

530.145+536.48

**ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ  
ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ**

***P. N. Гуржи***

СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . .	689
I. Кинетические явления в диэлектриках . . . . .	690
§ 1. Постановка задачи . . . . .	690
§ 2. Гидродинамический механизм теплопроводности . . . . .	692
§ 3. Влияние антармонизмов высокого порядка на процессы переноса в твердых телах при низких температурах . . . . .	697
§ 4. Второй звук в диэлектриках . . . . .	700
II. Кинетические явления в металлах . . . . .	703
§ 5. Электропроводность металлов при низких температурах . . . . .	703
§ 6. Электропроводность тонких образцов . . . . .	707
§ 7. Электропроводность массивных образцов . . . . .	711
§ 8. Высокочастотные свойства . . . . .	714
Цитированная литература . . . . .	718

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее существенных достижений квантовой теории твердого тела было объяснение основных закономерностей электропроводности металлов и теплопроводности диэлектриков. Как и для всей физики твердого тела, важную роль при этом сыграли фундаментальные работы Блоха и Пайерлса. Полученные в тот период результаты находились в хорошем соответствии с имевшимися экспериментальными данными (по крайней мере в качественном отношении). Вероятно, именно это обстоятельство послужило причиной того, что дальнейшее более детальное развитие общих представлений теории происходило крайне медленно. За последние годы направление исследований сместилось от объяснения общих закономерностей к изучению свойств конкретных веществ с учетом их специфических особенностей. Между тем в теории процессов переноса до настоящего времени остается целый ряд неясных или мало обоснованных вопросов общего характера. Примерами такого рода могут служить проблема продольных длинноволновых фононов при рассмотрении теплопроводности диэлектриков или вопрос об электропроводности ряда чистых металлов в области низких температур.

Другой вопрос общего характера связан с учетом нормальных столкновений, т. е. столкновений, при которых сохраняется суммарный квазимпульс квазичастиц. Дело в том, что явления теплопроводности диэлектриков и электропроводности металлов обладают специфическим свойством: в обоих случаях оказывается отличным от нуля суммарный поток квазичастиц. (Заметим, что, например, перенос тепла молекулами обычного газа или электронами в металле такой особенностью не обладает.) Отсюда следует, что при наличии одних только нормальных столкновений

в системе мог бы существовать незатухающий ток (электрический или тепловой) в отсутствие внешней силы, которая бы его поддерживала. Это положение можно сделать более наглядным, заметив, что нормальные столкновения приводят только к внутреннему равновесию в системе квазичастиц, которая может как целое двигаться относительно кристаллической решетки с произвольной скоростью. Иначе говоря, тепловое сопротивление диэлектрика или электрическое — металла возникает за счет процессов, при которых квазимпульс не сохраняется (явление переброса, рассеяние дефектами кристаллической решетки и т. д.). В связи с этим при количественном рассмотрении вопроса нормальные столкновения обычно не учитываются.

Естественно ожидать, что такой подход приведет к качественно правильным результатам в случаях, когда вероятности нормальных столкновений и столкновений с потерей квазимпульса по порядку величины совпадают. Однако в достаточно чистых и массивных образцах при низких температурах нормальные столкновения могут преобладать. Такое положение является типичным для диэлектриков, поскольку в этом случае вероятность процессов переброса при столкновениях между квазичастицами в области низких температур экспоненциально мала. То же справедливо и для ряда металлов — достаточно, например, чтобы поверхность Ферми была замкнута и число электронов не равнялось числу дырок. Ясно, что в таких условиях применяемый обычно метод рассмотрения непригоден.

Настоящий обзор посвящен развитию теории процессов переноса для случаев, когда наибольшую вероятность имеют нормальные столкновения между квазичастицами. Оказывается, нормальные столкновения, хотя они сами по себе не приводят к конечному сопротивлению, могут тем не менее весьма существенно повлиять на результат действия других процессов рассеяния. В итоге меняются порядок величины кинетических коэффициентов и их зависимости от температуры и других параметров. Характер влияния нормальных столкновений существенно зависит как от типа квазичастиц (электроны, фононы, спиновые волны), так и от природы механизмов, приводящих к потере квазимпульса (процессы переброса, столкновения с примесными атомами, с границами образца и т. д.).

С формальной точки зрения преобладание нормальных столкновений означает, что состояние системы квазичастиц характеризуется в первом приближении равновесной функцией распределения с дрейфом  $f_0(\varepsilon - \mu)$ . Задача, таким образом, состоит в определении скорости упорядоченного движения и как функции координат, времени, температуры и других параметров. При этом в одних случаях дело сводится к решению гидродинамических уравнений типа Навье — Стокса (§ 2, 4, 6, 8), в других случаях величина и может быть определена непосредственно из кинетического уравнения (§ 3 и 7).

## I. КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

### § 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В идеальном монокристалле неограниченных размеров тепловое сопротивление возникает только за счет тех столкновений между квазичастицами, которые сопровождаются процессами переброса. В области низких температур соответствующая эффективная длина свободного пробега  $l^U$  экспоненциально растет с понижением температуры:  $l^U \sim \sim \exp(\gamma\Theta/T)$ , где  $\Theta$  — температура Дебая,  $T$  — абсолютная температура,  $\gamma$  — численный коэффициент порядка единицы. Ясно, что с понижением

температуры в достаточно чистом образце основную роль начнут играть столкновения с границами и эффективная длина свободного пробега  $l^{\text{эфф}}$  окажется порядка поперечного размера образца  $d$ .

Для грубой оценки коэффициента теплопроводности можно воспользоваться следующей формулой, известной из кинетической теории газов:

$$\kappa \approx C l^{\text{эфф}} v_T, \quad (1,1)$$

где  $C$  — теплоемкость,  $v_T$  — средняя скорость квазичастиц.

В области самых низких температур  $l^{\text{эфф}} \approx d$  и  $\kappa$  растет с повышением температуры. При более высоких температурах (но  $T \ll \Theta$ )  $\kappa$  спадает по экспоненциальному закону. Поэтому температурная зависимость коэффициента теплопроводности имеет колоколообразный вид (см. ниже рис. 1). Изложенные качественные соображения, если отвлечься от деталей, подтверждаются опытом.

Однако справедливость этих представлений с теоретической точки зрения была поставлена под сомнение Померанчуком <sup>1</sup>. Он заметил, что если ограничиться трехфононными процессами, то, как следует из соответствующих законов сохранения, продольные длинноволновые фононы могут сталкиваться только с фононами сравнимой длины волны. В результате вероятность рассеяния настолько быстро стремится к нулю с уменьшением импульсов продольных фононов, что коэффициент теплопроводности расходится <sup>2</sup>). Но эта трудность оказывается в значительной степени связанной с предположением об изотропии фононных спектров, принятым Померанчуком. Как показал Херринг <sup>2</sup>, если учесть анизотропию и вырождение фононных спектров, для многих кристаллов расходимость либо отсутствует, либо приводит к мало существенным в реальных образцах размерным эффектам. (Любопытное решение проблемы было недавно предложено Саймонсом <sup>3</sup>.)

Другая трудность теории теплопроводности диэлектриков связана с тем, что кинетическое уравнение в этом случае не удается решить. Для получения качественных результатов обычно тем или иным способом вводят время релаксации (см., например, <sup>1</sup>). При этом нормальные столкновения между квазичастицами, не сопровождаемые процессами переброса ( $N$ -процессы), как правило, не учитываются. Подобный подход, возможно, разумен при не слишком низких температурах, когда вероятности нормальных столкновений и столкновений с перебросом ( $U$ -процессы) одного порядка (т. е.  $l^N \sim l^U$ ), так как  $N$ -процессы сами по себе не приводят к тепловому сопротивлению. Однако в области достаточно низких температур, где  $l^N \ll l^U$ ,  $N$ -процессы могут быть весьма существенными. Но именно в этом случае возможно последовательное решение кинетического уравнения, основанное, по существу, на разложении по малому параметру  $l^N/l^U$  (см., например, <sup>4</sup>).

В реальных условиях тепловое сопротивление диэлектрика, наряду с процессами переброса, связано с рассеянием квазичастиц на различных дефектах кристаллической решетки и границах образца. Как показывают вычисления, учет  $N$ -процессов не приводит к качественному изменению результатов, связанных с объемными столкновениями при низких температурах ( $U$ -процессы в системе спиновых волн и фононов <sup>5</sup>, рассеяние на примесях: фононы <sup>6</sup>, спиновые волны <sup>7</sup>).

Иначе может обстоять дело в том случае, когда теплосопротивление возникает благодаря рассеянию квазичастиц на границах образца или на каких-либо макроскопических дефектах решетки. Возникающий при

<sup>1)</sup> Заметим, что в случае спиновых волн, имеющих квадратичный закон дисперсии, подобная трудность не возникает.

этом механизме теплопроводности напоминает пуазейлевское течение вязкой жидкости. В результате существенно изменяется порядок величины коэффициента теплопроводности и его зависимость от температуры и толщины образца<sup>8, 9</sup>. Этот вопрос рассмотрен в § 2.

Следующий параграф посвящен роли процессов переброса при столкновениях между квазичастицами, естественно, в условиях, когда нормальные столкновения преобладают.

Обычно предполагается, что при низких температурах наибольшую вероятность имеют те столкновения, в которых участвует минимальное число квазичастиц. С формальной точки зрения это соответствует учету только первых неисчезающих ангармонизмов в соответствующем гамильтониане взаимодействия. Ниже, однако, будет показано, что явления переноса в твердых телах при достаточно низких температурах могут определяться ангармонизмами сколь угодно высокого порядка. Для этого необходимо, чтобы энергия квазичастиц, как функция модуля квазимпульса, менялась быстрее чем по линейному закону<sup>10</sup>. В качестве примера рассмотрена теплопроводность ферродиэлектрика, связанная со спиновыми волнами.

В условиях, когда нормальные столкновения преобладают, в системе квазичастиц могут распространяться макроскопические колебания, подобные второму звуку в сверхтекущем гелии. Некоторые особенности этого явления в диэлектриках и ферродиэлектриках рассмотрены в § 4.

## § 2. Гидродинамический механизм теплопроводности

1. При достаточно низких температурах причиной теплового сопротивления диэлектриков является, как правило, рассеяние квазичастиц на границах образца. Действительно, с понижением температуры объемные столкновения становятся все менее и менее эффективными. Ясно, что в конце концов возникает кнудсеновская ситуация, т. е. квазичастицы будут двигаться от границы к границе, практически не сталкиваясь в объеме.

Фактически влияние границ может оказаться существенным в условиях, когда средняя длина свободного пробега относительно столкновений с перебросом  $l^U$  сравнима с поперечником образца  $d$ . С другой стороны, при низких температурах нормальные столкновения значительно более вероятны, чем столкновения с перебросом. Поэтому в достаточно массивном образце неизбежно возникает ситуация, когда процессами переброса можно пренебречь и в то же время нормальные столкновения происходят значительно чаще, чем столкновения с границами. Для этого необходимо, чтобы в некоторой области температур выполнялись неравенства

$$l^N \ll d \ll l^U. \quad (2.1)$$

Результат, к которому приводит учет нормальных столкновений, нетрудно понять из следующих простых соображений. При  $d \ll l^N$  квазичастица, двигаясь прямолинейно, пройдет между двумя столкновениями с границами путь порядка  $d$ . Соответственно эффективная длина свободного пробега  $l^{\text{эфф}} \approx d$  и, согласно формуле (1.1), коэффициент теплопроводности  $\kappa \sim C(T)d v_T$ .

Если же  $d \gg l^N$ , то квазичастица, находящаяся в толще образца, прежде чем она дойдет до границы, напротив, испытает множество нормальных столкновений. Ясно, что в результате путь, проходимый между двумя столкновениями с границей, существенно увеличивается. То обстоя-

тельство, что при нормальных столкновениях происходит обмен импульсом с другими квазичастицами, очевидно, не является существенным.

Пользуясь известными формулами броуновского движения, легко показать, что длина траектории между двумя столкновениями с границей порядка  $d^2/l^N$ . Так как эта величина имеет смысл эффективной длины свободного пробега, то, согласно (1,1),

$$\kappa \approx \frac{C(T) v_T d^2}{l^N(T)}.$$

Таким образом, благодаря нормальным столкновениям существенно изменяется порядок величины коэффициента теплопроводности и его зависимость от параметров  $T$ ,  $d$  и т. д.

Рассмотренный механизм теплопроводности по существу ничем не отличается от течения вязкой жидкости или газа (роль внешней силы играет градиент температуры). Поэтому для количественного описания этого механизма естественно воспользоваться гидродинамическим подходом. Дело в том, что нормальные столкновения приводят только к внутреннему равновесию в каждом элементе объема (большом по сравнению с  $l^N$ ), который может, например, как целое двигаться с произвольной скоростью  $\mathbf{u}$ . Поэтому заранее ясно, что в интересующих нас условиях функция распределения будет иметь вид

$$N_0(\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{u}) \equiv \left[ \exp\left(\frac{\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{u}}{T}\right) - 1 \right]^{-1},$$

где  $\varepsilon$  ( $\mathbf{p}$ ) — энергия квазичастицы,  $\mathbf{p}$  — ее квазимпульс.

Скорость упорядоченного движения, как функция координат  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , должна удовлетворять гидродинамическому уравнению типа уравнения Навье — Стокса. Ниже выводится такое уравнение, которое затем будет применено к рассмотрению теплопроводности диэлектриков и ферритов.

