539.12.01

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ *CPT*-ТЕОРЕМЫ

В. Я. Файнберг

Дискретные симметрии играют важную роль в физике элементарных частиц, так как с ними можно, вообще говоря, связать дополнительные законы сохранения. Это, прежде всего, симметрии по отношению к отражению пространства P, зарядовому сопряжению C и отражению времени T. Немногим более 10 лет назад вряд ли кто сомневался, что инвариантность теории относительно этих преобразований отражает строгие законы природы. Затем мы стали свидетелями экспериментального опровержения этой точки зрения: оказалось, что четность P, зарядовая четность C и комбинированная четность CP не сохраняются в ряде процессов. Правда, мы до сих пор не знаем глубоких причин подобной несимметрии взаимодействия элементарных частиц. Тем не менее такой поворот событий охватывает некоторых физиков нетерпеливым желанием «разделаться» с другой дискретной симметрией, имеющей под собой более прочные основания. Речь идет о CPT-инвариантности. Нам хотелось бы с самого начала в этой связи подчеркнуть выделенную роль CPT-инвариантности. Она состоит, прежде всего, в том, что сильное отражение (или CPT-преобразование) не является обычным унитарным преобразованием. Действительно, действие CPT (или Θ, или R)-оператора на in-состояние переводит его в out-состояние, так что говорить о собственных значениях CPT-оператора или CPT-четности можно только в условном смысле *). Такого рода неунитарные преобразования были введены Вигнером и затем Швингером [1, 2].

Другое существенное отличие — связь CPT-инвариантности с локальными свойствами полей и характером перестановочных соотношений между ними **). Следовательно, нарушение CPT-инвариантности затронет в той или иной степени вопрос о локальных свойствах теории и о связи спина и статистики. Поэтому прежде чем подвергать сомнению CPT-симметрию, желательно еще раз вспомнить основные предположения, лежащие в ее основе. Это представляется нужным сделать также и потому, что часто можно слышать прямо противоположные высказывания по поводу CPT-инвариантности. С одной стороны (например, Мэтьюс [5]), говорится, что «в лоренц-инвариантной теории инвариантность при

*) Так, если $|\alpha_{\text{in}}, r\rangle$ есть in-состояние частицы α со спином r, то $\Theta\,|\alpha_{\text{in}}, r\rangle = \langle\bar{\alpha}_{\text{out}}, -r|$, т. е. переходит в out-состояние античастицы со спином $-r$.

**) Более точно, CPT-инвариантность отражает свойство слабой локальной коммутативности (см. ниже).

сильном отражении (CPT) не приводит к каким-либо дополнительным ограничениям, или правилам отбора, если связь между спином и статистикой предполагается обычной». С другой стороны, широко распространено мнение, что нарушение CPT-инвариантности означает нарушение локальной коммутативности или микропричинности.

Развитие аксиоматического метода позволило подойти к доказательству CPT-теоремы с очень общих позиций и показать [4, 5], что CPT-инвариантность эквивалентна слабой локальной коммутативности (СЛК) *) и, следовательно, теория может быть CPT-инвариантной, но не микропричинной (см. пример 1 в конце статьи). Тем самым наблюдаемая в природе CPT-инвариантность не является существенным доводом в пользу гипотезы о локальной коммутативности.

Интересно сравнить этот результат аксиоматического метода с обычным доказательством CPT-инвариантности (теорема Паули — Людерса [6]), опирающимся на существование локального лагранжиана или гамильтониана.

Цель настоящего доклада:

во-первых, изложить (без строгих рассуждений) CPT-теорему в аксиоматическом подходе,

во-вторых, сравнить это доказательство с обычным изложением CPT-теоремы в лагранжевом методе,

в-третьих, показать, как CPT-инвариантность приводит к связи между спином и статистикой,

в-четвертых, привести ряд примеров и кратко обсудить возможность распространения CPT- и других симметрий на нестабильные частицы.

Этот доклад не является обзором работ по CPT-теореме.

Из многочисленных аспектов CPT-проблемы мы, естественно, способны осветить лишь некоторые наиболее важные с нашей точки зрения. (Поэтому этот доклад в известной степени можно рассматривать как популярное изложение некоторых истин, хорошо известных узкому кругу специалистов-аксиоматов.)

I. CPT-ТЕОРЕМА В АКСИОМАТИКЕ

Сначала мы для простоты рассмотрим только скалярное нейтральное поле и затем сформулируем теорему в общем виде.

Мы предполагаем, что справедливы следующие основные аксиомы теории поля.

