\alpha^2 q_\perp^2 / 2) F_{n_{\nu'} n_{\nu''}} (\alpha^2 q_\perp^2 / 2) \times \\ \times \delta [E_{\nu'} + E_\kappa - E_\nu - E_{\nu''}] \delta (p_z^{(\nu)} - p_z^{(\kappa)} - \hbar q) \delta (p_z^{(\nu')} - p_z^{(\nu'')} - \hbar q_z) \times \\ \times \delta (x_{0\kappa} - x_{0\nu''}) \delta (x_{0\nu} - x_{0\kappa}) \delta (x_{0\nu'} - x_{0\kappa}).$$

Из (3,18) вытекает, что функция

$$f(n, p_z, x_0) = \left\{ \exp \left(\frac{E(n, p_z) - \xi(x_0)}{T(x_0)} \right) + 1 \right\}^{-1} \quad (3,19)$$

обращает в нуль интеграл столкновений. При низких концентрациях электронов проводимости в установлении термодинамического равновесия существенны их столкновения с фононами. Допустим, что взаимодействие фононов с термостатом, температура которого задана функцией $T(x)$, достаточно сильное и что их столкновения с электронами не нарушают локального равновесия фононов с термостатом. При этих предположениях в кинетическом уравнении для электронов функцию распределения фононов следует считать локально-равновесной:

$$N_q(x) = N_q^0(x) = \left\{ \exp \left(\frac{\hbar \omega_q}{T(x)} \right) - 1 \right\}^{-1}. \quad (3,20)$$

Эта функция является приближенным решением кинетического уравнения (П,29), (П,30) при условии, что частота столкновений фононов с электронами мала в сравнении с частотой столкновения фононов с термостатом $\omega_{pp}(q)$ (П,30). Подставляя (3,20) в кинетическое уравнение для электронной матрицы плотности (П,28) и разлагая затем интеграл столкновений электронов с фононами $I_{ep}[f]$ в ряд по $(r_L/L)(\hbar q_y/p_e) \ll 1$, найдем в нулевом порядке уравнение

$$\frac{\partial f_\kappa}{\partial t} = \sum_{(\nu, q)} (1 - \hat{\mathcal{F}}_{\nu\kappa}) W_{\nu\kappa}(\mathbf{q}) \{f_\nu (1 - f_\kappa) (N_q^0(x_{0\kappa}) + 1) - f_\kappa (1 - f_\nu) N_q^0(x_{0\kappa})\}, \quad (3,21)$$

учитывающее приход и уход электронов в состоянии κ при взаимодействии их с фононами. Здесь вероятность перехода на единицу времени такова:

$$W_{\nu, \kappa}(\mathbf{q}) = \frac{2\pi}{\hbar} |C_q|^2 F_{n_\kappa n_\nu} (\alpha^2 q_\perp^2 / 2) \delta [E_\kappa - E_\nu + \hbar \omega_q] \times \\ \times \delta (p_z^{(\kappa)} + \hbar q_z - p_z^{(\nu)}) \delta (p_y^{(\kappa)} - p_y^{(\nu)}); \quad (3,22)$$

$\hat{\mathcal{F}}_{\nu\kappa}$ — оператор, заменяющий $\nu \rightleftharpoons \kappa$. Интеграл столкновений в (3,21) обращается в нуль также функцией (3,19). Покажем, что (3,19) определяет локальные значения температуры и химического потенциала электронного газа. Число частиц в состоянии n, p_z в точке x по определению равно

$$N_{n, p_z}(x) = \int dx_0 f \left(\frac{E(n, p_z) - \xi(x_0)}{T(x_0)} \right) \Phi_n^2 \left(\frac{x - x_0}{\alpha} \right).$$

Предположение о слабых пространственных неоднородностях позволяет вынести из-под знака интеграла f в точке $x_0 = x$, поскольку $\Phi_n^2 \left(\frac{x - x_0}{\alpha} \right)$

отлична от нуля при $|x - x_0| \lesssim r_L$, а f практически постоянна на расстояниях $\sim r_L$. Учитывая при этом нормировку Φ_n^2 , находим

$$N_{n, p_z}(x) = f_0 \left(\frac{E(n, p_z) - \zeta(x)}{T(x)} \right).$$

Отсюда следует, что $\zeta(x)$ и $T(x)$ — локальные значения химического потенциала и температуры.

IV. ДИССИПАТИВНЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ПОТОКИ В ПРИБЛИЖЕНИИ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

При учете лишь упругого рассеяния электронов в первом борновском приближении задача вычисления тока проводимости и потока тепла, обусловленных пространственными неоднородностями температуры T и химического потенциала ζ , является особенно простой. Именно с этого случая мы и начнем вычисление диссипативных электронных потоков.

Прежде всего остановимся на определении диссипативных потоков тепла и тока проводимости. Эти потоки при изотропном законе дисперсии носителей характеризуются лишь диагональными компонентами тензоров кинетических коэффициентов (т. е. являются потенциальными); они определяются с помощью уравнений непрерывности. Ток проводимости $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ следует определять из уравнений сохранения заряда $eN(\mathbf{r})$ и энергии $W(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} (eN(\mathbf{r}, t)) + \text{div } \mathbf{j}_{\text{пр}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} W(\mathbf{r}, t) + \text{div } \mathbf{Q}_T = 0. \quad (4,1)$$

Если ограничиться изучением пространственных неоднородностей лишь вдоль оси x , ортогональной квантующему магнитному полю, то достаточно рассматривать в этом случае лишь диагональные элементы матрицы плотности в представлении Ландау (энергетическое представление) $f(n, p_z, x_0)$. Плотность заряда в точке x равна по определению диагональному элементу матрицы плотности в координатном представлении (x -представлении), умноженной на заряд носителя:

$$eN(x) = e \frac{2}{(2\pi\alpha)^2 \hbar} \sum_n \int dp_z \int dx_0 f(n, p_z, x_0) \Phi_n^2 \left(\frac{x - x_0}{\alpha} \right). \quad (4,2)$$

Как видно из (4,2), $\frac{\partial}{\partial t} N$ выражается через $\frac{\partial}{\partial t} f(n, p_z, x_0)$. Последнюю величину можно найти из кинетического уравнения для f , которое можно сразу же написать, учитывая приход электронов в ячейку v и уход их из этой ячейки. Это приводит к следующему кинетическому уравнению:

$$\frac{\partial f_v}{\partial t} = \sum_{v'} W_{vv'} \{f_{v'}(1 - f_v) - f_v(1 - f_{v'})\}, \quad (4,3)$$

где вероятность перехода в единицу времени электрона из состояния v' в v при рассеянии на неподвижном центре в борновском приближении равна

$$W_{vv'} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_q |V_q|^2 F_{nn'} (\alpha^2 q_{\perp}^2 / 2) \delta(E(n', p_z + \hbar q_z) - E(n, p_z)) \times \\ \times \delta(x_{0v'} - x_{0v} - c\hbar q_y / eH);$$

$|V_q|^2 = N_{\pi} |C_q|^2$, N_{π} — число примесей, а C_q — фурье-компонента потенциальной энергии взаимодействия электрона с рассеивателем. Заметим, что (4,3) можно получить из кинетического уравнения (П,28), учитывая столкновения электронов с фононами в приближении упругого,

рассеяния. Для этого надо пренебречь процессами излучения фононов, т. е. считать в (П,28) $N_q \gg 1$, и изменением энергии электронов при рассеянии, полагая в $\delta(E(n', p_z + \hbar q_z) - E(n, p_z) + \hbar \omega_q) \hbar \omega_q \sim 0$, и, наконец, заменить $|C_q|^2 N_q$ на $|C_q|^2 N_n$. С помощью (4,3) легко найти выражение для тока проводимости. Дифференцируя по времени (4,2) и подставляя в полученное выражение (4,3), находим

$$\frac{\partial}{\partial t}(eN(x)) = \frac{2eN_n}{(2\pi\alpha)^2 \hbar} \sum_{(n', q)} \int dp_z \int dx_0 \Phi_n^2 \left(\frac{x-x_0}{\alpha} \right) \frac{2\pi}{\hbar} |C_q|^2 F_{nn'} (\alpha^2 q_{\perp}^2 / 2) \times \\ \times \delta[E(n', p_z + \hbar q_z) - E(n, p_z)] [f(n', p_z + \hbar q_z, x_0 + \gamma \alpha^2 q_y) - f(n, p_z, x_0)] (\gamma = \text{sign } e). \quad (4,4)$$

Далее, в (4,4) следует подставить решение кинетического уравнения для функции $f(n, p_z, x_0)$. Таким решением в нулевом приближении по рассеянию является локально-равновесное распределение (3,19). Его и надо подставить в (4,4) для нахождения тока проводимости с точностью, не превышающей точность кинетического уравнения. В случае слабых пространственных неоднородностей функция f почти постоянна на длине радиуса Лармора, где заметно отлична от нуля функция $\Phi_n^2 \left(\frac{x-x_0}{\alpha} \right)$, поэтому f можно вынести за знак интеграла по x_0 при значении $x_0 = x$. Учитывая это, подставляя (3,19) в (4,4) и разлагая результаты в ряд по $\alpha^2 q_y$, находим^{13, 14}

$$\frac{\partial}{\partial t}(eN(x)) = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{2eN_n}{(2\pi\alpha)^2 \hbar} \sum_{n, n', q} \int dp_z \frac{2\pi}{\hbar} |C_q|^2 F_{n, n'} (\alpha^2 q_{\perp}^2 / 2) \times \right. \\ \times \delta[E(n', p_z + \hbar q_z) - E(n, p_z)] \frac{(\alpha^2 q_y)^2}{2!} \times \\ \left. \times \frac{\partial f_0}{\partial E} \left[\nabla_x \xi + \frac{E(n, p_z) - \xi}{T} \nabla_x T \right] + \dots \right\}. \quad (4,5)$$

Выражение в фигурных скобках (4,5) определяет ток проводимости через градиенты пространственных неоднородностей T и ξ . Коэффициент перед $\left(-\frac{1}{e} \nabla_x \xi \right)$ совпадает с коэффициентом электропроводности, найденным в работе Адамса и Холстейна²⁹. Это свидетельствует о том, что имеет место соотношение Эйнштейна, связывающее коэффициенты диффузии и электропроводности. В полной аналогии с получением (4,5) найдем уравнение непрерывности для тепловой энергии^{13, 14}

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{2}{(2\pi\alpha)^2 \hbar} \sum_n \int dx_0 dp_z \Phi_n^2 \left(\frac{x-x_0}{\alpha} \right) [E(n, p_z) - \xi] f(n, p_z, x_0) \right\} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{2N_n}{(2\pi\alpha)^2 \hbar} \sum_{n, n', q} \frac{2\pi}{\hbar} \int dp_z |C_q|^2 F_{n', n} \left(\frac{\alpha^2 q_{\perp}^2}{2} \right) \left(\frac{\alpha^2 q_y}{2!} \right)^2 [E(n, p_z - \xi)] \times \right. \\ \left. \times \delta[E(n', p_z + \hbar q_z) - E(n, p_z)] \frac{\partial f_0}{\partial E} \left[\nabla_x \xi + \frac{E(n, p_z) - \xi}{T} \nabla_x T \right] + \dots \right\}. \quad (4,6)$$

Таким образом, диагональные компоненты тензоров кинетических коэффициентов в $j_{\text{пр}}$ и Q_T (см. (2,1)) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \beta_{xx} \\ \chi_{xx} \end{pmatrix} = \frac{-2N_n}{(2\pi\alpha)^2 \hbar} \sum_{(n, n', q)} \frac{2\pi}{\hbar} |C_q|^2 F_{n, n'} \left(\frac{\alpha^2 q_{\perp}^2}{2} \right) \frac{\alpha^4 q_y^2}{2!} \frac{\partial f_0}{\partial E} \times \\ \times \delta[E(n', p_z + \hbar q_z) - E(n, p_z)] \begin{pmatrix} e^2 \\ e[E(n, p_z) - \xi]/T \\ [E(n, p_z) - \xi]^2/T \end{pmatrix}, \quad T\beta_{xx} = \chi_{xx}. \quad (4,7)$$

Таблица I
Зависимость $|C_q|^2$ от q и значения чисел m и p ,
входящих в таблицы

Механизм рассеяния	$ C_q ^2$	m	p
Акустические фононы:			
низкие температуры . . .	$A_1 q$	0	1
высокие температуры . .	$A_1 (2T/\hbar s)$	1	0
Пьезоэлектрические фононы:			
низкие температуры . . .	$A_3 q$	0	-1
высокие температуры	$A_3 (q^2 + q_s^2)^{-1} (2T/\hbar s)$	1	-2
Оптические фононы:			
высокие температуры . .	$A_4 (q^2 + q_s^2)^{-1} (2T/\hbar \omega_D)$	1	-2
Точечные дефекты	A_2	0	0
Ионизованные примеси	$A_5 (q^2 + q_s^2)^{-2}$	0	-4

Зависимость $|C_q|^2$ от q определяется механизмом рассеяния и приведена в табл. I, взятой из работы Адамса и Холстейна²⁹. Зависимость σ , β , κ от T и H оказывается наиболее чувствительной к механизму рассеяния электронов лишь в квантовом пределе.

При изменении H в пределах $\zeta \gg \hbar \Omega \gtrsim kT^\circ$ σ , β , κ испытывают квантовые осцилляции. Как показали Адамс и Холстейн²⁹, зависимость этих осцилляций от механизма рассеяния, по крайней мере для σ_{xx} , оказывается не очень существенной. Именно поэтому и представляет интерес изучить в квантовом пределе зависимость σ , β , κ от T и H при различных механизмах рассеяния носителей. Мы приведем здесь такие зависимости, найденные Зыряновым и Калашниковым³⁰ для двух предельных случаев.

а) В случае невырожденных электронов в квантовом пределе $\hbar \Omega \gg kT^\circ$ из (4,7) следует

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{xx} &= \frac{1}{e^2} \left(\frac{\partial}{\partial T} T^2 \frac{\partial}{\partial T} \sigma_{xx} \right)_\zeta, \quad \beta_{xx} = \frac{1}{e} \left(\frac{\partial}{\partial T} T \sigma_{xx} \right)_\zeta, \\ \sigma_{xx} &= \frac{e^2 \alpha^2}{2\pi} \frac{m}{T} e^{\zeta^*/T} \int \frac{dq_x dq_y}{(2\pi\hbar)^3} N_n |C_q q_y|^2 \times \\ &\quad \times F_{0,0} \left(\frac{\alpha^2 q_\perp^2}{2} \right) \int_0^\infty \frac{dE}{E} e^{-E/T}, \\ \zeta^* &= \zeta - \frac{\hbar \Omega}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4,8)$$

В последней формуле для σ_{xx} возникает расходимость на нижнем пределе. Природа этой расходимости и различные способы устранения ее обсуждались в работе Адамса и Холстейна²⁹. Следуя этой работе, можно ввести энергию обрезания, связанную, например, с уширением энергетических уровней Ландау из-за столкновений электронов с рассеивателями.

Детальное обсуждение вопроса содержится в обзоре Кубо с сотрудниками³. В квантовом пределе $\hbar\Omega > T$ зависимость диагональных компонент тензоров кинетических коэффициентов от магнитного поля

Таблица II

Зависимость диагональных компонент тензоров σ , β , χ , κ от T и H для невырожденных электронов в квантовом пределе

Тензор	а)	б)	Тензор	а)	б)
σ_{xx}	$T^{m-3/2} H^{p/2}$	$T^{p+5/2} H^{-2}$	χ_{xx}	$T^{m-1/2} H^{p/2}$	$T^{p+7/2} H^{-2}$
β_{xx}	$T^{m-3/2} H^{p/2}$	$T^{p+5/2} H^{-2}$	κ_{xx}	$T^{m-1/2} H^{p/2}$	$T^{p+7/2} H^{-2}$

и температуры для различных механизмов рассеяния представлена в табл. II. В случае акустических и пьезоэлектрических фононов результаты, приведенные в колонке а) (табл. II—V), справедливы для $H < cT$ ($\hbar s^2 e$)⁻¹ (s — скорость звука). Если имеет место обратное неравенство, то для этих двух механизмов рассеяния надо пользоваться результатами, приведенными в колонке б) (для акустических фононов $p = 1$, а для пьезоэлектрических $p = -1$).

Этих результатов совместно с формулами (3,23) и (3,24) для недиссипативных потоков достаточно, чтобы определить зависимость от T и H любого термомагнитного эффекта. Например, в табл. III в квантовом пределе приведены такие зависимости для изотермических коэффициентов Нернста Q_N и электронной теплопроводности κ_e при токе проводимости, равном нулю.