2. Гидродинамическое уравнение можно получить, исходя из кинетического уравнения, аналогично тому, как это делается для обычных газов. В интересующем нас случае линеаризованное кинетическое уравнение для функции распределения квазичастиц  $N(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  удобно записать в виде

$$\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} N + (\mathbf{v} \nabla T) \frac{\partial}{\partial T} N_0(\varepsilon) = \hat{I}^N N + \hat{I}^V N,$$

где  $\mathbf{v} = \partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}$ ; первый член в правой части описывает  $N$ -процессы, второй — столкновения, сопровождаемые потерей квазимпульса ( $U$ -процессы, рассеяние на примесных атомах и т. д.).

Для приближенного решения этого уравнения естественно воспользоваться тем, что член  $\hat{J}^N N$  велик в сравнении с членами  $\mathbf{v} \partial / \partial \mathbf{r} N$  и  $\hat{J}^V N$ . Точнее говоря, решение будет представлено в виде разложения в ряд по малым параметрам  $l^N/d$  и  $l^N/l^V$ . Как легко показать, метод последовательных приближений приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{I}^N N^{(0)} &= 0, \quad \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} N^{(0)} = \hat{I}^N N^{(1)}, \\ \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} N^{(1)} + (\mathbf{v} \nabla T) \frac{\partial}{\partial T} N_0(\varepsilon) - \hat{I}^V N^{(0)} &= \hat{I}^N N^{(2)}, \dots, \\ N &= N^{(0)} + N^{(1)} + N^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

Из первого уравнения следует, что  $N^0 = N_0(\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{u})$ . Второе уравнение, которое теперь приобретает вид

$$-v_i F_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} N'_0(\varepsilon) = \hat{I}^N N^{(1)},$$

в общем случае не удается решить. Можно только утверждать, что  $N^{(1)}$  линейно содержит производные  $\partial u_i / \partial x_k$ .

Поскольку нас интересует область очень низких температур и в рассматриваемом уравнении, очевидно, существенны только энергии  $\epsilon \ll T$ , закон дисперсии квазичастиц можно считать степенным:  $\epsilon(\mathbf{p}) = p^n f(\mathbf{n})$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$ . При этом, как нетрудно показать,

$$N^{(1)} = A \Psi_{ik} \left( \frac{\epsilon}{T}, \mathbf{n} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Функции безразмерных переменных  $\Psi_{ik}$  удовлетворяют уравнениям, не содержащим малых параметров; в случае изотропного закона дисперсии  $\Psi_{ik} = n_i n_k \psi(\epsilon/T)$ . Зависящая от температуры константа  $A$  может быть легко найдена в каждом конкретном случае.

Умножим, далее, третье уравнение на  $\mathbf{r}$  и проинтегрируем. Так как интеграл от правой части тождественно равен нулю, в результате возникнет искомое уравнение для  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . В изотропном случае это уравнение удобно записать в виде \*)

$$\alpha \nabla T = v \Delta \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}}{\tau^V}, \quad (2,2)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \beta T^{-1} \int p v \epsilon N'_0(\epsilon) d\mathbf{p}, \quad v = v_T l^N \approx \beta A \int p v \psi d\mathbf{p}, \\ \frac{\mathbf{u}}{\tau^V} &\approx \beta \int \mathbf{p} \hat{I}^V [(\mathbf{u} \mathbf{p}) N'_0(\epsilon)] d\mathbf{p}, \quad \beta^{-1} = \int p^2 N'_0(\epsilon) d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2,3)$$

По аналогии с обычным газом кинематическая вязкость  $v$  представлена в виде произведения средней тепловой скорости квазичастиц  $v_T$  на величину  $l^N$ , имеющую смысл длины свободного пробега для  $N$ -процессов. К этому уравнению следует добавить граничное условие  $\mathbf{u} = 0$  на границах образца, что соответствует диффузному рассеянию.

Как ясно из вывода, при анизотропном законе дисперсии гидродинамическое уравнение сохраняет такую же структуру. Но, конечно, все коэффициенты будут теперь тензорами. Так, например, член  $v \Delta u_i$  приобретает вид  $v_{iklm} \partial^2 u_k / \partial x_l \partial x_m$ , однако существенно, что все  $v_{iklm} \sim v$ . Поэтому в дальнейшем мы будем исходить из уравнения (2.2), предполагая при этом только на правильные порядки величин и их зависимость от основных параметров.

Плотность потока тепла

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{h^3} \int \mathbf{v} \epsilon N_0(\epsilon - \mathbf{p} \mathbf{u}) d\mathbf{p} \approx - \frac{\mathbf{u}}{3h^3} \int p v \epsilon N'_0(\epsilon) d\mathbf{p}$$

зависит от координат, и для нахождения коэффициента теплопроводности  $\kappa$  вектор  $\mathbf{Q}$  следует усреднить по поперечному сечению образца:  $\bar{\mathbf{Q}} = -\kappa \nabla T$ .

Приведем в качестве примера результат решения уравнения (2.2) в двух простейших случаях — пластины и кругового цилиндра.

\*) Полученное уравнение справедливо при дополнительном условии  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , которое следует из уравнения для  $N^{(1)}$  (как легко показать,

$$\int \epsilon v_i \rho_x N'_0(\epsilon) d\mathbf{p} \sim \delta_{ik}$$

при любом законе дисперсии) и эквивалентно отсутствию объемных источников тепла.

Представим коэффициент теплопроводности в виде  $\kappa = Cl^{\text{эфф}}v_T$ , где  $C = -h^{-3}T^{-1} \int \varepsilon^2 N'_0(\varepsilon) dP$  — теплоемкость. Тогда для пластины

$$l^{\text{эфф}} \approx l^V(1 - z^{-1} \operatorname{th} z)$$

и для цилиндра

$$l^{\text{эфф}} \approx l^V \left[ 1 - \frac{I_1(z)}{z I_0(z)} \right].$$

Здесь  $l^V = \tau^V v_T$ ,  $z = d/2 \sqrt{l^V l^N}$ ,  $I_1$  и  $I_0$  — функции Бесселя от минимого аргумента,  $d$  — толщина пластины или диаметр цилиндра.

В предельных случаях обе формулы с точностью до несущественного численного множителя приводят к одним и тем же результатам: при  $z \gg 1$   $l^{\text{эфф}} = l^V$ , а при  $z \ll 1$   $l^{\text{эфф}} \approx l^V z^2 \approx d^2/l^N$ . Это естественно, так как  $z^2 \approx d^2/l^N l^V$ , а величина  $d^2/l^N$ , как мы видели, имеет смысл эффективной длины свободного пробега относительно столкновений с границами.

Ясно, что малое различие результатов для пластины и цилиндра в гидродинамической области не является случайным. В дальнейшем под  $d$  будет пониматься характерный поперечный размер образца (или расстояние между макроскопическими искажениями решетки).

3. Переходим теперь к конкретным результатам для фононной теплопроводности диэлектриков. При низких температурах взаимодействие между фононами происходит, как известно, за счет тройных столкновений. Исходя из соответствующего интеграла столкновений (см., например,<sup>4)</sup> и соотношений (2,3), можно показать, что по порядку величины

$$l_{pp}^N(T) \approx l_{pp}^N(\Theta) \left( \frac{\Theta}{T} \right)^5, \quad (2,4)$$

где  $l_{pp}^N(\Theta) \approx a M s^3 / \Theta$ ,  $a$  — постоянная решетки,  $M$  — масса атома,  $s$  — скорость звука, температура Дебая  $\Theta \approx hs/a$ .

Для тройных  $U$ -процессов аналогично тому, как это сделано в<sup>5</sup>, нетрудно показать, что

$$l_{pp}^U(T) = s t_{pp}^U(T) \approx l_{pp}^N(\Theta) \left( \frac{T}{\Theta} \right)^{5/2} \exp \left( \gamma \frac{\Theta}{T} \right). \quad (2,5)$$

Численное значение параметра  $\gamma$  зависит от поведения фононного спектра в пределах всей зоны Бриллюэна \*). Любопытно, что в остальном приведенный результат, включая и предэкспоненциальный множитель  $(T/\Theta)^{5/2}$ , не зависит от характера закона дисперсии.

На рис. 1 изображен примерный ход температурной зависимости коэффициента теплопроводности диэлектрика. В области самых низких температур, пока  $l_{pp}^N \gg d$ , очевидно,  $l^{\text{эфф}} \approx d$  и  $\kappa \approx C_p ds \sim dT^3$ . Затем, начиная с температуры  $T_1$ , при которой  $l_{pp}^N \approx d$ , до температуры  $T_2$ ,

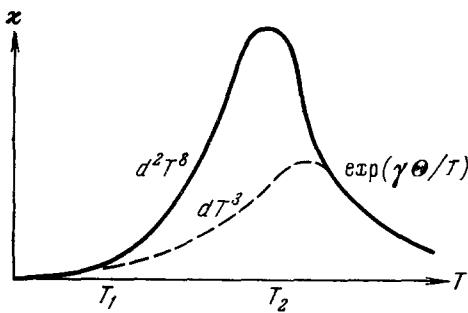


Рис. 1.

\*). Через  $\gamma\Theta$  обозначено наименьшее возможное значение суммы энергий сталкивающихся фононов, допускаемое законами сохранения энергии и импульса (см. § 3); в случае линейного изотропного закона дисперсии  $\gamma = 1$ .

при которой  $d^2/l_{pp}^N \approx l^V$ , основную роль играет диффузионный механизм и

$$\kappa \approx C_p s \frac{d^2}{l_{pp}^N} \sim d^2 T^8.$$

Далее начинается обычный спад теплопроводности либо по экспоненциальному закону (если преобладают  $U$ -процессы), либо по степенному закону (если основную роль играет рассеяние на примесях). Для сравнения на рис. 1 изображена также обычная зависимость  $\kappa(T)$  (пунктирная кривая).

Как следует из неравенств (2,1), диффузионный механизм может проявляться только в достаточно массивном образце диэлектрика. Сколько-нибудь надежную оценку для толщины  $d$  трудно получить, но,

по-видимому, достаточно, чтобы  $d$  было порядка 1 см.

Отметим, что приведенные выше закономерности были недавно подтверждены экспериментально при исследовании теплопроводности кристаллического Не<sup>4</sup><sup>11</sup>. Для наиболее толстых из исследовавшихся образцов ( $d \approx 2,5$  мм) длина свободного пробега в максимуме кривой  $\kappa(T)$  оказалась почти на порядок большее толщины образца  $d$ , спад в области левее максимума происходит по закону, близкому к  $T^8$ .

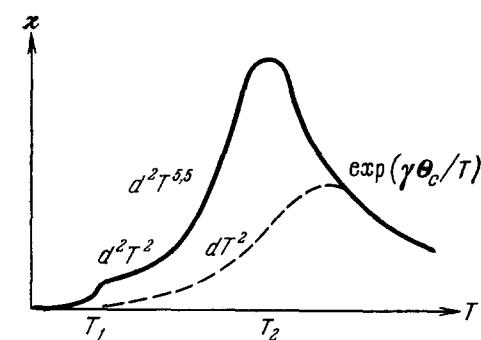


Рис. 2.

4. В ферритах при низких температурах перенос тепла осуществляется преимущественно спиновыми волнами. Это связано с тем, что теплоемкость спиновых волн спадает с понижением температуры значительно медленнее, чем фононная теплоемкость (по порядку величины  $C_p \approx \approx 1/a^3 (T/\Theta)^3$  и  $C_s \approx 1/a^3 (T/\Theta_c)^{3/2}$ ,  $\Theta_c$  — температура Кюри). Кроме того, нормальные столкновения между спиновыми волнами значительно более вероятны, чем  $N$ -столкновения спиновых волн с фононами<sup>12</sup>. Поэтому при рассмотрении той области температур, в которой возможен гидродинамический механизм теплопроводности, наличие фононов можно не учитывать.

Столкновения между спиновыми волнами связаны с обменным и релятивистским взаимодействиями. Длины свободного пробега для соответствующих  $N$ -процессов по порядку величины равны<sup>12</sup>

$$l_{ss}^{(r)} \approx a \left( \frac{\Theta_c}{T} \right)^{7/2}, \quad l_{ss}^{(r)} \approx a \left( \frac{\Theta_c}{\mu_B M_0} \right)^2 \left[ 1 + \exp \left( \frac{\beta \mu_B M_0}{T} \right) \right],$$

где  $\mu_B$  — магнетон Бора,  $M_0$  — номинальная намагниченность,  $\beta$  — константа анизотропии; внешнее магнитное поле предполагается слабым ( $\mu_B H \ll T$ ).

Из приведенных выражений следует, что гидродинамический механизм должен проявляться в относительно тонких образцах феррита. В частности, достаточно, чтобы было

$$d \gg a \left( \frac{\Theta_c}{\mu_B M_0} \right)^2 \sim 10^{-3} - 10^{-4} \text{ см.}$$

Если это неравенство выполнено, то коэффициент теплопроводности ведет себя следующим образом (рис. 2). При самых низких температурах,

пока  $d \ll l_{ss}^{(r)}$ ,

$$l^{\phi\Phi} \approx d \quad \text{и} \quad \kappa \approx C_s dv_T \approx \frac{\Theta_C}{ha} \frac{d}{a} \left( \frac{T}{\Theta_C} \right)^2.$$

Затем в интервале от  $T_1 (l_{ss}^{(r)}(T_1) \approx d)$  до  $T_2$  ( $d^2/l_{ss}^{(e)}(T_2) \sim l^V(T_2)$ ) теплопроводность определяется диффузионным механизмом и

$$\kappa \approx \frac{\Theta_C}{ha} \frac{d^2}{a^2} \left( \frac{T}{\Theta_C} \right)^2 \begin{cases} \left( \frac{\mu_B M_0}{\Theta_C} \right)^2 \exp \left( -\frac{\beta \mu_B M_0}{T} \right), & T_1 \ll T \ll \mu_B M_0, \\ \left( \frac{\mu_B M_0}{\Theta_C} \right)^2, & \mu_B M_0 \ll T \ll \Theta_C \left( \frac{\mu_B M_0}{\Theta_C} \right)^{4/7}, \\ \left( \frac{T}{\Theta_C} \right)^{7/2}, & \Theta_C \left( \frac{\mu_B M_0}{\Theta_C} \right)^{4/7} \ll T \ll T_2. \end{cases}$$

Закон, по которому спадает  $\kappa(T)$  при  $T > T_2$ , зависит от размеров и чистоты феррита. В достаточно больших и чистых образцах основную роль играют столкновения с перебросом. При этом могут проявиться несколько ангармонизмов высшего порядка (см. § 3). Примесное теплопротивление феррита существенно зависит от магнитных свойств примесных атомов<sup>7</sup>.

