1968 г. Ноябрь **Том 96, вып. 3**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

530.145+530.12:531.51

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ *)

Т. Киббл

I. ВВЕДЕНИЕ

Гравитационное взаимодействие настолько слабо, что не играет никакой роли во всех практических задачах физики элементарных частиц. Оно может стать существенным только при невероятно высоких энергиях. Тем не менее ясно, что гравитационные силы следует включать в любую совершенную теорию, так как в конечном счете общая теория относительности и лоренц-ковариантная теория элементарных частиц должны быть сведены в единое целое.

При осуществлении этой унификации встают две проблемы. Первая — понять структуру уравнений, описывающих гравитационные взаимодействия. Мы должны знать, какие из теорий гравитации логически возможны, и на основе экспериментальных доказательств сделать выбор между ними. Вторая — найти удовлетворительный квантовомеханический формализм, который позволит, по крайней мере в принципе, рассчитывать гравитационные процессы, как это мы можем делать в квантовой электродинамике. В этих лекциях я попытаюсь дать обзор современного состояния наших знаний об этом предмете и осветить некоторые нерешенные проблемы.

Существующие подходы к квантовой теории гравитации можно разбить в основном на две категории в зависимости от того, исходят они из общей теории относительности или из теории элементарных частиц. Для большинства «релятивистов» естественно исходить из классической теории Эйнштейна, которая основывается на некоторых общих принципах, таких как принцип эквивалентности и «принцип» общей ковариантности. (Заметим, однако, что последний формально бессодержателен, так как любую теорию можно записать в форме, инвариантной относительно общих преобразований координат; см., например, работы Фока [1] и Эпштейна [2].) Эта теория выражается на языке римановой геометрии, гравитационное поле играет в ней особенную, геометрическую роль, полностью отличную от роли других полей. В действительности в поисках единого описания было сделано немало попыток найти геометрическую интерпретацию также и для других полей, но они закончились безуспешно. Теория содержит ряд довольно произвольных (хотя правдоподобных) допущений. Например, нет фундаментальных причин, по которым риманово пространство предпочтительнее других пространств — скажем, пространства Фанслера. Кроме того, в теории произволен знак

---

*) T. W. B. Kibble, Quantum Theory of Gravitation, в сб. High-energy Physics and Elementary Particles. Lectures at a Seminar 3 May — 30 June 1965, organized by the International Centre for Theoretical Physics (Triest), Vienna, 1965, стр. 900. Перевод Т. В. Рузмайкиной и А. А. Рузмайкина.

гравитационной силы. Она может быть как силой притяжения, так и силой отталкивания.

С другой стороны, для физика-экспериментатора нет непосредственной причины рассматривать явление гравитации на принципиально ином основании, чем другие типы взаимодействия, такие как, например, электромагнитные. Естественно поэтому попытаться описать гравитацию как некоторое поле в плоском пространстве-времени Минковского. Эту точку зрения защищали Фейнман [3] и Тирринг [4]; на их очень полных и вдохновенных дискуссиях базируется многое из нижеследующего. Конечно, можно доказывать, что физики, занимающиеся частицами, начали, отбрасывая полевую теорию, обращаться к теориям, базирующимся только на S-матрице. Возможно, что, в конце концов, такой подход удастся, но вряд ли теория гравитации будет прогрессировать быстрее, чем электромагнетизм, и остается истиной, что имеющиеся методы расчета электромагнитных явлений, исключая очень специальные случаи, все базируются на полевой теории.

Представляется замечательным тот факт, что оба подхода к гравитации — методы кривого и плоского пространств, приводят к одной физической теории. Они не противоречивы, а дополнительны.

II. ВОЗМОЖНЫЕ ТЕОРИИ ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЫ

Прежде чем судить о корректности уравнений, описывающих гравитационное поле, полезно задать общий вопрос: какие из теорий дальнодействующей силы логически возможны в смысле лоренц-ковариантной теории поля? Ответ оказывается более ограничительным, чем кажется с первого взгляда. В истинно бесконечной области силы должны описываться полем с нулевой массой покоя квантов. Хотя невозможно экспериментально исключить наличие очень малой, ненулевой массы, естественно предположить, что масса точно равна нулю. Далее нужно исследовать возможности спинов 0, 1, 2 и т. д., описываемых скалярным, векторным и тензорным полями (S, V, T).

Мы будем использовать метрику $\eta_{\mu\nu}$ с диагональными элементами (1, −1, −1, −1) и обозначать производные запятой: $\varphi_{,\mu} \equiv \partial\varphi/\partial x^{\mu}$. Тогда свободные лагранжианы могут быть записаны следующим образом:

$$L_S = \frac{1}{2}\varphi_{,\mu}\varphi^{,\mu}, \tag{1S}$$

$$L_V = -\frac{1}{4}(\varphi_{\mu,\nu} - \varphi_{\nu,\mu})(\varphi^{\mu,\nu} - \varphi^{\nu,\mu}), \tag{1V}$$

$$L_T = \frac{1}{2}(\varphi_{\mu\nu,\rho}\varphi^{\mu\nu,\rho} - 2\varphi_{\mu\nu,\rho}\varphi^{\rho\mu,\nu} + 2\varphi^{\mu\nu}_{,\nu}\varphi^{\rho}_{\rho,\mu} - \varphi^{\mu}_{\nu,\rho}\varphi^{\nu,\rho}_{\nu}, \tag{1T}$$

где $\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\nu\mu}$. Заметим, что мы не накладываем условие $\varphi^{\mu}_{\mu} = 0$. $\varphi_{\mu\nu}$ преобразуется согласно приводимому представлению однородной группы Лоренца. Это является характеристикой полевых теорий со спином, большим 1. Для того чтобы получить состояния частицы, которые принадлежат к неприводимому представлению группы Пуанкаре (т. е. имеют единственную массу и спин), необходимо начинать с приводимого поля (см. работы [5, 6]). Соответственно имеется некоторая неопределенность относительно точной формы L_T. Например, иногда удобно использовать другой набор переменных:

$$\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\varphi^{\rho}_{\rho},$$

в которых L_T принимает довольно простую форму:

$$L_T = \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}_{\mu\nu,\,\rho}\tilde{\varphi}^{\mu\nu,\,\rho} - 2\tilde{\varphi}_{\mu\nu,\,\rho}\tilde{\varphi}^{\rho\mu,\,\nu} - \frac{1}{2}\tilde{\varphi}^{\mu}_{\mu,\,\rho}\tilde{\varphi}^{\nu,\,\rho}_{\nu}\right).$$

Лагранжиан (1) становится единственным, если мы хотим иметь поле определенного спина и нулевой массы. Знаки лагранжианов определяются требованием положительной определенности гамильтоновой функции.

Если обозначить лагранжиан других материальных полей через L_M, то соответствующие уравнения поля таковы:

$$\varphi^{\mu}_{,\mu} = -j \equiv \frac{\partial L_M}{\partial \varphi}, \tag{2S}$$

$$-\varphi^{\nu}_{\mu,\,\nu} + \varphi^{\nu}_{\nu,\,\mu} = -j_\mu \equiv \frac{\partial L_M}{\partial \varphi^{\mu}}, \tag{2V}$$

$$\varphi^{\rho}_{\mu\nu,\,\rho} - \varphi^{\rho}_{\mu\rho,\,\nu} - \varphi^{\rho}_{\nu\rho,\,\mu} + \varphi^{\rho}_{\rho,\,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\varphi^{\rho\sigma}_{,\rho\sigma} - \varphi^{\rho\sigma}_{\rho,\,\sigma} =$$
$$= \tilde{\varphi}^{\rho}_{\mu\nu,\,\rho} - \tilde{\varphi}^{\rho}_{\mu\rho,\,\nu} - \tilde{\varphi}^{\rho}_{\nu\rho,\,\mu} + \eta_{\mu\nu}\tilde{\varphi}^{\rho\sigma}_{,\rho\sigma} = -j_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial L_M}{\partial \varphi^{\mu\nu}}. \tag{2T}$$

За исключением (2S), каждое из этих уравнений инвариантно относительно бесконечномерной абелевой калибровочной группы, с инфинитезимальными преобразованиями, определенными посредством

$$\delta\varphi_\mu = -\lambda_{,\mu}, \tag{3V}$$

$$\delta\varphi_{\mu\nu} = -\lambda_{\mu,\,\nu} - \lambda_{\nu,\,\mu}, \tag{3T}$$

где λ и λ_μ являются произвольными функциями координат. Соответственно в каждом случае уравнения движения заключают в себе уравнение сохранения для источника:

$$j^{\mu}_{,\mu} = 0, \tag{4V}$$

$$j^{\mu\nu}_{,\nu} = 0. \tag{4T}$$

Совершенно аналогичные утверждения применимы к полям со спином, большим 2. Эти уравнения содержат наиболее строгие ограничения на возможные формы теории. Можно написать свободные поля для произвольного спина, но нельзя в общем случае последовательно связать их с другими полями, и поэтому они физически неуместны.