б) В другом предельном случае — сильно вырожденного электронного газа ($T \ll \xi$)

Таблица III

Зависимость изотермических коэффициентов Нернста Q_N и электронной теплопроводности κ_e при токе, равном нулю, в случае невырожденных электронов и $\hbar\Omega \gg T$

Термомагнитный коэффициент	а)	б)
Q_N	$T^{m-3/2} H^{p/2}$	$T^{p+5/2} H^{-2}$
κ_e	$T^{m-1/2} H^{p/2}$	$T^{p+7/2} H^{-2}$

$$\beta_{xx} = \frac{\pi^2}{3e} T \left(-\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi} \right), \quad \kappa_{xx} = \frac{\pi^2}{3e^2} T \sigma_{xx}, \quad \sigma_{xx} = \frac{Ne^2 \tau}{m}, \quad (4,9)$$

где для ультраквантового предела $T \ll \xi < \hbar\Omega$

$$\tau = \frac{8}{\pi} \frac{\alpha^4}{\hbar^2} \left(\frac{2m}{\xi^*} \right)^{3/2} \frac{N_n}{(2\pi)^3} \int dq |C_q|^2 \exp \left(-\frac{\alpha^2 q_{\perp}^2}{2} \right) \times \\ \times \left\{ \delta(q_z) + \delta \left(q_z + 2 \sqrt{\frac{2m\xi^*}{\hbar}} \right) \right\}. \quad (4,10)$$

Из этих формул вытекает, что и диагональные компоненты σ и κ , так же как и недиагональные, связаны законом Видемана — Франца. Другими словами, закон Видемана — Франца справедлив и в ультраквантовом пределе.

В табл. IV приведены зависимости от T и H кинетических коэффициентов в ультраквантовом пределе $\hbar\Omega > \xi$. Для этого же предельного случая в табл. V даны зависимости от T и H изотермических коэффициентов Нернста Q_N и электронной теплопроводности — κ_e .

Барьяхтаром и Пелетминским³¹ была построена более общая теория, в которой диагональные компоненты тензоров кинетических коэффициен-

Таблица IV

Зависимость диагональных компонент тензоров σ , β , χ , κ от T и H для сильно вырожденных электронов в ультраквантовом пределе ($T \ll \zeta < \hbar\Omega$).

Тензор	а)	б)	Тензор	а)	б)
σ_{xx}	$T^m H^{3+p/2}$	$T^{p+4} H$	χ_{xx}	$T^{m+2} H^{5+p/2}$	$T^{p+6} H^3$
β_{xx}	$T^{m+1} H^{5+p/2}$	$T^{p+5} H^3$	κ_{xx}	$T^{m+1} H^{3+p/2}$	$T^{p+5} H$

тов в токе проводимости и потоке тепла выражены через точную амплитуду рассеяния электрона на примеси. Методика вычисления тока про-

Таблица V

Зависимость изотермических коэффициентов Нернста Q_N и электронной теплопроводности κ_e при токе, равном нулю, в случае сильно вырожденных электронов в ультраквантовом пределе ($T \ll \zeta < \hbar\Omega$)

Термо- магнит- ный коэф- фициент	а)	б)
Q_N	$T^{m+1} H^{5+p/2}$	$T^{p+5} H^3$
κ_e	$T^{m+1} H^{3+p/2}$	$T^{p+5} H$

вой энергией. Скобовым³⁴ для этого случая была найдена амплитуда рассеяния в следующем виде:

$$t_{vv'}(\mathbf{q}) = a \frac{\langle v | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | v' \rangle}{1 + iaK(E_v)}. \quad (4,14)$$

Здесь

$$K(E) = K'(E) + iK''(E), \quad K''(E) = (2\eta\alpha^2)^{-1/2},$$

$$K'(E) = (2\alpha^2)^{-1/2} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{E}{\hbar\Omega} - m - \frac{1}{2} \right),$$

a — амплитуда рассеяния электрона с нулевой энергией на примеси в отсутствие магнитного поля, а $0 \leq \eta < 1$ определяется уравнением $E = \left(N + \frac{1}{2} - \eta \right) \hbar\Omega$ (N — целое положительное число). Если вероятность перехода $W_{vv'}$ в (4,3) определить через скобовскую амплитуду рассеяния $t_{vv'}(\mathbf{q})$, то для кинетических коэффициентов найдем формулы аналогичные (4,7), с тем лишь различием, что в (4,7) $|C_q|^2 F_{nn'} (\alpha^2 q_{\perp}^2/2)$ заменено на $|C_0|^2 F_{nn'} (\alpha^2 q_{\perp}^2/2) |1 + iaK(E_v)|^{-2}$, причем $|C_0|^2 = \frac{N_p}{V} (2\pi\hbar^2 a/m)^2$. Кинетические коэффициенты, найденные таким образом, уже не содержат расхождений в случае статистики Максвелла, поскольку в теории Барьяхтара — Пелетминского³¹ скобовская ампли-

туда рассеяния (4,15) учитывает уширение энергетических уровней Ландау, обусловленное рассеянием носителей. Зависимость кинетических коэффициентов в этом случае от T и H проанализирована в ³¹.

В заключение этого раздела остановимся на других работах, посвященных явлениям переноса в сильном магнитном поле в приближении упругого рассеяния. Хайду ³⁵, Хайду и Фишер ³⁶ рассматривали явления переноса в системах с пространственно-неоднородной температурой в приближении упругого рассеяния. Найденные ими диагональные компоненты тензоров кинетических коэффициентов совпадают с формулами (4,7), отличие заключается лишь в форме записи. Что касается недиагональных компонент, то они не удовлетворяют ни соотношению Эйнштейна, ни принципу симметрии Онсагера. В случае сильного вырождения электронного газа, как отмечается в ³⁶, недиагональные компоненты, в отличие от диагональных, не связаны законом Видемана — Франца. Эти парадоксы являются следствием ошибочного отождествления объемной плотности недиSSIPативного потока заряда с током проводимости, а $\left(Q - \frac{\xi}{e} j\right)$ — с потоком тепла (см. раздел II). Обоснованию закона Видемана — Франца в квантующих магнитных полях посвящена также работа Зака ³⁷. Однако эта работа лишена какой-либо доказательной силы, поскольку исходное уравнение этой работы постулировано, а связь его с уравнением Шрёдингера для матрицы плотности не ясна и вообще не обсуждается. Коэффициент β_{xx} (см. (4,7)) впервые вычислялся Ансельмом и Аскеровым ^{77, 78}. Недавно Ансельм, Образцов и Тарханян ³³ уточнили свои результаты.

V. ДИССИПАТИВНЫЕ ПОТОКИ С УЧЕТОМ НЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ФОНОНОВ

Приближение упругого рассеяния, использованное при вычислении тока проводимости и потока тепла в предыдущем разделе, пригодно далеко не всегда. Учет неупругого рассеяния при столкновениях электронов с фононами приводит к эффектам увлечения. Эти эффекты наиболее существенны в полупроводниках с максвелловской статистикой носителей. Например, как отмечено в разделе I, термо-э. д. с. в n -Ge и n -InSb при низких температурах в квантующих магнитных полях обусловлена в основном эффектом увлечения электронов фононами, т. е. неупругим рассеянием.

При взаимодействии электронов с оптическими фононами неупругость рассеяния приводит к так называемому магнитофононному резонансу, предсказанному независимо в работах ³⁸. Суть этого резонанса заключается в том, что при частоте оптических фононов, кратной циклотронной частоте носителей, т. е. $\omega_D = N\Omega$ (N — целое положительное число), становятся возможными резонансные переходы носителей между уровнями Ландау с излучением или поглощением оптического фонона. Таким образом, неупругое рассеяние электронов на оптических фононах приводит к осцилляциям электропроводности и других кинетических коэффициентов при изменении магнитного поля. Мы не будем здесь останавливаться на этих вопросах.

В других случаях учет неупругости при рассеянии электронов, по видимому, не приводит к качественно новым явлениям. В дальнейшем сосредоточим внимание на неупругом рассеянии электронов на акустических фононах и перейдем к вычислению тока проводимости и потока тепла в таких системах. Если учитывать отклонение фононов от локального равновесия, то в плоскости, ортогональной магнитному полю,

необходимо рассматривать уже двумерные неоднородности. Такие пространственные неоднородности описываются матрицей плотности, недиагональной по $p_y = \frac{eH}{c} x_0$. Однако в дальнейшем удобнее использовать смешанное представление Вигнера

$$f(n, p_z, p_y, y) = \sum_{p'_y} f_{n, p_z, p_y; n, p_z, p'_y} \exp(i(p_y - p'_y)y/\hbar), \quad (5,1)$$

поскольку, так же как и в предыдущем разделе, ток проводимости и поток тепла будем определять с помощью уравнения непрерывности. Используя приближение слабых пространственных неоднородностей, с помощью кинетического уравнения (П,32) найдем, в полной аналогии с получением соотношения (4,5), следующую формулу:

$$\frac{\partial}{\partial t} eN(x, y) = 2e \sum_{n, p_z, p_y} I_{ep} [f(n, p_z, p_y, y)] \Phi_n^2 \left(\frac{x-x_0}{\alpha} \right). \quad (5,2)$$

Скорость изменения во времени плотности тепловой энергии электронов в точке x, y можно также выразить с помощью (П,32) формулой

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ 2 \sum_{(n, p_z, x_0)} [E(n, p_z) - \zeta] \Phi_n^2 \left(\frac{x-x_0}{\alpha} \right) f(n, p_z, p_y, y) \right\} \equiv \\ \equiv \frac{\partial}{\partial t} W^{(e)}(x, y) = 2 \sum_{n, p_z, x_0} [E(n, p_z) - \zeta] \Phi_n^2 \left(\frac{x-x_0}{\alpha} \right) I_{ep} [f(n, p_z, p_y, y)], \end{aligned} \quad (5,3)$$

и, наконец, используя кинетическое уравнение для фононов (П,33), найдем скорость изменения плотности энергии фононов со временем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{q}} N_{\mathbf{q}}(x, y) \hbar \omega_{\mathbf{q}} \equiv \frac{\partial}{\partial t} W^{(p)} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} \frac{\partial \omega_{\mathbf{q}}}{\partial q_x} N_{\mathbf{q}}(x, y) \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} \frac{\partial \omega_{\mathbf{q}}}{\partial q_y} N_{\mathbf{q}}(x, y) \right) + \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} I_{pe} [N_{\mathbf{q}}] + \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} I_{pd} [N_{\mathbf{q}}]. \end{aligned} \quad (5,4)$$

Применим общие формулы (5,2) — (5,4) к рассмотрению частных случаев.

Вычислим сначала ток проводимости и поток тепла, предполагая распределение фононов локально-равновесным. Такая ситуация реализуется тогда, когда частота столкновений фононов с «термостатом», имеющим температуру $T(x, y)$, значительно превосходит частоту столкновений их с электронами. При этом столкновения электронов с фононами не нарушают локального равновесия фононов с термостатом, и функция распределения их имеет вид

$$N_{\mathbf{q}}^0(x, y) = \left\{ \exp \frac{\hbar \omega_{\mathbf{q}}}{T} - 1 \right\}^{-1}. \quad (5,5)$$

В рассматриваемом приближении (5,5) является решением кинетического уравнения (П,35). Благодаря столкновениям с фононами в системе электронов также устанавливается локально-равновесное распределение с функцией Ферми

$$f_0(n, p_z, x, y) = \left[\exp \left(\frac{E(n, p_z) - \zeta(x, y)}{T(x, y)} \right) + 1 \right]^{-1}. \quad (5,6)$$

Эта функция является решением кинетического уравнения (П,32) в нулевом приближении по $(\Omega\tau)^{-1} \ll 1$. Подставляя (5,5) и (5,6) в (5,2) — (5,4) и затем разлагая правые части по $\alpha^2 q_x$ и $\alpha^2 q_y$, найдем уравнения

непрерывности для заряда и энергии ³⁹ как электронов, так и фононов:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} eN(x, y) \\ W^{(e)}(x, y) \\ W^{(p)}(x, y) \end{pmatrix} = -\operatorname{div} \begin{pmatrix} \mathbf{j}_{\text{пр}}(x, y) \\ \mathbf{Q}_T^{(e)}(x, y) \\ \mathbf{Q}_T^{(p)}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (5,7)$$

где

$$\begin{pmatrix} (j_{\text{пр}})_x \\ (Q_T^{(e)})_x \\ (Q_T^{(p)})_x \end{pmatrix}_y = \left(\frac{\alpha^2}{4\pi} \right)^2 \int \left\{ \begin{pmatrix} e\omega_{ep} \langle 1 \rangle \\ \omega_{ep} \langle (E + 2\hbar\omega - \zeta) \rangle \\ \hbar\omega_q \omega_{ep} \langle 1 \rangle \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{T} \nabla_x \zeta \right) + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} e\omega_{ep} \langle (E + \hbar\omega - \zeta) \rangle \\ \omega_{ep} \langle (E + \hbar\omega - \zeta)(E - \zeta) \rangle \\ \hbar\omega_q \omega_{ep} \langle (E + \hbar\omega - \zeta) \rangle \end{pmatrix} \nabla_x T^{-1} \right\} q_{\perp}^3 \left[\operatorname{ch} \frac{\hbar\omega_q}{T} - 1 \right]^{-1} dq_z dq_{\perp}, \quad (5,8)$$

$$\omega_{ep} \langle (E + \hbar\omega - \zeta)^{\bar{m}} (E - \zeta)^{\bar{m}'} \rangle = \frac{2}{(2\pi\alpha)^2 \hbar} \sum_{(n, n')} \frac{2\pi}{\hbar} |C_q|^2 F_{n, n'} \left(\frac{\alpha^2 q_{\perp}^2}{2} \right) \times \\ \times \int dp_z \delta [E(n', p_z + \hbar q_z) - E(n, p_z) - \hbar\omega_q] \langle (E(n, p_z) + \hbar\omega_q - \zeta)^{\bar{m}} \times \\ \times (E(n, p_z) - \zeta)^{\bar{m}'} \rangle \left[f_0 \left(\frac{E(n, p_z) - \zeta}{T} \right) - f_0 \left(\frac{E(n, p_z) + \hbar\omega_q - \zeta}{T} \right) \right], \quad (5,9)$$

\bar{m} и \bar{m}' принимают значения 0, 1, 2; при $\bar{m} = \bar{m}' = 0$ принято обозначение $\omega_{ep} \langle 1 \rangle$. Суммируя $Q_T^{(e)}$ и $Q_T^{(p)}$, найдем полный поток тепла электронов и фононов ³⁹

$$(Q_T)_x = \left(\frac{\alpha^2}{4\pi} \right)^2 \int dq_z dq_{\perp} q_{\perp}^3 \left[\operatorname{ch} \frac{\hbar\omega_q}{T} - 1 \right]^{-1} \times \\ \times \{ \omega_{ep} \langle (E + \hbar\omega - \zeta)^2 \rangle \nabla_x T^{-1} - \omega_{ep} \langle (E + \hbar\omega - \zeta) \rangle T^{-1} \nabla_x \zeta \}. \quad (5,10)$$

Кинетические коэффициенты связаны соотношением симметрии Онсагера лишь в полном потоке тепла Q_T (5,10) и в токе проводимости $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ (5,8). Эти вычисления проведены так подробно лишь только потому, что в некоторых работах допущена ошибка при определении плотности потока энергии фононов в пространственно-неоднородных системах. Так, например, в работе Фишера ⁴⁰ поток тепла, переносимого фононами, определяется формулой

$$\sum_{\mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{q}} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{q}} \right) N_{\mathbf{q}}. \quad (5,11)$$

Эта формула описывает, как это видно из (5,4), только ту часть потока энергии фононов, которая обусловлена отклонением функции распределения $N_{\mathbf{q}}$ от локального равновесия (5,5). Другими словами, поток энергии (5,11) обусловлен лишь дрейфом фононов. В состоянии локального равновесия поток (5,11) обращается в нуль, но при этом пространственные неоднородности температуры электронов и фононов приводят к диффузионному потоку тепла, описываемому формулой (5,8) для $Q_T^{(p)}$. Если

полный поток тепла в системе определить формулой $\{Q_T^{(e)} + \sum_q \hbar \omega_q \times \times (\frac{\partial \omega}{\partial q}) N_q\} = Q^*$, то не будет удовлетворяться соотношение Онсагера для $j_{пр}$ (5,8) и Q^* .

Перейдем сейчас к рассмотрению эффектов, связанных с учетом отклонения фононной функции распределения от локально-равновесной (4,6). В чистых металлах и полупроводниках при достаточно низких температурах может оказаться, что неэлектронная частота релаксации фононов (релаксация фононов на «термостате») $\omega_{pp}(\mathbf{q})$ сравнима или даже меньше частоты релаксации их на электронах. В этих условиях функция распределения фононов будет зависеть не только от состояния термостата, но также и от состояния электронов. Корректная теория кинетических явлений требует последовательного описания электрон-фононных систем с помощью двух связанных интегро-дифференциальных уравнений для неравновесных добавок к фононной и электронной функциям распределения. Пренебрежение одной из этих добавок в уравнении для другой приводит, как показали вычисления при отсутствии магнитного поля (см. Макинсон ⁴¹), к нарушению соотношений Кельвина для термоэлектрических коэффициентов. Эти соотношения, точнее, второе, являются следствием принципа симметрии кинетических коэффициентов Онсагера. Следовательно, нарушение второго соотношения Кельвина является следствием нарушения принципа симметрии Онсагера. Как показал Зондхеймер ⁴², корректная теория, основанная на системе интегро-дифференциальных уравнений для неравновесных добавок к функциям распределения электронов и фононов, обеспечивает выполнение принципа симметрии Онсагера. Однако точного решения такой системы уравнений в слабом или равном нулю магнитном поле пока не удалось найти. В случае сильных магнитных полей, когда появляется малый параметр $(\Omega\tau)^{-1} \ll 1$ (τ — время релаксации электронов), возникает возможность найти решение такой системы интегро-дифференциальных уравнений в виде степенного ряда по этому параметру. При этом принцип симметрии Онсагера выполняется; следовательно, будут удовлетворяться и соотношения Кельвина.