### § 3. Влияние ангармонизмов высокого порядка на процессы переноса в твердых телах при низких температурах

1. Как уже отмечалось, конечные значения для коэффициентов теплопроводности идеального бесконечного монокристалла могут быть получены только при учете процессов переброса. Если квазичастицы подчиняются статистике Бозе (например, фононы или спиновые волны), то вероятность столкновения, сопровождаемого процессом переброса, при низких температурах экспоненциально мала ( $\sim \exp(-\gamma\Theta/T)$ , где  $\gamma$  — численный коэффициент порядка единицы,  $\Theta$  — температура Дебая в случае фононов и температура Кюри в случае спиновых волн,  $T \ll \Theta$ ). Чтобы выяснить происхождение этой экспоненты, рассмотрим в качестве примера случаи, когда как до столкновения, так и после него имеется две квазичастицы.

Из законов сохранения энергии и импульса

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 = 0, \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4 = \mathbf{b} \quad (3,1)$$

( $\mathbf{b}$  — вектор обратной решетки) видно, что по крайней мере два из четырех волновых векторов  $\mathbf{k}$  должны быть порядка  $\mathbf{b}$ . Соответствующие этим немалым  $\mathbf{k}$  энергии  $\varepsilon \sim \Theta \gg T$ . Поэтому вероятность столкновения будет пропорциональна

$$\exp \left( -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{T} \right) = \exp \left( -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4}{2T} \right). \quad (3,2)$$

Величина, стоящая в экспоненте, является, вообще говоря, сложной функцией волновых векторов  $\mathbf{k}$ . Физический интерес представляет вероятность процесса переброса для определенной квазичастицы, скажем, в состоянии  $\mathbf{k}_1$ . При этом для суммы энергий в экспоненте (3,2) следует взять наименьшее значение, допускаемое законами сохранения (3,1) при фиксированном  $\mathbf{k}_1$ . В результате вероятность переброса оказывается

существенно различной даже для состояний с одинаковым значением энергии (ясно, например, что наибольшая вероятность соответствует участкам изоэнергетической поверхности, минимально удаленным от границ зоны Бриллюэна). При этом перенос тепла, казалось бы, будут в основном осуществлять те квазичастицы, которые менее всего тормозятся процессами переброса.

Приведенные рассуждения обладают, однако, одним весьма существенным недостатком, а именно: в них никак не отражена роль нормальных столкновений, которые при низких температурах происходят значительно чаще, чем столкновения с перебросом. Благодаря нормальным столкновениям импульс, приобретенный одной из квазичастиц в результате переброса, быстро перераспределяется между всеми остальными квазичастицами. При этом тепловое сопротивление определяется общим числом  $U$ -процессов независимо от того, для всех ли квазичастиц эти процессы возможны. Иными словами, в экспоненте (3,2) следует взять минимальное значение суммы энергий, совместимое с законами сохранения (3,1)<sup>4, 5</sup>.

Вероятность аналогичного процесса, в котором участвуют не обязательно две, а некоторое произвольное число частиц  $n$ , пропорциональна  $\exp(-T^{-1} \sum \varepsilon_i)$ , где для  $\sum \varepsilon_i$  должно быть взято наименьшее значение, допускаемое законами сохранения

$$\sum_1^n \varepsilon_i - \sum_{n+1}^{2n} \varepsilon_i = 0, \quad \sum_1^n \mathbf{k}_i - \sum_{n+1}^{2n} \mathbf{k}_i = \mathbf{b}.$$

Кроме того, с ростом порядка процесса будет нарастать по закону  $(T/\Theta)^{\beta n}$  степень малого параметра  $T/\Theta$  в предэкспоненциальном множителе (константа  $\beta$  зависит от характера закона дисперсии). Легко, однако, сообразить, что экспоненциальные множители, которыми в основном определяется малость вероятности столкновений, сопровождаемых перебросами, могут возрастать с увеличением порядка процесса  $n$ . Для этого необходимо, чтобы энергия квазичастицы, как функция модуля квазимпульса, менялась быстрее чем по линейному закону.

Рассмотрим для определенности спиновые волны в кубическом кристалле. При не слишком низкой температуре  $\varepsilon(\mathbf{k}) = \Theta_C(ak)^2$  наименьшее отличное от нуля значение  $|\mathbf{b}| = 2\pi/a$  и, как легко показать,  $\beta = 3$ ; здесь  $\Theta_C$  — по порядку величины температура Кюри,  $a$  — постоянная решетки. Если принять, что квадратичный закон дисперсии справедлив вполне до  $k \approx b/2n$ , наименьшее значение  $\sum_i \varepsilon_i$  достигается в точке  $\mathbf{k}_i = \pm b/2n$  ( $i \leq n$ ),  $\mathbf{k}_i = -b/2n$  ( $i > n$ ) и равно  $n\varepsilon(b/2n) = \pi^2\Theta_C/n$ . Поэтому можно ожидать, что полная вероятность потери импульса системой спиновых волн с учетом ангармонизмов всех порядков будет пропорциональна выражению вида

$$\sum_n B_n \left( \frac{T}{\Theta_C} \right)^{3n} \exp \left( -\frac{\pi^2\Theta_C}{nT} \right),$$

где  $B_n$  — численные коэффициенты.

Из этой формулы следует, что с понижением температуры кинетические процессы будут определяться ангармонизмами все более высокого порядка. Заметим, что последнее утверждение основано, в сущности, только на двух допущениях: «нелинейность» закона дисперсии и наличие в гамильтониане взаимодействия квазичастиц ангармонизмов различного порядка.

2. Приведем в качестве примера результат вычисления теплопроводности ферродиэлектрика, связанной со спиновыми волнами \*)<sup>10</sup>:

$$\kappa \approx \frac{T}{ha} \left[ \sum_{n \geq 2} B_n \left( \frac{T}{\Theta_C} \right)^{3n-6} \exp \left( -\frac{\pi^2 \Theta_C}{nT} \right) \right]^{-1},$$

$$B_n \approx \pi^{11-3n} 2^{5-6n} \frac{(n!)^2}{n^3} S^{2n-2},$$

где  $S = a^3 M_0 / \mu_B$  — спин атома; суммирование проводится от  $n = 2$  до  $n \sim \Theta_C/T$ .

Последнее ограничение существенно, так как благодаря наличию в коэффициентах  $B_n$  множителей  $(n!)^2$  члены ряда начинают расти при  $n \sim \Theta_C/T$ . Это не удивительно, так как при вычислениях предполагалось, что  $\Theta_C/nT \gg 1$ . Точное значение верхнего предела при суммировании по  $n$  несущественно, так как при  $n \sim \Theta_C/T$  члены ряда пренебрежимо малы.

При относительно высоких температурах (но  $\exp(\Theta_C/T) \gg 1$ ) основную роль играет первый член суммы и, в согласии с <sup>5</sup>,

$$\kappa \approx \frac{T}{ha} \exp \left( \frac{\pi^2 \Theta_C}{2T} \right). \quad (3,3)$$

Начиная с температуры  $T_1 \approx \Theta_C/10$ , преобладает второй член суммы ( $n = 3$ ) и температурная зависимость становится более плавной:

$$\kappa \approx \frac{T}{ha} \left( \frac{\Theta_C}{T} \right)^3 \exp \left( \frac{\pi^2 \Theta_C}{3T} \right).$$

Наконец, при достаточно низких температурах основную роль играет небольшая группа членов суммы с номерами  $n \approx (T/\Theta_C \ln \Theta_C/T)^{-1/2}$  (принято, что  $\ln \Theta_C/T \gg 1$ ) и, как нетрудно показать,

$$\kappa \approx \frac{T}{ha} \left( \frac{\Theta_C}{T} \right)^6 \exp \left( 2\pi \sqrt{2 \frac{\Theta_C}{T} \ln \frac{\Theta_C}{T}} \right).$$

Таким образом, температурная зависимость коэффициента теплопроводности имеет вид волнистой кривой (см. рис. 3; пунктирная кривая соответствует обычной зависимости (3,3)).

Для того чтобы выяснить возможность наблюдения подобной зависимости, найдем эффективную длину свободного пробега в области, где начинается отклонение от закона (3,3), т. е. при  $T \approx T_1$ . Сравнивая приведенные выше результаты с формулой (1,1) (в данном случае  $C \approx \approx a^{-3} (T/\Theta_C)^{3/2}$ ,  $v_T \approx a\hbar^{-1} \sqrt{T\Theta_C}$ ), нетрудно показать, что  $l_{\text{эфф}}(T_1) \approx \approx 1$  см. Следовательно, необходимо иметь чистые образцы поперечного

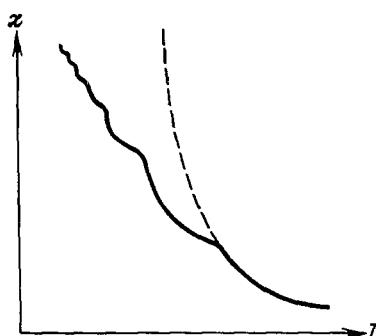


Рис. 3.

\*) Как уже отмечалось, при низких температурах перенос тепла в ферродиэлектриках осуществляется преимущественно спиновыми волнами. В то же время причиной теплового сопротивления могут служить процессы переброса как при столкновениях между спиновыми волнами, так и при спин-фононных или фонон-фононных столкновениях <sup>12</sup>. Однако, поскольку закон дисперсии фононов линеен, вероятность многочастичных столкновений с их участием относительно мала. Точнее говоря, так будет обстоять дело при достаточно низких температурах, когда основную роль играют ангармонизмы высокого порядка. Столкновения между спиновыми волнами вплоть до очень низких температур определяются обменными взаимодействиями, которые только и принимались во внимание при проведении расчета.

размера  $d > 1 \text{ см}$ . В противном случае, казалось бы, при  $T \ll T_1$  основную роль будет играть рассеяние спиновых волн на границах. Однако, как было показано в § 2,  $l^{\text{эфф}}$  нужно сравнивать не с поперечником образца  $d$ , а со значительно большей диффузионной длиной  $d^2/l^N$  (например,  $d^2/l^N \approx 1 \text{ см}$  при  $d \approx 10^{-2} \text{ см}$  и  $l^N \approx 10^{-4} \text{ см}$ ).

#### § 4. Второй звук в диэлектриках

1. Как известно, в сверхтекучем гелии могут распространяться макроскопические колебания существенно различной природы — первый и второй звуки<sup>13</sup>. В приближении, в котором тепловым расширением пренебрегается, волны первого типа являются обычными звуковыми колебаниями, возможными в любой жидкости или газе, тогда как волны второго типа сводятся к чисто температурным колебаниям.

С микроскопической точки зрения второй звук представляет собой колебания плотности тепловых возбуждений в гелии, и поэтому его можно трактовать как обычный звук в газе квазичастиц. При этом, конечно, предполагается, что столкновения между квазичастицами происходят достаточно часто (период колебаний и длина волны звука должны быть велики по сравнению с временем и длиной свободного пробега соответственно).

Из сказанного ясно, что второй звук не связан с какими-либо специфическими свойствами сверхтекучего гелия и, вообще говоря, возможен в газе любых квазичастиц. Для этого, однако, необходимо, чтобы при столкновениях между квазичастицами наряду с суммарной энергией сохранялся и суммарный квазимпульс. Иначе говоря, в твердом теле второй звук возможен только в условиях, когда нормальные столкновения между квазичастицами значительно более вероятны, чем столкновения с перебросом (в жидкости  $U$ -процессы, очевидно, принципиально невозможны). Как мы видели, с понижением температуры такая ситуация неизбежно возникает и, более того, реализуется в эксперименте (см. § 2).

Вопрос о возможности второго звука в твердых телах неоднократно обсуждался в литературе (см., например,<sup>14-16</sup>). Недавно это любопытное явление было обнаружено экспериментально<sup>17</sup>.

2. Наиболее естественным образом свойства второго звука можно описать, исходя из гидродинамических уравнений, выводом которых мы сейчас займемся. Полученное в § 2 уравнение типа Навье — Стокса в данном случае непригодно (при его выводе предполагалось, что температура задана и процесс стационарен).

Будем исходить из кинетического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} N + (\mathbf{v} \nabla) N = \hat{I}^N N + \hat{I}^V N.$$

В нулевом приближении

$$\hat{I}^N N^{(0)} = 0$$

и, следовательно,  $N^{(0)} = N_0 (\epsilon - \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} - \epsilon \vartheta + \mu)$ , где  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — скорость упорядоченного движения,  $\vartheta$  — относительная добавка к температуре:  $T(\mathbf{r}, t) = T(1 + \vartheta(\mathbf{r}, t))$ ,  $\mu$  — неравновесный химический потенциал.