Релятивистский квантовый постулат: любое состояние описывается единичным вектором в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Релятивистский закон преобразования задается непрерывным унитарным представлением неоднородной группы Лоренца (группа Пуанкаре) **): $\{a, \Lambda\} \to U(a, \Lambda)$. Унитарное представление $U(a, 1)$ можно записать в виде

$$U(a, 1) = \exp(iP^{\mu}a_{\mu}),$$

где P^{μ} — эрмитов оператор, интерпретируемый как оператор энергии импульса теории. $P^{\mu}P_{\mu} = m^2$— оператор массы. Собственные значения P^{μ} лежат в верхнем конусе. Существует единственное инвариантное состояние $|0\rangle$ или Ψ_0:

$$U(a, \Lambda)|0\rangle = |0\rangle.$$

*) Новейшие исследования и, в частности, выход за рамки так называемых локализуемых теорий разрывают и эту связь: теория может быть CPT-инвариантной и нелокализуемой. В такой теории СЛК, вообще говоря, теряет смысл.

**) $x \to x' = \Lambda x + a$, Λ — матрица преобразования Лоренца, a — 4-мерный вектор.

Постулат о существовании в $\mathscr{H}$ локальных операторов $\varphi(x)$ *) — перенормированных гейзенберговских операторов.

Постулат пуанкаре-инвариантности: при преобразовании $\{a, \Lambda\}$ из неоднородной группы Лоренца $\varphi(x)$ преобразуется по закону

$$U(a, \Lambda)\varphi(x)U^{-1}(a, \Lambda) = \varphi(\Lambda x + a).$$

Постулат о локальной коммутативности не предполагается.

Если в рассматриваемой теории поля имеет место симметрия (инвариантность) относительно дискретных преобразований, то им можно сопоставить соответствующий унитарный оператор. Так, если имеет место инвариантность относительно отражения и зарядового сопряжения, то существуют унитарные операторы $U(P)$ и $U(C)$, такие, что

$$U(P)\varphi(x)U^{-1}(P) = \varphi(Px) = \varphi(-\mathbf{x}, x_0), \quad U(C)\varphi(x)U^{-1}(C) = \varphi^*(x) = \varphi(x)$$

(для нейтрального скалярного поля). Эти операторы определены с точностью до произвольной фазы ($U(P)\,|\,0\rangle = e^{i\alpha}\,|\,0\rangle$). В случае наличия симметрии CPT в теории существует «унитарный» оператор $U(CPT) \equiv \Theta$, такой, что **)

$$\begin{gathered}(\Theta\varphi(x)\Theta^{-1})^T = \varphi(-x),\\ \Theta\Psi = \Psi'^*, \quad \Psi^*\Theta^{-1} = \Psi'.\end{gathered} \tag{1}$$

В аксиоматической теории поля все свойства теории формулируются на языке вакуумных средних от простых произведений (вайтмановских функций) или T- и R-произведений (Леман, Симанзик, Циммерман [7], Боголюбов, Медведев, Поливанов [8]).

Если теория CPT инвариантна, то на языке вайтмановских функций $W(x_2, \ldots, x_n)$ это означает

$$W(x_1, \ldots, x_n) \equiv \langle 0\,|\,\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\,|\,0\rangle = \langle 0\,|\,\varphi(-x_n)\ldots\varphi(-x_1)\,|\,0\rangle, \tag{2}$$

что немедленно следует из (1).

Аналогично можно выписать условия P-, C-, CP- и т. д. инвариантности.

CPT-теорема гласит: Пусть $\varphi(x)$ — эрмитово скалярное поле, удовлетворяющее перечисленным выше аксиомам. Если выполнено условие (2) для всех x_i, то в точках Йоста выполняется условие слабой локальной коммутативности:

$$\langle 0\,|\,\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\,|\,0\rangle = \langle 0\,|\,\varphi(x_n)\ldots\varphi(x_1)\,|\,0\rangle. \tag{3}$$

Наоборот, если условие СЛК (3) выполнено в (вещественной) окрестности точки Йоста, то условие CPT-инвариантности (2) выполнено всюду. Другими словами, CPT-инвариантность есть необходимое и достаточное условие СЛК.

Поскольку локальная коммутативность приводит к СЛК, то любая теория поля с локальным эрмитовым скалярным полем обладает CPT-симметрией.

---

*) Строго говоря, надо говорить об усредненных операторах $\varphi_f = \int \varphi(x) f(x)\,dx$ с некоторой гладкой функцией f, так как действие $\varphi(x)$ на Ψ из $\mathscr{H}$ уже не ееть нормируемый вектор в $\mathscr{H}$.

