

551.509/51

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КРАТКОСРОЧНЫХ ПРОГНОЗОВ ПОГОДЫ

А. С. Монин

1. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Не ставя целью хотя бы сколько-нибудь подробно изложить историю научных методов предсказания погоды (и тем более ненаучных, подобных, например, календарю Брюса), мы ограничимся упоминанием лишь пяти событий, сыгравших, по нашему мнению, наиболее важную роль в формировании современной теории прогноза погоды (более подробные исторические сведения интересующиеся читатели найдут, например, в книге Хргиана ¹⁾).

Первое событие — организация Службы погоды директором Парижской астрономической обсерватории Урбаном Леверье, который, выполняя поручение французского правительства, данное после катастрофической бури 14 ноября 1854 г. в Балаклаве, 19 февраля 1855 г. впервые составил карту погоды того же дня.

Второе событие — статья Вильгельма Бьеркнеса «Проблема предсказания погоды, рассматриваемая с точки зрения математики и механики» (1904), в которой эта проблема впервые формулируется как задача с начальными данными для уравнений гидромеханики бароклиной жидкости *) (работы Якоба Бьеркнеса 1917—1919 гг. и последующие работы так называемой бергенской школы, в которых развито представление об атмосферных фронтах, т. е. поверхностях раздела между различными воздушными массами, и об образовании циклонов в результате потери устойчивости волн на поверхности раздела, явились основой современных синоптических методов краткосрочного прогноза погоды, но для численных методов прогноза эти представления большого значения пока еще не приобрели, правда, по чисто техническим причинам: используемые при

*) Жидкость называется баротропной, если ее плотность ρ — функция только давления p , и бароклиной в противном случае. Реальная атмосфера бароклинна: для нее ρ зависит не только от p , но и от температуры T и, в пренебрежении влажностью, справедливо уравнение Клапейрона $p = \rho R T$ ($R \approx 0,287$ дж/г·град — газовая постоянная для сухого воздуха). Для жидкости в поле потенциальных сил и при отсутствии вязкости справедлива теорема В. Бьеркнеса: $\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_L \frac{dp}{\rho}$ (где $\Gamma =$

$= \oint_L \mathbf{v} d\mathbf{S}$ — циркуляция скорости по замкнутому контуру L), из которой следует,

что в бароклиной жидкости пересечение поверхностей $p = \text{const}$ и $\rho = \text{const}$ (или $p = \text{const}$ и $T = \text{const}$) приводит к вихреобразованию.

численных прогнозах пространственные сетки с горизонтальным шагом в несколько сотен километров не позволяют учесть узкие зоны с большими градиентами гидродинамических полей, каковыми являются, в частности, атмосферные фронты; для их учета в численных прогнозах нужно разработать иные методы).

Третье событие — книга Льюиса Ричардсона «Предсказание погоды численным процессом» (1922), которая содержала первую попытку рассчитать будущую погоду путем численного решения уравнений гидромеханики — так, как астрономы предвычисляют положения планет, решая уравнения динамики планетной системы. Попытка была неудачной: составленный после очень длинных вычислений прогноз погоды на один день (на 20 мая 1920 г. для района Нюрнберг — Аугсбург) оказался неудовлетворительным. С сегодняшних позиций причины неудачи Ричардсона ясны; это: 1) неполнота начальных данных (в то время имелись только наземные данные и лишь по скудной сети станций в Европе), 2) несовершенство конечно-разностных схем (например, не соблюдался установленный позже, в 1928 г., критерий Куранта — Фридрихса — Леви для соотношения пространственного и временного шагов), 3) излишняя сложность интегрируемых уравнений, которые наряду с важными для погоды движениями (так называемыми синоптическими процессами) описывали и всевозможные «шумы» типа акустических волн, дыхания растений и т. п.

Эта последняя трудность была преодолена в 1940 г. работой И. А. Кибеля², явившейся, вероятно, самым важным событием в рассматриваемой нами истории; в ней был предложен фундаментальный принцип упрощения уравнений гидромеханики — асимптотическое «квазигеострофическое приближение», позволяющее «отфильтровать» из решений уравнений несущественные для погоды «метеорологические шумы». Этот принцип в последующем послужил основой для создания гидродинамической теории краткосрочных прогнозов погоды.