В специальном случае спина 0 уравнения инвариантны только относительно конечномерной абелевой калибровочной группы

$$\delta\varphi = -a - b_\mu x^\mu$$

с постоянными a и b. Таким образом, в этом случае нет ограничений на форму вышеупомянутого члена j.

III. КОВАРИАНТНЫЕ КАЛИБРОВКИ

Ввиду свободы выбора калибровочных преобразований мы можем определить специальную калибровку или класс калибровок, накладывая одно или четыре условия на векторное и тензорное поля соответственно. Это всегда удается сделать ковариантным образом. Мы можем выбрать лоренцеву калибровку

$$\varphi^{\mu}_{,\mu} = 0 \tag{5V}$$

или аналогичную ей, которую Тирринг называет гильбертовой:

$$\tilde{\varphi}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0. \tag{5T}$$

(Следует, конечно, проверить, существуют ли калибровочные функции, которые выполняют переход к этой калибровке. Например, нельзя в общем случае наложить условие $\varphi^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$.)

Эти калибровки не единственны. Они допускают еще произвольные градиентные преобразования с калибровочной функцией, удовлетворяющей волновому уравнению

$$\Box \lambda = 0, \quad \Box \lambda_\mu = 0. \tag{6}$$

Уравнения движения принимают очень простые формы:

$$\Box \varphi^\mu = j^\mu, \quad \Box \tilde{\varphi}^{\mu\nu} = -j^{\mu\nu}, \tag{7}$$

очевидно, инвариантные при преобразованиях, удовлетворяющих (6).

Легко вычислить гриновские функции этих уравнений. В импульсном пространстве находим

$$G = \frac{1}{k^2}, \tag{8S}$$

$$G_{\mu,\nu} = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2}, \tag{8V}$$

$$G_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2}\,\frac{(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma})}{k^2} \tag{8T}$$

с соответствующими малыми мнимыми частями, определяемыми граничными условиями. (В этой специальной калибровке гриновские функции от $\varphi_{\mu\nu}$ или $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$ совпадают.) Заметим чередование знаков (которые, конечно, определены знаками лагранжианов). Вообще физические компоненты, которые встречаются (как мы увидим ниже) среди компонент с пространственными индексами, должны входить с положительным знаком. Поэтому компоненты со всеми нулевыми индексами, которые определяют статическое взаимодействие между частицами, встречаются с положительными или отрицательными знаками в зависимости от того, четный или нечетный спин. Отсюда следует, что статическая сила между одинаковыми частицами является притягивающей для четного и отталкивательной для нечетного спина. В частности, гравитационное поле должно иметь четный спин. (Здесь предполагается, что для покоящихся частиц не исчезают только компоненты j^0 или j^{00}. Это очевидно для бесспиновых частиц, так как единственным вектором, из которого строятся эти величины, является импульс p^μ. Более детально мы вернемся к структуре членов источника позже.)

IV. НЕКОВАРИАНТНЫЕ КАЛИБРОВКИ

Если мы хотим иметь калибровку, определенную единственным образом, то необходимо использовать нековариантное калибровочное условие, подобное кулоновской калибровке:

$$\varphi^i_{,i} = 0 \tag{9V}$$

(латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, а греческие — от 0 до 3). Аналогичная калибровка для тензорного случая определена четырьмя условиями

$$\tilde{\varphi}^{ij}_{,j} = 0, \quad \varphi^i_i = 0. \tag{9T}$$

В этих калибровках переменные φ^0 и $\varphi^{0\mu}$ становятся точными функциями источника. Например,

$$\varphi^0(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{y} D(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, j^0(x^0, \mathbf{y}) \tag{10V}$$

и

$$\widetilde{\varphi}^{00}(\mathbf{x}) = -\int d^3\mathbf{y} D(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, j^{00}(x^0, \mathbf{y}), \tag{10T}$$

где D — гриновская функция оператора Лапласа:

$$\nabla^2 D(\mathbf{x}) = -\delta^3(\mathbf{x}), \quad D(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}. \tag{11}$$

Эти члены можно исключить из лагранжиана, заменив их мгновенным нелокальным взаимодействием типа

$$-\int d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{y} j^0(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, j^0(\mathbf{y}) \tag{12V}$$

и

$$\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{y} j^{00}(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, j^{00}(\mathbf{y}), \tag{12T}$$

которое в более точной форме демонстрирует природу статического взаимодействия.

В каждом случае остаются только два независимых динамических поля, соответствующих двум состояниям поляризации частицы с нулевой массой. Поляризационное состояние частицы со спином единица можно описать поляризационным вектором ε_μ (который в этой калибровке является чисто пространственным, $\varepsilon_0 = 0$), удовлетворяющим условиям

$$k_\mu \varepsilon_\mu = 0, \quad \varepsilon_\mu \varepsilon^\mu = -1. \tag{13V}$$

Аналогично для частицы со спином 2 нужен поляризационный тензор $\varepsilon_{\mu\nu}$:

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\nu\mu}, \quad k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = 0, \quad \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu} = 1, \tag{13T}$$

который в этой калибровке также удовлетворяет условиям

$$\varepsilon_{0\mu} = 0, \quad k^i \varepsilon_{ij} = 0, \quad \varepsilon^i_i = 0.$$

Важно отметить, что при лоренц-преобразованиях ε_μ и $\varepsilon_{\mu\nu}$ не преобразуются подобно вектору или соответственно тензору и следует подвергнуть их дополнительным калибровочным преобразованиям (типа $\varepsilon_\mu \to \varepsilon_\mu - \lambda k_\mu$), чтобы привести к той же самой калибровке в новой системе отсчета. Элемент S-матрицы для процесса испускания (или поглощения) частицы со спином 1 или спином 2 может быть написан в виде $\varepsilon_\mu M^\mu$ или $\varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$, где M^μ и $M^{\mu\nu}$ — вектор или тензор, образованный из импульсов и спинов других частиц. Далее, в силу нестандартных законов преобразования ε_μ и $\varepsilon_{\mu\nu}$ лоренц-ковариантность требует калибровочно-инвариантных условий

$$k_\mu M^\mu = 0, \quad k_\mu M^{\mu\nu} = 0. \tag{14}$$

V. ОГРАНИЧЕНИЯ НА СВЯЗИ ФИЗИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

Как мы отметили ранее, наиболее жесткие ограничения на структуру теории происходят из требования сохранения источников. Прежде чем обсуждать общую связь, удобно исследовать форму связи в предельном случае нулевой частоты и волнового числа, следуя в общих чертах замечательно простому, но мощному аргументу, предложенному Вейнбергом [7].

Хотя мы еще не провели идентификацию с электромагнетизмом и гравитацией, удобно называть частицы с нулевой массой и спином 1 «фотонами» и спином 2 — «гравитонами». Аргумент Вейнберга заключается

в сравнении амплитуды рассеяния M для некоторого процесса с амплитудой рассеяния для аналогичного процесса, содержащего испускание одного дополнительного мягкого фотона или гравитона с импульсом k. Когда $k \to 0$, этот матричный элемент будет преобладать над членами, возникающими из диаграмм, в которых фотон или гравитон прикреплен к одной из внешних линий первоначальной диаграммы (ср. рис. 1 и 2).

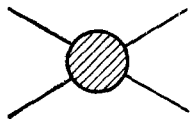

Рис. 1. Фотон или гравитон не прикреплен к внешним линиям.