**) Поясним свойства оператора Θ: если $\Psi = \int f(x_1)\cdots f(x_n)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\,(dx)\,|\,0\rangle$, то $\Theta\Psi \equiv \Psi'^* = \langle 0\,|\int f(-x_1)\cdots f(-x_n)\,\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\,(dx)$; следовательно, $\Theta(\alpha\Psi + \beta\Phi) = \alpha\Psi'^* + \beta\Phi'^*$. Определение преобразования Θ как антиунитарного оператора, действующего в том же гильбертовом пространстве, можно найти в книге [5], раздел 3.5.

Определение. Совокупность векторов

$$\xi_1 = x_1 - x_2, \ \ldots, \ \xi_{n-1} = x_{n-1} - x_n$$

есть точка Йоста, если при любых $\lambda_i \geqslant 0$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \xi_i\Big)^2 < 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \neq 0. \tag{4}$$

Очевидно, что точки Йоста не исчерпывают всей области, где все $\xi_i^2 < 0$, т. е. пространственноподобны, но в любой точке Йоста все $\xi_i^2 < 0$. Мы не будем воспроизводить здесь доказательство теоремы (см. [4, 5]). Отметим лишь, что оно существенным образом опирается на аналитические свойства $W(x_1, \ldots, x_n)$, вытекающие из положительности спектра P^0 и пуанкаре-инвариантности. (Схема доказательства: если (2) имеет место всюду, то оно справедливо и в точках Йоста, но точки Йоста есть точки голоморфности W, где можно изменить знаки всех ξ_i и получить условие (3) СЛК.)

В случае полей с произвольным спином существование оператора Θ, или CPT-инвариантность, выражается в виде тождеств (для всех вайтмановских функций)

$$\langle 0 \,|\, \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_n(x_n) \,|\, 0 \rangle = (-1)^J i^F \langle 0 \,|\, \varphi_n(-x_n) \ldots \varphi_1(-x_1) \,|\, 0 \rangle, \tag{5}$$

где F — число полей с полуцелым спином, а J — полное число непунктирных спинорных индексов. В более привычной записи для частиц со спином $^1/_2$ действие оператора Θ можно определить так:

$$(\Theta \psi_\alpha(x) \Theta^{-1})^T = i\gamma_5 \psi_\alpha(-x). \tag{6}$$

Тогда условие CPT-инвариантности на языке вайтмановской функции будет

$$\langle 0 \,|\, \psi_{\alpha_1}(x_1) \ldots \psi_{\alpha_n}(x_n) \,|\, 0 \rangle = \\ = i^n (\gamma_5)_{\alpha_1 \alpha_1'} \ldots (\gamma_5)_{\alpha_n \alpha_n'} \langle 0 \,|\, \psi_{\alpha_n'}(-x_n) \ldots \psi_{\alpha_1'}(-x_1) \,|\, 0 \rangle \tag{7}$$

и т. д.

Посмотрим теперь, как действует оператор Θ на операторы $\varphi_{\text{in, out}}$ и каковы свойства наблюдаемых, следуемые из CPT-инвариантности.

Если предположить линейную связь $\varphi(x)$-и $\varphi_{\text{in, out}}$- операторов (уравнения Янга — Фельдмана), то *)

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{in}} &= \varphi(x) + \int \Delta^R(x - x', m)\, j(x')\, d^4x', \\ \varphi_{\text{out}} &= \varphi(x) + \int \Delta^A(x - x', m)\, j(x')\, d^4x', \end{aligned} \tag{8}$$

$$(j(x) \equiv (\Box - m^2)\, \varphi(x)). \tag{8'}$$

Применяя оператор Θ, находим

$$(\Theta \varphi_{\text{in}}(x) \Theta^{-1})^T = \varphi(-x) + \int \Delta^A(-x - x', m)\, j(x')\, d^4x'. \tag{9}$$

Сравнивая (9) и (8′), получаем

$$(\Theta \varphi_{\text{in}}(x) \Theta^{-1})^T = \varphi_{\text{out}}(-x). \tag{10}$$

С другой стороны, поскольку поля $\varphi_{\text{in}}(x)$ между собой слабо локальны, существует «унитарный» оператор V, такой, что

$$(V \varphi_{\text{in}}(x) V^{-1})^T = \varphi_{\text{in}}(-x); \tag{11}$$

аналогично для $\varphi_{\text{out}}(x)$.

---

*) В более общем случае асимптотические поля вводятся, опираясь на теорию рассеяния Хаага — Рюэля [4]. Однако до сих пор не существует строгого доказательства (10) без привлечения аксиомы локальности в случае *нелинейной* связи φ_{in} и $\varphi(x)$.