В дальнейшем, как обычно принимается в линейной теории переноса, будем считать, что функция распределения фононов мало отличается от локально-равновесной (5,5). В соответствии с этим положим

$$N_q(x, y) = N_q^0(x, y) + g_q(x, y), \quad |g_q| \ll N_q^0. \quad (5,12)$$

Подставляя (5,12) в кинетическое уравнение (П,33), найдем уравнение для определения $g_q(x, y)$. В это уравнение входит функция распределения электронов $f(n, p_z, x, y)$. Чтобы найти g_q в первом приближении по $(\Omega\tau)^{-1}$, достаточно взять для f решение уравнения (П,32) в нулевом приближении по $(\Omega\tau)^{-1}$. Таким решением является локально-равновесная функция распределения электронов (5,6). Подставляя (5,6) в уравнение для функции g_q , найдем в линейном приближении по градиентам T и ξ следующую формулу ^{11, 12}:

$$g_q = \left\{ 2 \left[\operatorname{ch} \frac{\hbar \omega_q}{T} - 1 \right] [\omega_{ep} \langle 1 \rangle + \omega_{pp}(\mathbf{q})] \right\}^{-1} \times \\ \times \{ \hbar s^2 (\mathbf{q} \nabla) T^{-1} - \gamma \alpha^2 q_y [\omega_{ep} \langle (E + \hbar \omega - \xi) \rangle \nabla_x T^{-1} + \omega_{ep} \langle 1 \rangle \nabla_x \xi] + \\ + \gamma \alpha^2 q_x [\omega_{ep} \langle (E + \hbar \omega - \xi) \rangle \nabla_y T^{-1} + \omega_{ep} \langle 1 \rangle \nabla_y \xi] \}. \quad (5,13)$$

Подставляя (5,12) и (5,6) в (5,2), найдем в линейном приближении по

∇T и $\nabla \zeta$ выражение для тока проводимости с учетом увлечения фононов^{11, 12, 43}

$$(j_{np})_x = e \left(\frac{\alpha^2}{4\pi} \right)^2 \int dq_z dq_{\perp} q_{\perp}^3 \left[\operatorname{ch} \frac{\hbar \omega_q}{T} - 1 \right]^{-1} (\omega_{ep} \langle 1 \rangle + \omega_{pp}(\mathbf{q}))^{-1} \times \\ \times \left\{ \omega_{ep} \langle (E + \hbar \omega - \zeta) \rangle \omega_{pp} \nabla_x T^{-1} - \omega_{ep} \langle 1 \rangle \omega_{pp}(\mathbf{q}) T^{-1} \nabla_x \zeta \mp \gamma \frac{\hbar s^2}{\alpha^2} \omega_{ep} \langle 1 \rangle \nabla_x T^{-1} \right\}. \quad (5,14)$$

Подставляя (5,12) и (5,6) в (5,3) и (5,4), также в линейном приближении найдем формулу для полного потока тепла^{11, 12, 43}

$$(Q_T)_x = \left(\frac{\alpha^2}{4\pi} \right)^2 \int dq_z dq_{\perp} q_{\perp}^3 \left[\operatorname{ch} \frac{\hbar \omega_q}{T} - 1 \right]^{-1} (\omega_{ep} \langle 1 \rangle + \omega_{pp}(\mathbf{q}))^{-1} \times \\ \times \left\{ \left[\omega_{ep} \langle (E + \hbar \omega - \zeta)^2 \rangle (\omega_{ep} \langle 1 \rangle + \omega_{pp}(\mathbf{q})) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\left(\frac{\hbar s^2}{\alpha^2} \right)^2 - \omega_{ep} \langle (E + \hbar \omega - \zeta) \rangle^2 \right) \right] \nabla_x T^{-1} - \right. \\ \left. - \omega_{ep} \langle (E + \hbar \omega - \zeta) \rangle \omega_{pp}(\mathbf{q}) \nabla_x \zeta \mp \right. \\ \left. \mp \gamma \frac{\hbar s^2}{\alpha^2} \omega_{ep} \langle (E + \hbar \omega - \zeta) \rangle \nabla_x T^{-1} \pm \gamma \frac{\hbar s^2}{\alpha^2} \omega_{ep} \langle 1 \rangle \nabla_x \zeta \right\}. \quad (5,15)$$

Сравнивая кинетические коэффициенты перед градиентом температуры в (5,14) и градиентом химического потенциала (5,15), убеждаемся, что они удовлетворяют принципу симметрии Онсагера. Коэффициент перед $\left(-\frac{1}{e} \nabla \zeta \right)$ в (5,14) совпадает с коэффициентом электропроводности, найденным ранее в работе Гуревича и Недлина⁴⁴ по методу Константинова и Переля⁴⁵. Это еще раз подтверждает выполнение соотношения Эйнштейна.

Формулы (5,14) и (5,15) были найдены также в работе Ахиезера, Барьяхтара и Пелетминского⁹. Отличие заключается в форме записи. В этой интересной работе полный поток тепла и ток проводимости в электрон-фононной системе определялись через производство энтропии. Производство энтропии вычислялось с помощью кинетических уравнений для одночастичных матриц плотности электронов и фононов.

Недавно опубликованная работа Фишера⁴⁰ также посвящена вычислению тока проводимости и потока тепла с учетом увлечения фононов. Кинетические коэффициенты в токе проводимости, найденные в⁴⁰, совпадают с соответствующими в нашей формуле (5,14). Также совпадают коэффициенты в электронной части потока тепла. Как уже отмечалось выше, полный поток тепла в⁴⁰ определен неверно.

VI. ПОТОКИ ВДОЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ПРОДОЛЬНЫЕ ТЕРМОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

В предыдущих разделах рассматривались потоки, ортогональные к магнитному полю, и связанные с ними поперечные термомагнитные явления. В этом разделе будут вычислены потоки вдоль магнитного поля. Внимание будет уделено главным образом эффектам, связанным с неравновесностью фононов, т. е. эффектам увлечения. Именно эти эффекты представляют наибольший интерес, поскольку в квантовой области дифференциальная термо-э. д. с., обусловленная неравновесностью фононов (термо-э. д. с. увлечения), как это было показано в⁴⁸, растет с увеличением напряженности магнитного поля.

В дальнейшем будем интересоваться достаточно сильными магнитными полями ($\Omega\tau \gg 1$) и распределениями, пространственно-неоднородными вдоль магнитного поля $\mathbf{H} \parallel Oz$. В этом случае для описания системы нужно ограничиться в представлении Ландау матрицами плотности, диагональными по квантовому числу n , не зависящими от p_y и недиагональными по p_z . В случае слабых пространственных неоднородностей удобно использовать матрицу плотности в представлении Вигнера

$$f(n, p_z, z) = \sum_{p'_z} f_{n, p_z; n, p'_z} \exp \{i(p_z - p'_z)z/\hbar\}. \quad (6,1)$$

Действительно, когда на длине дебройлевской волны пространственные неоднородности малы, левую часть (оператор Лиувилля) кинетического уравнения можно записать в обычной форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} + eE_z \frac{\partial}{\partial p_z}\right) f(n, p_z, z) = I[f(n, p_z, z)]. \quad (6,2)$$

Входящий сюда интеграл столкновений электронов с фононами можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} I[f(n, p_z, z)] = & \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{(n', q, p'_z)} |C_q|^2 \left\{ F_{n', n} \left(\frac{\alpha^2 q_{\perp}^2}{2} \right) \times \right. \\ & \times \delta[E(n', p'_z) - E(n, p_z) - \hbar\omega_q] \delta[p'_z - \hbar q_z - p_z] \times \\ & \times [(f(n', p'_z, z) - f(n, p_z, z)) N_q(z) + f(n', p'_z, z)(1 - f(n, p_z, z))] + \\ & + F_{n, n'} \left(\frac{\alpha^2 q_{\perp}^2}{2} \right) \delta[E(n', p'_z) - E(n, p_z) + \hbar\omega_q] \delta[p'_z + \hbar q_z - p_z] \times \\ & \times [(f(n', p'_z, z) - f(n, p_z, z)) N_q(z) - f(n, p_z, z)(1 - f(n', p'_z, z))] \}. \quad (6,3) \end{aligned}$$

Функция распределения фононов находится также из кинетического уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial q_z} \frac{\partial}{\partial z}\right) N_q(z) = I[N_q(z)], \quad (6,4)$$

где

$$\begin{aligned} I[N_q(z)] = & \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{n, n'} \frac{2}{(2\pi\alpha)^2 \hbar} \int dp_z dp'_z |C_q|^2 F_{n, n'} \left(\frac{\alpha^2 q_{\perp}^2}{2} \right) \delta(p'_z - \hbar q_z - p_z) \times \\ & \times \delta[E(n', p'_z) - E(n, p_z) - \hbar\omega_q] [(f(n', p'_z, z) - f(n, p_z, z)) N_q(z) + \\ & + f(n', p'_z, z)(1 - f(n, p_z, z))] + [N_q^0(z) - N_q(z)] \omega_{pp}(\mathbf{q}). \quad (6,5) \end{aligned}$$

В (6,5) учтены неэлектронные механизмы релаксации фононов путем введения соответствующей частоты релаксации $\omega_{pp}(\mathbf{q})$, а $N_q^0(z)$ — локально-равновесная функция распределения фононов, равная

$$\left\{ \exp \left(\frac{\hbar\omega_q}{T(z)} \right) - 1 \right\}^{-1}, \quad \omega_q = v_s q. \quad (6,6)$$

Уравнения (6,2), (6,4) достаточны для вычисления потоков вдоль магнитного поля. При получении эффектов увлечения необходимо учитывать отклонение от локального равновесия как электронной, так и фононной функций распределения. Другими словами, необходимо найти неравновесные добавки u_z и g_q к локально-равновесным функциям распределения электронов и фононов

$$f(n, p_z, z) = f_0 \left(\frac{E(n, p_z) - \xi(z)}{T(z)} \right) - \frac{\partial f_0}{\partial E} p_z u_z, \quad (6,7)$$

$$N_q(z) = N_q^0(z) + g_q, \quad |g_q| \ll N_q^0(z). \quad (6,8)$$

С помощью (6,2) и (6,4) можно найти систему интегро-дифференциальных уравнений для функций u_z и g_q . Поскольку точное решение этих уравнений затруднительно, мы ограничимся лишь приближенным анализом задачи, а именно: будем считать, что u_z — скорость упорядоченного движения электронов под действием градиента температуры и электрического поля значительно меньше средней скорости их хаотического движения. Тогда можно приближенно $u_z(n, p_z)$ заменить средним значением u_z , не зависящим от n, p_z .

В этом приближении удастся задачу проанализировать до конца. Действительно, подставляя (6,7) в (6,4), найдем в линейном приближении по $\nabla_z T, u_z$

$$g_q = \hbar q_z \left[2(\omega_{ep} \langle 1 \rangle + \omega_{pp}(\mathbf{q})) \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\hbar \omega_q}{T} \right) - 1 \right) \right]^{-1} (v_s^2 \nabla_z T^{-1} + T^{-1} \omega_{ep} \langle 1 \rangle u_z). \quad (6,9)$$

Используя (6,7) — (6,9), с помощью (6,2) находим для стационарных условий формулу

$$u_z = \frac{(\sigma_{zz} E_z^* + \beta_{zz} \nabla_z T^{-1})}{eN}, \quad (6,10)$$

где

$$E_z^* = E_z - e^{-1} \nabla_z \zeta_s, \quad \sigma_{zz} = \frac{Ne^2}{m} \tau,$$

$$\tau^{-1} = N^{-1} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} (\hbar q_z)^2 \left[2mT (\omega_{ep} \langle 1 \rangle + \omega_{pp}(\mathbf{q})) \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\hbar \omega_q}{T} \right) - 1 \right) \right]^{-1} \times \\ \times \omega_{pp}(\mathbf{q}) \omega_{ep} \langle 1 \rangle, \quad (6,11)$$

$$\beta_{zz} = + \frac{e\tau}{m} \left\{ T^2 S - \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} (v_s \hbar q_z)^2 \times \right. \\ \times \left. \left[2(\omega_{ep} \langle 1 \rangle + \omega_{pp}(\mathbf{q})) \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\hbar \omega_q}{T} \right) - 1 \right) \right]^{-1} \omega_{ep} \langle 1 \rangle \right\}, \quad (6,12)$$

S — энтропия электронного газа (см. (3,18)). Подставляя (6,10), (6,9) в (6,7) и (6,8), найдем неравновесные функции распределения электронов и фононов. С помощью этих функций без труда можно написать формулы для тока проводимости и полного потока тепла, переносимого как электронами, так и фононами:

$$(j_{np})_z = \sigma_{zz} E_z^* + \beta_{zz} \nabla_z T^{-1}, \quad (6,13)$$

$$(Q_T)_z = T^{-1} \beta_{zz} E_z^* + (\beta_{zz}^2 (T \sigma_{zz})^{-1} + \kappa_p) \nabla_z T^{-1}, \quad (6,14)$$

где

$$\kappa_p = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} (v_s \hbar q_z)^2 \left[2(\omega_{ep} \langle 1 \rangle + \omega_{pp}(\mathbf{q})) \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\hbar \omega_q}{T} \right) - 1 \right) \right]^{-1}. \quad (6,15)$$

Кинетические коэффициенты в (6,13) и (6,14) удовлетворяют как принципу симметрии Онсагера, так и соотношению Эйнштейна.

Рассмотрим прежде всего дифференциальную термо-э. д. с. Из уравнения $j_z = 0$ находим для нее

$$\alpha_{zz}(H) = \beta_{zz} (T^2 \sigma_{zz})^{-1} = \frac{1}{e} \frac{S}{N} + \alpha_{zz}^{(p)}(H), \quad (6,16)$$

где $\alpha_{zz}^{(p)}(H)$ — вклад в термо-э. д. с. от увлечения, исчезающий при $\omega_{pp} \rightarrow \infty$. В этом случае электронная часть продольной ($\mathbf{E}^* \parallel \nabla T \parallel \mathbf{H}$) термо-э. д. с., так же как и поперечной ($\mathbf{E}^* \parallel \nabla T \perp \mathbf{H}$), выражается одной и той же формулой

$$\alpha^{(e)} H = \frac{1}{e} \frac{S}{N}. \quad (6,17)$$

Эта формула приближенная и соответствует равенству среднего значения силы, действующей на электроны со стороны приложенного градиента температуры, силе, действующей со стороны электрического поля, т. е.

$$\frac{2}{(2\pi\alpha)^2\hbar} \sum_n \int dp_z \left(eE_z + \frac{E(n, p_z) - \zeta}{T} \nabla_z T \right) \frac{p_z^2}{2m} \frac{\partial f_0}{\partial E} = 0. \quad (6,18)$$

Из (6,16) вытекает, что термо-э. д. с. складывается из «электронной» и «фононной» частей. Первая обусловлена отступлением от равновесия только электронов, тогда как вторая часть обусловлена отступлением от равновесия и фононной системы. Первая из них изучалась в приближении времени релаксации в работе Ансельма и Аскерова ⁴⁹. Наибольший интерес в квантовой области представляет вторая часть термо-э. д. с., поскольку она растет с увеличением напряженности магнитного поля.

Рассмотрим случай, представляющий практический интерес, а именно $\omega_{ep} \langle 1 \rangle \ll \omega_{pp}(\mathbf{q})$. В этом случае при $\hbar\Omega \gg kT^\circ$ для невырожденных электронов, согласно (5,13),

$$\omega_{ep} \langle 1 \rangle = \frac{2\pi E_0^2 N}{\hbar v_s \rho_0 \sqrt{2\pi m T}} \frac{q}{|q_z|} \left[1 - \exp \left(-\frac{\hbar\omega_q}{T} \right) \right]^{-1} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2m} \left(\frac{m\omega_q}{q_z} - \frac{\hbar q_z}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 q_\perp^2 \right\}, \quad (6,19)$$

где принято, что $|C_q|^2 = E_0^2 \hbar q / (v_s \rho_0 V)$, ρ_0 — плотность кристалла, E_0 — постоянная деформационного потенциала, v_s — скорость звука, V — объем системы. В случае не слишком сильных магнитных полей $H < c\hbar (T/\hbar v_s)^2 / |e|$ существенно взаимодействие электронов лишь с фононами, импульс которых $\hbar q < \hbar/\alpha$. В этом приближении

$$\alpha_{zz}^{(p)}(H) = \frac{1}{e} B \left(\frac{\hbar\Omega}{T} \right)^{\frac{3-t}{2}} \quad (t \leq 2), \quad (6,20)$$

где

$$B = \frac{2}{\hbar} \left(\frac{m}{2\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{E_0^2}{\rho_0 T \lambda} \right) \left(\frac{mT}{\hbar^2} \right)^{\frac{3-t}{2}} \Gamma(3-t) D_{t-3}(0)$$

при $\omega_{pp}(\mathbf{q}) = \lambda q^t$, $\Gamma(t)$ — гамма-функция, $D_t(x)$ — функция параболического цилиндра. Для наиболее существенного механизма релаксации фононов с $q \lesssim \frac{1}{\alpha}$ в условиях, когда эффекты увлечения вносят заметный вклад в термо-э. д. с., $\omega_{pp} \sim q$ — механизм релаксации Саймонса ⁵⁰, т. е. $t = 1$, и при $\hbar\Omega \gg T$

$$\frac{\alpha_{zz}^{(p)}(H) - \alpha(0)}{\alpha(0)} \equiv \frac{\Delta\alpha_{zz}^{(p)}(H)}{\alpha(0)} \sim H; \quad (6,21)$$

$\alpha(0)$ — термо-э. д. с. при $H = 0$. В области низких температур, когда преобладает рассеяние фононов на границах образца (L — размер образца), $t = 0$, а

$$\frac{\Delta\alpha_{zz}^{(p)}(H)}{\alpha(0)} \sim H^{3/2}. \quad (6,22)$$

Недавно Глузман и Цидильковский ⁷⁹ экспериментально исследовали зависимость $\alpha_{zz}^{(p)}(H)/\alpha(0)$ от температуры и квантующего магнитного поля на образцах n -Ge. Найденные ими результаты хорошо согласуются с формулой (6,21), полученной в предположении $\omega_{pp} \sim qT^4$.