Исследуем сначала случай фотона и вычислим вклад этих диаграмм в матричный элемент M^μ. Рассмотрим диаграмму, в которой фотон прикреплен к линии с импульсом p и спином i. Мы будем указывать только эти обозначения, не выписывая обозначений других частиц, т. е. записывая матричный элемент в виде $M_i(p)$. Тогда в пределе при $k \to 0$ вклад в $M_i(p)$ дается выражением

$$\frac{\sum_j f^\mu_{ij}(p)\, M_j(p)}{(p+k)^2 - m^2},$$

где f^μ_{ij} описывают форму связи. Вводя очевидные матричные обозначения, мы можем записать это как

$$\frac{f^\mu(p)}{2pk} M.$$

Следовательно, вклад всех диаграмм равен

$$M^\mu = \sum_\alpha \frac{f^\mu_\alpha(p_\alpha)}{2p_\alpha k} M, \tag{15V}$$

где α обозначает частицу и каждая f^μ_α является матрицей, действующей

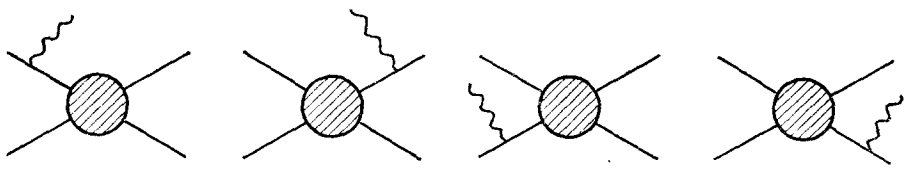

Рис. 2. Фотон или гравитон прикреплен к внешним линиям.

на один отдельный индекс в M. Для удобства мы взяли все импульсы направленными наружу, так что

$$\sum p_\alpha = 0. \tag{16}$$

Калибровочная инвариантность (14) требует

$$\sum \frac{k_\mu f^\mu_\alpha(p)}{2p_\alpha k} M = 0. \tag{17V}$$

Принимая во внимание тот факт, что каждая f^μ_α действует на один индекс M и является функцией только от импульса, легко видеть, что единственный способ удовлетворить этому соотношению для произвольных импульсов (16) состоит в том, чтобы выбрать

$$f^\mu_\alpha(p_\alpha) = 2l_\alpha p^\mu_\alpha. \tag{18V}$$

Условие (17) сводится к требованию $M=0$, если не выполнено

$$\sum_{\alpha} l_{\alpha}=0, \tag{19V}$$

что, конечно, является законом сохранения заряда. Однако в гравитационном случае мы получаем более интересный результат. Тем же образом находим

$$M^{\mu\nu}=\sum \frac{f_{\alpha}^{\mu\nu}(p_{\alpha})}{2p_{\alpha}k} M \tag{15T}$$

и из градиентной инвариантности

$$\sum_{\alpha} \frac{k_{\mu} f_{\alpha}^{\mu\nu}(p_{\alpha})}{2p_{\alpha}k} M=0. \tag{17T}$$

Теперь, чтобы удовлетворить этому уравнению, необходимо выбрать

$$f_{\alpha}^{\mu\nu}(p_{\alpha})=2k_{\alpha}p_{\alpha}^{\mu}p_{\alpha}^{\nu} \tag{18T}$$

и затем потребовать

$$\sum k_{\alpha}p_{\alpha}^{\nu}=0. \tag{19T}$$

Этому условию можно удовлетворить, только выбрав $k_{\alpha}=k$, где k — константа, одинаковая для всех частиц. Тогда (19) удовлетворяется в силу (16). Мы продемонстрировали, следовательно, универсальность гравитации — принцип эквивалентности. Если мы пойдем дальше таким же путем, то обнаружим, что для более высоких спинов соответствующим уравнениям (например, $\sum_{\alpha} g_{\alpha}p_{\alpha}^{\nu}p_{\alpha}^{\rho}=0$) вообще невозможно удовлетворить.

Таким образом. единственными бозонами с нулевой массой, которые могут быть постоянно связаны при нулевой энергии и импульсе, являются бозоны со спинами 0, 1, 2.

Из этого аргумента также немедленно следует факт, что частица и античастица должны иметь противоположную связь для поля со спином 1 и одинаковую для поля со спином 2, так как выражения ep_{μ} и $kp_{\mu}p_{\nu}$ не должны изменяться при обращении вектора импульса и одновременной замене частицы на античастицу.

Необходимо подчеркнуть, что аргумент не доказывает, что не существуют поля с нулевой массой и другим спином, а лишь то, что если они существуют, то форма связи этих полей исчезает при $k\to 0$ (например, этим свойством обладало векторное поле, связанное только через $F_{\mu\nu}$). Такие связи не генерируют крупномасштабных статических полей и, вероятно, поэтому не будут важны в макроскопической физике. Стоит также заметить, что такие теории не содержат каких-либо инфракрасных расходимостей.

VI. ОБЩАЯ СТРУКТУРА СВЯЗИ

Принимая во внимание все сказанное, можно предположить, что встречаются только три вида бозонов:

а) произвольно связанные поля со спином 0;

б) поля со спином 1, каждое из которых характеризуется током, связанным с некоторой абсолютно сохраняющейся величиной;

в) единственное поле со спином 2, связанное универсально со всеми другими полями, содержащимися в нем; источником в этом случае должен быть сохраняющийся тензор $j^{\mu\nu}$, который в пределе $k\to 0$ порождает связь, обсуждавшуюся ранее. Единственным известным тензором с таким

свойством является $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса. Это поле мы будем отождествлять с гравитацией. Однако прежде чем обсуждать его свойства более детально, интересно понять, как далеко можно распространить аргумент, исключающий другие поля.

Как мы видели, существование поля с нулевой массой и ненулевым спином требует наличия бесконечномерной инвариантной группы. При связывании поля встретятся две возможности. Первая — лагранжиан может обладать инвариантностью, которая ведет к существованию сохраняющегося тока и которая может быть соответствующим образом обобщена и отождествлена с калибровочной группой. Это справедливо в случае нормальной электромагнитной связи и для вышеупомянутого поля со спином 2. Если такой инвариантности L_M не существует, то калибровочная группа должна затрагивать только поле с нулевой массой, которое должно поэтому входить в лагранжиан в градиентно-инвариантной форме. Поле со спином 1 мы можем, конечно, выразить через градиентно-инвариантные величины $F_{\mu\nu} = \varphi_{\mu,\nu} - \varphi_{\nu,\mu}$ и получить последовательную теорию. Однако для поля с большим спином простейший нетривиальный инвариант содержит по крайней мере вторые производные и по существу идентичен левой стороне уравнений движения. В этих случаях связывающий член исчезает, если выполняются уравнения свободного поля, что означает, что связаны лишь нефизические компоненты поля, не соответствующие реальным частицам. Другими словами, пропагатор не имеет полюса при $k^2 = 0$ и введение связи полностью эквивалентно прямому связыванию источника с самим собой. Это не приводит к рождению физических частиц с нулевой массой. Простейшим примером такой связи является векторное поле с массой, связанное только через член $\varphi^{\mu}_{,\mu}$. Искомая часть пропагатора есть

$$k^{\mu}\frac{-\eta_{\mu\nu}+\dfrac{k_{\mu}k_{\nu}}{m^2}}{k^2-m^2}k^{\nu}=\frac{k^2}{m^2}\,.$$

Связь $\varphi^{\mu}_{,\mu}j$ эквивалентна $j_{,\mu}j^{,\mu}\,(2m^2)$. Таким образом, мы видим, что только в случае, когда L_M имеет инвариантную группу, можно нетривиально связать частицу с нулевой массой и ненулевым спином. Мы поэтому существенно учтем только три случая, перечисленных выше.