Рассмотрим сначала случай, когда число квазичастиц при нормальных столкновениях не сохраняется и, следовательно,  $\mu = 0$ . Как мы увидим, в действительности это равенство может выполняться и при сохранении числа частиц.

В первом приближении

$$\frac{\partial}{\partial t} N^{(0)} + (\mathbf{v} \nabla) N^{(0)} = \hat{I}^N N^{(1)}, \quad (4,1)$$

или

$$-\frac{\partial N_0}{\partial \varepsilon} [\dot{\mathbf{u}} \mathbf{p} + \varepsilon \dot{\vartheta} - (\mathbf{v} \nabla) (\mathbf{u} \mathbf{p}) + \varepsilon (\mathbf{v} \nabla) \vartheta] = \hat{I}^N N^{(1)}.$$

Условия разрешимости этого уравнения относительно функции  $N^{(1)}$  (которые являются следствием сохранения энергии и импульса при нормальных столкновениях) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2 \rangle \dot{\vartheta} + \frac{1}{3} \langle \varepsilon (\mathbf{p} \mathbf{v}) \rangle \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \alpha_{ik} \dot{u}_k + \langle \varepsilon (\mathbf{p} \mathbf{v}) \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} \vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (4,2)$$

Здесь введены обозначения

$$\langle f(\mathbf{p}) \rangle = - \int f(\mathbf{p}) \frac{\partial N_0}{\partial \varepsilon} d\mathbf{p}, \quad \alpha_{ik} = 3 \langle p_i p_k \rangle$$

и использовано то обстоятельство, что при любом законе дисперсии тензор  $\langle \varepsilon p_i v_k \rangle$  диагонален и поэтому, например,  $\langle \varepsilon (\mathbf{v} \nabla) (\mathbf{u} \mathbf{p}) \rangle = \frac{1}{3} \langle \varepsilon (\mathbf{p} \mathbf{v}) \rangle \operatorname{div} \mathbf{u}$ .

Исключив  $\mathbf{u}$ , получим

$$\ddot{\vartheta} = \frac{1}{3} \frac{\langle \varepsilon (\mathbf{p} \mathbf{v}) \rangle^2}{\langle \varepsilon^2 \rangle} (\hat{\alpha}^{-1})_{ik} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Таким образом, дисперсионное уравнение имеет вид ( $\vartheta \sim e^{i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})}$ )

$$\omega^2 = \frac{1}{3} \frac{\langle \varepsilon (\mathbf{p} \mathbf{v}) \rangle^2}{\langle \varepsilon^2 \rangle} (\hat{\alpha}^{-1})_{ik} k_i k_k.$$

Отсюда скорость второго звука

$$V = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \langle \varepsilon (\mathbf{p} \mathbf{v}) \rangle \sqrt[3]{\frac{(\hat{\alpha}^{-1})_{xx}}{\langle \varepsilon^2 \rangle}}, \quad (4,3)$$

где  $x$  — направление распространения волны.

В изотропном случае

$$V = \frac{\langle \varepsilon p v \rangle}{\sqrt[3]{3 \langle \varepsilon^2 \rangle \langle p^2 \rangle}}. \quad (4,4)$$

При  $\varepsilon = s p$  отсюда следует известное соотношение  $V = s / \sqrt[3]{3}$ .

Аналогичным образом может быть рассмотрен случай, когда число квазичастиц при столкновениях сохраняется. Исходя из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle \dot{\vartheta} + \langle 1 \rangle \dot{\mu} + \frac{1}{3} \langle \mathbf{p} \mathbf{v} \rangle \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \langle \varepsilon^2 \rangle \dot{\vartheta} + \langle \varepsilon \rangle \dot{\mu} + \frac{1}{3} \langle \varepsilon (\mathbf{p} \mathbf{v}) \rangle \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \alpha_{ik} \dot{u}_k + \langle \varepsilon (\mathbf{p} \mathbf{v}) \rangle \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \langle \mathbf{p} \mathbf{v} \rangle \frac{\partial \mu}{\partial x_i} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4,5)$$

найдем в результате простых вычислений

$$V^2 = \frac{1}{3} (\hat{\alpha}^{-1})_{xx} \frac{2 \langle \varepsilon (\mathbf{p} \mathbf{v}) \rangle \langle \mathbf{p} \mathbf{v} \rangle \langle \varepsilon \rangle - \langle \varepsilon (\mathbf{p} \mathbf{v}) \rangle^2 \langle 1 \rangle - \langle \mathbf{p} \mathbf{v} \rangle^2 \langle \varepsilon^2 \rangle}{\langle \varepsilon \rangle^2 - \langle \varepsilon^2 \rangle \langle 1 \rangle}. \quad (4,6)$$

Итак, скорость второго звука зависит от того, сохраняется число квазичастиц при столкновениях или нет.

Следует, однако, иметь в виду, что при низких температурах закон дисперсии квазичастиц можно, как правило, предполагать степенным:  $\epsilon(\mathbf{p}) = p^n f(p/p)$ . При этом  $\mathbf{p}\mathbf{v} = n\epsilon(\mathbf{p})$  и

$$\langle \epsilon^2 \rangle \langle \mathbf{p}\mathbf{v} \rangle - \langle \epsilon \rangle \langle \epsilon(\mathbf{p}) \rangle = 0. \quad (4,7)$$

Воспользовавшись последним соотношением, легко показать, что выражения (4,3) и (4,6) для скорости второго звука совпадают и, как следует из первых двух уравнений (4,5),  $\mu = 0$ .

Для пояснения этих результатов отметим, что в силу (4,7) уравнение непрерывности для числа частиц

$$\langle \epsilon \rangle \dot{\vartheta} + \frac{1}{3} \langle \mathbf{p}\mathbf{v} \rangle \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

является следствием сохранения энергии (первое из уравнений (4,2)). Естественно, при этом совершенно безразлично, сохраняется число частиц при столкновениях или нет.

Проведенное рассмотрение без труда обобщается на случай системы, состоящей из нескольких различных типов взаимодействующих квазичастиц. По-прежнему дело сводится к системе уравнений вида (4,2) или (4,5), с тем отличием, что теперь коэффициенты будут представлять собой суммы по различным сортам квазичастиц (поскольку энергия и импульс сохраняются только для всей системы в целом). Поэтому

$$V = \frac{1}{V^3} \sum_{\sigma} \langle \epsilon_{\sigma}(\mathbf{p}_{\sigma} \mathbf{v}_{\sigma}) \rangle \sqrt{\frac{\left( \sum_{\sigma} \hat{\alpha}_{\sigma} \right)^{-1}}{\sum_{\sigma} \langle \epsilon_{\sigma}^2 \rangle}}.$$

В случае обычного диэлектрика  $\sigma$  пробегает три значения, соответствующие одной продольной и двум поперечным ветвям фононного спектра.

Затухание второго звука в диэлектриках связано с двумя обстоятельствами: 1) конечностью времени и длины свободного пробега квазичастиц относительно нормальных столкновений; 2) наличием столкновений с несохранением квазимпульса (процессы переброса, рассеяние дефектами решетки и т. д.). Поскольку скорость второго звука  $V$  и средняя тепловая скорость квазичастиц по порядку величины совпадают, вклад первого механизма будет пропорционален малому параметру  $l^N/\lambda$  ( $\lambda = 2\pi/k$  — длина волны звука), а вклад второго механизма — малому параметру  $\lambda/l^V$ . Иначе говоря (см. 15а, 15б),

$$\frac{\operatorname{Im} k}{k} \sim - \frac{l^N}{\lambda} - \frac{\lambda}{l^V}.$$

Точный результат принципиально может быть получен в рамках развитого выше подхода. Для этого при выводе гидродинамических уравнений следует оборвать цепочку зацепляющихся уравнений не на втором, а на третьем этапе и искать величины  $\mathbf{u}$  и  $\vartheta$  в виде разложения в ряды по малым параметрам  $l^N/\lambda$  и  $\lambda/l^V$  (уравнения (4,2) и (4,5) соответствуют нулевому приближению по этим параметрам). Однако дело усложняется тем, что функция  $N^{(1)}$  удовлетворяет интегральному уравнению (4,1), которое в общем виде не удается решить (ср. § 2).

3. Второй звук в ферродиэлектриках имеет некоторые любопытные особенности 16. Колебания плотности спиновых волн сопровождаются колебаниями магнитного момента и, следовательно, приводят к возникновению переменного магнитного поля. Оказывается, это поле относительно

мало по абсолютной величине (так что второй звук остается преимущественно температурной волной), но в то же время вполне доступно для экспериментального обнаружения. Скорость распространения второго звука определяется обычной формулой (4,3), но теперь, конечно, зависит от температуры:

$$V \approx \frac{a}{\hbar} \sqrt{T \Theta_C}.$$

На затухание второго звука в ферродиэлектриках, кроме перечисленных выше в п. 2 механизмов, могут существенным образом повлиять релятивистские взаимодействия, не сохраняющие число спиновых волн. Как уже отмечалось, нормальные столкновения между спиновыми волнами при не слишком низких температурах связаны с обменным взаимодействием, сохраняющим число спиновых волн. В то же время закон дисперсии спиновой волны не является строго степенным (благодаря энергии анизотропии или при наличии внешнего магнитного поля). В таких условиях нормальные столкновения, связанные с релятивистскими взаимодействиями, приводят к релаксации химического потенциала  $\mu$  (подобно тому как столкновения, не сохраняющие квазимпульс, приводят к релаксации скорости упорядоченного движения  $u$ ).

## II. КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ

### § 5. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛОВ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

В этом параграфе обсуждаются некоторые основные механизмы рассеяния электронов и их влияние на низкотемпературную электропроводность металлов. Изложение ни в коей мере не претендует на полноту; цель состоит в выяснении условий, в которых могут оказаться существенными нормальные столкновения между электронами и фононами.

Хорошо известно, что при достаточно низкой температуре электрическое сопротивление, как правило, постоянно и определяется рассеянием электронов на примесных атомах и других структурных дефектах решетки, а также на границах образца. Температурная зависимость возникает благодаря различным взаимодействиям в электрон-фононной системе. При этом обычно пользуются формулой

$$\rho(T) = \rho_0 + \alpha T^2 + \beta T^5, \quad (5,1)$$

где  $\rho_0$  — остаточное сопротивление, второй член связан с межэлектронными и третий — с электрон-фононными столкновениями. В дальнейшем речь будет идти о достаточно чистых и больших монокристаллических образцах, у которых остаточное сопротивление достигается только при гелиевых температурах.

**1. Межэлектронные столкновения.** Расчет, основанный на борновском приближении, показывает, что в гелиевой области температурная зависимость сопротивления должна определяться вторым членом в формуле (5,1), т. е.  $\rho(T) = \rho_0 \sim T^2$ <sup>18</sup>. С принципиальной точки зрения существование подобной зависимости, по-видимому, не вызывает сомнений. Однако, если исключить переходные металлы, эта зависимость на опыте не наблюдается. Вопрос сводится к оценке числового коэффициента при  $T^2$ .

Отметим прежде всего, что борновское приближение дает несколько завышенное значение для сечения рассеяния электрона на электроне<sup>19</sup>. Следует, кроме того, учитывать, что непосредственный вклад в сопротивление дают только столкновения, сопровождаемые перебросом ( $U$ -процессы).

Такие столкновения, очевидно, возможны только между электронами, расположеными в определенных областях, которые отсекаются от поверхности Ферми плоскостями, перпендикулярными вектору переброса и делящими пополам расстояние между центром зоны Бриллюэна и ее границами. Вероятно, более существенно то обстоятельство, что матричный элемент  $U$ -процесса содержит интерференционный множитель, который, по-видимому, мал по сравнению с единицей (см. <sup>20</sup>, стр. 165, 371). Заметим, впрочем, что и  $N$ -процессы (т. е. столкновения без переброса) могут привести к добавке, пропорциональной  $T^2$ , при любой несферической поверхности Ферми (см. ниже § 7).

Из сказанного ясно, что теоретические соображения в настоящее время не позволяют достаточно надежно оценить порядок величины коэффициента  $\alpha$  в формуле (5,1) и указать, при какой точности эксперимента квадратичная зависимость сопротивления должна наблюдаться в том или ином металле. В связи с этим представляется интересным произвести сравнение с экспериментальными данными по инфракрасному поглощению в металлах. Согласно <sup>21</sup>, эффективная частота межэлектронных столкновений может быть записана в следующем виде, пригодном и в статическом, и в высокочастотном случаях:

$$\tau_{ee}^{-1} = \tau_0^{-1} \left[ \left( \frac{T}{\varepsilon_F} \right)^2 + \left( \frac{\hbar\omega}{2\pi\varepsilon_F} \right)^2 \right] \quad (5,2)$$

( $\omega$  — частота электромагнитного поля,  $\varepsilon_F$  — энергия Ферми). Поэтому межэлектронные столкновения в близкой инфракрасной области ( $\lambda = 2\pi c/\omega \approx 1 - 20\mu$ ,  $\hbar\omega \approx 10^3 - 10^4 \text{ }^{\circ}\text{K}$ ) в  $10^3 - 10^5$  раз более вероятны, чем в статическом случае при гелиевых температурах.

Для не слишком загрязненного металла коэффициент инфракрасного поглощения можно представить в виде

$$\Gamma = \Gamma_0 + \frac{2}{\omega_0 \tau_{ee}}, \quad (5,3)$$

где не зависящая от  $\omega$  и  $T$  величина  $\Gamma_0$  связана со столкновениями электронов с фононами и с границей образца,  $\omega_0 = (4\pi ne^2/m)^{1/2}$  — плазменная частота.