Продольная термо-э. д. с. в квантующем магнитном поле вычислялась независимо другим методом в работе Охта⁵¹. В этой работе рассмотрен лишь случай $\omega_{pp} \sim q^2$ и найдена формула

$$\frac{\Delta\alpha_{zz}^{(p)}(H)}{\alpha(0)} \sim H^{1/2}. \quad (6,23)$$

Отметим, что при $t = 2$ эта формула вытекает из (6,20).

Таким образом, все наиболее существенные механизмы релаксации фононов приводят к росту термо-э. д. с. увлечения с увеличением напряженности магнитного поля. Отметим, что анализ зависимости $\Delta\alpha_{zz}^{(p)}(H)/\alpha(0)$ от магнитного поля и температуры позволяет установить частотную и температурную зависимость затухания звука в области частот $\omega \sim v_s/\alpha$.

В приближении упругого рассеяния на короткодействующем потенциале потоки заряда и тепла вдоль магнитного поля вычислены в работе Пелетминского⁵². Там же проанализированы различные предельные случаи. В квантовом пределе при феноменологическом введении времени релаксации поток заряда и тепла вычислены также в работе Ансельма и Аскерова⁴⁹.

VII. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

В этом разделе изложенная теория будет использована для интерпретации имеющихся экспериментальных данных по термомангнитным явлениям. Однако прежде чем приступить к этому вопросу, необходимо остановиться на влиянии микронеоднородностей в распределении примесей на измерения термо- и гальваномагнитных эффектов. Впервые к рассмотрению этого вопроса обратился Херринг⁵³. Он теоретически исследовал влияние на гальваномагнитные измерения случайных неоднородностей в распределении примесей и показал, что в области сильных магнитных полей неоднородности приводят к квадратичному возрастанию магнитосопротивления с ростом поля.

Вопрос о влиянии микронеоднородностей на измерения термомангнитных эффектов в сильных магнитных полях теоретически исследован Кудиновым и Мойжесом⁵⁴. Используя развитый Херрингом⁵³ общий метод разложения флуктуирующих величин в ряд Фурье, авторы⁵⁴ показали, что относительное влияние случайных неоднородностей с ростом магнитного поля увеличивается при измерениях коэффициента Нернста и не увеличивается при измерениях продольной и поперечной термо-э. д. с. Этот вывод нашел вполне удовлетворительное экспериментальное подтверждение в работе Дричко и Мочан⁵⁵, где было показано, что термо-э. д. с. в сильном поле слабо чувствует влияние микронеоднородностей. Однако это влияние серьезно сказывается на измерениях коэффициента Нернста при больших H . Эффективный (измеряемый на опыте) коэффициент Нернста $Q_N^{\text{эфф}}$ изменяется как H^m , где $-1 < m < -0,2$. По предсказаниям теории Кудинова и Мойжеса⁵⁴, $Q_N^{\text{эфф}} \sim H^{-1}$, а в некоторых случаях $Q_N^{\text{эфф}}$ будет стремиться к насыщению при бесконечном возрастании поля H , тогда как согласно теории, не учитывающей поправок на микронеоднородности, коэффициент Нернста Q_N имеет, как известно, порядок H^{-2} .

Таким образом, в квантующем магнитном поле сравнение экспериментальных данных по эффекту Нернста с теорией следует проводить с большой осторожностью, специально исследуя влияние микронеоднородностей. Измерения же термо-э. д. с. являются вполне надежными.

Таблица VI

Экспериментальное изучение термомагнитных явлений в полупроводниках
и полуметаллах в квантующем магнитном поле

Материал	Лите- ратура	Изучаемый эффект	Концентрация носителей тока, см-3	Темпера- турный интервал, °K	H_{\max} , кэс	$(\frac{h\Omega}{T})_{\max}$	Получаемые све- дения о физи- ческих свойствах проводников
Bi	56	Осцилляции температуры	10^{18}	1,3	12	13	Определение формы ферми- поверхности
	57	Осцилляции α_{\perp} , κ_{\perp} , ρ_{\perp}	10^{18}	1,47 ÷ 4,33	13	13	Совпадение пе- риодов и фаз осцилляций α_{\perp} , κ_{\perp} и ρ_{\perp}
<i>n</i> -InSb	58	} Осцилляции $\frac{\Delta\alpha_{\perp}}{\alpha(0)}$	$1,3 \cdot 10^{16}$	4,2	30	70	} Совпадение пе- риодов и фаз осцилляций $\frac{\Delta\alpha_{\perp}}{\alpha(0)}$ и $\frac{\Delta\rho_{\perp}}{\rho(0)}$
<i>n</i> -InAs	59		$2,4 \cdot 10^{16}$	4	28	48	
<i>n</i> -InSb	60	} Магнетофо- нонные ос- цилляции $\frac{\Delta\alpha_{\parallel}}{\alpha(0)}$	$1,2 \cdot 10^4$	20 ÷ 110	80	40	} Совпадение пе- риодов осцил- ляций $\frac{\Delta\alpha_{\parallel}}{\alpha(0)}$ и $\frac{\Delta\rho_{\parallel}}{\rho(0)}$
	61		$5,5 \cdot 10^{13} \div 3,9 \cdot 10^{17}$	120 ÷ 140	33	2,8	
<i>n</i> -Ge	64	$\frac{\Delta\alpha_{\perp}}{\alpha(0)}$	$(1 \div 2) \cdot 10^3$	15 ÷ 85	90	6	Определение относительной роли различ- ных механиз- мов рассеяния носителей тока Механизм ре- лаксации длин- новолновых фононов на тепловых
<i>n</i> -InSb	72, 73	} $\alpha_{\perp}(H) -$ $-\alpha_{\perp}^{\text{насыщ}}$	$3 \cdot 10^{13} \div 4 \cdot 10^{14}$	6,5 ÷ 82	100	150	} Характер элек- трон-фононно- го и фонон-фо- нонного взаи- модействий Проверка спра- ведливости тео- рии для элек- тронной части термо-э. д. с.
	75		$6,3 \cdot 10^{13}$ $1,5 \cdot 10^{14}$	92 ÷ 101	20	2,2	

Микронеоднородности вносят лишь **незначительные** поправки (в пределах погрешности измерений), не зависящие от H . Поэтому в дальнейшем мы будем детально сопоставлять с теорией только измерения термо-э. д. с.

Более простыми, а потому и наиболее удобными для теоретического анализа, являются формулы для термомагнитных коэффициентов, найденных в изотермических условиях. Однако осуществить изотермические условия в направлении, перпендикулярном к первичному градиенту температуры и электрохимического потенциала, достаточно сложно из-за возникающих поперечных термомагнитных эффектов. Уменьшение появляющихся температурных градиентов вызывает значительные трудности, так как для этого требуется подача и отток тепла с различных сторон образца. Гораздо легче реализовать адиабатические условия, теплоизо-

лируя, например, боковые стенки образца, поместив его в вакуум. Оценка величины адиабатических поправок к изотермическим коэффициентам в квантующем магнитном поле показывает, что как для вырожденного, так и для невырожденного электронного газа эти поправки пренебрежимо малы *).

Для удобства обозрения имеющиеся экспериментальные работы по термомагнитным явлениям в квантующем магнитном поле сведены в табл. VI. В предпоследней графе этой таблицы приведены максимальные в условиях опыта значения $(\hbar\Omega)/T$, свидетельствующие о том, с каким запасом реализованы условия квантования энергетических уровней носителей тока. В последней графе указано, какая информация общего порядка может быть получена из данного эксперимента.

Вся совокупность экспериментальных работ по термомагнитным явлениям, представленных в таблице, может быть подразделена на две группы: а) осцилляционные явления и б) явления в квантовом пределе. Рассмотрим подробнее обе эти группы.

а) О с ц и л л я ц и о н н ы е э ф ф е к т ы

Особое место по исследованию осцилляционных эффектов занимает работа Кюнцлера и др.⁵⁶, в которой изучались так называемые магнетотермические осцилляции в висмуте, т. е. обратимые изменения температуры адиабатически изолированного образца, возникающие при изменении величины или направления приложенного магнитного поля. Осцилляции температуры в квантующем магнитном поле связаны с осцилляциями энтропии электронного газа S и имеют такое же физическое происхождение, как и известные низкотемпературные осцилляции намагничивания. Поскольку

$$S = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{\zeta}, \quad \text{а} \quad M = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial H} \right)_{\zeta},$$

осцилляции как S , так и M обусловлены осцилляциями термодинамического потенциала Φ и в конечном счете они связаны с немонотонным характером зависимости плотности состояний от энергии. При возрастании энтропии электронного газа повышается и термическая энергия, необходимая для поддержания первоначальной температуры. Однако для адиабатически изолированного образца единственный источник тепловой энергии электронов — это решетка. С помощью термометра при изменении H наблюдаются пики охлаждения. Магнетотермические осцилляции обладают высокой разрешающей способностью и позволяют с большой точностью определять параметры ферми-поверхности.

Осцилляции термомагнитных коэффициентов в квантующем магнитном поле (теплопроводности, дифференциальной термо-э. д. с.) впервые экспериментально были открыты Стилом и Бабискином⁵⁷ на очень чистых монокристаллах висмута. В этой работе были установлены весьма

*) Для рассеяния электронов, например, на точечных дефектах или акустических фононах, в случае предельного вырождения различие между изотермической и адиабатической термо-э. д. с. зависит от преобладания фононной компоненты теплопроводности $\kappa_{xx}^{(p)}$ над электронной $\kappa_{xx}^{(e)}$:

$$\alpha_{xx}^{ад} \approx \alpha_{xx}^{из} (5\kappa_{xx}^{(e)} + \kappa_{xx}^{(p)}) / (\kappa_{xx}^{(e)} + \kappa_{xx}^{(p)}).$$

Коэффициент электронной теплопроводности поперек сильного магнитного поля в $(\Omega\tau)^{-2}$ раз меньше, чем в отсутствие поля. Поэтому при $\Omega\tau \gg 1$ электронная часть теплопроводности становится малой по сравнению с фононной и $\alpha_{xx}^{ад} \sim \alpha_{xx}^{из}$.

общие закономерности, связывающие осцилляции коэффициентов термо-э. д. с., теплопроводности и электросопротивления при изменении магнитного поля, а именно — совпадение периодов и фаз осцилляций этих коэффициентов.

Рис. 1 и 2 иллюстрируют наблюдаемые Стилом и Бабискином осцилляции термоэлектрической разности потенциалов и коэффициента теплопроводности поперек магнитного поля. На этих рисунках сплошная

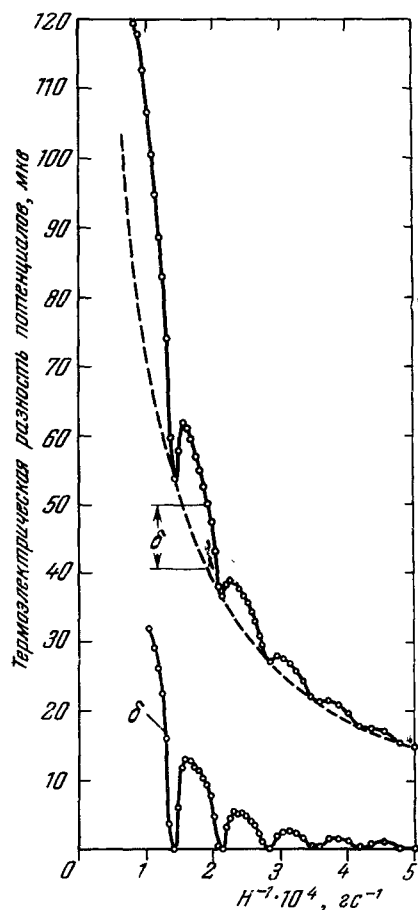


Рис. 1.

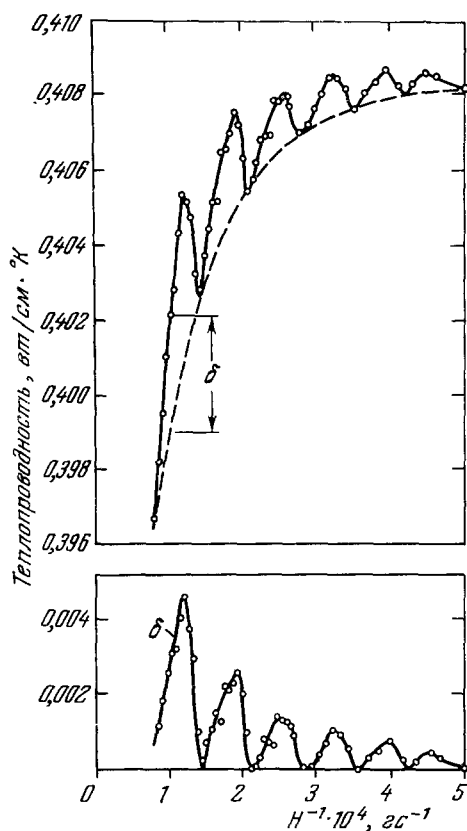


Рис. 2.

кривая соответствует экспериментальным результатам, а штриховая — огибающая минимумов осцилляций; δ — разность ординат экспериментальной кривой и огибающей минимумов. Величина δ введена для того, чтобы выделить осциллирующую компоненту. Для δ график приведен в нижней части рисунков. Эта кривая периодична при изменении H^{-1} . Чтобы сопоставить период и фазу осцилляций термомагнитных коэффициентов и гальваномагнитных, на том же монокристалле измерялось электросопротивление. Сравнение показывает (рис. 3), что периоды осцилляций при изменении H^{-1} у всех трех эффектов одинаковы. Различие в фазах осцилляций весьма мало. Относительный сдвиг фаз осцилляций теплопроводности и электросопротивления составляет $0,16 \text{ рад}$, а в случае термо-э. д. с. и электросопротивления $0,08 \text{ рад}$. Это различие в фазах осцилляций обусловлено главным образом ошибками в построении

огигающей минимумов. В работе ⁵⁷ исследована также температурная зависимость термо-э. д. с. и показано, что монотонная часть термо-э. д. с. с понижением температуры убывает как T^n , где $n \approx 1$. Из экспериментов ⁵⁷ следует, что амплитуды осцилляций термо-э. д. с. пропорциональны $H^{5/2}$; при изменении температуры эта зависимость остается неизменной. Зависимость огибающей минимумов термо-э. д. с. от напряженности магнитного поля пропорциональна H .

Прежде чем обсуждать возможную теоретическую интерпретацию экспериментальных результатов ⁵⁷, найдем следствия, вытекающие из простейшей однозонной модели проводника с изотропным законом дисперсии носителей. Будем предполагать, что электроны сильно вырождены и что упругое рассеяние их на примесях и дефектах является доминирующим в явлениях переноса.