VII. ГРАВИТАЦИОННАЯ СВЯЗЬ

Обратимся к специфическому случаю поля со спином 2. Ясно, что оно обеспечит силу со всеми известными свойствами гравитационной силы, если мы отождествим ньютоновскую гравитационную постоянную G с $k^2/8\pi$. Вообще говоря, остается еще одна возможная теория — описать гравитацию скалярным полем. Лучшее, что мы можем сделать в этом случае, это использовать след тензора энергии-импульса T^{μ}_{μ}. Скалярная теория является, конечно, намного более произвольной теорией, поскольку нет фундаментальной причины, почему поле должно действовать с равной силой на все другие поля. Скалярное поле воспроизводит многие черты гравитационной силы, но может быть исключено экспериментально (кроме, вероятно, очень малого вклада), так как оно вообще не связано с электромагнитным полем, для которого T^{μ}_{μ} равно нулю. (Оно также предсказывает неверное значение сдвига перигелия Меркурия.)

Таким образом, остается, по существу, единственная теория гравитации. Универсальность связи имеет несколько замечательных следствий. Рассмотрим, например, случай, когда вместо материальных полей

имеются классические частицы, описываемые лагранжианом

$$L_M(x) = -\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \int dS \dot{z}^\mu_\alpha \dot{z}^\nu_\alpha \eta_{\mu\nu}\delta^4(x - z_\alpha(s)), \tag{20}$$

где z_α — положение частицы α и

$$\dot{z}_\alpha = \frac{dz_\alpha}{ds}.$$

Тогда

$$T^{\mu\nu} = \sum_\alpha m_\alpha \int ds \dot{z}^\mu_\alpha \dot{z}^\nu_\alpha \delta^4(x - z_\alpha(s)).$$

Лагранжиан, содержащий связывающий член, имеет вид

$$L_M - k\varphi_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \int ds \dot{z}^\mu_\alpha \dot{z}^\nu_\alpha g_{\mu\nu}\delta^4(x - z_\alpha(s)),$$

где

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2k\varphi_{\mu\nu}. \tag{21}$$

Соответствующие уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{ds}(g_{\mu\nu}\dot{z}^\nu_\alpha) = \frac{1}{2} g_{\nu\rho,\mu}\dot{z}^\nu_\alpha \dot{z}^\rho_\alpha \tag{22}$$

являются просто уравнениями геодезических в римановом пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$. В исходном плоском пространстве все частицы, независимо от их массы, движутся по одинаковым траекториям. Этих уравнений вместе с (7) или его эквивалентом

$$\Box\, \varphi_{\mu\nu} = -k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^\rho_\rho\right) \tag{23}$$

достаточно для того, чтобы вычислить (очень просто) все стандартные гравитационные эффекты.

Конечно, здесь нет нужды переходить к описанию в терминах кривого пространства. Все может быть отлично описано в терминах обычного плоского пространства. Поскольку мы лучше знакомы с идеей сил, влияющих на движение частиц в плоском пространстве, этот способ понимания гравитационных процессов часто проще, чем введение геодезических в кривом пространстве-времени. Однако необходимо сделать несколько предостерегающих замечаний. Мы использовали идею о том, что, какого бы рода взаимодействия мы ни вводили в лоренц-ковариантную теорию, ничто не может двигаться быстрее скорости света, которая у нас положена равной единице. Однако выписанные нами уравнения обладают замечательным свойством: хотя они приводят в каждой точке к конечной скорости, но она, в общем, не равна единице, а зависит от $\varphi_{\mu\nu}$ (конечно, поскольку свет также подвержен влиянию, она является локальной физической скоростью света).

Зададим вопрос: как можно измерить расстояние или время между двумя событиями? Трудность состоит в том, что гравитационное поле одинаково воздействует на все измерительные инструменты. Все часы замедлят ход и все стрелки укоротятся таким образом, что если бы мы действительно измерили скорость света, то обнаружили бы, что она равна единице. Конечно, если мы знаем значение локального гравитационного поля, то мы будем в состоянии откорректировать эти эффекты. Но мы не можем измерить это поле до тех пор, пока не измерили расстояние и время. Мы попали, следовательно, в порочный круг, из которого

не вырваться. В действительности в терминах картины плоского пространства мы пришли к удивительному заключению, что «реальные» расстояния и времена являются ненаблюдаемыми величинами. Любое измерение расстояния, которое мы попытаемся сделать, даст искаженный ответ, который в действительности есть расстояние, соответствующее матрице $g_{\mu\nu}$. Ответ на любой физический вопрос — такой же, как и в теории, исходящей из представления кривого пространства-времени.

VIII. НЕЛИНЕЙНОСТЬ ПОЛЯ

Как мы видели, гравитационное поле должно быть универсально связано со всеми другими полями, содержащимися в нем. Если мы начнем с лангранжиана $L_0 = L_T + L_M$ и вычислим соответствующий тензор энергии-импульса $T_0^{\mu\nu}$, то можно ожидать, что членом взаимодействия будет kL_1, где

$$\frac{\partial L_1}{\partial \varphi_{\mu\nu}} = -T_0^{\mu\nu}.$$

К несчастью, однако, этого не удается сделать, так как введение L_1 разрушает закон сохранения для $T_0^{\mu\nu}$. В действительности член со взаимодействием сам вносит в тензор энергии-импульса вклад порядка k^2L_2. Следовательно, мы должны добавить еще член такой, что

$$\frac{\partial L_2}{\partial \varphi_{\mu\nu}} = -T_1^{\mu\nu}$$

и т. д. Каждый раз добавляя новый член со взаимодействием, мы изменяем тензор энергии-импульса и поэтому нуждаемся в следующем члене. Мы получим таким путем бесконечный ряд

$$L = L_0 + kL_1 + k^2L_2 + \ldots \tag{24}$$

На языке фейнмановских диаграмм они являются вершинами с произвольным числом гравитонов, встречающихся в точке с соответствующей степенью k.

В действительности оказывается, что ряд можно просуммировать, хотя если мы не знаем заранее ответа, вероятно, неясно, как можно додуматься до этого. Однако можно угадать ответ из ранее указанного факта, что в плоском пространстве расстояния и времена являются ненаблюдаемыми. Отсюда можно заключить, что теория должна быть инвариантной относительно произвольных преобразований координат. После этого мы должны найти подходящую скалярную плотность лагранжиана. Это, конечно, хорошо известный лагранжиан Эйнштейна, который мы не будем выписывать. Следует заметить, что закон преобразования $g_{\mu\nu}$ при преобразованиях координат

$$\delta g_{\mu\nu} = -\xi^{\rho}_{,\mu} g_{\rho\nu} - \xi^{\rho}_{,\nu} g_{\rho\mu} \tag{25}$$

дает для $\varphi_{\mu\nu}$ неоднородный закон преобразования

$$\delta\varphi_{\mu\nu} = -(\lambda_{\mu,\nu} + \lambda_{\nu,\mu}) - 2k(\lambda^{\rho}_{,\mu}\varphi_{\rho\nu} + \lambda^{\rho}_{,\nu}\varphi_{\rho\mu}), \tag{26}$$

где $\xi^{\rho} = 2k\lambda^{\rho}$. Таким образом, инвариантная группа для взаимодействующих полей отличается от инвариантной группы свободных полей. Эти две группы имеют различную структуру. Полная группа координатных преобразований является, конечно, неабелевой, тогда как инвариантная группа свободных полей, получающаяся, если положить $k = 0$, является ее абелевым суже́нием. (В некоторых отношениях это соотношение аналогично соотношению между группой Пуанкаре и ее «нерелятивистским пределом»— группой Галилея.)

Это различие в групповой структуре ставит некоторые проблемы в связи с асимптотическим условием. Очевидно, в системе с бесконечномерной неабелевой калибровочной группой асимптотическое условие вряд ли годится для произвольной калибровки. Если мы выберем набор координат, которые остаются кривыми даже в отдаленном прошлом и будущем, нельзя ожидать, что метрика будет приближаться к метрике Минковского в этих пределах. Однако, вероятно, разумно ожидать, что асимптотическое условие будет выполняться в специальной калибровке, определенной уравнением (9T) (см. работы [8, 9]) и в широком классе калибровок без патологического поведения. Также возможно работать в классе калибровок, определенных уравнением (5T), которое в теории с полным взаимодействием становится условием для гармонических координат

$$\hat{g}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0, \tag{27}$$

где $g^{\mu\nu}$ — ковариантная плотность метрического тензора [10, 1]

$$\hat{g}^{\mu\nu} = (-g)^{1/2} g^{\mu\nu}.$$

Ситуация, в которой инвариантные группы, связанные с полновзаимодействующими полями и со свободными асимптотическими полями, различны, не является специфичной для гравитации. Она встречается в любой теории с бесконечномерной неабелевой калибровочной группой, такой, как теория поля Янга — Миллса (см. ниже). Очень полное обсуждение роли асимптотического условия в таких ситуациях и соотношение между группами параметров даны Виттом [11].