В 1940 г., стремясь ограничить расчет лишь нижним слоем атмосферы (тропосферой), Кибель ввел на его верхней границе (тропопаузе) искусственное условие, не вытекающее из законов гидродинамики. Уравнения «квазигеострофического приближения», свободные от этого ограничения, были выведены уже в послевоенное время, в появившихся почти одновременно работах А. М. Обухова³ и Дж. Чарни^{4, 5}. Эти уравнения сразу же были использованы для практических расчетов: прогноз погоды был одной из тех задач, которые имел в виду Джон Нейман при разработке быстродействующих вычислительных машин; он стал соавтором одной из первых работ⁶ по реализации уравнений «квазигеострофического приближения» на ЭВМ. Создание гидродинамической теории краткосрочного прогноза метеорологических полей явилось крупнейшим достижением физики атмосферы в послевоенные годы. Ныне эта теория уже изложена в ряде книг^{7–10}, специально посвященных численным методам предсказания погоды; первая из них — книга И. А. Кибеля⁷ — была, по нашему мнению, лучшей.

Что же касается физических основ долгосрочного прогноза погоды, то история их разработки гораздо короче — ее можно отсчитывать от опубликованной в 1943 г. работы Е. Н. Блиновой¹¹. Основная разница между краткосрочными и долгосрочными прогнозами (объясняющая и различие в состоянии их теории) заключается, по нашему мнению¹², в том, что для краткосрочных прогнозов оказываются достаточными уравнения гидродинамики в адиабатическом приближении, тогда как неадиабатические процессы составляют самую суть долгосрочных изменений погоды.

2. МАСШТАБЫ ПРОЦЕССОВ ПОГОДЫ

Приведем ряд количественных характеристик атмосферы — объекта, к которому мы будем применять уравнения гидромеханики. Атмосфера содержит $M \approx 5,3 \cdot 10^{21}$ г воздуха. Полная кинетическая энергия ее движений E имеет величину порядка 10^{21} дж (энергия индивидуального циклона, грубо говоря, на два порядка меньше; для сравнения укажем, что 1 Мт ТНТ $\sim 4 \cdot 10^{15}$ дж). Так, по эмпирическим оценкам Борисенкова ¹³, в северном полушарии зимой $E = 4 \cdot 10^{20}$ дж и летом $1,9 \cdot 10^{20}$ дж, а в южном полушарии зимой $7,1 \cdot 10^{20}$ дж и летом $3,9 \cdot 10^{20}$ дж; аналогичные оценки приводят Пишароти ¹⁴ и Груза ¹⁵ (последний указывает, что в среднем в тропосфере более 70% кинетической энергии приходится на зональные, т. е. параллельные кругам широт, и менее 30% — на меридиональные движения; примерно половина энергии связана со средней зональной циркуляцией и половина — с отклонениями от нее). Кинетическая энергия на единицу массы E/M оказывается порядка 10^6 эрг/г $= (10$ м/сек)²; поэтому $U = 10$ м/сек принимается за типичную скорость движений воздуха при синоптических процессах.

Первичным источником энергии атмосферных процессов является солнечное тепло. Мощность этого источника на Земле равна $1,8 \cdot 10^{14}$ квт, но около 40% солнечной радиации сразу отражается обратно в космос, так что за исходную цифру следует взять $1 \cdot 10^{14}$ квт, или, в среднем на единицу площади поверхности Земли, 20 мвт/см². Лишь небольшая доля этой энергии превращается в кинетическую энергию атмосферных движений; по эмпирическим оценкам Пальмена ^{16, 17}, скорость $\frac{\partial E}{\partial t}$ превращения потенциальной энергии в кинетическую в атмосфере в целом имеет порядок $2 \cdot 10^{12}$ квт, так что к. п. д. «атмосферной машины» составляет всего около 2% (в индивидуальных циклонах $\frac{\partial E}{\partial t} \sim (1 \div 2) \cdot 10^{11}$ квт, а вне их в среднем происходит медленное обратное превращение кинетической энергии в потенциальную). Средняя скорость генерации кинетической энергии в единице массы $\frac{1}{M} \frac{\partial E}{\partial t}$ по этим данным равна 4 см²/сек³. Такого же порядка должна быть и средняя удельная скорость ϵ диссипации кинетической энергии в теплоту за счет трения; и действительно, Брент ¹⁸ еще в 1926 г. получил для тропосферы независимым методом $\epsilon \sim 5$ см²/сек³.