Для вычисления термо-э. д. с. α_{xx} , электронной части теплопроводности κ_{\perp} и магнитосопротивления ρ_{\perp} необходимы формулы для кинетических коэффициентов σ_{ik} , β_{ik} , χ_{ik} , χ_{ik} . В случае сильного вырождения из (3,16), (3,17) и (4,7) следует закон Видемана — Франца

$$\chi_{ik} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 T^0 \sigma_{ik}. \quad (7,1)$$

Остальные кинетические коэффициенты также можно выразить через σ_{ik} . Соответствующие формулы имеют вид

$$\beta_{ik} = \frac{1}{e} \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_{\zeta} \int_{-\infty}^{\zeta} d\zeta' \sigma_{ik}(\zeta'), \quad (7,2)$$

$$e\chi_{ik} = -T\beta_{ik}. \quad (7,3)$$

В сильном магнитном поле при наличии носителей тока одного знака

$$\sigma_{xx} \ll \sigma_{xy}, \quad \beta_{xx} \ll \beta_{xy}; \quad (7,4)$$

при этом, согласно (2,11) и (2,14),

$$\alpha_{xx} \equiv \alpha_{\perp} = \frac{\beta_{xy}}{\sigma_{xy}}, \quad (7,5)$$

$$\rho_{\perp} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xy}^2}. \quad (7,6)$$

Согласно (4,7) в неисчезающем по вырождению приближении имеют место формулы

$$\beta_{ik} \sim T, \quad \chi_{ik} \sim T^2, \quad \chi_{ik} \sim T. \quad (7,7)$$

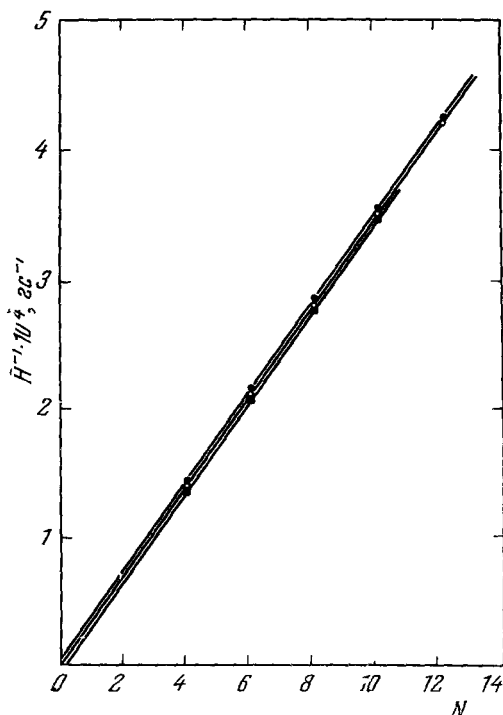


Рис. 3.

По оси ординат отложены значения $1/H$, соответствующие минимумам на кривых δ для термоэлектрической разности потенциалов (\circ), теплопроводности (\bullet) и электропроводности (\blacksquare), как функции целых чисел N (ось абсцисс).

Поэтому в (2,13) первые два слагаемых $\sim T^3$. Пренебрегая в κ_{\perp} членами $\sim T^3$, находим в линейном по T приближении

$$\kappa_{\perp} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 T^{\circ} \sigma_{xx}. \quad (7,8)$$

Адамс и Холстейн²⁹ показали, что для достаточно больших значений квантового числа n характер осцилляций σ_{xx} , по существу, не зависит от механизма рассеяния и осциллирующая часть электропроводности может быть представлена в виде

$$\sigma_{\text{осц}} \sim \sigma_{\text{кл}} \left(\frac{\hbar\Omega}{\xi} \right)^{1/2} \delta^{-1/2}, \quad (7,9)$$

где $\sigma_{\text{кл}}$ — классическая (неквантовая) электропроводность в сильном магнитном поле, а

$$\delta^{-1/2} = 2 \sqrt{\pi} \sum_{M>0} (-1)^M (2\pi M)^{-1/2} \cos \left(\frac{2\pi M \xi}{\hbar\Omega} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (7,10)$$

Осциллирующая часть дифференциальной термо-э. д. с. $(\alpha_{xx})_{\text{осц}}$ также при не слишком малых квантовых числах n может быть представлена формулой

$$(\alpha_{\perp})_{\text{осц}} = (\alpha_{xx})_{\text{осц}} = \alpha_{\text{кл}} \left(\frac{\hbar\Omega}{\xi} \right)^{1/2} \delta^{-1/2}, \quad (7,11)$$

где

$$\alpha_{\text{кл}} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{e} \left(\frac{kT^{\circ}}{\xi} \right)$$

— термо-э. д. с. в классическом пределе для сильно вырожденного электронного газа. Поскольку осциллирующие части магнитосопротивления, теплопроводности и термо-э. д. с. пропорциональны одной и той же осциллирующей функции

$$(\rho_{\perp})_{\text{осц}} \sim (\kappa_{\perp})_{\text{осц}} \sim (\alpha_{\perp})_{\text{осц}} \sim \delta^{-1/2},$$

период и фаза осцилляций ρ_{\perp} , κ_{\perp} и α_{\perp} одинаковы. Максимальные значения амплитуд осцилляций при низких температурах определяются в основном уширением энергетических уровней, обусловленным столкновением электронов с рассеивателями. Согласно²⁹ максимальные значения $\delta^{-1/2}$ по порядку величины равны $\sqrt{\Omega\tau}$ (τ — время свободного пробега носителей, входящее в электропроводность). Если доминирующую роль в уширении энергетических уровней играет упругое рассеяние на примесях, то τ не зависит от температуры. При этом зависимость амплитуд осцилляций $\delta^{-1/2}$ от магнитного поля будет оставаться одной и той же при различных температурах. И, наконец, линейная зависимость термо-э. д. с. от T обусловлена сильным вырождением. Эти выводы однозонной модели находятся в хорошем качественном соответствии с опытами Стила и Бабискина⁵⁷. Но у нас нет оснований переносить результаты, полученные в однозонной модели, на висмут, в котором концентрация электронов равна концентрации дырок, и первое из неравенств (7,4) нарушается, поскольку в нулевом приближении по рассеянию $\sigma_{xy}^{(0)} = 0$. В этом случае отличный от нуля вклад в σ_{xy} будет возникать лишь в приближении $(\Omega\tau)^{-2}$. В условиях опытов⁵⁷ (заполнено большое число уровней Ландау) можно показать, что величину $\sigma_{xy}^{(2)} \sim (1/\Omega\tau)^2$ можно также представить в виде плавно изменяющейся классической части $(\sigma_{xy})_{\text{кл}}$ и осциллирующей части, пропорциональной $\delta^{-1/2}$. Поэтому, когда амплитуды осцилляций кинетических коэффициентов малы в срав-

нении с их плавно зависящей от H классической частью, как α_{xx} , так и β_{xx} , ρ_{xy} можно представить в виде

$$\alpha_{xx} = (\alpha_{xx})_{\text{кл}} + (\alpha_{xx})_{\text{осц}},$$

$$\rho_{xx} = (\rho_{xx})_{\text{кл}} + (\rho_{xx})_{\text{осц}},$$

$$\rho_{xy} = (\rho_{xy})_{\text{кл}} + (\rho_{xy})_{\text{осц}},$$

причем $(\alpha_{xx})_{\text{осц}} \sim (\rho_{xx})_{\text{осц}} \sim (\rho_{xy})_{\text{осц}} \sim \delta^{-1/2}$. Таким образом, в не слишком сильных магнитных полях, если заполнено достаточно большое число уровней Ландау, характер осцилляций термогальваномагнитных коэффициентов оказывается одинаковым как в однозонной, так и двухзонной модели проводника и при равенстве концентраций дырок и электронов. Если же поля настолько сильны, что заполнено не слишком большое число уровней, характер осцилляций различных термогальваномагнитных коэффициентов различен. Так, например, в опытах Энтклиффа и Стредлинга⁸⁰, выполненных на образцах $n\text{-InSb}$, показано, что осцилляции ρ_{xx} и ρ_{xy} сдвинуты по фазе на $\pi/4$.

В полупроводниках квантовые низкотемпературные осцилляции термо-э. д. с. в поперечном магнитном поле ($\mathbf{H} \perp \nabla T$) наблюдались на образцах $n\text{-InSb}$ ⁵⁸ и $n\text{-InAs}$ ⁵⁹. Сопоставление экспериментальных кривых для поперечной магнитотермо-э. д. с. $\Delta\alpha_{\perp}/\alpha(0)$ и поперечного магнитосопротивления $\Delta\rho_{\perp}/\rho(0)$ обнаруживает, так же как и для висмута, совпадение периодов и хорошую синфазность. В работе⁵⁸ наблюдалось отчетливое спиновое расщепление первого ($n = 1$) уровня Ландау. Однако оценка g -фактора по величине этого расщепления приводит к значению $|g| = 34$, что оказывается меньше g -фактора, предсказываемого теорией и определенного по спиновому резонансу электронной проводимости в InSb ($|g| = 50$). Другую физическую природу (по сравнению с рассмотренными выше низкотемпературными осцилляциями) имеют так называемые магнитофононные осцилляции термо-э. д. с., впервые обнаруженные в $n\text{-InSb}$ Пури и Джебаллом⁶⁰ и более детально исследованные в работах Муждабы, Парфеньева и Шалыта⁶¹.

Как по условиям наблюдения (более высокие температуры), так и по зависимости периода от параметров проводника, этот тип осцилляций отличается от рассмотренных выше квантовых низкотемпературных осцилляций типа Шубникова — де-Гааза.

Период низкотемпературных осцилляций определяется только концентрацией электронов:

$$\Delta\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{2e}{\hbar c} (3\pi^2 n)^{-2/3}, \quad (7,12)$$

а период магнитофононных осцилляций зависит от эффективной массы электронов m^* и предельной частоты оптических фононов:

$$\Delta\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{e}{m^* \omega_{\text{Дс}}}. \quad (7,13)$$

В данном обзоре мы не будем подробно анализировать магнитофононные осцилляции термо-э. д. с., отсылая читателя к специальной литературе^{62, 81}; отметим только два следующих обстоятельства.

Во-первых, в соответствии с теоретическим результатом о независимости поперечной электронной части термо-э. д. с. от рассеяния, на кривой для поперечной магнитотермо-э. д. с. в⁶¹ осцилляций не обнаружено. В продольном магнитном поле ($\mathbf{H} \parallel \nabla T$) магнитотермо-э. д. с. осциллирует. Максимумы, которые можно отметить на экспериментальных кривых, имеют периодичность, согласующуюся с (7,13).

Во-вторых, осцилляционные максимумы продольной термо-э. д. с. $(\Delta\alpha_{||})/\alpha(0)$ смещены относительно резонансных значений магнитного поля, определяемых условием (7,13). Сопоставление величины этого смещения с предсказаниями теории Павлова и Фирсова⁶² позволяет получить информацию об относительной роли различных механизмов рассеяния носителей тока в n -InSb.

б) Термомагнитные эффекты в квантовом пределе

Зависимость термомагнитных эффектов в квантовом пределе от температуры и напряженности магнитного поля при различных механизмах упругого рассеяния приведена в табл. II—IV. Однако в настоящее

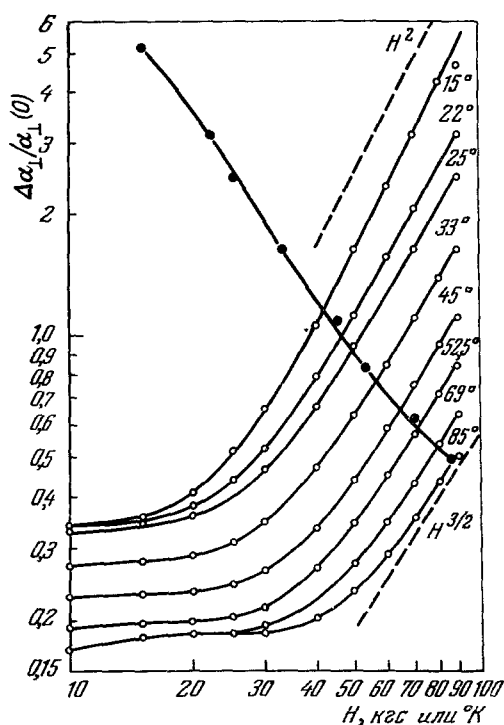


Рис. 4.

время мы еще не располагаем достаточно надежными экспериментальными данными, чтобы судить о справедливости теоретических зависимостей термомагнитных эффектов от T и H , приведенных в табл. II—IV. Так, например, измерения эффекта Нернста, приведенные в работе Амирханова и др.⁶³, недоступны для теоретической интерпретации, потому что характер зависимости постоянной Нернста от магнитного поля меняется от образца к образцу. Это, по-видимому, связано с влиянием неоднородностей, о котором шла речь в начале этого раздела.

Наиболее надежные экспериментальные сведения о зависимости от температуры и напряженности магнитного поля в квантовом пределе получены при измерении дифференциальной термо-э. д. с. Эти экспериментальные данные и представляют наибольший интерес, поскольку теоретический анализ

их позволяет, с одной стороны, судить о правильности предпосылок теории, с другой стороны, получать сведения о механизмах электрон-фононной и даже фонон-фононной релаксации.

В опытах Пури и Джебалла⁶⁴ на чистых образцах электронного германия с концентрацией примеси $n_D \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$ измерялось отношение

$$\frac{\alpha_{\perp}(H) - \alpha_{\perp}(0)}{\alpha_{\perp}(0)} = \frac{\Delta\alpha_{\perp}}{\alpha_{\perp}(0)}. \quad (7,14)$$

На рис. 4 воспроизводятся экспериментальные результаты, полученные в⁶⁴ для зависимости $\Delta\alpha_{\perp}/\alpha_{\perp}(0)$ от магнитного поля при различных температурах для $H \parallel [100]$ и $\nabla T [010]$. На этом же графике приведена зависимость $\Delta\alpha_{\perp}/\alpha_{\perp}(0)$ от температуры, полученная в поле $H = 88 \text{ кгс}$. Экспериментальные данные приводят к следующим эмпирическим

формулам: в интервале температур 20—80° К

$$\frac{\Delta\alpha_{\perp}}{\alpha_{\perp}(0)} = D_1 \left(\frac{H}{T} \right)^{3/2}, \quad (7,15)$$

а для $T < 20^\circ \text{ К}$

$$\frac{\Delta\alpha_{\perp}}{\alpha_{\perp}(0)} = D_2 \left(\frac{H}{T} \right)^2. \quad (7,16)$$

D_1 и D_2 слабо меняются с температурой и полем.

В полупроводниках с анизотропной поверхностью постоянной энергии (типа $n\text{-Ge}$ и $n\text{-Si}$) связь носителей тока с продольными и поперечными фононами одинакова по порядку величины. Поэтому анализ этих экспериментов невозможен в рамках простейшей модели.

В работах ^{65, 66} основные положения квантовой теории терромагнитных явлений, изложенные в разделах III—IV применительно к квадратичному изотропному закону дисперсии, были распространены на многодолинный анизотропный энергетический спектр электронов. Анизотропия рассеяния носителей тока учитывалась в рамках метода потенциала деформации. Наиболее детально была исследована изотермическая термо-э. д. с. в различных предельных случаях в зависимости от величины магнитного поля и степени увлечения электронов фононами.

Изотермическая дифференциальная термо-э. д. с. складывается из двух частей: электронной $\alpha^{(e)}(H)$, обусловленной лишь неравновесностью электронов, и фононной $\alpha^{(v)}(H)$, обусловленной отклонением фононов от равновесного распределения за счет электрон-фононных столкновений: $\alpha(H) = \alpha^{(e)}(H) + \alpha^{(v)}(H)$. В условиях опытов ⁶⁴ $\alpha^{(v)}$ оказывается малой по сравнению с $\alpha^{(e)}$. В квантующем магнитном поле основной вклад во взаимодействие с электронами вносят фононы с $q \sim \sim q_H = \sqrt{|e|\hbar/c}$. В опытах ⁶⁴ использовались такие магнитные поля и температуры, что $q_H^2 < q_\lambda^2 = (T/\hbar s_\lambda)^2$. В этом пределе для случая, когда магнитное поле направлено вдоль оси четвертого порядка и увлечение электронов фононами λ -ветви является слабым ($\omega_{pp}^{(\lambda)} \gg \omega_{pe}^{(\lambda)}$), получено следующее выражение для термо-э. д. с. увлечения ⁶⁵:

$$\alpha_\lambda(H) = \frac{\Gamma\left(\frac{2-r_\lambda}{2}\right) B}{e\pi^{3/2} 2^{(7+r_\lambda)/2}} \left(\frac{\hbar\Omega}{T}\right)^{\frac{2-r_\lambda}{2}} \left(\frac{ms_\lambda^2}{T}\right)^{\frac{3-r_\lambda}{2}} \left(\frac{C_2}{T}\right)^2 \frac{T^\gamma F_\lambda}{P^{\gamma/5} c_\lambda}, \quad (7,17)$$

где s_λ — фазовая скорость фононов λ -ветви, C_2 — константа деформационного потенциала, c_λ — среднее значение упругой постоянной для λ -ветви, F_λ — содержит слабую логарифмическую зависимость от магнитного поля, $P = \rho_0 \hbar^{(2-r_\lambda)} s_\lambda^{(4-r_\lambda)} L^{-1}$, ρ_0 — плотность вещества, L — размер кристалла, B определяется комбинацией компонент тензора обратных эффективных масс в системе координат, связанной с внешними полями ⁶⁵; r_L и γ определяются декрементом затухания фононов

$$\tau_\lambda^{-1}(q, T) = A_\lambda T^{3-r_\lambda-\gamma} q^{2+r_\lambda}. \quad (7,18)$$

A_λ зависит от параметров вещества. Отношение $\alpha_\lambda^{(v)}(H)$ к термо-э. д. с. увлечения в отсутствие магнитного поля $\alpha_\lambda^{(v)}(0)$ выражается простой формулой

$$\frac{\alpha_\lambda^{(v)}(H)}{\alpha_\lambda^{(v)}(0)} = B_1 \left(\frac{\hbar\Omega}{T} \right)^{\frac{2-r_\lambda}{2}}. \quad (7,19)$$

B_1 содержит слабую логарифмическую зависимость от H и T .

В электронном германии экспериментально изучаемая величина

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha(0)} = \frac{\sum_{\lambda} \Delta\alpha_{\lambda}^{(p)}(H)}{\sum_{\lambda} \alpha_{\lambda}^{(p)}(0)} \quad (7,20)$$

содержит вклад от различных ветвей фононного спектра и более сложна для анализа.