IX. ПОЛЕ ЯНГА — МИЛЛСА

Основные проблемы квантования гравитационного поля связаны с существованием неабелевой калибровочной группы. Поэтому будет удобно изучить простую теорию, обладающую такой группой. Это — поле, введенное Янгом и Миллсом [12], чтобы связать с сохраняющимся изоспином токи или, в более общем виде, токи, связанные с некоторой инвариантностью группы (см. [13]). Пусть L_M инвариантен относительно группы

$$\partial\psi = g\lambda^a T_a \psi, \tag{28}$$

где λ^a — постоянные действительные параметры, g — константа, введенная для удобства, и T_a — матрицы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям некоторой полупростой группы Ли G:

$$[T_a, T_b] = f^c_{ab} T_c. \tag{29}$$

Тогда имеется набор сохраняющихся токов

$$k^\mu_a = \frac{\partial L_M}{\partial \psi_{,\mu}} T_a \psi. \tag{30}$$

Попытаемся связать эти токи с векторным полем нулевой массы. Чтобы сделать это, мы должны использовать бесконечномерную группу, в которой параметры λ^a становятся функциями координат. Можно также обратить этот аргумент. Чтобы взять лагранжиан инвариантным относительно расширенной группы, мы должны ввести дополнительные поля (см. работу [13] и критику ее в работе [14]). Единственный недостаток инвариантности относительно этой группы происходит от закона преобразования производных

$$\delta\psi_{,\mu} = g\lambda^a T_a \psi_{,\mu} + g\lambda^a_{,\mu} T_a \psi. \tag{31}$$

Мы можем добиться инвариантности, заменяя производные «ковариантными производными»

$$\psi_{,\mu} \to \psi_{/\mu} = \psi_{,\mu} + g\varphi^a_\mu T_a \psi, \tag{32}$$

которые преобразуются по тому же закону, что и ψ, если мы припишем полю неоднородный закон преобразования:

$$\delta\psi^a_\mu = g\lambda^b f^a_{bc}\varphi^c_\mu - \lambda^a_{,\mu}. \tag{33}$$

Заметим, что ковариантное дифференцирование не коммутативно. Действительно,

$$\psi_{1\mu\nu} - \psi_{1\nu\mu} = gF^a_{\mu\nu}T_a\psi, \tag{34}$$

где

$$F^a_{\mu\nu} = \varphi^a_{\mu,\nu} - \varphi^a_{\nu,\mu} - g\varphi^b_\mu f^a_{bc}\varphi^c_\nu. \tag{35}$$

В таком виде теория несамосогласованна, так как введение связи нарушает закон сохранения k^μ_a, заменяя его ковариантным уравнением сохранения

$$k^\mu_{a/\mu} = k^\mu_{a,\mu} - \varphi^b_\mu f^c_{ba} k^\mu_c = 0, \tag{36}$$

тогда как полный ток, связанный с полем без массы, должен удовлетворять нормальному закону сохранения. Трудность заключается в том, что сами поля φ^a_μ обладают соответствующими ненулевыми квантовыми числами и должны вносить вклад в ток. Другим симптомом является тот факт, что лагранжиан L_V не инвариантен относительно (33), а инвариантен лишь относительно абелевой группы (3V). Однако легко исправить этот дефект. Следует только заменить L_V инвариантным лагранжианом

$$L_V = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a, \tag{37}$$

где индекс a опущен с помощью метрического тензора группы Ли:

$$g_{ab} = f^c_{ad} f^d_{cb} \tag{38}$$

(заметим, что g_{ab} должен быть положительно определенным, чтобы получить положительно определенный гамильтониан, так что группа должна быть полупростой и компактной).

Теперь теория является последовательной. Сохраняющийся ток равен

$$j^\mu_a = k^\mu_a - g f^b_{ac}\varphi^c_\nu F^{\mu\nu}_b. \tag{39}$$

Второй член представляет вклад самих векторных полей. Заметим, что, как и в гравитационном случае, асимптотические поля имеют другую инвариантную группу, а именно абелеву группу, которая получается, если положить $g = 0$.

Возможен и другой подход к гравитационному полю (см. [13, 15]). Отправной точкой в этом случае является инвариантность относительно шестипараметрической однородной группы Лоренца или относительно десятипараметрической группы Пуанкаре с бесконечно малыми преобразованиями:

$$\delta\psi = -\xi^\mu\psi_{,\mu} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}s_{\mu\nu}\psi,$$

$$\xi^\mu = \varepsilon^\mu + \varepsilon^\mu_\nu x^\nu.$$

Полагая ε^μ и $\varepsilon^{\mu\nu}$ произвольными функциями координат и времени и пытаясь восстановить инвариантность введением дополнительных полей, приходим, довольно естественно (хотя и не однозначно), к стандартной гравитационной связи, выраженной в терминах так называемого тетрад-

ного формализма, в котором в каждой точке вводится набор четырех ортогональных векторов ε_α^μ. В дополнение к общей координатной инвариантности (которая исходит из преобразований ξ^μ) имеются произвольные, зависящие от координат лоренц-преобразования тетрад $\varepsilon^{\mu\nu}$. Лагранжиан получается заменой

$$\psi_{,\alpha} \longrightarrow e_\alpha^\mu \psi_{/\mu},$$

$$\psi_{/\mu} = \psi_{,\mu} + \omega_\mu^{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}\psi$$

и также (чтобы сделать его скалярной плотностью) умножением на $e = (\det e_\alpha^\mu)^{-1}$. Лагранжиан свободного гравитационного поля дается выражением

$$\frac{1}{2k^2} e e_\alpha^\mu e_\beta^\nu R_{\mu\nu}^{\alpha\beta},$$

где

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \omega_{\beta\mu,\nu}^\alpha - \omega_{\beta\nu,\mu}^\alpha - \omega_{\gamma\mu}^\alpha \omega_{\beta\nu}^\gamma + \omega_{\gamma\nu}^\alpha \omega_{\beta\mu}^\gamma.$$

X. ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ КВАНТОВАНИЯ

Трудности квантования гравитационного поля, или поля Янга — Миллса, возникают из-за наличия бесконечномерной неабелевой калибровочной группы, что означает (как и в случае электродинамики), что не все полевые переменные являются истинными динамическими переменными. Существуют три основных способа решения этой проблемы.

1. Градиентно-инвариантные методы

Так как все наблюдаемые величины в теории калибровочно-инвариантны, то можно утверждать, что сами калибровочные поля физически неуместны, и попытаться исключить их. В случае электродинамики, например, можно работать только с полями $F_{\mu\nu}$. Трудность, возникающая здесь, заключается в том, что локальные уравнения движения нельзя получить из локальной лагранжевой функции. Технически очень трудно полностью отказаться от использования потенциалов. Более того, следует отказаться от калибровочно-инвариантных операторов полей и заменить их калибровочно-инвариантными выражениями. В идеальном случае следует, вероятно, использовать только билинейные величины, такие, как $\bar{\psi} O \psi$, но это чрезвычайно трудно. Можно ввести калибровочно-инвариантные операторы ценой того, что они нелокальны и зависят от траектории. Главным образом используются выражения типа

$$\exp\left(ie \int_{x_0}^{x} A_\mu \, dx^\mu\right) \psi(x).$$

Этот метод был развит Мандельстамом [16] и применим как к гравитации, так и к электромагнетизму. Однако получение калибровочной инвариантности ценой введения зависимости от траектории не является большим упрощением и метод нелегко провести на практике.

2. Радиационно-калибровочные методы

Наиболее прямым методом решения проблемы квантования является исключение лишних переменных посредством определенного калибровочного условия. Этот метод был применен к гравитации Арновиттом, Дезером и Мизнером [17, 18, 19]. Им удалось отделить динамические переменные,

соответствующие в каждой точке пространства-времени двум независимым степеням свободы. Позже такой метод использовал Швингер как для абелевых калибровочных полей [20, 21, 22], так и для гравитационного поля [23, 24] (см. также работу [25]).