Типичное время превращений энергии

$$\tau = \left(\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial t} \right)^{-1}$$

оказывается равным 10^{21} дж/ $2 \cdot 10^{12}$ квт $= 5 \cdot 10^5$ сек, т. е. оно имеет порядок недели. Такого же порядка оказывается типичное время вырождения энергии синоптических процессов под действием вязкости. Действительно, в интервале масштабов L , в котором имеет место каскадный процесс передачи энергии от крупномасштабных движений к мелкомасштабным, происходящий с постоянной (т. е. не зависящей от L) скоростью ϵ , эффективная «вязкость» будет иметь вид $\nu(L) \sim \epsilon^{1/3} L^{4/3}$ (так называемый «закон четырех третей» Ричардсона ¹⁹, оправдывающийся почти во всем спектре масштабов атмосферных движений от мм до тыс. км — рис. 1), а временем вырождения энергии под действием этой «вязкости» будет $\tau(L) \sim L^2/\nu(L) \sim \epsilon^{-1/3} L^{2/3}$. Типичным масштабом длины для синоптических процессов по Обухова ³ служит $L_0 = c/l$, где c — скорость звука, $l = 2\omega \cos \theta$ — так называемый параметр Кориолиса ($\omega = 7,29 \cdot 10^{-5}$ 1/сек — угловая скорость вращения Земли, θ — дополнение широты); в умеренных широтах $L_0 \sim 3$ тыс. км.

Пользуясь этим L_0 и приведенным выше значением ε , для синоптических процессов получаем $\tau(L_0) \sim \varepsilon^{-1/3} L_0^{2/3} \sim 3 \cdot 10^5$ сек. Заметим, что такую же величину имеет и эйлеров масштаб времени для синоптических процессов $\tau_1 = L_0/U$ (поскольку средние слои атмосферы в западно-восточном переносе умеренных широт совершают полный оборот вокруг Земли за несколько

недель, эйлеров масштаб времени для атмосферы в целом имеет порядок месяца).

Приведем также некоторые данные об энергетической роли влажности воздуха. По Рудлову²⁰ (близкие данные приводит Нейк²¹) в атмосфере содержится в среднем $1,24 \cdot 10^{19}$ г влаги, что эквивалентно слою осажденной воды в 24 мм (в океане имеется $1,37 \cdot 10^{24}$ г воды, а в ледниках — $2,9 \cdot 10^{22}$ г льда — его растопление повысило бы уровень моря на 80 м). Среднее годовое количество осадков на Земле $3,96 \cdot 10^{20}$ г (из них $2,97 \cdot 10^{20}$ г на океанах и $0,99 \cdot 10^{20}$ г на суше), что эквивалентно слою воды в 780 мм (таким образом, водяной пар в атмосфере обновляется в среднем $780/24 = 32$ раза в год, или каждые 11 дней). Таково же и годовое количество испаряющейся влаги, но на океаны приходится 3,34, а на сушу 0,62; сток с суши составляет $0,37 \cdot 10^{20}$ г. Если взять

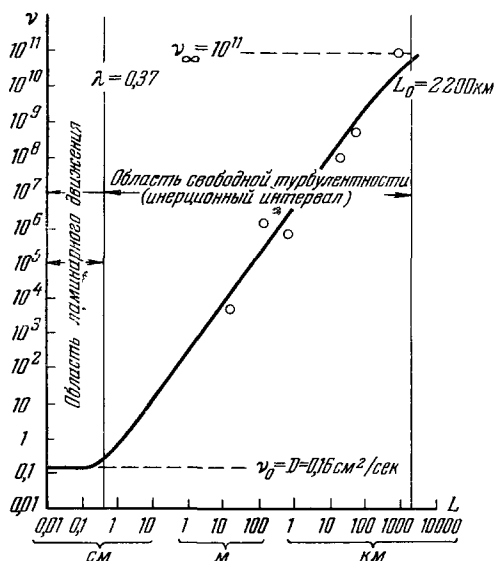


Рис. 1. Виртуальный коэффициент диффузии $\nu(L)$ как функция масштаба турбулентности L (эмпирические точки — по Ричардсону¹⁹).

для скрытой теплоты испарения значение $2,4 \cdot 10^3$ дж/г, то для мощности затрат тепла на испарение получится $3 \cdot 10^{13}$ квт, т. е. 30% поглощаемого Землей солнечного тепла — этот приток тепла в атмосфере оказывается в 15 раз больше скорости генерации кинетической энергии!

3. СПЕКТР АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Колебания во времени метеорологических элементов: скорости движений воздуха, температуры, давления, влажности и т. д. — содержат составляющие с периодами от долей секунды и, по меньшей мере, до десятков тысячелетий. Весь спектр периодов колебаний можно разбить на нижеследующие девять интервалов:

1) *Микрометеорологические колебания* с периодами от долей секунды до минут. Наибольший вклад в них вносит мелкомасштабная турбулентность. Ее энергетический спектр $fS(f)$ ($f = 1/\tau$ — частота, τ — период колебаний, $S(f)$ — спектральная плотность энергии) в приземном слое воздуха имеет максимум у периода $\tau_{\max} \sim 1$ мин, соответствующего масштабу горизонтальных турбулентных неоднородностей $L = U\tau_{\max} \sim \sim 600$ м. При $f \gg 1/\tau_{\max}$ спектры скорости ветра удовлетворяют «закону пяти третей» Колмогорова — Обухова²²

$$S(f) \sim \frac{\varepsilon^{2/3}}{U} \left(\frac{f}{U} \right)^{-5/3};$$

аналогичную форму имеют ²³ и спектры температуры:

$$S_T(f) \sim \frac{N\varepsilon^{-1/3}}{U} \left(\frac{f}{U} \right)^{-5/3}$$

(где $N = \chi (\nabla T)^2$ — скорость выравнивания температурных неоднородностей, T — температура, χ — молекулярная теплопроводность). В области максимальных частот турбулентных флуктуаций $f \sim U\varepsilon^{1/4}\nu^{-3/4}$ (ν — молекулярная вязкость) спектр турбулентности резко обрывается.

Кроме турбулентности, в число микрометеорологических колебаний входят (с относительно малыми амплитудами) также акустические и короткопериодные гравитационные волны. Согласно теории (см. ниже) гравитационные волны преимущественно имеют периоды больше 330 сек, а акустические — меньше 300 сек; этим объясняется минимум около $\tau \sim 300$ сек в спектре $fS_p(f)$ пульсаций давления, построенном по данным микробарограмм Голицыным ²⁴ (рис. 2, где единицей масштаба по оси ординат служит дисперсия микропульсаций давления σ_p^2 , причем $\sigma_p \sim 10^{-2}$ мб).

2) Мезометеорологический интервал с периодами от минут до часов, в котором интенсивные колебания метеорологических элементов (включая,

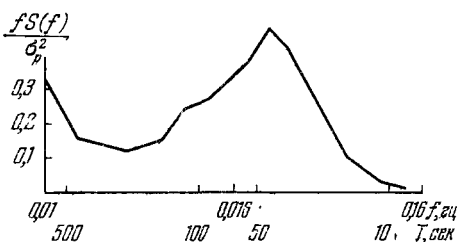


Рис. 2. Спектр микропульсаций давления по Голицыну ²⁴.

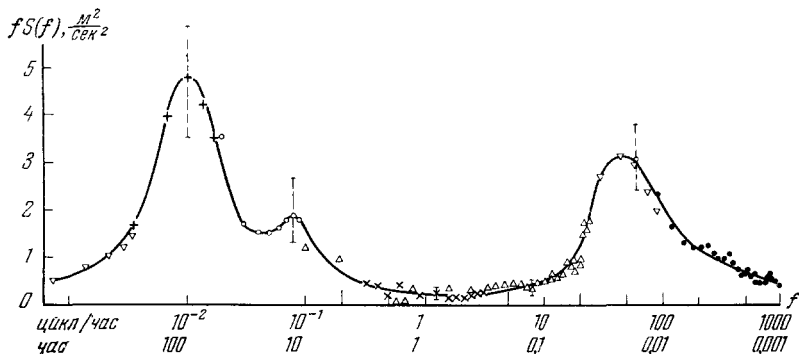


Рис. 3. Спектр горизонтальной скорости ветра по Ван-дер-Ховену ²⁶.

например, их колебания при грозах или в гравитационных волнах с большими амплитудами) относительно редки. Поэтому в спектрах $fS(f)$ в этом интервале обычно имеется широкий и глубокий минимум (сводку данных об этом интервале см. в работе Колесниковой и Мониной ²⁵). Мезометеорологический минимум хорошо виден, например, в приведенном на рис. 3 спектре горизонтальной скорости ветра, построенном Ван-дер-Ховеном ²⁶ по данным измерений на 125-м метеорологической башне в Брукхэйвене. Этот минимум соответствует периоду τ порядка 20 мин и масштабу $L = U\tau$ порядка эффективной толщины атмосферы $H \sim 10$ км (в нижнем 10-км слое содержится 80% массы атмосферы); он отделяет квазидвумерные (квазигоризонтальные) синоптические неоднородности с масштабами $L \gg H$ от существенно трехмерных (квазиизотропных) микрометеорологи-

ческих неоднородностей с масштабами $L < H$. Наличие этого минимума позволяет получать в микрометеорологии относительно устойчивые средние значения скорости ветра, температуры и т. д., используя осреднение по периодам из мезометеорологического интервала (на практике берется $\tau = 10-20$ мин).