В последнее время выяснилось, что квадратичная зависимость инфракрасного поглощения от частоты имеет место у многих металлов. При этом наибольшее доверие вызывают результаты, полученные для благородных металлов <sup>22-24</sup>, у которых граница внутреннего фотозаффекта лежит в оптической области спектра и поэтому интересующая нас зависимость надежно выделяется. Сопоставление этих данных с формулами (5,2), (5,3) и (5,1) показывает, что член, пропорциональный  $T^2$ , при гелиевых температурах может составлять только несколько процентов остаточного сопротивления даже в самых чистых образцах, где длина свободного пробега на примесях  $l_{ei} \approx 0,1 \text{ см}$ .

2. Взаимодействие с фононами. Закон  $T^5$  для сопротивления, как известно, был получен Блохом в предположении, что фононы находятся в равновесии. Иначе говоря, допускается, что существует некоторый механизм диссилиации импульса, непрерывно поступающего в фононную систему от электронов. Как указал Пайерлс, таким механизмом являются фонон-фононные столкновения с перебросом. Однако, как мы видели, с понижением температуры вероятность этих  $U$ -процессов спадает по экспоненциальному закону  $\exp(-\gamma\Theta/T)$ . Величину численного коэффициента  $\gamma$  трудно оценить, так как она определяется поведением акустических ветвей фононного спектра при немалых значениях квазимпульса ( $2\gamma\Theta$  равняется наименьшему значению суммы энергий

всех участвующих в столкновении фононов с учетом соответствующих законов сохранения энергии и импульса, см. § 3). Во всяком случае очевидно, что для каждого металла существует некоторая определенная температура, начиная с которой  $U$ -процессы уже не могут обеспечить равновесность фононов, и соответствующий вклад в сопротивление должен спадать по экспоненциальному закону. Сравнение с данными по теплопроводности диэлектриков показывает, что такая ситуация должна, казалось бы, иметь место в достаточно широкой области низких температур, скажем при  $T/\Theta \ll 1/10$ .

Принципиально существует еще одна возможность, на которую обратил внимание также Пайерлс. Это — электрон-фононные столкновения с перебросом. Из закона сохранения импульса  $\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{q} = \hbar\mathbf{b}$  следует, что при низких температурах, когда импульсы фононов  $\mathbf{q}$  малы по сравнению с импульсами электронов на поверхности Ферми (по порядку величины  $q/p \approx T/\Theta$ ), разность  $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$  приблизительно равняется  $\hbar\mathbf{b}$ . Это значит, что начальное и конечное состояния электрона  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  должны быть близки к эквивалентным точкам, расположенным на противоположных границах зоны Бриллюэна. Поэтому процессы переброса с заметной вероятностью возможны только в случаях, когда поверхность Ферми пересекает границу зоны или очень близко к ней подходит. Следует, однако, помнить, что элементарная ячейка в  $\mathbf{p}$ -пространстве может быть выбрана произвольным образом и поэтому деление электрон-фононных столкновений на  $N$ - и  $U$ -процессы в значительной мере условно. В частности, всегда можно добиться того, чтобы данный  $N$ -процесс следовало рассматривать как  $U$ -процесс, и наоборот. Поэтому для выяснения физической ситуации в данном случае удобно не ограничиваться одной ячейкой, а рассматривать все  $\mathbf{p}$ -пространство (так называемый «метод повторяющихся зон»). При таком способе рассмотрения все столкновения являются «нормальными» (так как импульс сохраняется) и, главное, выясняется связь электрического сопротивления с топологией поверхности Ферми.

Допустим, что электрическое поле  $\mathbf{E}$  было отлично от нуля только в течение короткого интервала времени  $\Delta t$ , малого по сравнению с временем релаксации. В результате действия поля распределение электронов в  $\mathbf{p}$ -пространстве, очевидно, сместится как целое на величину  $\Delta\mathbf{p} = e\mathbf{E}\Delta t$ . Можно утверждать, что сопротивление отлично от нуля, если под действием столкновений с фононами электронная система вернется к состоянию равновесия.

В случае замкнутой поверхности Ферми неравновесные электроны будут поглощать фононы преимущественно одного направления. В результате возникнет избыточный поток фононов, направленный в противоположную сторону. Стационарное состояние, в котором скорости дрейфа электронов и фононов совпадают, будет, очевидно, неравновесным. Все сказанное относится и к дырочной поверхности, только направление дрейфа фононов будет обратным.

Равновесие возможно в случае, когда имеются и электронные, и дырочные поверхности, причем число электронов обязательно должно равняться числу дырок. Последнее условие означает, что суммарный импульс, полученный системой от внешнего поля, равен нулю. Роль фононов сводится к перераспределению импульса между электронами и дырками.

Равновесие, по-видимому, может установиться в случае открытой поверхности Ферми, так как при этом смещение электронного распределения может быть восстановлено с помощью фононов обоих направлений (как легко понять, переходы электронов, соответствующие в обычной терминологии  $N$ - и  $U$ -процессам, порождают потоки фононов противоположных направлений).

**3. Постановка задачи.** Изложенные выше соображения показывают, что в типичных металлах межэлектронные столкновения несущественны. С другой стороны, мы видели, что при низких температурах взаимодействие электронов с фононами далеко не всегда может привести к заметному электрическому сопротивлению. Так, например, обстоит дело для замкнутых поверхностей Ферми (если число электронов не равняется числу дырок) или для поверхностей, открытых не во всех направлениях. Кроме того, в ряде случаев поверхности Ферми хотя и являются открытыми, но содержат относительно узкие перемычки.

Из сказанного ясно, что во многих металлах при достаточно низких температурах, наряду с рассеянием электронов на различного рода статических объектах (локальные дефекты, границы образца и т. д.), с заметной вероятностью происходят только нормальные столкновения между электронами и фононами. Исследование электро проводности металлов при такой ситуации является предметом дальнейшего рассмотрения.

Обозначим через  $l_{ep}$  и  $l_{pe}$  длины свободного пробега для рассеяния электрона на фонах и фона на на электронах соответственно. Для типичного металла, в котором число электронов проводимости порядка числа атомов,

$$l_{ep}(T) \approx l_{ep}(\Theta) \left( \frac{\Theta}{T} \right)^5, \quad l_{pe}(T) \approx l_{ep}(\Theta) \frac{\Theta}{T}, \quad (5,4)$$

где  $l_{ep}(\Theta) \approx a\epsilon_F/\Theta$  (см., например, <sup>4</sup>). Таким образом, хотя обе длины свободного пробега связаны с одними и теми же процессами столкновений, при низких температурах всегда  $l_{ep} \gg l_{pe}$ . Поэтому фонон, излученный электроном, на очень коротком пути и соответственно за очень короткое время будет поглощен некоторым другим электроном. Фактически, таким образом, мы имеем дело с эффективными межэлектронными столкновениями, которые характеризуются длиной свободного пробега  $l^N \approx l_{ep}(T)$ .

Так как при рассматриваемых столкновениях квазимпульс сохраняется, сами по себе они не приводят к электрическому сопротивлению. Оказывается, однако, что эти столкновения могут весьма существенно повлиять на процесс передачи импульса от электронного газа к статическим объектам и таким образом изменить сопротивление. Механизм этого влияния определяется природой остаточного сопротивления. Точнее, все зависит от того, как связаны между собой длина  $l^N$  и характерное расстояние между статическими объектами  $d$  при тех температурах, когда сравниваются вероятности «межэлектронного» столкновения и столкновения со статическим объектом.

Если причиной остаточного сопротивления являются макроскопические объекты (границы образца, дислокации и т. д.), то может выполняться неравенство  $l^N \ll d$ . При этом возникает своеобразный механизм электропроводности, напоминающий течение вязкой жидкости (ср. § 2). Сопротивление необычным образом зависит от  $T$  и  $d$ , в частности должен иметь место минимум в температурной зависимости  $\rho(T)$  (см. § 6).

Если же остаточное сопротивление связано с рассеянием электронов на микроскопических дефектах решетки (типа примесных атомов), то в интересующей нас области температур всегда  $l^N \gg d$ . При этом влияние  $N$ -процессов проявляется только в случае анизотропного закона дисперсии. Сопротивление сначала увеличивается с ростом температуры, затем достигает насыщения, которое вновь сменяется ростом (см. § 7).

В последнем параграфе рассмотрена высокочастотная электропроводность металлов. Показано, что учет нормальных столкновений может привести к существенному изменению характера скин-эффекта; в частно-

сти, возникает достаточно широкая область частот, в которой поверхностный импеданс металла необычным образом зависит от частоты электромагнитного поля и от температуры (§ 8).

В первых двух параграфах мы следуем в основном работе<sup>25</sup>, а в последнем — работе<sup>26</sup>.

### § 6. Электропроводность тонких образцов

В этом параграфе для определенности будет рассмотрен случай, когда остаточное сопротивление возникает благодаря рассеянию электронов на границах образца, хотя, как станет ясно из дальнейшего, полученные результаты качественно справедливы для любых макроскопических искажений. Как уже отмечалось, в интересующих нас условиях взаимодействие между электронами и фононами практически сводится к межэлектронным столкновениям, характеризуемым длиной свободного пробега  $l^N \approx l_{ep}(T)$ .

Для выяснения физической причины влияния нормальных столкновений на электропроводность рассмотрим предельные случаи  $l^N \gg d$  и  $l^N \ll d$ . В первом случае электрон пройдет между двумя столкновениями со стенкой путь порядка  $d$ , практически ни разу не столкнувшись в объеме. Соответственно сопротивление  $\rho \sim d^{-1}$  и практически не зависит от температуры. Если же  $l^N \ll d$ , то электрон, находящийся в толще образца, прежде чем он дойдет до стенки, напротив, испытает множество нормальных столкновений. Ясно, что благодаря этому путь, пройденный электроном между двумя столкновениями с границами (и соответствующее время), существенно увеличивается. Все это время электрон ускоряется внешним полем. То обстоятельство, что в результате столкновений происходит обмен импульсом с другими электронами, очевидно, не меняет дела. Пользуясь известными формулами броуновского движения, легко показать, что длина траектории между двумя столкновениями с границей — порядка  $d^2/l^N$ . Поскольку эта величина имеет смысл эффективной длины свободного пробега, то естественно ожидать, что  $\rho \sim l^N/d^2$ . Таким образом, в отличие от кнудсеновского случая, сопротивление содержит квадрат толщины образца и, главное, зависит от температуры необычным образом: вместе с длиной  $l^N \approx l_{ep}(T)$  падает с повышением температуры.

Исходя из этих наглядных соображений, нетрудно теперь представить себе качественно поведение сопротивления (рис. 4). При самых низких температурах, пока  $l^N \gg d$ , сопротивление, грубо говоря, не зависит от температуры и пропорционально  $d^{-1}$ . Далее, начиная с температуры, при которой  $l^N \approx d$ , сопротивление спадает с ростом  $T$  по закону  $\rho \sim T^{-5}d^{-2}$  (при  $l^N \ll d$ ). Этот спад будет продолжаться до тех пор, пока величина  $d^2/l^N$  не сравняется с одной из длин свободного пробега, характеризующих объемные столкновения с потерей импульса. Если это — примесная длина, то сопротивление далее остается постоянным и равным сопротивлению образца неограниченных размеров (с той же концентрацией примесных атомов). Затем должен начаться рост сопротивления с температурой, связанный, например, с фонон-фононными  $U$ -процессами.

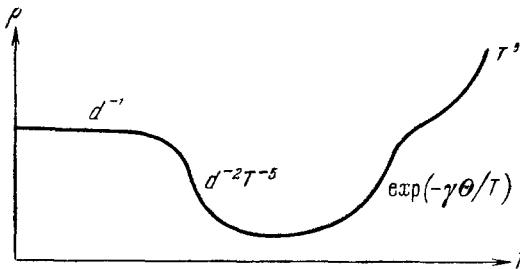


Рис. 4.

Соответствующая длина свободного пробега  $l^U$  меняется в основном по закону типа  $\exp(-\gamma\Theta/T)$  и будет оценена ниже.

Сформулируем условия, в которых должен проявляться диффузионный механизм электропроводности:

а) Поперечный размер образца должен быть мал по сравнению с электронно-примесной длиной свободного пробега:  $d \ll l_{ei}$ .

б) Необходимо, чтобы при  $l_{ep}(T) \approx d$  фонон-фононные  $U$ -процессы были еще не существенны. Точнее, в некоторой области температур должны выполняться неравенства

$$l_{ep}(T) \ll d \ll l^U(T). \quad (6,1)$$

в) Электрон-фононные  $U$ -процессы несущественны (см. § 5).

Для грубой ориентации заметим, что при  $l_{ei} \approx 0,1$  см и  $d \approx 10^{-2}$ — $10^{-3}$  см условия (6,1) должны выполняться в интервале между гелиевой и водородной температурами, хотя в действительности ситуация существенно зависит от свойств металла.

Для количественного описания рассмотренного механизма естественно воспользоваться гидродинамическим подходом (ср. § 2). Этот метод в данном случае особенно удобен, так как позволяет наряду с влиянием границ учесть объемные столкновения с потерей квазимпульса (при условии, что они значительно менее вероятны, чем  $N$ -процессы).