Другой способ, который также включает в себя отделение канонических переменных и в некотором смысле нарушает явную ковариантность, был использован Дираком [26-28].

Подход с некоторыми общими свойствами был развит Андерсоном и Бергманом [29] (см. также работы [30, 31, 32, 33]).

Трудностью всех этих методов является отсутствие явной ковариантности, что приводит к нелокальным коммутационным соотношениям динамических переменных.

Например, в радиационно-калиброванной электродинамике канонические переменные являются поперечными частями векторного потенциала и электрического поля, которые удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[A_i(\mathbf{x}),\ E_j(\mathbf{y})] = -i\left(\delta_{ij} - \frac{\nabla_i\nabla_j}{\nabla^2}\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -i\delta_{ij}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - i\nabla_i\nabla_j D(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{40}$$

Помимо многих практических трудностей, существует принципиальная проблема, связанная с работой с этой калибровкой. Так как этот формализм нарушает явную лоренц-ковариантность, необходимо a posteriori проверять ковариантность теории. Это можно сделать, задав набор генераторов группы Лоренца и проверив, что они действительно удовлетворяют требуемым соотношениям коммутации. Можно думать, что если исходить из явно ковариантного лагранжиана, выбор специальной калибровки, вероятно, не сможет нарушить ковариантность. В классической теории это действительно так. Скобки Пуассона генераторов, определенные обычным образом, не могут быть неверными. Однако в квантовой теории существует серьезная проблема порядка операторов, особенно ввиду того, что исключенные переменные в общем не даны точно, а лишь как решения чрезвычайно сложных неявных уравнений. Проверка согласованности является чрезвычайно сложной алгебраической задачей (см. [22, 24, 34]).

3. Калибровочно-инвариантные методы

Алгебраические трудности представляют существенное препятствие для практических вычислений в формализме, в котором отсутствует явная ковариантность. Очевидный выход, который немедленно приходит в голову каждому, хорошо владеющему квантовой электродинамикой,— работать с ковариантной калибровкой, типа калибровки Лоренца. Однако при попытке сделать это мы снова наталкиваемся на необычные проблемы.

Рассмотрим, например, поле Янга — Миллса. Следуя трактовке Ферми для электромагнитного поля, мы попытаемся прибавить к лагранжиану (37) калибровочно-неинвариантный член

$$L = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2}\chi^a\chi_a - \varphi_\mu^a k_a^\mu, \tag{41}$$

где $\chi_a \equiv \varphi^\mu_{a,\mu}$. Для этого лагранжиана канонически сопряженный импульс больше не равен нулю, и поэтому легко перейти к обычному квантованию. Уравнения движения

$$F^{\mu\nu}_{a,\nu} - g\varphi_\nu^b f_{ba}^c F_c^{\mu\nu} + \chi_a{}^{,\mu} = k_a^\mu \tag{42}$$

становятся эквивалентными уравнениям поля Янга — Миллса, если наложить дополнительное условие $\chi_a = 0$. Хорошо известно, что никакие нор-

мированные векторы в гильбертовом пространстве не удовлетворяют простому условию

$$\chi_a | \rangle = 0, \tag{43}$$

так как χ_a имеет непрерывный спектр. В случае электромагнетизма мы можем использовать другую возможную форму [34,35]

$$\chi^{(+)} | \rangle = 0, \tag{44}$$

где $(+)$ означает положительные частоты. Причиной, по которой можно сделать это, является тот факт, что даже для взаимодействующих полей χ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Box \chi = 0, \tag{45}$$

так что существует инвариантное различие между частями с положительной и отрицательной частотами. Однако, как легко видеть из уравнения (42), аналогичное уравнение для поля Янга — Миллса имеет вид

$$\chi^{\mu}_{a,\mu} - \varphi^{b}_{\mu} f^{c}_{ba} \chi_c^{,\mu} = 0. \tag{46}$$

Таким образом, в общем случае χ_a имеет как пространственноподобные так и времениподобные фурье-компоненты и нет инвариантных различий между $\chi^{(+)}$ и $\chi^{(-)}$. Поэтому мы не можем использовать дополнительное условие Гупты—Блойлера (44). Конечно, для этого нет физических причин. Метод Гупты — Блойлера, требующий наличия в гильбертовом пространстве нефизических состояний, является математическим решением, лишенным физической основы.

С первого взгляда поэтому мы поставлены перед очень неприятной дилеммой. Использование как нековариантной калибровки, так и калибровочно-инвариантного формализма математически сложно и утомительно, а стандартный калибровочно-ковариантный метод квантовой электродинамики просто не работает.

XI. ОБОБЩЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Очень бесхитростный метод решения этой дилеммы развит Швингером [22, 24], который использовал понятие обобщенных операторов. Основная идея метода очень проста.

Гильбертово пространство считается просто физическим пространством, не содержащим лишних состояний. Однако состояния можно обозначать различными способами, в соответствии с различными возможностями выбора калибровки. Предположим, например, что φ представляет полный (но калибровочно-зависимый) набор переменных, таких, например, как значения вектор-потенциала на пространственноподобной гиперповерхности. Тогда, конечно, мы хорошо знаем, что означает состояние, в котором φ имеет определенные значения, и можем обозначить его $|\varphi'\rangle$. Трудность заключается не в том, что это состояние не определено, а в том, что обозначение, кроме сведений о значениях физических переменных, содержит лишнюю информацию о калибровочных параметрах. В частности, если φ'' связано с φ' градиентным преобразованием, то они представляют одно и то же состояние:

$$|\varphi''\rangle = |\varphi'\rangle.$$

Поэтому ясно, что φ не является оператором в любом нормальном смысле этого слова, поскольку его собственные значения даже не определены-не говоря уже об ортогональности.

Очевидно, можно описать любое физическое состояние в φ-«представлении»: $\langle\varphi' \mid \rangle$. Однако не все функционалы от φ' могут представлять физические состояния, так как они должны удовлетворять уравнениям типа

$$\langle \varphi'' \mid \rangle = \langle \varphi' \mid \rangle. \tag{47}$$

Если возможно разделить φ на набор калибровочно-независимых переменных φ_1 и набор калибровочных параметров λ, то уравнение (47) записывается в инфинитезимальной форме

$$\frac{\delta}{\delta\lambda} \langle \varphi_1'\lambda \mid \rangle = 0. \tag{48}$$

Это, очевидно, есть условие градиентной инвариантности состояний. Теперь ясно, что выражения типа φ' и $\delta/\delta\lambda$ можно рассматривать как операторы в пространстве всех функционалов φ'. Они называются обобщенными операторами. Уравнение (48) является «дополнительным условием», которое выбирает из этого пространства те векторы, которые рассматриваются как физические и отождествляются с векторами физического гильбертова пространства. Вопрос о нормализации не возникает, поскольку мы не вводили и не нуждаемся во введении какой-либо нормы в функциональном пространстве. Единственная имеющаяся норма — это норма физического гильбертова пространства, которая выражается уравнениями

$$\langle \varphi_1''\lambda'' \mid \varphi_1'\lambda' \rangle = \delta\,[\varphi_1'', \varphi_1'], \tag{49}$$

$$\int [d\varphi_1'] \mid \varphi_1'\lambda' \rangle \langle \varphi_1'\lambda' \mid = 1. \tag{50}$$

Чтобы увидеть, как эта идея действует на практике, рассмотрим случай электродинамики в лоренцевой калибровке. Естественным, и единственным не создающим трудности в этом формализме, способом наложить калибровочное условие Лоренца является введение надлежащего лагранжева множителя. Возьмем

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \chi A^{\mu}_{,\mu} - A_\mu j^\mu. \tag{51}$$

Уравнения движения:

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} + \chi^{,\mu} = j^\mu \tag{52}$$