Из (10) и (11) вытекает

$$\varphi_{\text{out}}(x) = (\Theta (V\varphi_{\text{in}}(x) V^{-1})^T \Theta^{-1})^T. \tag{12}$$

Произведение двух «унитарных» операторов $\Theta^{-1}V^T$ есть унитарный оператор

$$S = V^{-1}\Theta^T = (V^{-1})^T \Theta, \tag{13}$$

совпадающий с S-матрицей рассеяния, так как

$$\varphi_{\text{out}} = S^*\varphi_{\text{in}}S, \quad S^*S = 1. \tag{14}$$

Соотношение (13) является очень полезным для дальнейшего. Легко проверить, что из (13) вытекает

$$(\Theta S\Theta^{-1})^T = S. \tag{15}$$

Соотношение (15) позволяет установить свойства симметрии матричных элементов S-матрицы, вытекающие из CPT-инвариантности теории. Для произвольного матричного элемента имеем

$$(\Phi, S\Psi) = (\Psi', S\Phi'), \quad \Phi' = \Phi^*\Theta^{-1}, \quad \Psi'^* = \Theta\Psi.$$

Если учесть, что

$$\Theta\,|\,\alpha, \text{in}\rangle = \langle\bar{\alpha}, \text{out}\,|, \tag{16}$$

то

$$\langle\alpha, \text{in}\,|\,S\,|\,\beta, \text{in}\rangle = \langle\bar{\beta}, \text{out}\,|\,S\,|\,\bar{\alpha}, \text{out}\rangle = \langle\bar{\beta}, \text{in}\,|\,S\,|\,\bar{\alpha}, \text{in}\rangle, \tag{17}$$

благодаря тому, что $S\,|\,\text{out}\rangle = |\,\text{in}\rangle$. Здесь $|\,\bar{\alpha}\rangle$ обозначает соответствующее состояние античастиц с измененными направлениями спинов.

Интересно посмотреть, как выглядят соотношения типа (17) на языке энергетических переменных. Для скалярных нейтральных частиц S-матрица может быть представлена в виде разложения по нормальным произведениям in- или out-операторов:

$$\begin{aligned} S &= \sum_n \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \ldots, x_n) : \varphi_{\text{in}}(x_1) \ldots \varphi_{\text{in}}(x_n) : (dx) = \\ &= \sum_n \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \ldots, x_n) : \varphi_{\text{out}}(x_1) \ldots \varphi_{\text{out}}(x_n) : (dx). \end{aligned} \tag{18}$$

Предполагается нормальная статистика для in- и out-операторов. Это не является дополнительным предположением и следует из определений (8), (8′) in- и out-операторов и соотношений типа (10).

Из (10), (15), (18) находим в импульсном представлении на массовой оболочке

$$S_n(p_1, \ldots, p_n) = S_n(-p_1, \ldots, -p_n), \tag{19}$$

$$p_i^2 = m^2; \quad p_{i0} = +(\mathbf{p}_i^2 + m^2)^{1/2}, \quad p_j^2 = m^2; \quad p_{j0} = -(\mathbf{p}_j^2 + m^2)^{1/2},$$

$$0 \leqslant i \leqslant \nu, \quad \nu < j \leqslant n.$$

Характерно, что это соотношение даже для скалярного нейтрального поля не является простым следствием лоренц-инвариантности (как это может показаться на первый взгляд). Оно предполагает наличие определенных аналитических свойств у S_n (см. пример 2 в конце статьи).

Ряд примеров с взаимодействием нелокального типа и без СЛК подтверждают нетривиальность условия (19), отражающего CPT-инвариантность скалярной теории (см. примеры 1 и 2).

Аналогичные рассуждения для спинорного поля со спином $^1/_2$, если принять, что

$$\left.\begin{aligned} (\Theta\Psi_{\text{in}}(x)\,\Theta^{-1})^T &= i\gamma_5\psi_{\text{out}}(-x), \\ (\Theta\overline{\Psi}_{\text{in}}(x)\,\Theta^{-1})^T &= i\,\overline{\psi}_{\text{out}}(-x)\,\gamma_5, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

приводят, например, для матричного элемента (без обкладок) взаимодействия скалярных частиц и одного фермиона к соотношению вида

$$S_n(p_1, p_2; k_1 \ldots k_n) = \gamma_5 S_n(-p_1, -p_2; -k_1, \ldots, -k_n)\gamma_5; \qquad (21)$$

здесь p_1 и p_2 — 4-импульсы начального и конечного фермионов, а k_i — 4-импульсы бозонов ($i = 1, \ldots, n$).

Это соотношение заведомо выполняется в теории с локальной коммутативностью и нормальными перестановочными соотношениями для in-полей. При нарушении СЛК или других постулатов оно, вообще говоря, не имеет места.