Гидродинамическое уравнение для электрон-фононного газа можно получить обычным способом из соответствующих кинетических уравнений. Запишем эти уравнения в виде

$$\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = \hat{I}_{ep}\{f, N\} + \hat{I}_{ei}f, \quad s \frac{\partial N}{\partial \mathbf{r}} = \hat{I}_{pe}\{f, N\} + \hat{I}_{pp}^N N + \hat{I}_{pp}^U N. \quad (6,2)$$

Здесь  $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  и  $N(\mathbf{q}, \mathbf{r})$  — функции распределения электронов и фононов,  $\mathbf{v} = \partial \epsilon / \partial \mathbf{p}$ ,  $s = \partial h v_q / \partial \mathbf{q}$ ,

$$f_0(\epsilon) = \left[ \exp\left(\frac{\epsilon - \epsilon_F}{T}\right) + 1 \right]^{-1},$$

$\hat{I}_{ep}$  — оператор столкновений электронов с фононами,  $\hat{I}_{ei}$  — электронов с примесями и т. д. Рассеяние фононов на примесях не учитывается, так как при низких температурах вероятность этого процесса, грубо говоря, в  $(\Theta/T)^4$  раз меньше, чем вероятность рассеяния электрона на примесях \*). Кроме того, как станет ясно из дальнейшего, вклад фонон-примесного рассеяния в гидродинамическое уравнение занижается еще дополнительным множителем порядка  $v_F/s(T/\Theta)^4$ .

Для приближенного решения уравнений (6,2) естественно воспользоваться тем, что наибольшую вероятность имеют  $N$ -процессы. Фактически решение будет представлено в виде ряда по малым параметрам  $l_{ei}/d$ ,  $l_{ep}/l_{ei}$  и  $l_{ei}/l^U$ . Метод последовательных приближений приводит к следующей цепочке уравнений (ср. § 2):

$$\hat{I}_{ep}\{f^{(0)}, N^{(0)}\} = 0, \quad \hat{I}_{pe}\{f^{(0)}, N^{(0)}\} + \hat{I}_{pp}^N N^{(0)} = 0,$$

$$\mathbf{v} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} = \hat{I}_{ep}\{f^{(1)}, N^{(1)}\}, \quad s \frac{\partial N^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} = \hat{I}_{pe}\{f^{(1)}, N^{(1)}\} + \hat{I}_{pp}^N N^{(1)},$$

$$\mathbf{v} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = \hat{I}_{ep}\{f^{(2)}, N^{(2)}\} + \hat{I}_{ei}f^{(0)}, \quad (6,3)$$

$$s \frac{\partial N^{(1)}}{\partial \mathbf{r}} = \hat{I}_{pe}\{f^{(2)}, N^{(2)}\} + \hat{I}_{pp}^N N^{(2)} + \hat{I}_{pp}^U N^{(0)}, \quad (6,4)$$

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \dots, \quad N = N^{(0)} + N^{(1)} + N^{(2)} + \dots$$

\*) Иначе может обстоять дело, если металл содержит заметное количество изотопов. Однако вероятность рассеяния фононов в этом случае содержит дополнительный малый множитель  $(\Delta M/M)^2$  ( $\Delta M$  — разность масс изотопа и основного атома).

Из первой пары уравнений следует, что

$$f^{(0)} = f_0(\epsilon - \mathbf{p}\mathbf{u}), \quad N^{(0)} = N_0(hv_{\mathbf{q}} - \mathbf{q}\mathbf{u}),$$

где  $N_0$  — бозевская функция распределения, а  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  имеет смысл скорости дрейфа равновесной электрон-фононной системы как целого.

При решении второй пары уравнений, которая теперь приобретает вид

$$-v_i p_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = \hat{I}_{ep} \{f^{(1)}, N^{(1)}\}, \quad -s_i q_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial N_0}{\partial hv_{\mathbf{q}}} = \hat{I}_{pe} \{f^{(1)}, N^{(1)}\} + \hat{I}_{pp}^N N^{(1)}, \quad (6,5)$$

необходимо воспользоваться явным видом интегралов столкновений.

Запишем гамильтониан электрон-фононного взаимодействия в форме

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^+ + \text{к. с.},$$

где  $a_{\mathbf{p}}$  и  $b_{\mathbf{q}}$  — фермиевские и бозевские операторы. Для дальнейшего важно, что при малых  $|\mathbf{q}|$  имеем  $|A(\mathbf{p}, \mathbf{q})|^2 \sim |\mathbf{q}|$ . Как нетрудно показать, в линейном по  $f^{(1)}$  и  $N^{(1)}$  приближении

$$\begin{aligned} \hat{I}_{ep} \{f^{(1)}, N^{(1)}\} &= \int \mathcal{L}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}} (\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varphi_{\mathbf{p}} - \psi_{\mathbf{q}}) d\mathbf{q} + \int \mathcal{L}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}-\mathbf{q}, \mathbf{q}} (\varphi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} - \varphi_{\mathbf{p}} + \psi_{\mathbf{q}}) d\mathbf{q}, \\ \hat{I}_{pe} \{f^{(1)}, N^{(1)}\} &= 2 \int \mathcal{L}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}-\mathbf{q}, \mathbf{q}} (\varphi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} - \varphi_{\mathbf{p}} + \psi_{\mathbf{q}}) d\mathbf{p}, \end{aligned} \quad (6,6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}} &= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{h^3} |A(\mathbf{p}, \mathbf{q})|^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{p}} - hv_{\mathbf{q}}) f_0(\epsilon_{\mathbf{p}}) N_0(hv_{\mathbf{q}}) [1 - f_0(\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})], \\ \mathcal{L}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}-\mathbf{q}, \mathbf{q}} &= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{h^3} |A(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{q})|^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{p}} + hv_{\mathbf{q}}) \times \\ &\quad \times f_0(\epsilon_{\mathbf{p}}) [1 - f_0(\epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{q}})] [1 + N_0(hv_{\mathbf{q}})], \\ f^{(1)} &= -T \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \varphi_{\mathbf{p}}, \quad N^{(1)} = -T \frac{\partial N_0}{\partial hv_{\mathbf{q}}} \psi_{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Интеграл столкновений фононов с фононами не выписан, так как членом  $\hat{I}_{pp}^N N^{(1)}$  можно пренебречь по сравнению с  $\hat{I}_{pe} \{f^{(1)}, N^{(1)}\}$ . Как показывает анализ, отношение этих членов порядка  $(T/\Theta)^4$  — результат, который можно было бы заранее предвидеть из соотношения длин свободного пробега (см. формулы (2,4) и (5,4)).

Теперь второе из уравнений (6,5) может быть разрешено относительно  $\psi_{\mathbf{q}}$  (см. (6,6)) и результат подставлен в первое уравнение. Полученное уравнение для функции  $\varphi_{\mathbf{p}}$  может быть в принципе решено при произвольных законах дисперсии электронов и фононов. Мы, однако, ограничимся изотропным случаем, так как результат общего рассмотрения все равно содержит неопределенные численные коэффициенты порядка единицы. При этом угловая зависимость, очевидно, отделяется и решение удобно искать в виде

$$f^{(1)} = -\tau_{ep}(\Theta) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} v_i p_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \left( \frac{\Theta}{T} \right)^3 \chi \left( \frac{\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_F}{T} \right).$$

После довольно громоздких преобразований уравнение для функции  $\chi$  может быть записано в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_{xx'} \chi(x') dx' + \left( \frac{T}{\Theta} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{xx'} \chi(x') dx' = e^x f_0^2(x), \quad (6,7)$$

где

$$\begin{aligned} K_{xx'} &= \delta(x - x') \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx''} dx'' - R_{xx'} + S_{xx'}^{(1)}, \\ Q_{xx'} &= (x - x')^2 R_{xx'} + S_{xx'}^{(3)}, \\ R_{xx'} &= (x - x')^2 f_0(x) f_0(x') |e^{-x} - e^{-x'}|^{-1}, \\ S_{xx'}^{(n)} &= f_0(x) f_0(x') \exp(x + x') \int_{-\infty}^{+\infty} |z|^n f_0(x+z) [e^z f_0(x'+z) - f_0(x'-z)] dz, \\ f_0(x) &= (1 + e^x)^{-1}, \quad x = (\varepsilon_p - \varepsilon_F)/T. \end{aligned}$$

Несущественные численные коэффициенты порядка единицы опущены. Для дальнейшего важно, что все ядра  $K$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S^{(n)}$  — симметричны и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_{xx'} dx' = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx'}^{(n)} dx' = 0. \quad (6,8)$$

Переходя к приближенному решению уравнения (6,7), заметим, что если в нем отбросить член с  $(T/\Theta)^2$ , полученное уравнение неразрешимо. Действительно, благодаря симметрии ядра  $K_{xx'}$  и первому из равенств (6,8) соответствующее однородное транспонированное уравнение имеет решение  $\chi = \text{const}$ , которое не ортогонально к правой части  $e^x f_0^2(x)$ . Поэтому метод последовательных приближений нужно развивать так:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{xx'} \chi^{(0)}(x') dx' &= 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} K_{xx'} \chi^{(1)}(x') dx' &= e^x f_0^2(x) - \left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{xx'} \chi^{(0)}(x') dx', \dots \end{aligned}$$

Из первого уравнения следует, что  $\chi^{(0)} = \text{const}$ . Условие разрешимости второго уравнения относительно  $\chi^{(1)}$  дает

$$\chi^{(0)} = \alpha \left(\frac{\Theta}{T}\right)^2,$$

где

$$\alpha^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{xx'} dx dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x')^2 R_{xx'} dx dx' \approx 240\zeta(5) \approx 250.$$

Наконец, умножим уравнение (6,3) на  $p$ , уравнение (6,4) на  $q$ , проинтегрируем и сложим. При этом члены, содержащие  $f^{(2)}$  и  $N^{(2)}$ , взаимно сократятся и в результате возникнет искомое гидродинамическое уравнение для  $u$  (r). С точностью до членов высшего порядка по  $T/\Theta$  найдем \*)

$$\frac{e}{m} \mathbf{E} = -v \Delta u + \frac{u}{\tau v}, \quad (6,9)$$

где

$$\begin{aligned} v &\approx \frac{1}{15} v_F l_{ep}(T), \quad \frac{1}{\tau v} = \frac{1}{\tau U} + \frac{1}{\tau_{ei}}, \\ \tau^U &\approx \frac{s}{v_F} \left(\frac{\Theta}{T}\right)^4 \tau_{pp}^U, \quad \tau_{pp}^U \approx \frac{1}{s} l_{pp}(\Theta) \left(\frac{T}{\Theta}\right)^{5/2} e^{\gamma \Theta/T} \end{aligned}$$

(см. формулу (2,5)).

\*) Это уравнение справедливо при условии  $\operatorname{div} u = 0$ , которое следует из (6,5) и эквивалентно требованию электронейтральности.

Величина  $l_{ep}(T)$  в точности совпадает с длиной свободного пробега, фигурирующей в блоховской теории электропроводности. Как и следовало ожидать, исходя из наглядных соображений, кинематическая вязкость  $\nu$  в первом приближении определяется только электрон-фононной длиной  $l_{ep}$ . Нетрудно показать, что добавка, связанная с конечностью  $l_{pe}$ , порядка  $\nu(T/\Theta)^8$ . Влияние фонон-фононных  $U$ -процессов занижено множителем  $v_F/s(T/\Theta)^4$ , что, очевидно, относится ко всем столкновениям, происходящим в фононной системе.

Решение уравнения (6,9) должно удовлетворять граничному условию  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0$  на границах образца, что соответствует диффузному рассеянию электронов. Как легко убедиться, плотность электрического тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -ne\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , где  $n = 8\pi/3(p_F/\hbar)^3$  — плотность электронов. При вычислении сопротивления это выражение следует усреднить по поперечному сечению образца. Результат удобно представить в обычном виде:  $\rho^{-1} = ne^2 p_F^{-1} l^{eff}$ , где  $l^{eff}$  — эффективная длина свободного пробега. Ясно, что функция  $l^{eff}(T, d)$  мало чувствительна к форме образца (см. § 2) и имеет вид, предсказанный ранее из наглядных соображений. При этом под  $d$  следует понимать характерный поперечный размер образца или расстояние между макроскопическими искажениями.

## § 7. Электропроводность массивных образцов

Остаточное сопротивление достаточно массивных монокристаллических образцов, как правило, связано с рассеянием электронов на микроскопических дефектах кристаллической решетки типа примесных атомов. Как уже отмечалось, в этом случае гидродинамическая ситуация невозможна, так как длина  $l_{ep}$  всегда существенно больше среднего расстояния между атомами  $\Delta$ . Действительно, даже в самых чистых металлах, где электронно-примесная длина  $l_{ci} \sim 1 \text{ см}$ , величина  $\Delta \leq 10^{-5} \text{ см}$  ( $l_{ei} \approx \approx a\eta^{-1}$ ,  $\Delta \approx a\eta^{-1/3}$ ,  $\eta$  — концентрация примесных атомов). Поэтому наличие нормальных столкновений никак не влияет на вероятность встречи электрона с атомом примеси, даже в том случае, если первые столкновения происходят значительно чаще, чем вторые. Но отсюда, как мы увидим, отнюдь не следует, что нормальные столкновения не могут повлиять на сопротивление, хотя результат этого влияния не удается интерпретировать столь же наглядно, как в случае тонких образцов.

Переходя к вычислениям, заметим, что в рассматриваемом случае закон дисперсии электронов нельзя считать изотропным. Действительно, при  $\epsilon = \epsilon(|\mathbf{p}|)$ ,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  и из закона сохранения импульса следует, что нормальные столкновения вообще не влияют на электрический ток  $\mathbf{j} = e \sum \mathbf{v}$ .