и

$$A^{\mu}_{,\mu} = 0. \tag{53}$$

Заметим, что уравнение (53) является операторным (или, вернее, обобщенно-операторным, так как A^μ не точно оператор). Канонические коммутационные соотношения даются выражениями

$$\begin{gathered}[A_k(\mathbf{x}),\ F^{0l}(\mathbf{y})] = i\delta_k^l \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\ [A_0(\mathbf{x}),\ \chi(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{gathered} \tag{54}$$

Все остальные коммутаторы равны нулю. Калибровочные преобразования этих операторов генерируются оператором

$$G = \int d^3\mathbf{x}\,(\chi\lambda_{,0} - \lambda\chi_{,0}). \tag{55}$$

Например, как легко проверить,

$$-i\,[A_\mu, G] = -\lambda_\mu. \tag{56}$$

Если ψ обозначает вектор нашего функционального пространства, то условием того, что он представляет физическое состояние, является

калибровочная инвариантность

$$G\psi = 0, \tag{57}$$

или иначе

$$\chi(\mathbf{x})\,\psi = \chi_{,0}(\mathbf{x})\,\psi = 0. \tag{58}$$

Из-за уравнения $\Box\chi = 0$, которое получается, если взять дивергенцию от (52), справедливость этих уравнений в какой-либо один момент времени означает, что они должны быть справедливыми и во все времена. Уравнение (54) позволяет выбрать такое представление функционального пространства, в котором все A_μ диагональны (в один момент времени) и сопряженные операторы представляются функциональными производными:

$$F^{0k} \to -i\frac{\delta}{\delta A'_k}, \qquad \chi \to -i\frac{\delta}{\delta A'_0}. \tag{59}$$

Теперь условие (58) превращается в условия

$$-i\frac{\delta}{\delta A'_0}\langle A'_\mu|\rangle = 0, \tag{60}$$

$$\left[i\nabla_k\frac{\delta}{\delta A'_k} + j_0\right]\langle A'_\mu|\rangle = 0. \tag{61}$$

Таким образом, функционалы, представляющие физические состояния, не зависят от A'_0, а зависят весьма просто от продольной части A'_k. В действительности можно легко проинтегрировать это уравнение, получая зависимость в точной форме. Эти идеи обобщаются и на поле Янга — Миллса; при этом мы наталкиваемся только на алгебраические трудности.

До сих пор не видели применения этого метода. Предположим, что нас интересует вычисление некоторой физической величины, например полной энергии, которую представляет обобщенный оператор F. Условием калибровочной инвариантности F является, конечно,

$$-i\,[F,\, G(\lambda)] = 0, \tag{62}$$

или эквивалентно

$$-i\,[F,\, \chi(\mathbf{x})] = 0 \tag{63}$$

для всех $\mathbf{x}$. Однако это условие более строгое, чем в действительности необходимо. Если F представляет физическую величину, то он должен, очевидно, давать физические состояния при действии на функционал ψ, представляющий физическое состояние. Другими словами, из

$$G(\lambda)\,\psi = 0$$

должно вытекать

$$G(\lambda)\,F\psi = 0.$$

Ясно, что условием для этого является

$$-i\,[F,\, G(\lambda)]\,\psi = 0, \tag{64}$$

т. е. коммутатор F с G должен быть чисто калибровочной переменной, которая обращается в нуль в любом физическом состоянии. Это более слабое условие, чем (62). Очевидно, одному физическому состоянию будет соответствовать много различных обобщенных операторов. Например, к F можно добавить любое выражение, подобное $G(\lambda)$, которое

автоматически равно нулю. Два обобщенных оператора F и F' будут соответствовать одному и тому же физическому оператору, если

$$(F-F')\psi=0$$

для всех физических состояний ψ. Более того, если мы рассмотрим два оператора F и K, каждый из которых эквивалентен соответственно F' и K', то

$$[F, K]\psi=[F', K']\psi,$$

так что мы можем вычислять коммутаторы с любым специальным выбором.

Мы можем привести каждый физический оператор к калибровочно-инвариантной форме, ликвидируя, например, A_0, продольную часть A_k и производные по ним. Правильно также использовать калибровочно-неинвариантную форму, в которой значительно легче вычислять коммутационные соотношения. В частности, например, мы можем вычислить матричные элементы оператора рассеяния, используя лоренц-калибровочные гриновские функции вместо значительно более сложных калибровочных структур, полученных приведением к радиационной калибровке.

XII. ОБСУЖДЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО СЛУЧАЯ

Понятие обобщенных операторов особенно полезно при обращении к гравитационному полю и имеет в этом случае очень простую физическую интерпретацию.

Мы можем использовать для описания состояний гравитационного поля только калибровочно-инвариантные величины. Однако это очень трудно. На практике, чтобы описать то, что мы видим, мы, естественно, выбираем набор координат и используем их для обозначения событий. Поскольку другие наблюдатели с равным правом пользуются собственными наборами координат, мы должны в обозначения наших состояний включить рецепт о выборе координат. Как и прежде, эта номенклатура является излишней, и физические состояния будут описываться функционалами, удовлетворяющими дополнительным условиям, которые выражают независимость функционалов от выбора системы координат. Если мы используем одинаковые координатные условия для начальных и конечных состояний, то легко вычислить их матричные элементы. С другой стороны, если два состояния описываются различными наблюдателями в различных системах координат, то необходимо использовать координатную инвариантность, чтобы найти соотношение между этими двумя состояниями.

Нетрудно обобщить метод, обсуждавшийся выше для электромагнитного поля, на случай гравитационного поля. Проще всего начать с формы Палатини для лагранжевой функции, в которой контравариантная плотность метрического тензора $\hat{g}^{\mu\nu}$ и связность считаются независимыми переменными, а именно

$$L_G=\frac{1}{2k^2}\hat{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=\frac{1}{2k^2}\hat{g}^{\mu\nu}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda}-\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}+\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}). \qquad (65)$$

Аналогом условия Лоренца является условие (27) на гармонические координаты Фока — Дондера. Чтобы наложить его, добавим к L_G член

$$-\frac{1}{k^2}\hat{g}^{\mu\nu}_{,\nu}\chi_\mu.$$

Как и прежде, четыре поля χ_μ играют роль лагранжевых множителей и также перемещают соотношения, которые существуют между канонически сопряженными переменными, в десять полей $\hat{g}^{\mu\nu}$.

Уравнения движения теперь записываются в виде

$$\hat{g}^{\mu\nu}_{,\rho} = \hat{g}^{\mu\nu}_{,\rho} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}\hat{g}^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}\hat{g}^{\mu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho}\hat{g}^{\mu\nu} = 0, \tag{66}$$

$$R_{\mu\nu} + \chi_{\mu,\nu} + \chi_{\nu,\mu} = -k^2\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma}\right), \tag{67}$$

$$\hat{g}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0. \tag{68}$$

Используя так называемые свернутые тождества Бианки

$$\hat{g}^{\mu\rho}R_{\rho\nu/\mu} - \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\rho}R_{\rho\mu/\nu} = 0 \tag{69}$$

и ковариантный закон сохранения

$$\hat{g}^{\mu\nu}T_{\rho\nu/\mu} = 0, \tag{70}$$

можно получить, что поля χ_μ удовлетворяют волновому уравнению

$$\hat{g}^{\nu\rho}\chi_{\mu,\nu\rho} = 0. \tag{71}$$

Калибровочные преобразования полей генерируются операторами

$$G(\xi) = \frac{1}{k^2}\int d^3\mathbf{x}\hat{g}^{0\mu}(\xi^{\nu}_{,\mu}\chi_\nu - \xi^{\nu}\chi_{\nu,\mu}). \tag{72}$$

Поэтому, как и прежде, физические состояния представляются функционалами, удовлетворяющими дополнительным условиям

$$\chi_\nu\psi = 0, \qquad \chi_{\nu,0}\psi = 0,$$

которые в силу (71) означают, что

$$\chi_\nu(\mathbf{x})\,\psi = 0 \tag{73}$$

для всех $\mathbf{x}$. Далее теория развивается так же, как и для электромагнитного поля.

XIII. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ТЕОРИЯ ПЕРЕНОРМИРОВОК

Теперь мы обладаем теоретическим каркасом, в котором можно описывать явления гравитации, но остается проблема использования этого формализма для фактических расчетов.