Подчеркнем, что при выводе (19) и (21) мы нигде не использовали постулат локальной коммутативности или какую-либо конкретную форму S-матрицы в лагранжевом методе. Это — чисто аксиоматические рассуждения.

II. ОБЫЧНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО *CPT*-ТЕОРЕМЫ

Напомним кратко обычные рассуждения при доказательстве *CPT* в лагранжевом (или гамильтоновом) подходе и выскажем несколько критических замечаний по этому поводу.

Например, в статье Паули[6] основные предположения формулируются так:

а) существует связь между спином и статистикой, вытекающая из *CPT*-инвариантности;

б) существует инвариантность лагранжиана по отношению к собственным преобразованиям Лоренца;

в) уравнения носят *локальный* характер, т. е. все величины являются спинорами или тензорами конечного ранга и содержат лишь производные конечного порядка;

г) кинематически независимые спинорные поля антикоммутируют; тогда, принимая определенный закон преобразования спиноров при *CPT*-преобразовании и антисимметризуя все произведения по всем перестановкам спинорных полей и симметризуя по всем положениям бозонных полей, можно показать, что $\mathscr{L}$ остается инвариантным при сильном отражении.

Главное предположение, ограничивающее обычность этого доказательства,— предположение о существовании локального лагранжиана в гейзенберговском представлении.

Во-первых, из предыдущего раздела видно, что локальность взаимодействия не является необходимой для *CPT*-инвариантности.

Во-вторых, не удается определить строго математически понятие $\mathscr{L}(x)$ в гейзенберговском представлении.

Что касается уравнения Шрёдингера в представлении взаимодействия, то согласно теореме Хаага такое представление в релятивистской квантовой теории поля существует только в том случае, если взаимодействие между частицами отсутствует!

Более приемлемо доказательство *CPT*-инвариантности, исходя из представления перенормированной S-матрицы в виде T-экспоненты:

$$S = T\exp\left(i\int \mathscr{L}_{\text{вз}}^{\text{in}}(x)\,d^4x\right) = T\exp\left(i\int \mathscr{L}_{\text{вз}}^{\text{out}}(x)\,d^4x\right),$$

где $\mathscr{L}_{\text{вз}}^{\text{in}}$ — перенормированный лагранжиан взаимодействия.

Тогда, если, как обычно, принять действие оператора Θ на поля согласно (10), (20) и считать соотношение коммутации между in-полями

нормальными, нетрудно показать, что

$$(\Theta S \Theta^{-1})^T = S, \quad \text{так как} \quad (\Theta \mathscr{L}_{\text{вз}}^{\text{in}}(x)\, \Theta^{-1})^T = \mathscr{L}_{\text{вз}}^{\text{out}}(-x), \tag{15}$$

и, следовательно, имеют место соотношения типа (17) для матричных элементов S-матрицы. Но, в отличие от аксиоматического доказательства, здесь снова предполагается локальная коммутативность $\mathscr{L}_{\text{вз}}^{\text{in}}(x)$. Из ранее изложенного, очевидно, что условие (15) останется справедливым и при более слабых предположениях относительно $\mathscr{L}_{\text{вз}}^{\text{in}}(x)$. У нас нет времени более подробно останавливаться на этом вопросе.

Теперь по поводу цитаты, приведенной в начале. Ясно, что одной лоренц-инвариантности и обычной связи между спином и статистикой для in (out)-полей недостаточно для доказательства *CPT*-инвариантности. В книге Мэтьюса [3] используется представление для матричного элемента в форме Лемана, Симанзика и Циммермана [7]. Если потребовать лоренц-инвариантность этого представления только на массовой оболочке, то оно будет справедливо и в нелокальной теории, где *CPT*, вообще говоря, нарушается. Если же считать, что это выражение справедливо и лоренц-инвариантно и *вне* массовой оболочки, то мы придем к локальной коммутативности гейзенберговских операторов и автоматически — к *CPT*-инвариантности.

III. СВЯЗЬ СПИНА И СТАТИСТИКИ

Экспериментальные факты указывают на то, что частицы с целым спином подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, а с полуцелым — статистике Ферми — Дирака. До сих пор не наблюдалось систем, подчиняющихся парастатистике.

Теорема о спине и статистике утверждает, что в квантовой теории поля нетривиальное поле с целым спином не может антикоммутировать в пространственноподобных точках, а нетривиальное поле с полуцелым спином в тех же точках не может коммутировать.