Запишем систему кинетических уравнений в виде

$$e\mathbf{E}\mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = \hat{I}_{ep}\{\varphi, \psi\} + T\hat{W} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \varphi, \quad \hat{I}_{pe}\{\varphi, \psi\} = 0. \quad (7,1)$$

Здесь, в отличие от предыдущего параграфа, оператор столкновений с примесями обозначен через  $-\hat{W}$ . Примем, как обычно, что эти столкновения являются упругими. Тогда любая функция энергии может быть пронесена через оператор  $\hat{W}$ , в частности

$$\hat{W} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \varphi_p = \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \hat{W} \varphi_p.$$

Кроме того, из эрмитовости соответствующего гамильтониана взаимодействия следует, что оператор  $\hat{W}$  симметричен и веществен:

$$W_{pp'} = W_{p'p} = W_{pp'}^* \quad \left( \hat{W}\varphi_p = \int W_{pp'}\varphi_{p'} dp' \right).$$

Пользуясь вторым из уравнений (7,1), исключим  $\psi_q$  и запишем уравнения для  $\varphi_p$  в развернутой форме (см. (6,6)):

$$\begin{aligned} e\mathbf{Ev} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} - T \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \hat{W}\varphi_p &= \\ &= \int d\mathbf{q} \mathcal{L}_{p,q}^{p+q} \left[ \varphi_{p+q} - \varphi_p - \frac{1}{M(q)} \int d\mathbf{p}' \mathcal{L}_{p',q}^{p'+q} (\varphi_{p'+q} - \varphi_{p'}) \right] + \\ &+ \int d\mathbf{q} \mathcal{L}_p^{p-q,q} \left[ \varphi_{p-q} - \varphi_p + \frac{1}{M(q)} \int d\mathbf{p}' \mathcal{L}_{p',q}^{p'+q} (\varphi_{p'+q} - \varphi_{p'}) \right], \quad (7,2) \\ M(q) &= \int d\mathbf{p} \mathcal{L}_{p,q}^{p+q}. \end{aligned}$$

Так как в общем виде это уравнение не удается решить, рассмотрим предельные случаи.

1. Начнем с области самых низких температур, где  $N$ -процессы можно рассматривать как малую добавку ( $l_{ei} \ll l_{ep}(T)$ ). В нулевом приближении решение уравнения (7,2) имеет вид

$$\varphi_0 = \frac{e}{T} \hat{W}^{-1} \mathbf{Ev}.$$

Соответствующая плотность тока

$$\mathbf{j}_0 = \frac{2e^2}{h^3} \int \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \hat{W}^{-1} (\mathbf{E}, \mathbf{v}) d\mathbf{p}, \quad (7,3)$$

очевидно, не зависит от температуры. В следующем приближении

$$T \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \varphi_1 = - \hat{W}^{-1} \hat{I}_{ep} \{\varphi_0, \psi_0\}$$

и соответствующая плотность тока

$$\mathbf{j}_1 = \frac{2e^2}{h^3} \int \mathbf{v} \hat{W}^{-1} \hat{I}_{ep} \{\varphi_0, \psi_0\} d\mathbf{p},$$

как нетрудно показать, пропорциональна  $T^5$ .

Для того чтобы выяснить знаки соответствующих добавок к главным значениям тензора электрического сопротивления, исследуем скаляр  $\mathbf{j}_1 \mathbf{E}$ . Исходя из симметрии величин  $\mathcal{L}$  ( $\mathcal{L}_{p,q}^{p+q} = \mathcal{L}_{p+q,p}^{p,q}$ ), нетрудно убедиться, что для произвольной функции  $g(\mathbf{p})$

$$\int g(\mathbf{p}) \hat{I}_{ep} \{\varphi, \psi\} d\mathbf{p} = \int \int [g(\mathbf{p}) - g(\mathbf{p} + \mathbf{q})] \mathcal{L}_{p,q}^{p+q} (\varphi_{p+q} - \varphi_p - \psi_q) d\mathbf{p} d\mathbf{q}.$$

Пользуясь этим соотношением и эрмитовостью оператора  $\hat{W}^{-1}$ , можно показать, что

$$\mathbf{j}_1 \mathbf{E} = - \frac{2e^2}{h^3} \int \left\{ \int F^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mathcal{L}_{p,q}^{p+q} d\mathbf{p} - \frac{1}{M(q)} \left[ \int F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mathcal{L}_{p,q}^{p+q} d\mathbf{p} \right]^2 \right\} d\mathbf{q},$$

где

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \hat{W}^{-1} \mathbf{Ev}_{p+q} - \hat{W}^{-1} \mathbf{Ev}_p.$$

Окончательно этот результат удобно представить в виде

$$\mathbf{j}_1 \mathbf{E} = -\frac{2e^2}{h^3} \int [(\mathbf{F}, \mathbf{F}) - (\mathbf{F}, \mathbf{G})^2] d\mathbf{q}.$$

Здесь  $\mathbf{G}^{-2} = \int \mathcal{L}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}} d\mathbf{p}$ , а скобки обозначают скалярное произведение с положительным весом  $\mathcal{L}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$ :

$$(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = \int \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mathbf{G}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mathcal{L}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}} d\mathbf{p},$$

так, что, например,  $(\mathbf{G}, \mathbf{G}) = 1$ . В силу неравенства Шварца — Буняковского величина  $-\mathbf{j}_1 \mathbf{E}$  неотрицательна и, как можно доказать, обращается в нуль только при изотропном законе дисперсии электронов. (В последнем случае действие оператора  $W^{-1}$  сводится к умножению на время релаксации, а разность  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \mathbf{v}_{\mathbf{p}}$  не зависит от  $\mathbf{p}$ .) Итак, главные значения тензора сопротивления изменяются по закону  $\rho = \rho_0 + \beta T^5$ , где  $\beta$  положительно и отлично от нуля при любой анизотропной поверхности Ферми.

2. Из общих соображений ясно, что подобный рост сопротивления с температурой не может продолжаться слишком долго. Действительно, с повышением температуры станут наиболее вероятными нормальные столкновения, которые сами по себе не приводят к конечному сопротивлению. Найдем приближенное решение уравнения (7,2) для этого предельного случая.

В нулевом приближении  $\phi'_0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}/T$ , где  $\mathbf{u}$  имеет смысл скорости дрейфа электрон-фононной системы как целого (в этом приближении  $f(\mathbf{p}) = f_0(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}) \approx f_0(\epsilon_{\mathbf{p}}) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} \partial/\partial \epsilon_{\mathbf{p}} f_0(\epsilon_{\mathbf{p}})$ ). Вектор  $\mathbf{u}$  может быть найден из условия разрешимости уравнения первого приближения

$$e \int \mathbf{p} (\mathbf{E} \mathbf{v}) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} d\mathbf{p} = \int \mathbf{p} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \hat{W}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}) d\mathbf{p}.$$

Если выбрать оси декартовых координат вдоль главных направлений симметричного тензора

$$\gamma_{ik} = \int \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} p_i \hat{W} p_k d\mathbf{p},$$

то

$$u_i = e \gamma_{ii}^{-1} \int \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} p_i (\mathbf{E} \mathbf{v}) d\mathbf{p}.$$

Соответствующая плотность тока

$$\mathbf{j}'_0 = \frac{2e^2}{h^2} \int \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}) d\mathbf{p}$$

не зависит от температуры, но в то же время отличается от  $\mathbf{j}_0$  (см. (7,3)). Разность  $\mathbf{j}_0 \mathbf{E} - \mathbf{j}'_0 \mathbf{E}$  может быть представлена в виде

$$\mathbf{j} \mathbf{E} - \mathbf{j}' \mathbf{E} = \frac{2e^2}{h^3} \left[ (\Phi, \Phi) - \sum_{i=1}^3 (\Phi, G_i)^2 \right], \quad (7,4)$$

где

$$\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{E} \mathbf{v}_{\mathbf{p}}, \quad G_i(\mathbf{p}) = (\hat{W} p_i, \hat{W} p_i)^{-1/2} \hat{W} p_i$$

и скалярное произведение определено следующим образом:

$$(\Phi, G) = \int \left( -\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) \Phi(\mathbf{p}) \hat{W}^{-1} G(\mathbf{p}) d\mathbf{p}.$$

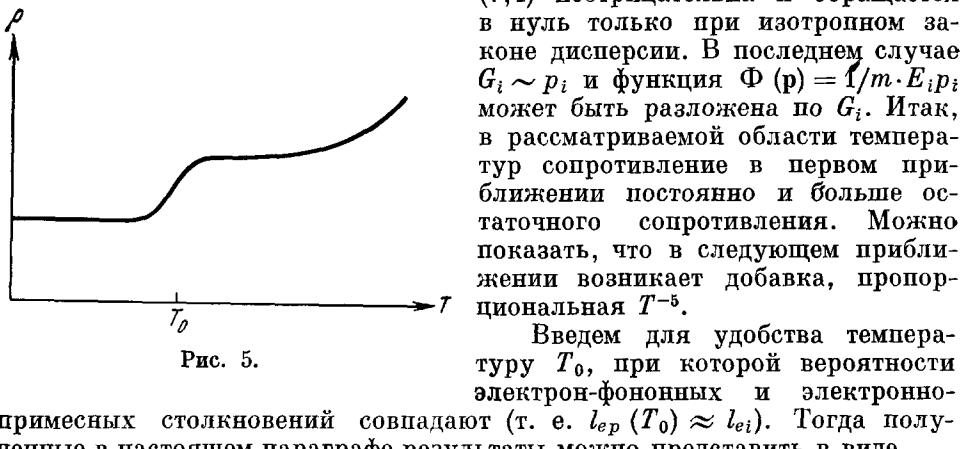
Нетрудно убедиться, что это определение удовлетворяет всем необходимым свойствам. В частности, коммутативность следует из симметрии и «упругости» оператора  $\hat{W}$ . В положительности скалярного квадрата любой функции можно убедиться непосредственно, если воспользоваться тем, что

$$W_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} = -B_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} + \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \int B_{\mathbf{p}, \mathbf{p}''} d\mathbf{p}'',$$

где симметричные и положительные величины  $B_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}$  пропорциональны квадратам матричных элементов электронно-примесного взаимодействия. Тогда, как легко показать,

$$\begin{aligned} (\Phi, \Phi) &= \int \int B_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} [\tilde{\Phi}(\mathbf{p}) - \tilde{\Phi}(\mathbf{p}')]^2 d\mathbf{p} d\mathbf{p}', \\ \tilde{\Phi}(\mathbf{p}) &= \left( -\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right)^{1/2} \hat{W}^{-1} \Phi(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Поскольку функции  $G_i$  ортонормированы, т. е.  $(G_i, G_k) = \delta_{i,k}$ , разность (7,4) неотрицательна и обращается в нуль только при изотропном законе дисперсии. В последнем случае  $G_i \sim p_i$  и функция  $\Phi(\mathbf{p}) = 1/m \cdot E_i p_i$  может быть разложена по  $G_i$ . Итак, в рассматриваемой области температур сопротивление в первом приближении постоянно и больше остаточного сопротивления. Можно показать, что в следующем приближении возникает добавка, пропорциональная  $T^{-5}$ .



Введем для удобства температуру  $T_0$ , при которой вероятности электрон-фононных и электронно-примесных столкновений совпадают (т. е.  $l_{ep}(T_0) \approx l_{ei}$ ). Тогда полученные в настоящем параграфе результаты можно представить в виде

$$\rho(T) = \begin{cases} \rho_0 \left[ 1 + \gamma \left( \frac{T}{T_0} \right)^5 \right], & T \ll T_0, \\ \rho'_0 \left[ 1 - \delta \left( \frac{T_0}{T} \right)^5 \right], & T \gg T_0, \end{cases}$$

где  $\gamma, \delta > 0$  и  $\rho'_0 > \rho_0$  при любом анизотропном законе дисперсии электронов.

Ясно, что при дальнейшем повышении температуры включаются фонон-фононные столкновения с перебросом и сопротивление вновь начинает расти (рис. 5). Трудно ожидать, что на опыте сопротивление в промежуточной области температур будет постоянно. Здесь могут, например, проявиться межэлектронные столкновения. Отметим, что проведенные недавно измерения электропроводности очень чистого алюминия в гелиевой области температур привели к очень схожей зависимости  $\rho(T)$ <sup>27</sup>.

### § 8. Высокочастотные свойства

В § 6 мы рассматривали случай, когда характерные размеры системы не превышали длины свободного пробега с потерей квазимпульса просто из-за наличия границ образца. Подобная же ситуация может, однако, возникнуть и в неограниченном образце в условиях, когда электрическое

поле и связанный с ним ток оказываются отличными от нуля только в некотором узком слое. Именно так обстоит дело при скин-эффекте в металлах, которому посвящен настоящий параграф.

Характер скин-эффекта определяется соотношением между скин-глубиной  $\delta$  и длинами свободного пробега  $l^N$  и  $l^V$  (описывающими нормальные столкновения и столкновения с потерей квазимпульса). Ясно, что неравенства  $\delta \gg l^V$  и  $\delta \ll l^N, l^V$  отвечают хорошо известным случаям нормального и аномального скин-эффекта. Существует еще только одна возможность  $l^N \ll \delta \ll l^V$ , исследованием которой мы сейчас займемся.