Из формул (7,17) — (7,20) следует, что зависимость от T и H измеряемой величины $\Delta\alpha/\alpha(0)$ определяется в основном декрементом затухания фононов с $q \sim q_H = \sqrt{|e| H/c\hbar}$. Обычно в этой области частот используют для декремента затухания поперечных звуковых волн формулу Ландау — Румера ⁶⁷

$$\tau_t^{-1} = A_t q T^4, \quad (7,21)$$

а для продольного звука формулу Херринга ⁶⁸

$$\tau_l^{-1} = A_l q^2 T^3. \quad (7,22)$$

Эти формулы получены в приближении трехфононных процессов, происходящих с точным выполнением законов сохранения энергии и импульса.

При достаточно низких температурах становится существенной не зависящая от T и q релаксация фононов на границах образца; при этом декремент затухания определяется формулой

$$(\gamma_{\text{гp}})_{\lambda} = (\tau_{\text{гp}})_{\lambda}^{-1} \sim \frac{s_{\lambda}}{L} \quad (7,23)$$

(L — характерный размер образца).

В опытах ⁶⁴ напряженность магнитного поля и температура удовлетворяли неравенству

$$H < \frac{c\hbar}{|e|} \left(\frac{T}{\hbar s_{\lambda}} \right)^2.$$

В этом случае, как вытекает из (7,21) и (7,22),

$$\frac{\tau_l}{\tau_t} = \left(\frac{s_l}{s_t} \right)^3 \left(\frac{T}{ms_l^2} \frac{T}{\hbar \Omega} \right)^{1/2} \gg 1. \quad (7,24)$$

Неравенство (7,24) приводит к выводу, что наиболее существенный вклад в термо-э. д. с. увлечения вносят продольные фононы и согласно (7,19)

$$\frac{\alpha_l^{(p)}(H)}{\alpha_l^{(p)}(0)} \sim \frac{H}{T}.$$

Эта формула дает иную зависимость, чем наблюдается на опыте (7,15). Последняя формула получилась бы только тогда, если имело бы место неравенство, обратное (7,24), что противоречит условиям эксперимента ⁶⁴. Таким образом, τ_l и τ_t , вычисленные в приближении трехфононных процессов при условии выполнения закона сохранения импульса и энергии, невозможно согласовать с экспериментом ⁶⁴, выполненным при наличии квантующего магнитного поля. Аналогичная ситуация возникла и ранее в работе Херринга и др. ⁶⁹ при анализе экспериментов по термомагнитным явлениям в классической области полей. Существуют и другие эксперименты ⁷⁰ по изучению температурной зависимости τ_l и τ_t , которые также противоречат формуле (7,22).

Таким образом, возникает необходимость в пересмотре наших представлений о релаксации продольного длинноволнового звука в твердых телах. До сих пор не принималась во внимание ширина энергетических

уровней коротковолновых тепловых фононов, участвующих в трехфоонных процессах. В поглощении продольного длинноволнового звука учет этого фактора приводит к новым возможностям. Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим рассеяние звука на коротковолновых тепловых фононах. В пренебрежении шириной уровня (декрементом затухания) коротковолновых тепловых фононов, в трехфоонных процессах должен точно выполняться закон сохранения энергии и импульса. Если дисперсия скорости продольного звука отсутствует, то возможен процесс с участием трех фононов продольной ветви с параллельными волновыми числами; при этом закон сохранения импульса имеет вид $q_1 = q_2 - q_3$, а закон сохранения энергии получится путем умножения этого равенства на скорость продольного звука. Учет сколь угодно малой дисперсии коротковолновых тепловых фононов уже исключает эти процессы, поскольку закон сохранения энергии не будет выполняться, если все три фонона продольны. Однако ситуация может радикально измениться, если принять во внимание декремент затухания коротковолновых тепловых фононов. Действительно, учет декремента затухания тепловых фононов приводит к неопределенности в законе сохранения энергии, и если эта неопределенность больше, чем величина дисперсии, то процессы с участием трех фононов, принадлежащих одной ветви, становятся возможными. Именно эти процессы вносят существенный вклад в поглощение длинноволнового звука в твердых телах коротковолновыми тепловыми фононами и приводят, как показал Саймонс⁵⁰ (см. также работу Зырянова и Талуца⁷¹), вместо (7,22) к следующему декременту затухания продольного длинноволнового звука:

$$\tau_l^{-1} = A_l q T^4. \quad (7,25)$$

Декремент затухания поперечного длинноволнового звука при учете конечной ширины уровня тепловых фононов по-прежнему описывается формулой (7,21).

Формулы (7,25) и (7,21) совместно с (7,19) приводят в температурном интервале, где преобладает фонон-фононная релаксация, к наблюдаемой на опыте зависимости (7,15). Это подтверждает представления о механизме релаксации длинноволновых фононов на коротковолновых, положенные в основу формулы (7,25). Следует подчеркнуть, что результаты экспериментов⁷⁰ по изучению температурной зависимости поглощения продольного и поперечного звука в диэлектриках также хорошо согласуются с формулами (7,21) и (7,25). При $T < 20^\circ \text{K}$ формулы (7,23) и (7,19) приводят к

$$\frac{\alpha(H)}{\alpha(0)} \sim \left(\frac{H}{T} \right)^2,$$

что хорошо согласуется с экспериментальным результатом⁶⁴.

Большой интерес для выяснения механизма фонон-фононной релаксации в полупроводниках с кубической решеткой представляет и другая работа Пури и Джебалла⁷². Авторы обнаружили, что в электронном InSb в интервале температур $6 \div 40^\circ \text{K}$ термо-э. д. с. увлечения $\alpha^{(p)}(H)$ с ростом магнитного поля очень сильно возрастает, в десятки раз превышая $\alpha^{(e)}$, хотя в классической области сильных полей, т. е. при $\Omega\tau \gg 1$, $\hbar\Omega < T$, она практически отсутствует. Поскольку в электронном антимониде индия поверхности постоянной энергии изотропны, в отличие от электронного германия, только продольные фононы должны давать вклад в эффекты увлечения. Это обстоятельство значительно упрощает сравнение теории с экспериментом.

В работе ⁷² измерялось изменение термо-э. д. с. $\Delta\alpha_{\text{эксп}} = \alpha(H) - \alpha_{\text{насыщ}}$ по сравнению с классическим значением насыщения $\alpha_{\text{насыщ}}$, как функция магнитного поля и температуры. В пренебрежении $\alpha_{\text{насыщ}}^{(p)}$ величина термо-э. д. с. увлечения $\alpha^{(p)}(H)$ определялась из следующего соотношения:

$$\alpha^{(p)}(H) = \Delta\alpha_{\text{эксп}} - \Delta\alpha_{\text{теор}}^{(e)}, \quad (7,26)$$

где

$$\Delta\alpha_{\text{теор}}^{(e)} = \alpha^{(e)}(H) - \alpha_{\text{насыщ}}^{(e)} = \frac{1}{e} \left(\frac{S}{N} - \frac{5}{2} + \frac{\xi_0}{T} \right). \quad (7,27)$$

Здесь $\alpha^{(e)}(H)$ — электронная часть термо-э. д. с. в квантующем магнитном поле, определяемая соотношением (7,4); $\alpha_{\text{насыщ}}^{(e)}$ — электронная часть термо-э. д. с. в классической области сильных магнитных полей, ξ_0 — химический потенциал при $H = 0$. В последующей работе ⁷³ Пури сопоставил экспериментальные данные для $\alpha^{(p)}(H)$ с формулой для термо-э. д. с. увлечения, полученной при распространении теории Херринга ⁷⁴ («л»-подход) на квантовую область. В пределе $q_H^2 < (T/\hbar S_\lambda)^2$ эта формула приводит к такой же зависимости от T и H , как и формула, определяемая током проводимости (5,18).

Изучение зависимости $\alpha^{(p)}$ от магнитного поля при низких температурах ($T < 15^\circ \text{K}$), когда фононы рассеиваются главным образом на границах образца, позволило однозначно решить вопрос об абсолютном преобладании рассеяния электронов в $n\text{-InSb}$ на деформационном потенциале, по сравнению с рассеянием их на пьезоэлектрических колебаниях.

При более высоких температурах ($15 < T < 40^\circ \text{K}$) из анализа полевой и температурной зависимости термо-э. д. с. увлечения $\alpha^{(p)}$ для декремента затухания продольных длинноволновых фононов Пури получил следующее соотношение:

$$\tau_l^{-1}(q, T) \sim qT^3. \quad (7,28)$$

Это выражение находится в противоречии с результатами теории, учитывающей трехфононные процессы и приводящей, как заметил Херринг ⁶⁸, к сумме показателей степеней q и T в декремента затухания, равной пяти. Нам представляется, что полученный результат (7,28) явился следствием недостаточно корректного анализа экспериментальных данных.

Во-первых, Пури игнорирует те серьезные затруднения, которые возникают при выделении изменения электронной части термо-э. д. с. $\Delta\alpha_{\text{теор}}^{(e)}$ из полного изменения термо-э. д. с. $\Delta\alpha_{\text{эксп}}$, измеренного на опыте. Он вычисляет $\Delta\alpha_{\text{теор}}^{(e)}$ по формуле (7,27), учитывая, как это и следует из общих соображений, спиновое расщепление уровней Ландау и неквадратичность зоны проводимости в $n\text{-InSb}$. Однако в той области температур и магнитных полей, где эффект увлечения практически отсутствует и, следовательно, $\Delta\alpha_{\text{эксп}} = \Delta\alpha^{(e)}$, эта формула не дает адекватного эксперименту описания электронной части термо-э. д. с. Как было обнаружено в ряде работ, хорошее согласие с экспериментом имеет место только в том случае, если в (7,27) не учитывать спиновое расщепление уровней Ландау. Для квадратичного изотропного закона дисперсии носителей без учета спина формула (7,27) принимает вид

$$e\Delta\alpha^{(e)} = -1 + \ln \left(\frac{x_v}{\text{sh } x_v} \right) + x_v \text{cth } x_v, \quad (7,29)$$

где $x_v = \hbar\Omega/T$. Хорошее согласие экспериментальных данных с формулой (7,29) обнаружено в работе Дричко и Мочан ⁷⁵, где измерения $\Delta\alpha^{(e)}$ выполнены для не очень сильных магнитных полей и высоких температур

($x_v \sim 1$, $T = 100^\circ \text{K}$), а также Пури и Джебаллом ⁷⁵. Об этом свидетельствует рис. 5 работы ⁷², на котором измерения $\Delta\alpha_{\text{эксп}}$ при $T = 82^\circ \text{K}$, когда увлечение отсутствует, сопоставлены с теоретической кривой, рассчитанной по формуле (7,29).

Если в формуле (7,27) для квадратичного изотропного закона учесть спин носителей и эффективное значение g -фактора, то согласие теории с опытом, как отмечено в ⁷², ухудшается. Поправки на неквадратичность зоны проводимости в $n\text{-InSb}$ при учете спинового расщепления уровней энергии не улучшают согласия с экспериментом ⁷⁶. Это расхождение теории с экспериментом для $\Delta\alpha^{(e)}$ до сих пор остается невыясненным. Однако при обработке экспериментальных данных существующее расхождение теории и эксперимента для $\Delta\alpha^{(e)}$ следует иметь в виду.

В работе ⁷³ приведена таблица экспериментальных значений для $\Delta\alpha_{\text{эксп}}$ в широком интервале температур ($6,5 \div 82^\circ \text{K}$) и магнитных полей ($10 \div 100 \text{ кгс}$). Если $\Delta\alpha_{\text{теор}}^{(e)}$ вычислять не по формуле, учитывающей и спиновое расщепление уровней, и неквадратичность зоны, как это делает Пури в ⁷³, а пользоваться, например, формулой (7,29), лучше соответствующей опыту, то для $\alpha^{(p)}$ в интервале температур $25\text{--}40^\circ \text{K}$ получается следующая зависимость от T и H :

$$\alpha^{(p)} \sim H^{1,6} T^{-5,05} \quad (7,30)$$

вместо найденной Пури зависимости $\alpha_{\text{Пури}}^{(p)} \sim H^{1,3} T^{-4,46}$. Это приводит для декремента затухания продольных длинноволновых фононов к формуле

$$\gamma_l = \tau_l^{-1}(q, T) \sim q T^{3,55}, \quad (7,31)$$

вместо формулы (7,28), полученной в ⁷³.

Второе существенное обстоятельство, которое было оставлено Пури без внимания при обработке экспериментальных данных и получении формулы (7,28), — это учет рассеяния фононов на границах образца. В интервале температур $27\text{--}43^\circ \text{K}$ Пури анализирует зависимость термо-э. д. с. увлечения $\alpha^{(p)}$ от магнитного поля и температуры с учетом лишь фонон-фононной релаксации, полностью пренебрегая рассеянием фононов на границах образца. Однако в предыдущей статье ⁷⁵ приведены убедительные экспериментальные доказательства вклада в релаксацию фононов от рассеяния их на границах образца в указанном температурном интервале. В частности, в работе ⁷⁵ изучалось отношение термо-э. д. с. двух образцов с различной площадью поперечного сечения при фиксированном значении поля (80 кгс) как функция температуры (так называемый размерный эффект). В интервале $27\text{--}43^\circ \text{K}$ это отношение отлично от единицы и равно соответственно $1,45\text{--}1,15$. Максимальное значение этого отношения равно $1,55$ при $T = 6^\circ \text{K}$. Приведенные значения размерного эффекта свидетельствуют о роли граничного рассеяния фононов в исследуемом интервале температур.

Теоретические оценки полевой и температурной зависимости термо-э. д. с. увлечения $\alpha^{(p)}$ по формуле (7,17) для релаксации продольных длинноволновых фононов на коротковолновых фононах (согласно (7,25)) и на границах образца (согласно (7,23)) приводят соответственно к следующим выражениям:

$$\alpha^{(p)} \sim H^{1,5} T^{-5,5}, \quad (7,32)$$

$$\alpha_{\text{гп}}^{(p)} \sim H^2 T^{-1,5}. \quad (7,33)$$

Сопоставление этих зависимостей с экспериментальными данными (7,30) свидетельствует о том, что в интервале $27 \div 43^\circ \text{K}$ доминирует рассеяние

фононов на фононах, однако рассеянием фононов на границах полностью пренебрегать нельзя.

Таким образом, можно надеяться, что более адекватное эксперименту описание $\Delta\alpha_{\text{теор}}^{(e)}$, а также введение поправки на граничное рассеяние фононов подтвердит справедливость соотношения для декремента затухания продольного длинноволнового звука $\gamma_l \sim qT^4$, которое согласуется с экспериментальными данными для термо-э. д. с. увлечения в $n\text{-Ge}^{64}$, а также с экспериментом ⁷⁰ по поглощению ультразвука в твердых телах и, наконец, с теоретическими представлениями ^{50, 71}.

ПРИЛОЖЕНИЕ

а) КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Рассмотрим систему взаимодействующих электронов с гамильтонианом

$$\hat{H} = \sum_{\nu} E_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + \sum_{(\mu, \mu', \nu, \nu')} G_{\nu\nu'}^{\mu'\mu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\mu'}^{\dagger} a_{\nu} a_{\mu}, \quad (\text{П},1)$$

где E_{ν} — собственное значение энергии одночастичного гамильтониана, а $G_{\nu\nu'}^{\mu'\mu} \equiv \langle \nu, \mu | G(r - r') | \nu', \mu' \rangle$ — матричный элемент межэлектронного взаимодействия по собственным функциям одночастичного гамильтониана, a_{ν}^{\dagger} и a_{μ} — операторы вторичного квантования, подчиняющиеся статистике Ферми. Введем, следуя работе Боголюбова и Гурова ⁴⁶, матрицы плотности одной, двух и т. д. частиц с помощью формул

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\hat{\rho} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa'}) &\equiv \langle a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa'} \rangle \equiv f_{\kappa\kappa'}, \\ \text{Sp}(\hat{\rho} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa'}^{\dagger} a_{\nu} a_{\nu'}) &\equiv \langle a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa'}^{\dagger} a_{\nu} a_{\nu'} \rangle \equiv h(\kappa\kappa'\nu\nu'), \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{П},2)$$

Усреднение в (П,2) производится по ансамблю Гиббса.