При переходе к перестановочным соотношениям между разными полями картина усложняется. Оказывается, что могут реализоваться «аномальные» перестановочные соотношения, в силу которых два поля с целыми спинами или поле с целым и поле с полуцелым спином антикоммутируют, а два поля с полуцелыми спинами коммутируют. При этом в теории возникают симметрии специального вида. Благодаря этим свойствам симметрии в подобных теориях всегда существует такой набор полей, которые удовлетворяют нормальным перестановочным соотношениям и связаны с первоначальными полями так называемым преобразованием Клейна. В этом смысле теория с аномальными перестановочными соотношениями представляет собой специальный случай теории с нормальными перестановочными соотношениями.

Мы не будем заниматься доказательством всех этих утверждений; их можно найти в книге Стритера и Вайтмана [5]. Мы проиллюстрируем сказанное на примере скалярного поля $\varphi(x)$. Предположим, что

$$[\varphi(x), \varphi^*(y)]_+ = 0, \quad \text{если} \quad (x-y)^2 < 0. \tag{22}$$

Тогда $\varphi(x)\,\Psi_0 = 0$, $\varphi^*(x)\,\Psi_0 = 0$. В теории поля, в которой φ и φ^* коммутируют или антикоммутируют со всеми другими полями, отсюда следует $\varphi = \varphi^* = 0$. Наиболее «простое» доказательство следует из представления Челлена — Лемана:

$$\langle 0 \,|\, [\varphi(x), \varphi^*(y)]_- \,|\, 0 \rangle = -i \int_0^\infty d\varkappa^2 \rho(\varkappa^2)\, \Delta(x-y, \varkappa^2) = 0, \qquad (x-y)^2 < 0. \tag{23}$$

Сравнивая (22) и (23), находим (из аналитичности)

$$\langle 0 | \varphi(x) \varphi^*(y) | 0 \rangle = 0,$$

или

$$\varphi(x) \Psi_0 = 0$$

(это означает, что $\| \varphi(f) \Psi_0 \| = \| \varphi^*(f) \Psi_0 \| = 0$, где $\varphi(f) = \int \varphi(x) f(x) d^4x$, $f(x)$ — гладкая функция из основного пространства, а $\| \ \|$ — знак нормы).

Вторая часть теоремы ($\varphi = \varphi^* = 0$) доказывается, если также опираться на аналитические свойства вайтмановских функций.

IV. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ *CPT*-ИНВАРИАНТНОСТИ

1. Сначала рассмотрим *стабильные частицы*. Покажем, что из *CPT*-инвариантности следует равенство масс частицы и античастицы. Пусть Ψ_+^{in} — состояние частицы с массой m, т. е.

$$(P^\mu P_\mu) \Psi_+^{\text{in}} = m^2 \Psi_+^{\text{in}}. \tag{24}$$

Учтем, что

$$(\Theta P^\mu \Theta^{-1})^T = P^\mu. \tag{25}$$

Тогда из (24) и (25) находим

$$\Theta P^\mu P_\mu \Theta^{-1} \Theta \Psi_+^{\text{in}} = \Psi_-^{\text{out}*} (\Theta P^\mu P_\mu \Theta^{-1})^T = m^2 \Psi_-^{\text{out}*},$$

где Ψ_-^{out} — состояние античастицы с противоположным спином, или

$$(P^\mu P_\mu) \Psi_-^{\text{in}} = m^2 \Psi_-^{\text{in}},$$

что и требовалось.

2. *Нестабильные частицы*. Одночастичное состояние, вообще говоря, нестабильно, т. е.

$$S | \alpha, \text{in} \rangle \neq | \alpha, \text{in} \rangle.$$

Если предположить, что по-прежнему (с учетом распадного взаимодействия) теория *CPT* инвариантна, то можно установить равенство времен распада частицы и античастицы. Вероятность распада частицы определяется выражением

$$\sum_\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) | \langle \beta, \text{in} | \widetilde{S} | \alpha, \text{in} \rangle |^2, \tag{26}$$

где $\widetilde{S}$ — оператор матрицы без 4-мерной δ-функции; $| \alpha, \text{in} \rangle$ — in-состояние нестабильной частицы. Из *CPT*-инвариантности сразу следует (см. (17))

$$\langle \beta, \text{in} | \widetilde{S} | \alpha, \text{in} \rangle = \langle \bar{\alpha}, \text{in} | \widetilde{S} | \bar{\beta}, \text{in} \rangle. \tag{27}$$

Вероятность распада античастицы пропорциональна

$$\sum_\beta \delta^4(p_\beta - p_\alpha) | \langle \bar{\beta}, \text{in} | \widetilde{S} | \bar{\alpha}, \text{in} \rangle |^2. \tag{28}$$

Используя соотношение (27) и лоренц-инвариантность, выражение (28) можно привести к (26).