Начнем с формального решения задачи, хотя, как будет видно из дальнейшего, основные качественные результаты могут быть получены из наглядных соображений. Естественно, так же как и в § 6, воспользоваться гидродинамическим описанием электронов в металле. Полная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} i\omega u - \frac{e}{m} E &= v \Delta u - \frac{u}{\tau^V}, \\ \Delta E &= 4\pi i \omega c^{-2} j, \quad j = neu. \end{aligned} \quad (8,1)$$

Здесь  $E(r) e^{i\omega t}$  — напряженность электрического поля,  $u(r) e^{i\omega t}$  — скорость упорядоченного движения электронов,  $v = l^N v_F$ ,  $l^N \approx l_{kp}(T)$ . Для простоты закон дисперсии электронов предполагается изотропным.

Гидродинамический подход, кроме условия  $l^N \ll l^V$ , которое мы будем предполагать выполненным, требует выполнения неравенств

$$\omega \tau^V \ll 1, \quad l^N \ll \delta. \quad (8,2)$$

Рассмотрим, как обычно, задачу о нормальном падении плоской электромагнитной волны на металлическое полупространство. Пусть ось  $z$  направлена в глубь металла перпендикулярно его границе. После исключения  $u$  из системы (8,1) придем к следующему уравнению для  $E(z)$ :

$$E''' - \alpha E'' + i\beta E = 0,$$

где

$$\alpha^{-1} = l^N l^V (1 + i\omega \tau^V)^{-1}, \quad \beta^{-1} = \delta_0^2 l^N v_F \omega^{-1}, \quad \delta_0^{-2} = \frac{4\pi n e^2}{mc^2}.$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять граничным условиям

$$E(0) = E_0, \quad E(\infty) = E''(\infty) = E''(0) = 0,$$

где  $E_0$  — амплитуда поля на поверхности; условия на вторые производные следуют из требования обращения в нуль скорости  $u(z)$  на границе образца и на бесконечности.

Нетрудно показать, что

$$E(z) = \frac{E_0 (-s_2^2 e^{s_1 z} + s_1^2 e^{s_2 z})}{s_1^2 - s_2^2},$$

где  $s_1$  и  $s_2$  — корни уравнения  $s^4 - \alpha s^2 + i\beta = 0$ , обладающие отрицательной вещественной частью. Отсюда поверхностный импеданс равен

$$\zeta = -i\omega c^{-1} \frac{E(0)}{E'(0)} = -i\omega c^{-1} \left( \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right).$$

Переходя к исследованию этих выражений, примем, прежде всего, что  $\omega \tau^V \ll 1$ . Как станет ясно из дальнейшего, обратное неравенство в рассматриваемой области частот практически невозможно. Заметим, что при этом можно не заботиться о первом из условий (8,2), так как по предположению  $\tau^N \ll \tau^V$ .

Рассмотрим возможные предельные случаи:

а) При  $\alpha^2 \gg \beta$  один из корней, скажем  $s_2$ , много больше другого и поэтому может быть отброшен. Тогда

$$E(z) \approx E_0 e^{s_1 z}, \quad s_1 = -\frac{1+i}{\delta_n}, \quad \delta_n = \delta_0 \left( \frac{2}{\omega \tau} \right)^{1/2};$$

$\delta_n$  — толщина скин-слоя при нормальном скин-эффекте. Этот результат легко понять, так как неравенство  $\alpha^2 \gg \beta$ , переписанное в виде  $l^V \ll \delta_n^2/l^N$ , означает, что электрон, диффундируя в пределах скин-слоя, успевает столкнуться множество раз с потерей импульса. Заметим, что второе из условий (8,2) выполнено, так как при  $l^N \ll l^V$  из приведенного неравенства следует, что  $l^N \ll \delta_n$ .

б) При  $\alpha^2 \ll \beta$ , как легко показать,

$$s_1 = -is_2 = -\beta^{1/4} e^{-i\pi/8}, \quad E(z) = \frac{1}{2} E_0 (e^{s_1 z} + e^{is_1 z}).$$

Таким образом, электрическое поле затухает в глубь металла, грубо говоря, по закону  $\exp(-z/\delta^*)$ , где эффективная толщина скин-слоя

$$\delta^* \approx \beta^{-1/4} = (\delta_0^2 v_F \omega^{-1} l^N)^{1/4}.$$

Последнее выражение можно получить наглядным способом, аналогичным предложенному Пиппардом<sup>28</sup> для интерпретации результатов теории аномального скин-эффекта. Заметим, что толщину скин-слоя по порядку величины всегда можно записать в виде

$$\delta \approx \frac{\delta_0}{\sqrt{\omega \tau^*}} \approx \left( \frac{mv_F}{n^* e^2 \omega l^*} \right)^{1/2},$$

если под  $n^*$  понимать плотность тех электронов, которые существенно взаимодействуют с полем, а под  $l^*$  — меньшую из следующих двух величин: путь электрона в скин-слое и длина свободного пробега с потерей импульса  $l^V$ . В пределах гидродинамического подхода  $l^N \ll \delta$ , и поэтому все электроны играют примерно одинаковую роль, т. е.  $n^* \approx n$ . Однако из неравенства  $\alpha^2 \ll \beta$  следует, что путь, проходимый электроном в скин-слое,  $(\delta^*)^2/l^N \ll l^V$ , и поэтому нужно принять  $l^* \approx \delta^2/l^N$ . В итоге приходим к уравнению

$$\delta \approx \delta_0 \left( \frac{v_F l^N}{\omega \delta^2} \right)^{1/2},$$

из которого следует искомый результат  $\delta \approx \delta^*$ .

Неравенства  $l^N \ll \delta^*$  и  $\alpha^2 \ll \beta$  приводят к следующим ограничениям на величину  $l^N$ :

$$\frac{\delta_n^2}{l^V} \ll l^N \ll \delta_{an},$$

где  $\delta_{an} \approx (\delta_0^2 v_F / \omega)^{1/3}$  — толщина скин-слоя при аномальном скин-эффекте.

Нетрудно убедиться, что  $\delta^*/\delta_{an} \approx (l^N/\delta_{an})^{1/4}$ , т. е.  $\delta^* < \delta_{an}$ . Однако с повышением частоты  $\delta_{an}$  спадает быстрее, чем  $\delta^*$ , и при  $l^N \approx \delta_{an}$  эти величины совпадают. Таким образом, рассматриваемая область непосредственно смыкается с областью аномального скин-эффекта (в которой гидродинамическое описание, очевидно, не пригодно).

Выпишем, наконец, выражения для поверхностного импеданса в различных частотных областях. Обозначим через  $\omega_1 = 1/\tau^V (\delta_0/l^V)^2$  частоту,

при которой происходит переход от нормального к аномальному скин-эффекту в обычном случае:  $l^V \approx \delta_n(\omega_1) \approx \delta_{an}(\omega_1)$ .

При  $\omega/\omega_1 \ll l^V/l^N$  скин-эффект остается нормальным:

$$\zeta_n \approx \left( \frac{\omega}{\omega_0^2 \tau^V} \right)^{1/2} e^{i \frac{\pi}{4}}, \quad \omega_0 = \frac{c}{\delta_0}.$$

Далее, в области \*)  $l^V/l^N \ll \omega/\omega_1 \ll (l^V/l^N)^3$  имеем

$$\zeta^* \approx \left( \frac{v_F}{c} \right)^{1/2} \left( \frac{\omega^3 \tau^N}{\omega_0^2} \right)^{1/4} e^{3\pi i/8}. \quad (8,3)$$

Наконец, при  $\omega/\omega_1 \gg (l^V/l^N)^3$  (или  $l^N \gg \delta_{an}$ ) имеет место аномальный скин-эффект:

$$\zeta_{an} \approx \left( \frac{v_F}{c} \right)^{1/3} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2/3} e^{i\pi/3}.$$

В этих формулах опущены численные коэффициенты порядка единицы, так как их значения связаны с предположением об изотропности законов дисперсии электронов и фононов. Ясно, что порядок величины импеданса и его зависимость от основных физических параметров останутся справедливыми при любом законе дисперсии. Это утверждение относится и к соотношению между вещественной и мнимой частями импеданса в случаях нормального и аномального скин-эффекта. В наиболее интересном случае (8,3), к сожалению, отношение  $\text{Re } \zeta^*$  к  $\text{Im } \zeta^*$  весьма сложно зависит от вида законов дисперсии электронов и фононов и поэтому фазовый множитель  $e^{3\pi i/8}$ , по-видимому, не имеет физического смысла. Заметим, что в общем случае вязкость  $v$  является тензором четвертого ранга и поэтому даже для кубической решетки поверхностный импеданс должен обладать тензорными свойствами.

Из сказанного видно, что нормальные электрон-фононные столкновения в том случае, когда они происходят значительно чаще, чем столкновения с потерей импульса, существенно изменяют характер скин-эффекта в металлах, а именно:

1. Скин-эффект остается нормальным вплоть до более высоких частот, чем обычно. Напротив, область аномального скин-эффекта существенно урезана со стороны низких частот (в  $(l^V/l^N)^3$  раз).

2. Существует достаточно широкая промежуточная область частот, в которой поверхностный импеданс необычным образом зависит от частоты и, главное, является функцией температуры:  $\zeta^* \sim \omega^{3/4} T^{-4/5}$ .

3. Зависимость  $\zeta(T)$  имеет вид, изображенный на рис. 6. При самых низких температурах  $\zeta = \zeta_{an}$  и постоянно. После перехода в промежуточную область импеданс спадает пропорционально  $T^{-5/4}$ . С дальнейшим ростом температуры скин-эффект становится нормальным. В этой области поверхностный импеданс сначала постоянен и затем, после того как включаются фонон-фононные  $U$ -процессы, растет с температурой.

Физико-технический  
институт АН УССР,  
Харьков

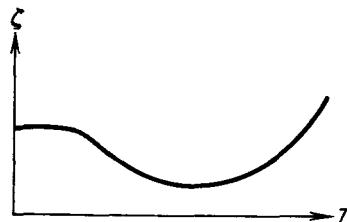


Рис. 6.

\*) Заметим, что эта область может быть достаточно широкой. Так, при  $\delta_0 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ ,  $l^V = 0,1 \text{ см}$ ,  $l^N = 10^{-3} \text{ см}$  и  $v_F = 10^8 \text{ см/сек}$  имеем  $10^2 \ll \omega \ll 10^6 \text{ сек}^{-1}$ . Из этой оценки, кстати, видно, что неравенство  $\omega \tau^V \ll 1$  практически всегда выполнено.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. Ja. P o m e r a n c h u k, J. Phys. (USSR) **4**, 259 (1941); Phys. Rev. **60**, 820 (1941).
  2. C. H e r r i n g, Phys. Rev. **95**, 954 (1954).
  3. S. S i m o n s, Proc. Phys. Soc. **82**, 401 (1964).
  4. Р. П а ў е р л с, Квантовая теория твердых тел, М., ИЛ, 1956.
  5. А. И. А хи е з е р, В. Г. Б а ръ я х т а р, Ф Т Т **2**, 2446 (1960).
  6. J. M. Z i m a n, Can. J. Phys. **34**, 1256 (1956).
  7. В. Г. Б а ръ я х т а р, Г. И. У ру ша д з е, ЖЭТФ **39**, 355 (1960).
  8. J. A. Su s s m a n n, A. T h e l l i n g, Proc. Phys. Soc. **81**, 1122 (1963).
  9. Р. Н. Г у р ж и, ЖЭТФ **46**, 719 (1964).
  10. Р. Н. Г у р ж и, ЖЭТФ **45**, 750 (1963).
  11. Л. П. М е ж о в - Д е г л и н, ЖЭТФ **46**, 1926 (1964); **49**, 66 (1965).
  12. А. И. А хи е з е р, В. Г. Б а ръ я х т а р, М. И. К а г а н о в, УФН **71**, 533; **72**, 3 (1960).
  13. Л. Д. Л а н д а у, ЖЭТФ **11**, 592 (1941).
  14. J. C. W a r d, J. W i l k s, Phil. Mag. **42**, 314 (1951); **43**, 48 (1952).
  15. R. B. D i n g l e, Proc. Phys. Soc. **A65**, 374 (1952).
  - 15a. E. W. P r o h o f s k y, J. A. K r u m h a n s l, Phys. Rev. **A133**, 1403 (1964).
  - 15b. R. A. G u y e g, J. A. K r u mh a n s l, Phys. Rev. **A133**, 1411 (1964).
  16. Р. Н. Г у р ж и, Ф Т Т **7**, 3515 (1965).
  17. С. С. A c k e r m a n, B. B e r g t m a n, H. A. F a i r b a n k, R. A. G u y e g, Phys. Rev. Lett. **16**, 789 (1966).
  18. Л. Д. Л а н д а у, И. Я. П о м е р а н ч у к, ЖЭТФ **7**, 379 (1937).
  19. Е. А б г а н а м с, Phys. Rev. **95**, 839 (1954).
  20. Дж. З ай м а н, Электроны и фотоны, М., ИЛ, 1962.
  21. Р. Н. Г у р ж и, ЖЭТФ **35**, 965 (1958).
  22. M. A. B i o n d i, Phys. Rev. **102**, 964 (1956).
  23. Г. П. М о ту л е в и ч, А. А. Ш у б и н, Оптика и спектроскопия **2**, 633 (1957).
  24. В. Г. П а д а л к а, И. Н. Ш к л я р е в с к и й, Оптика и спектроскопия **11**, 527 (1961).
  25. Р. Н. Г у р ж и, ЖЭТФ **47**, 1415 (1964).
  26. Р. Н. Г у р ж и, ЖЭТФ **47**, 1822 (1964).
  27. Ю. Н. Д з я н, В. В. Е р е м е н к о, Письма ЖЭТФ **3**, 447 (1966).
  28. A. B. R i p r a g d, Proc. Roy. Soc. **A191**, 370, 385 (1947).
-