Используя определения (П,2) и уравнение движения операторов

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{F} = [\hat{H}, \hat{F}]_- \equiv \hat{H}\hat{F} - \hat{F}\hat{H}, \quad (\text{П},3)$$

найдем

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + E_{\kappa'} - E_{\kappa} \right) f_{\kappa\kappa'} &= \sum_{(\nu, \nu', \mu, \mu')} G_{\nu\nu'}^{\mu'\mu} \{ h(\nu\mu\kappa'\nu') \delta_{\mu\mu'} - \\ &- h(\nu\mu\mu'\kappa') \delta_{\nu\kappa'} + h(\kappa\mu\mu'\nu') \delta_{\kappa'\nu} - h(\kappa\nu\mu'\nu') \delta_{\mu\kappa'} \}, \end{aligned} \quad (\text{П},4)$$

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + E_{\kappa'} + E_{\kappa} - E_{\nu} - E_{\nu'} \right) h(\kappa\kappa'\gamma\gamma') &= \\ &= \sum_{(\mu\mu', \nu, \nu')} G_{\nu\nu'}^{\mu'\mu} \langle [a_{\nu}^{\dagger} a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu'} a_{\mu'}, a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa'}^{\dagger} a_{\gamma} a_{\gamma'}]_- \rangle. \end{aligned} \quad (\text{П},5)$$

Для получения уравнения движения одночастичной матрицы плотности, без учета эффектов динамического экранирования межэлектронных взаимодействий в борновском приближении, следует выразить встречающиеся в правой части (П,5) средние значения от произведения шести операторов через произведения одночастичных матриц. Так, например,

$$\begin{aligned} \langle a_{\nu}^{\dagger} a_{\mu}^{\dagger} a_{\nu'} a_{\mu'}^{\dagger} a_{\gamma} a_{\gamma'} \rangle &= f_{\nu\gamma'} f_{\mu\nu'} f_{\kappa'\gamma} + f_{\nu\nu'} f_{\mu\gamma} f_{\kappa'\gamma'} + f_{\nu\gamma} f_{\mu\gamma'} (\delta_{\nu'\kappa'} - f_{\kappa'\nu'}), \\ \langle a_{\nu}^{\dagger} a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu'}^{\dagger} a_{\gamma} a_{\gamma'} \rangle &= f_{\mu\mu'} f_{\nu\gamma} f_{\kappa\gamma'} + f_{\kappa\mu} f_{\nu\gamma'} f_{\mu\gamma} + f_{\kappa\gamma} f_{\nu\mu'} f_{\mu\gamma'}. \end{aligned} \quad (\text{П},6)$$

Подставляя (П,6) в (П,5), получим уравнение, связывающее h с f , в следующем виде:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + E_{\kappa} + E_{\kappa'} - E_{\nu} - E_{\nu'} \right) h(\kappa\kappa'\gamma\gamma') = \hat{M}[f]. \quad (\text{П},7)$$

Здесь $M[f]$ означает правую часть (П,5) при подстановке (П,6). В случае медленных процессов h от времени t явно не зависит, а зависит лишь неявно через одночастичные

матрицы $f_{\nu\nu'}$. Поэтому $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hbar = 0$. Однако в теории возмущений обычно вводят адиабатический параметр $\varepsilon \rightarrow 0$, включающий взаимодействие между электронами при $t \rightarrow -\infty$; следовательно, надо в (П,7) заменить $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\varepsilon$. Тогда из (П,7) находим

$$h(\kappa\kappa'\gamma\gamma') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{M}[f]}{E_{\kappa'} - E_{\kappa} - E_{\gamma} - E_{\gamma'} - i\varepsilon}. \quad (\text{П,8})$$

Подставив (П,8) в (П,3), получим кинетическое уравнение для одночастичной матрицы плотности $f_{\nu\nu'}$.

Рассмотрим частный случай кинетического уравнения для электронов в однородном квантующем магнитном поле. Нас будут интересовать распределения, неоднородные вдоль оси x , ортогональной магнитному полю, направленному по оси z . Такие неоднородности в представлении Ландау $|\kappa\rangle \equiv |n, p_z, x_0\rangle$ описываются диагональными элементами матрицы плотности $f_{\kappa\kappa'} = f_{\kappa} \delta_{\kappa\kappa'}$, зависящими от $p_y = \frac{eH}{c} x_0$.

Учитывая это и подставляя (П,8) и (П,4), найдем

$$\frac{\partial f_{\kappa}}{\partial t} = \sum_{(\nu, \nu', \nu'')} W(\kappa\nu\nu'\nu'') \{f_{\nu} [1 - f_{\kappa}] f_{\nu'} [1 - f_{\nu''}] - f_{\kappa} [1 - f_{\nu}] f_{\nu''} [1 - f_{\nu'}]\}, \quad (\text{П,9})$$

где

$$W(\kappa\nu\nu'\nu'') = \frac{2\pi}{\hbar} |G_{\nu\nu'}^{\kappa\nu''}|^2 \delta[E_{\nu} + E_{\nu'} - E_{\kappa} - E_{\nu''}],$$

$$|G_{\nu\nu'}^{\kappa\nu''}|^2 = \int \frac{d\mathbf{q}V}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{q}'V}{(2\pi)^3} G_q G_{q'}^* \langle \nu | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | \kappa \rangle \langle \kappa | e^{-i\mathbf{q}'\mathbf{r}} | \nu \rangle \langle \nu' | e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} | \nu'' \rangle \langle \nu'' | e^{i\mathbf{q}'\mathbf{r}} | \nu' \rangle. \quad (\text{П,10})$$

Входящие сюда произведения матричных элементов в представлении Ландау можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle \kappa | e^{-i\mathbf{q}'\mathbf{r}} | \nu \rangle \langle \nu | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | \kappa \rangle = \\ = \delta(-p_y^{(\kappa)} + p_y^{(\nu)} - \hbar q_y) \delta(q_y - q'_y) \delta(-p_z^{(\kappa)} + p_z^{(\nu)} - \hbar q_z) \delta(q_z - q'_z) \times \\ \times \exp\{-i[q'_x - q_x] x_{0\kappa}\} \exp\{-i\gamma\alpha^2 q_y (q'_x - q_x)/2\} I_{n_{\kappa}n_{\nu}}(-q'_x, q_y) I_{n_{\kappa}n_{\nu}}(q'_x, q_y). \end{aligned} \quad (\text{П,11})$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_{n_{\kappa}n_{\nu}}(\pm q'_x, q_y) = V \sqrt{\frac{\bar{n}!}{n_{\nu}!n_{\kappa}!}} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \{[\text{sign}(n_{\kappa} - n_{\nu}) e] q_y - i q'_x\} \right)^{|n_{\kappa} - n_{\nu}|} \times \\ \times \exp\left(-\frac{\alpha^2 q_{\perp}^2}{4}\right) L_{\bar{n}}^{|n_{\kappa} - n_{\nu}|} \left(\frac{\alpha^2 q_{\perp}^2}{2} \right), \quad q_{\perp}^2 = q_x^2 + q_y^2, \quad \bar{n} = \min\{n_{\kappa}, n_{\nu}\}, \end{aligned} \quad (\text{П,12})$$

$$L_n^s(t) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+s}{n-m} \frac{t^m}{m!}, \quad (\text{П,13})$$

$L_n^s(t)$ — обобщенный полином Лагерра.

Произведение матричных элементов в (П,11) при $|q'_x|$ и $|q_x| > \frac{1}{\alpha}$ экспоненциально убывает. Поэтому там, где это произведение заметно отличается от нуля, т. е. при $|q'_x|$ и $|q_x| < \frac{1}{\alpha}$, существенно может изменяться лишь множитель $\exp[ix_{0\kappa}(q_x - q'_x)]$. Следовательно, при подстановке (П,11) в (П,10) и интегрировании по q' различием между q'_x и q_x можно пренебрегать в медленно изменяющихся частях произведений матричных элементов; тогда интеграл по q'_x сведется к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq'_x \exp[-iq'_x(x_{0\kappa} - x_{0\nu})] = 2\pi \delta(x_{0\kappa} - x_{0\nu}).$$

Учитывая эту формулу, можно представить уравнение (П,9) в следующем виде:

$$\frac{\partial f_{\kappa}}{\partial t} = \sum_{(\nu, \nu', \nu'', q)} \frac{2\pi}{\hbar} |G_q|^2 |\langle \nu | e^{iq\mathbf{r}} | \kappa \rangle|^2 |\langle \nu' | e^{iq\mathbf{r}} | \nu'' \rangle|^2 \times \\ \times \delta [E_{\nu} + E_{\nu'} - E_{\kappa} - E_{\nu''}] \delta (x_{0\kappa} - x_{0\nu''}) \times \\ \times \{f_{\nu} [1 - f_{\kappa}] f_{\nu'} [1 - f_{\nu''}] - f_{\kappa} [1 - f_{\nu}] f_{\nu''} [1 - f_{\nu'}]\}. \quad (\text{П},14)$$

Учитывая равенство $x_0^{\nu} = \frac{c}{eH} p_y^{\nu}$ и (П,14), нетрудно убедиться, что матричные элементы $\langle \nu' | e^{iq\mathbf{r}} | \nu'' \rangle$ и $\langle \nu | e^{iq\mathbf{r}} | \kappa \rangle$, входящие в (П,14), содержат множитель

$$\delta (x_{0\kappa} - x_{0\nu} + \gamma \alpha^2 q_y) \delta (x_{0\nu''} - x_{0\nu'} + \gamma \alpha^2 q_y) \quad (\gamma \equiv \text{sign } e).$$

В случае слабых пространственных неоднородностей, когда f как функция x_0 остается практически постоянной на радиусе Лармора, этот множитель можно разложить в ряд по $\alpha^2 q_y$. Член нулевого порядка в интеграле столкновений (П,14), если использовать обозначение (П,11), (П,12) и

$$F_{n_{\nu} n_{\kappa}} \left(\frac{\alpha^2 q_y^2}{2} \right) = |I_{n_{\nu} n_{\kappa}} (\pm q_x, q_y)|^2, \quad (\text{П},14a)$$

записан в (3,3)

б) КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОН-ФОНОННЫХ СИСТЕМ

Для вычисления объемных плотностей потоков заряда и энергии необходимо знать уравнения движения одночастичных матриц плотности электрона и фонона. В борновском приближении по амплитуде рассеяния электронов на фононах кинетические уравнения для одночастичных матриц можно найти, используя изложенную выше методику Боголюбова и Гурова⁴⁶. Такие расчеты были выполнены в работе Барьяхтара и Пелетминского¹⁰.

Гамильтониан электрон-фононной системы имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_{0e} + \hat{H}_{0p} + \hat{H}_{ep}, \quad (\text{П},15)$$

где

$$\hat{H}_{0e} = \sum_{\nu} E_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu}, \quad \hat{H}_{0p} = \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}}, \\ \hat{H}_{ep} = \sum_{(\nu, \nu', q)} \{A(\nu' \nu q) b_{\mathbf{q}} + A^*(\nu' \nu q) b_{\mathbf{q}}^{\dagger}\} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'},$$

$$A(\nu' \nu q) = C_{\mathbf{q}} \langle \nu' | e^{iq\mathbf{r}} | \nu \rangle; \quad A^*(\nu' \nu q) = C_{\mathbf{q}}^* \langle \nu' | e^{-iq\mathbf{r}} | \nu \rangle,$$

$C_{\mathbf{q}}$ — фурье-компонента энергии взаимодействия электронов с фононами.

Определим одночастичные матрицы

$$f_{\kappa\kappa'} = \text{Sp} (\hat{\rho} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa'}), \quad N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} = \text{Sp} (\hat{\rho} b_{\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}'}), \quad (\text{П},16)$$

и коррелятивные матрицы

$$h(\kappa\kappa' \mathbf{q}) = \text{Sp} (\hat{\rho} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa'} b_{\mathbf{q}}^{\dagger}), \quad h^*(\kappa\kappa' \mathbf{q}) = \text{Sp} (\hat{\rho} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa'} b_{\mathbf{q}}). \quad (\text{П},17)$$

С помощью уравнения (П,3) и определений (П,16), (П,17) находим

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - E_{\kappa} + E_{\kappa'} \right) f_{\kappa\kappa'} = \sum_{(\nu, \nu', q)} \{A(\nu' \nu q) [\delta_{\kappa\nu} h^*(\nu\kappa' \mathbf{q}) - h^*(\kappa\nu' \mathbf{q}) \delta_{\nu\kappa'}] + \\ + A^*(\nu' \nu q) [\delta_{\kappa\nu'} h(\nu\kappa' \mathbf{q}) - h(\kappa\nu' \mathbf{q}) \delta_{\nu\kappa'}]\}, \quad (\text{П},18)$$

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hbar \omega_{\mathbf{q}'} - \hbar \omega_{\mathbf{q}} \right) N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} = \sum_{(\nu, \nu')} \{A(\nu' \nu q) h^*(\nu\nu' \mathbf{q}') - A^*(\nu' \nu q) h(\nu\nu' \mathbf{q}')\}. \quad (\text{П},19)$$

Таким же путем можно найти уравнение для $h(\nu' \nu \mathbf{q})$ и $h^*(\nu' \nu \mathbf{q})$, в которое будут входить средние значения произведений четырех операторов

$$\text{Sp} (\hat{\rho} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa'} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'}), \quad \text{Sp} (\hat{\rho} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} b_{\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}}). \quad (\text{П},20)$$

Чтобы получить замкнутую систему уравнений для одночастичных матриц $N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$ и $f_{\kappa\kappa'}$, необходимо средние значения от произведения четырех операторов выразить через $N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$ и $f_{\kappa\kappa'}$. Это можно, как в предыдущем разделе, сделать лишь приближенно, пренебрегая в соотношениях

$$\text{Sp}(\hat{\rho} a_{\kappa}^{\dagger} a_{\kappa'} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'}) = f_{\kappa\kappa'} f_{\nu\nu'} + f_{\kappa\nu'} (\delta_{\kappa'\nu} - f_{\nu\kappa'}) + g(\kappa\kappa' \nu\nu'), \quad (\text{П},21)$$

$$\text{Sp}(\hat{\rho} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu'} b_{\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}}) = f_{\nu\nu'} N_{\mathbf{q}'\mathbf{q}} + g'(\nu\nu' \mathbf{q}'\mathbf{q})$$

коррелятивными функциями g и g' . В этом приближении находим

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + E_{\kappa'} - E_{\kappa} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} \right) h(\kappa\kappa' \mathbf{q}) = \sum_{(\nu, \nu', \mathbf{q})} A(\nu' \nu \mathbf{q}') \{ [f_{\nu\kappa'} \delta_{\kappa\nu'} - \delta_{\nu\kappa'} f_{\kappa\nu'}] (\delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} + N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} + [f_{\kappa\kappa'} f_{\nu\nu'} + f_{\kappa\nu'} (\delta_{\nu\kappa'} - f_{\nu\kappa'})] \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \} \quad (\text{П},22)$$

и аналогичное уравнение для $h^*(\kappa\kappa' \mathbf{q})$. В случае медленных процессов h и h^* зависят от времени неявно, через $f_{\nu\kappa}$ и $N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$, поэтому производными от h по времени в левых частях можно пренебречь. Тогда, включая в рассмотрение адиабатический параметр $\varepsilon \rightarrow 0$, находим

$$h(\kappa\kappa' \mathbf{q}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{E_{\kappa'} - E_{\kappa} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} + i\varepsilon} \sum_{(\gamma, \gamma', \mathbf{q})} A(\gamma' \gamma \mathbf{q}') \{ (\delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} + N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} + [f_{\gamma\kappa'} \delta_{\gamma'\kappa} - f_{\gamma\kappa'} \delta_{\gamma'\kappa'}] + \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} [f_{\kappa\kappa'} f_{\gamma\gamma'} + f_{\kappa\gamma'} (\delta_{\gamma\kappa'} - f_{\gamma\kappa'})] \}, \quad (\text{П},23)$$

$$h^*(\kappa\kappa' \mathbf{q}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{E_{\kappa'} - E_{\kappa} + \hbar\omega_{\mathbf{q}} + i\varepsilon} \sum_{(\gamma, \gamma', \mathbf{q})} A^*(\gamma' \gamma \mathbf{q}') \{ f_{\gamma\gamma'} \times [f_{\gamma\kappa'} \delta_{\gamma'\kappa} N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} - \delta_{\gamma\kappa'} (N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} + \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'})] + [f_{\gamma\kappa'} f_{\gamma\gamma'} - f_{\kappa\kappa'} f_{\gamma\gamma'}] \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \}. \quad (\text{П},24)$$

Подставляя (П,23), (П,24) в (П,18), (П,19), найдем систему кинетических уравнений для одночастичных матриц плотности электронов и фононов.

Перейдем к рассмотрению интересующих нас частных случаев. Прежде всего найдем кинетическое уравнение для электронной матрицы плотности при наличии однородного квантового магнитного поля. Диссипативные потоки заряда и энергии, обусловленные одномерными пространственными неоднородностями в плоскости, ортогональной к магнитному полю, выражаются с помощью уравнения движения диагональных матричных элементов матрицы плотности $f_{\kappa\kappa'} = f_{\kappa} \delta_{\kappa\kappa'}$ в представлении Ландау. С помощью (П,18), (П,23) и (П,24) находим

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{\kappa} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{(\nu, \mathbf{q}, \mathbf{q}')} \{ [A(\kappa\nu\mathbf{q}) A^*(\nu\kappa\mathbf{q}') \delta [E_{\kappa} - E_{\nu} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}] \times \\ \times (f_{\nu} (1 - f_{\kappa}) (N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} + \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} - f_{\kappa} (1 - f_{\nu}) N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'})) + [A(\nu\kappa\mathbf{q}) A^*(\kappa\nu\mathbf{q}') \delta [E_{\kappa} - E_{\nu} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}] \times \\ \times (f_{\nu} (1 - f_{\kappa}) N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} - f_{\kappa} (1 - f_{\nu}) (N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} + \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}))] \}. \quad (\text{П},25)$$

Из этой формулы видно, что вторая фигурная скобка получается из первой при замене $\kappa \rightleftharpoons \nu$ и умножении на -1 .