Другие примеры следствий из *CPT*-инвариантности применительно к распадам K-мезонов можно найти в обзорах [9-11].

3. Обсудим кратко возможность распространения понятий P, C и других симметрий на нестабильные частицы. Наиболее последовательный путь введения нестабильных частиц в теорию — это отыскание соответствующих им особенностей на нефизических листах, в матричных элементах взаимодействия стабильных частиц. Так, например, рассмо-

трим процесс *)

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + \pi^+ + n.$$

Пусть матричный элемент этого процесса, как функция инвариантной массы q^2 двух конечных π^+-мезонов, имеет полюс на нефизическом листе в точке

$$q^2 = M^2 - i\lambda \qquad (\lambda > 0).$$

Обозначим вычет в этом полюсе (с точностью до известного множителя) через

$$T(s, t;\ M^2 - i\lambda).$$

Тогда, если $\lambda/M^2 \ll 1$, можно принять значение $T(s, t, M^2)$ за определение матричного элемента перехода $\pi^+ + p$ с образованием нестабильной частицы (скажем, ρ-мезона; мы здесь отвлекаемся от других квантовых чисел).

Очевидно, что если исходная теория обладает какой-либо симметрией (например, CPT), соответствующие этой симметрии квантовые числа можно приписать нестабильной частице. С точностью до членов $\sim \frac{\lambda}{M^2}$ можно ввести в теорию операторы рождения и поглощения нестабильных частиц и т. п. При больших ширинах возникают сложные нерешенные проблемы.

Совершенно аналогично можно определить матричные элементы образования двух и большего числа нестабильных частиц.

4. Приведем два примера, где выполняются условия спектральности, лоренц- и трансляционной инвариантности, но заведомо нарушено условие локальной коммутативности. В примере 1 теория CPT инвариантна; в примере 2 CPT-инвариантность нарушена. Для простоты рассмотрены нейтральные частицы со спином нуль.

Пример 1. Запишем S-матрицу в виде

$$S = \exp(i\Lambda), \qquad \Lambda = \Lambda^*$$

и выберем Λ в виде

$$\Lambda = g \int : \varphi_{\text{in}}^3(x) : d^4x.$$

Матричный элемент рассеяния двух частиц $(p,\ q \to p',\ q')$ в g^2-приближении будет $\sim \delta^4(p + q - p' - q')\{\delta[(p+q)^2 - m^2] + \delta[(p-q')^2 - m^2] + \delta[(p-p')^2 - m^2]\}$. Он удовлетворяет симметрии (19), вытекающей из CPT-инвариантности, но противоречит аналитическим свойствам, следующим из локальной коммутативности.

Пример 2.

$$\Lambda = g \int \{\Phi_{\text{in}}^{(+)}(x)\,\Phi_{\text{in}}^{(+)}(x)\,\varphi_{\text{in}}^{(-)}(x) : + \text{э. с.}\}\, d^4x.$$

Поле Φ_{in} описывает частицу с массой m, а φ_{in} — с массой μ. Матричный элемент в g^2-приближении будет

$$(p,\ q \to p',\ q') \sim \delta^4(p + q - p' - q')\ \Theta(p_0 + q_0)\ \delta((p+q)^2 - \mu^2).$$

Он не обладает CPT-симметрией, но удовлетворяет всем постулатам, кроме локальной коммутативности.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

*) Нейтрон считаем стабильным.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. E. P. Wigner, Gött. Nachr. (Math.-Naturwiss. Klasse). **31**, 546 (1932).
2. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 914 (1951) (см. перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», М., ИЛ, 1954).
3. П. Мэтьюс, Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц, М., ИЛ, 1959, стр. 96.
4. Р. Йост, Общая теория квантованных полей, М., «Мир», 1967, гл. V и VII.
5. Р. Стритер, А. Вайтман, *CPT*, спин и статистика и все такое. М., «Наука», 1966.
6. В. Паули, в сб. «Нильс Бор и развитие физики», М., ИЛ. В этой работе есть подробная библиография.
7. H. Lehman, K. Symanzik, W. Zimmermann, Nuovo Cimento **1**, 205 (1955).
8. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., Физматгиз, 1958.
9. М. В. Терентьев, УФН **86** (2), 231 (1965).
10. Л. Б. Окунь, УФН **89** (4), 603 (1966).
11. Г. Граверт, Г. Людерс, Г. Рольник, УФН **71** (2), 289 (1960).

ДИСКУССИЯ

В. Б. Берестецкий:

Не являются ли требования, налагаемые *CPT*-теоремой в ее строгом определении на *S*-матрицу, тавтологическими? Ведь в них содержится, по существу, определение античастиц.