По аналогии с квантовой электродинамикой естественно попытаться в гравитационном случае раскладывать по степеням гравитационной постоянной k. Этот подход рассматривал Гупта [36] (см. также работы [37, 38]). Формально можно действовать точно по аналогии с электродинамикой. Однако при этом мы быстро сталкиваемся с очень трудными проблемами перенормировок. Так как тензор энергии-импульса содержит дополнительную степень импульса по сравнению с электрическим током, диаграммы, содержащие гравитонные линии, расходятся гораздо сильнее, чем соответствующие диаграммы с фотонами. Например, в нижнем порядке собственная гравитационная энергия скалярной частицы содержит не только логарифмическую и квадратичную расходимости, но и расходимость четвертого порядка. Конечно, согласно стандартным аргументам квантовая гравидинамика является неперенормируемой теорией. Однако положение не столь безнадежно. Хорошо известно, что в случае квантовой электродинамики градиентная инвариантность теории имеет решающее значение в ограничении степени расходимости; можно ожидать, что то же самое справедливо и в гравитации. Однако в последнем случае разложение по степеням k нарушает общекоординатную инвариантность теории, так как в силу неабелевой природы группы диаграммы каждого порядка

не являются в отдельности инвариантными. Таким образом, теория возмущений, вероятно, не является подходящим методом решения этой проблемы.

Возможный подход к проблеме перенормировок, который оперирует с полными гриновскими функциями теории столкновений и использует функциональные методы, был развит де Виттом [11] (см. также [39, 40, 41, 42]). Достигнутый вывод таков, что для исключения всех расходимостей в теории достаточно ввести конечное число контрчленов. Однако некоторые из них квадратичны по тензору Римана и поэтому содержат четвертые производные от полевых переменных. Это, очевидно, делает необходимым введение индефинитной метрики в физическом гильбертовом пространстве, что явно нежелательно. Поэтому проблему перенормировок нельзя считать окончательно решенной. До тех пор пока существует, полевая теория гравитации остается формальной структурой, в которой вычисления можно проводить лишь в низшем порядке.

В заключение стоит спросить: не напрасны ли были все усилия, потраченные на решение этих проблем, останутся ли они лишь теоретическим упражнением или можно найти какое-либо приложение теории? Хорошо известна трудность проверки даже предсказаний общей теории относительности, и, конечно, значительно труднее придумать ситуацию, в которой несущественны как гравитационная постоянная, так и постоянная Планка. Гравитационные силы становятся существенными лишь в области больших масс, способных генерировать макроскопические поля, но размеры этих тел так велики, что квантовомеханические рассмотрения становятся неуместными.

Однако существует одно возможное приложение теории, хотя мы не можем точно указать, как экспериментально проверять результаты теории. Это — гравитационный коллапс (см. работу [43]). В соответствии с классической теорией, если сильно сжать тело большой массы, гравитационные силы станут больше отталкивательных сил и масса начнет катастрофически коллапсировать. Если будет достигнута критическая точка, то никакая чисто классическая сила не сможет остановить коллапс. Это является следствием универсальности гравитационного взаимодействия. Любая возможная сила будет описываться соответствующим членом в лагранжиане и давать свой вклад в тензор энергии-импульса. Последний будет генерировать собственное гравитационное поле, которое в этой ситуации превосходит отталкивание. Более того, в соответствии с квантовой механикой не поможет даже открытие других полей или частиц. Классическое гравитационное поле, источником которого является среднее значение $\langle T_{\mu\nu}\rangle$, будет давать катастрофический коллапс. Единственный возможный способ избежать полного коллапса (который в данном случае происходит за определенное конечное время для сопутствующего наблюдателя) заключается в квантовании самого гравитационного поля. Во всяком случае ясно, что квантовые эффекты становятся существенными, когда гравитационное поле достигает величины порядка единицы (в такой ситуации не требуется энергии для образования пар). Это происходит для ядерной материи при межъядерных расстояниях порядка 10^{-33} *см*. Поэтому изучение поздних стадий гравитационного коллапса требует чисто квантовомеханического рассмотрения. Интересный вопрос состоит в том, можно ли избежать коллапса в квантовой теории. По существу, мы хотим знать, имеет ли описываемая система (в некотором смысле) основное состояние. Совершенно ясно, что разложение по степеням k вообще не применимо к этой проблеме. Скорее следует использовать функциональный метод, описывающий состояния с помощью функционалов от полевых переменных. Задача тогда заключается в минимизации

некоторого подходящего функционала с заданными граничными условиями Во всяком случае этот метод — единственный в данной ситуации, где квантовая теория гравитации может найти прямое приложение, по крайней мере в будущем. Конечно, также остается открытым вопрос, существуют ли реальные примеры гравитационного коллапса в видимой Вселенной.

Международный центр теоретической физики,
Триест, Италия

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, Теория пространства времени и тяготения, М., «Наука», 1961.
2. S. Epstein, Nuovo Cimento **25**, 222 (1965).
3. R. P. Feynman, Report at Chapel Hill Conference on Gravitation, 1957; Report at Warsaw Conference on Relativity, 1962.
4. W. Thirring, Ann. Phys. **16**, 96 (1961).
5. M. Fierz, Helv. Phys. Acta **12**, 3 (1939).
6. M. Fierz, W. Pauli, Proc. Roy. Soc. **A173**, 211 (1939).
7. S. Weinberg, Phys. Rev. **B135**, 1049 (1964).
8. R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, Phys. Rev. **121**, 1556 (1961).
9. R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, Nuovo Cimento **19**, 668 (1961).
10. de Donder, La Gravifique Einsteinienne, Gauthier-Villars, Paris, 1921.
11. B. S. de Witt, в сб. Lectures in Relativity, Groups and Topology, Gordon and Breach, New York, 1963.
12. Yang and Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
13. R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).
14. V. I. Ogievetski, I. V. Polubarinov, Nuovo Cimento **23**, 173 (1962).
15. T. W. B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 219 (1961).
16. S. Mandelstam, Ann. Phys. **19**, 25 (1962).
17. R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, Phys. Rev. **113**, 745 (1959).
18. R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, Phys. Rev. **116**, 1322 (1959).
19. R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, Phys. Rev. **117**, 1595 (1960).
20. J. Schwinger, Phys. Rev. **125**, 1043 (1962).
21. J. Schwinger, Phys. Rev. **127**, 324 (1962).
22. J. Schwinger, Phys. Rev. **130**, 402 (1963).
23. J. Schwinger, Phys. Rev. **130**, 1253 (1963).
24. J. Schwinger, Phys. Rev. **132**, 1317 (1963).
25. T. W. B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 219 (1961).
26. P. A. M. Dirac, Cand. J. Math. **2**, 159 (1950).
27. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A246**, 333 (1958).
28. P. A. M. Dirac, Phys. Rev. **114**, 924 (1959).
29. J. L. Anderson, P. G. Bergmann, Phys. Rev. **83**, 1018 (1951).
30. J. L. Anderson, Phys. Rev. **111**, 965 (1958).
31. J. L. Anderson, Phys. Rev. **114**, 1182 (1959).
32. P. G. Bergmann, Phys. Rev. **124**, 274 (1961).
33. P. G. Bergmann, Rev. Mod. Phys. **33**, 510 (1961).
34. Y.-P. E. Yao, Harvard, 1964 (не опубликовано).
34a. S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc. (Lnd) **A63**, 681 (1950).
35. K. Bleuler, Helv. Phys. Acta, **23**, 567 (1950).
36. S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc. (Lnd) **A65**, 608 (1952).
37. S. N. Gupta, в сб. Recent Developments in General Relativity, Pergamon — London — Warsaw, 1962.
38. J. L. Garrison, Phys. Rev. **129**, 1424 (1963).
39. B. S. de Witt, J. Math. Phys. **2**, 151 (1961).
40. B. S. de Witt, J. Math. Phys. **3**, 1073 (1962).
41. B. S. de Witt, Phys. Rev. Lett. **13**, 114 (1964).
42. R. Utiyama, B. S. de Witt, J. Math. Phys. **3**, 608 (1962).
43. J. A. Wheeler, в сб. Lectures in Relativity. Groups and Topology, Gordon and Breach, New York, 1963.