Входящие в (П,25) произведения матричных элементов энергии взаимодействия электронов с фононами имеют вид, приведенный в (П,11). Так же как и при получении уравнения (П,14), будем пренебрегать различием между q_x и q'_x в медленно изменяющейся части произведения матричных элементов; тогда интеграл по q'_x принимает вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq'_x \exp [i(q_x - q'_x) x_{0\kappa}] \{ f_{\nu} (1 - f_{\kappa}) (N_{q_x q'_x} + \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} - f_{\kappa} (1 - f_{\nu}) N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \} = f_{\nu} (1 - f_{\kappa}) (N_{\mathbf{q}}(x_{0\kappa}) + 1) - f_{\kappa} (1 - f_{\nu}) N_{\mathbf{q}}(x_{0\kappa}), \quad (\text{П},26)$$

где введена матрица фононов $N_{\mathbf{q}}(x_{0\kappa})$ в смешанном представлении Вигнера или квантовая функция распределения фононов с помощью соотношения

$$N_{\mathbf{q}}(x_{0\kappa}) = \int_{-\infty}^{\infty} dq'_x \exp [i(q_x - q'_x) x_{0\kappa}] N_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}. \quad (\text{П},27)$$

Заменяя в (П,26) $\kappa \rightarrow \nu$, а $\nu \rightarrow \kappa$ и умножая все на -1 , получим результат интегрирования по q'_x во второй фигурной скобке уравнения (П,25). В итоге находим следующее кинетическое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\kappa}}{\partial t} = & \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\nu, q} |C_q|^2 (1 - \hat{\mathcal{P}}_{\nu\kappa}) F_{n_{\kappa}n_{\nu}} \left(\frac{\alpha^2 q_{\perp}^2}{2} \right) \times \\ & \times \delta[-p_y^{(\kappa)} - \hbar q_y + p_y^{(\nu)}] \delta[-p_z^{(\kappa)} - \hbar q_z + p_z^{(\nu)}] \delta[E_{\kappa} - E_{\nu} - \hbar \omega_q] \times \\ & \times \{f_{\nu} (1 - f_{\kappa}) (N_q(x_{0\kappa}) + 1) - f_{\kappa} (1 - f_{\nu}) N_q(x_{0\kappa})\} \equiv I[f_{\kappa}(n, p_z, x_0)]. \end{aligned} \quad (\text{П,28})$$

В этом уравнении для краткости записи введен оператор $\hat{\mathcal{P}}_{\nu\kappa}$, производящий замену $\nu \rightarrow \kappa$, $\kappa \rightarrow \nu$. Аналогичным образом получается из (П,19) с помощью (П,23), (П,24) и (П,27) кинетическое уравнение для квантовой функции распределения фононов в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial q_x} \frac{\partial}{\partial x} \right) N_q(x) = & 2 \sum_{\nu, \kappa} \frac{2\pi}{\hbar} |C_q|^2 \times \\ & \times F_{n_{\kappa}n_{\nu}} \left(\frac{\alpha^2 q_{\perp}^2}{2} \right) \delta[E_{\kappa} - E_{\nu} + \hbar \omega_q] \delta[-p_y^{(\kappa)} - \hbar q_y + p_y^{(\nu)}] \times \\ & \times \delta[-p_z^{(\kappa)} - \hbar q_z + p_z^{(\nu)}] \{f_{\nu} (1 - f_{\kappa}) (N_q(x_{0\kappa}) + 1) - f_{\kappa} (1 - f_{\nu}) N_q(x_{0\kappa})\} \delta(x_{0\kappa} - x) \equiv I_{pe}[N_q]. \end{aligned} \quad (\text{П,29})$$

Учет неэлектронной релаксации фононов, т. е. релаксации фононов на фононах, на границах образца и т. д., можно произвести добавлением в правую часть уравнения (П,30) слагаемого

$$[N_q^0(x) - N_q(x)] \omega_{pp}(q), \quad (\text{П,30})$$

где N_q^0 — локально-равновесная функция распределения фононов, $\omega_{pp}(q)$ — эффективная частота релаксации фононов. В таком виде кинетические уравнения (П,28) и (П,29) использованы в работах ^{11, 12, 47}. Для изучения эффектов увлечения фононов электронами необходимо рассматривать двумерные пространственные неоднородности распределения в плоскости, ортогональной магнитному полю. Такие неоднородности описываются недиагональными матричными элементами матрицы плотности лишь по квантовому числу p_y , т. е. $f_{n, p_z, p_y; n, p_z, p'_y}$. Вычисление потоков заряда и энергии в таких системах удобно производить с помощью вигнеровского представления матрицы плотности, а именно

$$f(n, p_z, p_y, y) = \sum_{p'_y} f_{n, p_z, p_y; n, p_z, p'_y} \exp \left[i(p'_y - p_y) \frac{y}{\hbar} \right], \quad (\text{П,31})$$

$$N_q(x, y) = \sum_{q'} N_{qq'} \delta_{q_z q'_z} \exp [i(q_x - q'_x) x + i(q_y - q'_y) y].$$

Для удобства записи кинетического уравнения целесообразно ввести вместо $f(n, p_z, p_y, y) \equiv f_{\kappa}(y)$ новую функцию $\tilde{f}_{\kappa} = f_{\kappa}(y_{\kappa}) = \int f_{\kappa}(y) \delta(y - y_{\kappa}) dy$. Из (П,18), (П,19) с помощью (П,23), (П,24) в случае слабых пространственных неоднородностей находим ^{11, 12} кинетические уравнения для \tilde{f}_{κ} и $N_q(x, y)$, аналогичные (П,28), (П,29):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_{\kappa}}{\partial t} = & \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{(\nu, q)} |C_q|^2 (1 - \hat{\mathcal{P}}_{\nu\kappa}) \left\{ F_{n_{\kappa}n_{\nu}} \left(\frac{\alpha^2 q_{\perp}^2}{2} \right) \delta(E_{\kappa} - E_{\nu} + \hbar \omega_q) \times \right. \\ & \times \delta(y_{\nu} - y_{\kappa} + \gamma \alpha^2 q_x) \delta(-p_y^{(\kappa)} - \hbar q_y + p_y^{(\nu)}) \delta(-p_z^{(\kappa)} - \hbar q_z - p_z^{(\nu)}) \times \\ & \times [\tilde{f}_{\nu} (1 - \tilde{f}_{\kappa}) (N_q(x_{0\kappa}, y_{\kappa}) + 1) - \tilde{f}_{\kappa} (1 - \tilde{f}_{\nu}) N_q(x_{0\kappa}, y_{\kappa})] \left. \right\} \equiv I_{ep}[\tilde{f}_{\kappa}], \end{aligned} \quad (\text{П,32})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial q_x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial q_y} \frac{\partial}{\partial y} \right) N_q(x, y) = & \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\nu, \kappa} |C_q|^2 F_{n_{\kappa}n_{\nu}} \left(\frac{\alpha^2 q_{\perp}^2}{2} \right) \times \\ & \times \delta(E_{\kappa} - E_{\nu} + \hbar \omega_q) \delta(y_{\nu} - y_{\kappa} + \gamma \alpha^2 q_x) \delta(-p_y^{(\kappa)} - \hbar q_y + p_y^{(\nu)}) \times \\ & \times \delta(-p_z^{(\kappa)} - \hbar q_z + p_z^{(\nu)}) [\tilde{f}_{\nu} (1 - \tilde{f}_{\kappa}) (N_q(x_{0\kappa}, y_{\kappa}) + 1) - \tilde{f}_{\kappa} (1 - \tilde{f}_{\nu}) N_q(x_{0\kappa}, y_{\kappa})] \times \\ & \times \delta(x_{0\kappa} - x) \delta(y - y_{\kappa}) + (N_q^0(x, y) - N_q(x, y)) \omega_{pp}(q) \equiv I_{pe}[N_q] + I_{pd}[N_q], \end{aligned} \quad (\text{П,33})$$

$$F_{nn'}(t) = |I_{n, n'}(t)|^2.$$

Кинетические уравнения (П,28), (П,29) и (П,32), (П,33) можно было бы написать сразу же, учитывая приход электронов в ячейку с квантовым числом x и уход их из этой ячейки. Поскольку распределение электронов пространственно-неоднородно, фононная функция распределения также должна зависеть от пространственных координат (локальное равновесие!) и в соответствии с бозевской статистикой фононов в процессах излучения их множитель $(N_q + 1)$ следует брать в точке, соответствующей конечному состоянию электрона, тогда как в процессах поглощения множитель N_q нужно относить к точке, характеризующей начальное состояние электрона. Такая интерпретация уравнения (П,32), (П,33) возможна в случае слабых пространственных неоднородностей, когда $f(n, p_z, p_y, y)$ слабо изменяется на радиусе Лармора. Именно в этом случае можно одновременно задавать квантовые числа n, p_z и координаты y и $p_y = \frac{eH}{c} x_0$, не вступая в противоречие с принципом неопределенности. Тогда $f(n, p_z, x_0, y)$ можно отождествить с вероятностью того, что электрон в состоянии n, p_z находится в точке x_0, y (точнее, в центре ларморовой орбиты электрона). $N_q(x, y)$ можно, разумеется, также отождествить с обычной вероятностью, когда характерный масштаб пространственных неоднородностей велик в сравнении с длиной волны фононов, существенных в задаче.

Институт физики металлов
АН СССР, Свердловск

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН 87 (3), 389 (1965).
2. A. C. Beer, Galvanomagnetic Effects in Semiconductors, Acad. Press, New York — London, 1963.
3. R. Kubo, S. Y. Ma y a k e, N. H a s h i t s u m e, Solid State Physics, vol. 17, Acad. Press, New York — London, 1965.
4. И. М. Цидильковский, Терромагнитные явления в полупроводниках, М., Физматгиз, 1960.
5. R. T. Delves, Rept. Progr. Phys. 28, 249 (1965).
6. T. C. H a r m a n, J. M. H o n i g, J. Phys. Chem. Sol. 23, 913 (1962); T. C. H a r m a n, J. M. H o n i g, B. M. T a r m i, J. Phys. Chem. Sol. 24, 835 (1963).
7. W. Z a w a d z k i, J. K o l o d z i e c z a k, Phys. Stat. Sol. 6, 419 (1964); W. Z a w a d z k i, Phys. Stat. Sol. 8, 739 (1965).
8. В. М. Елеонский, П. С. Зырянов, В. П. Силин, ЖЭТФ 42, 896 (1962).
9. А. И. Ахизер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, ЖЭТФ 48, 204 (1965).
10. В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, Изв. вузов (Радиофизика) 6, 1115 (1963).
11. П. С. Зырянов, ФММ 16, 13 (1963).
12. П. С. Зырянов, ФТТ 5, 3011 (1963).
13. П. С. Зырянов, Phys. Stat. Sol. 6, 401 (1964).
14. П. С. Зырянов, ФММ 18, 161 (1964).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957, § 20, 25, 29.
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
17. Ю. Н. Образцов, ФТТ 6, 414 (1964); 7, 573 (1965).
18. П. С. Зырянов, В. П. Силин, ФММ 17, 934 (1964).
19. П. С. Зырянов, ФТТ 6, 3563 (1964).
20. П. С. Зырянов, В. И. Окулов, ФТТ 7, 1749 (1965).
21. T. K a s u y a, J. Phys. Soc. Japan, 14, 410 (1959).
22. S. N a k a j i m a, Progr. Theor. Phys. 20, 948 (1958).
23. Р. Кубо, в сб. «Термодинамика необратимых процессов», М., ИЛ, 1962.
24. П. С. Зырянов, В. П. Силин, ЖЭТФ 46, 537 (1964).
25. С. В. Пелетминский, В. Г. Барьяхтар, ФТТ 7, 446 (1965).
26. К. Д. Цэндиц, А. Л. Эфрос, ФТТ 8, 378 (1966).
27. В. И. Окулов, ФТТ 8, 2405 (1966).
28. С. В. Пелетминский, ФТТ 7, 2666 (1965).
29. E. A d a m s, T. H o l s t e i n, J. Phys. Chem. Sol. 10, 254 (1959).
30. П. С. Зырянов, В. П. Калашников, ФММ 18, 166 (1964).
31. В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, ЖЭТФ 48, 187 (1965).
32. С. В. Пелетминский, Докторская диссертация (Харьков, 1965).
33. А. И. Ансельм, Ю. Н. Образцов, Р. Г. Тарханян, ФТТ 7, 2837 (1965).
34. В. Г. Скобов, ЖЭТФ 37, 1467 (1959).

35. J. Hajdu, Z. Phys. **181**, 87 (1964).
 36. J. Hajdu, S. Fischer, Z. Phys. **181**, 479 (1964).
 37. J. Zak, J. Phys. Chem. Sol. **26**, 1021 (1965).
 38. В. Л. Гуревич, Ю. А. Фирсов, ЖЭТФ **40**, 199 (1961); М. И. Клинер, ФТТ **3**, 1342 (1961).
 39. П. С. Зырянов, ЖЭТФ **47**, 1378 (1964).
 40. S. Fischer, Zs. Phys. **184**, 325 (1965).
 41. R. E. B. Makinson, Proc. Cambridge Phil. Soc. **34**, 474 (1938).
 42. E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc. **A234**, 391 (1956).
 43. П. С. Зырянов, Phys. Stat. Sol. **7**, 223 (1964).
 44. Л. Э. Гуревич, Г. М. Недлин, ЖЭТФ **40**, 809 (1961).
 45. О. В. Константинов, В. И. Перель, ЖЭТФ **39**, 197 (1960).
 46. Н. Н. Боголюбов, К. П. Гуров, ЖЭТФ **17**, 614 (1947).
 47. П. С. Зырянов, ЖЭТФ **47**, 1378 (1964).
 48. П. С. Зырянов, ФТТ **5**, 2576 (1963).
 49. А. И. Ансельм, Б. М. Аскеров, ФТТ **4**, 1573 (1962).
 50. S. Simons, Proc. Phys. Soc. **83**, 749 (1964).
 51. T. Ohta, J. Phys. Soc. Japan **18**, 1166 (1963).
 52. С. В. Пелетминский, ФММ **20**, 777 (1965).
 53. C. Herring, J. Appl. Phys. **31**, 1939 (1960).
 54. В. А. Кудинов, Б. Я. Мойжес, ФТТ **7**, 2309 (1965).
 55. И. Л. Дричко, И. В. Мочан, ФТТ **7**, 3260 (1965).
 56. J. E. Kunzler, F. S. L. Hsu, W. S. Boyle, Phys. Rev. **128**, 1084 (1962).
 57. M. C. Steele, J. Babiskin, Phys. Rev. **98**, 359 (1955).
 58. С. С. Шалыт, Р. В. Парфеньев, М. С. Бреслер, ЖЭТФ **48**, 1212 (1965).
 59. М. С. Бреслер, Н. А. Редько, С. С. Шалыт, Письма ЖЭТФ **2**, 538 (1965).
 60. S. M. Puri, T. H. Geballe, Bull. Amer. Phys. Soc. **8**, 309 (1963).
 61. В. М. Муждаба, Р. В. Парфеньев, С. С. Шалыт, ФТТ **6**, 3194 (1964); **7**, 2379 (1965).
 62. С. Т. Павлов, Ю. А. Фирсов, ФТТ **6**, 3608 (1964).
 63. Х. И. Амирханов, Р. И. Баширов, М. М. Гаджалиев, ФТТ **3**, 3743 (1961).
 64. S. M. Puri, T. H. Geballe, Phys. Rev. Letts **9**, 378 (1962).
 65. Г. И. Гусева, ФММ **18**, 321 (1964).
 66. Г. И. Гусева, П. С. Зырянов, Phys. Stat. Sol. **8**, 759 (1965).
 67. L. D. Landau, G. Rumer, Phys. Zs. USSR **11**, 18 (1937).
 68. C. Herring, Phys. Rev. **95**, 954 (1954).
 69. C. Herring, T. H. Geballe, J. E. Kunzler, Bell Syst. Techn. J. **38**, 657 (1959).
 70. H. E. Bömmel, K. Dransfeld, Phys. Rev. **117**, 1245 (1960); I. S. Ciccarello, K. D. Dransfeld, Phys. Rev. **134**, A1517 (1964).
 71. П. С. Зырянов, Г. Г. Талуц, ЖЭТФ **49**, 1942 (1965).
 72. S. M. Puri, T. H. Geballe, Phys. Rev. **136**, A1767 (1964).
 73. S. M. Puri, Phys. Rev. **139**, A995 (1965).
 74. C. Herring, Phys. Rev. **96**, 1163 (1954).
 75. И. Л. Дричко, И. В. Мочан, ФТТ **6**, 1902 (1964).
 76. А. И. Ансельм, Р. Г. Тарханян, ФТТ **6**, 3357 (1964).
 77. А. И. Ансельм, Б. М. Аскеров, ФТТ **2**, 2310 (1960).
 78. А. И. Ансельм, Б. М. Аскеров, ФТТ **3**, 3668 (1961).
 79. Н. Г. Глузман, И. М. Цидильковский, Физ. техн. полупроводников **1**, 522 (1967).
 80. G. A. Antcliffe, R. A. Stradling, Phys. Lett. **A20**, 119 (1966).
 81. S. M. Puri and T. H. Geballe, Semiconductors and Semimetals, vol. 1, Academic Press, New York — London, 1966, стр. 203—264.
-