В. Я. Файнберг:

Нет, так как понятия частиц и античастиц вводятся на языке in (или out)-операторов, т. е. для невзаимодействующих частиц. Например, в любой теории, в которой нарушена слабая локальная коммутативность (а следовательно, и локальность), можно ввести частицы и античастицы, но взаимодействие (*S*-матрица) не будет *CPT*-инвариантным.

Д. А. Киржниц:

Можно ли сказать что-нибудь о том, сводится ли в принципе условие слабой локальной коммутативности к первым трем постулатам, или же это условие представляет собой дополнительное требование?

В. Я. Файнберг:

Дайсон показал, что если поля обладают свойством слабой локальной коммутативности (СЛК), то вайтмановские функции будут аналитичными и однозначными в действительной совокупности пространственноподобных точек. Следовательно, СЛК расширяет, вообще говоря, область аналитичности и является дополнительным требованием.

М. К. Поливанов:

Поскольку слабая локальная коммутативность есть иерархически более слабое требование, чем требование локальной коммутативности, нарушение слабой локальной коммутативности, безусловно, будет приводить к нарушению локальности в сильном смысле.

В. Я. Файнберг:

Это верное утверждение.

С. Матинян:

В последнее время распространено утверждение, что доказательство *CPT*-теоремы не требует всего аппарата квантовой теории поля, а «доказывается» в *S*-матричной теории (Чью, Стапп). С другой стороны, Йост подверг критике попытку Стаппа в этом направлении, показав, что на деле Стапп вкладывает в свое доказательство те аналитические свойства *S*-матричных элементов, которые нужны для *CPT*-теоремы. Что вы можете сказать по этому поводу? Насколько серьезен *S*-матричный подход?

В. Я. Файнберг:

Как теперь ясно, критика Стаппа со стороны Йоста, по-видимому, справедлива только в том случае, когда речь идет о так называемых локализуемых теориях (Мейман, Яффе). В случае нелокализуемых теорий, когда допустим экспоненциальный и более быстрый рост матричных элементов в импульсном пространстве, из аналити-

ческих свойств S-матрицы, эквивалентных CPT-инвариантности, не вытекает существование локальных операторов: понятие слабой локальной коммутативности как бы теряет смысл и S-матричный подход оказывается более общим (см. примечание на стр. 480).

А. А. Комар:

Вами было сделано утверждение, что в аксиоматическом подходе CPT-инвариантность эквивалентна слабой локальной коммутативности. Однако при переходе к наблюдаемым (к S-матрице) дополнительно предполагалось существование уравнений Янга — Фельдмана. Не является ли это новым довольно сильным допущением, сближающим аксиоматическое доказательство CPT-теоремы с доказательством в лагранжевом формализме?

В. Я. Файнберг:

При переходе к наблюдаемым в теории асимптотических полей и частиц (Хаага — Рюэля) предполагается дополнительно полнота in-состояний:

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\text{in}},$$

и локальная коммутативность. Однако последнее требование, по-видимому, не является необходимым: нужно лишь, чтобы коммутатор двух полей достаточно быстро убывал в пространственноподобном направлении. В случае же линейной (Янг — Фельдман) связи in- и гейзенберговских операторов требование локальной коммутативности для доказательства свойств CPT-симметрии S-матрицы не нужно.

Л. Б. Окунь:

Что будет, если написать лагранжиан, не симметризованный по бозонным и не антисимметризованный по фермионным полям? Можно ли, пользуясь таким лагранжианом, вычислять матричные элементы и т. д. или при этом будут возникать какие-либо казусы? Ведь симметризация и антисимметризация нужны *не только* для доказательства CPT-теоремы.

В. Я. Файнберг:

Если поля, входящие в $\mathscr{L}(x)$, подчиняются таким коммутационным соотношениям, что $\mathscr{L}(x)$ удовлетворяет локальной (или слабой локальной) коммутативности, то заведомо существует такой оператор Θ, что

$$(\Theta \mathscr{L}(x) \Theta^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathscr{L}(-x),$$

и теория будет CPT-инвариантной. В этом случае процедура симметризации и антисимметризации операторов бозонных и фермионных полей, входящих в $\mathscr{L}(x)$, приводит к выбрасыванию так называемых контактных бесконечностей. Она эквивалентна переходу в представлении взаимодействия от обычного произведения операторов к нормальному. Если же поля нелокальны, то теория заведомо не будет CPT-инвариантной. Таким образом, грубо говоря, в локальной теории симметризация эквивалентна некоторой перенормировке $\mathscr{L}(x)$.