3) *Синоптические колебания* с периодами от многих часов до нескольких дней, с максимумом энергетических спектров около $\tau = 4$ суток (см. рис. 3; частный максимум при $\tau = 12$ часов Ван-дер-Ховен считает незначимым). В этот интервал попадают также суточные колебания, проявляющиеся, например, в спектре колебаний температуры в виде суточной линии, а в спектре колебаний давления — суточной и полусуточной линий. В высокочастотной половине синоптического интервала происходит каскадная передача энергии по спектру от крупномасштабных движений к мелкомасштабным вследствие гидродинамической неустойчивости квази-

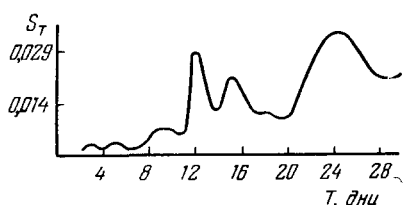


Рис. 4. Спектральная плотность колебаний индекса циркуляции по Монино³⁰.

горизонтальных синоптических движений, имеющих большие числа Рейнольдса $Re = UL/\nu$ (на низкочастотном конце синоптического интервала, по-видимому, имеет место передача энергии в противоположном направлении — от синоптических движений к более крупномасштабным течениям общей циркуляции атмосферы^{27, 28}). Кроме того, все движения синоптических масштабов непосредственно (т. е. минуя какие-либо движения промежуточных масшта-

бов) и непрерывно генерируют микротурбулентность вследствие гидродинамической неустойчивости вертикальных неоднородностей поля ветра, особенно вблизи поверхности Земли и в так называемых струйных течениях, где вертикальные градиенты скорости ветра наиболее велики.

Рассматривая микротурбулентность как диссипативный фактор для синоптических движений, ее можно охарактеризовать эффективным коэффициентом вязкости $\nu_{турб}$. Минимальным масштабом синоптических движений, способных преодолеть эту вязкость, будет $L_{min} \sim \varepsilon^{-1/4} \nu_{турб}^{3/4}$. Наличие мезометеорологического минимума означает²⁵, что $L_{min} \gg H$.

4) *Глобальные колебания* с периодами от недель до месяцев, имеющие наибольший интерес для проблем долгосрочного прогноза погоды, но еще очень мало изученные. Пока более или менее отчетливо выявлен, пожалуй, только так называемый «цикл индекса», т. е. цикл колебаний планетарной циркуляции между состояниями интенсивного зонального течения (западно-восточного переноса) со слабым меридиональным перемешиванием и ослабленного зонального течения с интенсивным меридиональным перемешиванием, прослеживаемый, например²⁹⁻³¹, по колебаниям индекса циркуляции $\alpha = u/a \sin \theta$, т. е. средней угловой скорости вращения атмосферы в умеренных широтах относительно поверхности Земли (u — средняя вдоль круга широты зональная скорость, a — радиус Земли). Период «цикла индекса» близок к двум неделям (рис. 4); спектральная плотность колебаний индекса циркуляции³⁰⁻³¹ имеет резкий максимум при $\tau = 12$ суток (заметим, что колебания индекса циркуляции образуют, строго говоря, не стационарный, а периодический случайный процесс³¹, имеющий годовой период).

5) *Сезонные колебания* — годовой период и его гармоники.

6) *Междугодичные колебания* с периодами порядка нескольких лет, спектр которых еще почти не изучен (упомянем обнаруженный некоторыми авторами 26-месячный ритм колебаний в экваториальной стратосфере,

а также предположение о проявлении в земной погоде 11-летнего цикла колебаний солнечной активности, по нашему мнению, не имеющее убедительных доказательств). Согласно Колесниковой и Моницу³² размах междугодичных колебаний средних годовых значений температуры и ряда других метеорологических элементов обычно составляет 15—30% размаха их сезонных и нерегулярных внутригодичных колебаний.

Междугодичные колебания еще не следует относить к колебаниям климата. Если все колебания 1)–6) назвать короткопериодными, то климат — это статистический режим короткопериодных колебаний метеорологических полей, который сам испытывает долгопериодные колебания. Спектр последних можно разделить на нижеследующие три интервала:

7) *Внутривековые колебания*, ярким примером которых служит потепление в первой половине XX в. (сейчас, по-видимому заканчивающееся), причем обнаруживается связь изменений климата и характера общей циркуляции атмосферы: по Дзердзеевскому³³, в 1900—1930 гг. зональные типы циркуляции в северном полушарии наблюдались реже, а меридиональные — чаще, чем в 1930—1950 гг. Объяснение генезиса климатического потепления в XX в. является назревшей задачей физической теории климата.

8) *Междувековые колебания*, из которых известно³⁴ потепление после конца ледникового периода (LXV в. до н. э.), приведшее к так называемому «климатическому оптимуму» в XL—XX вв. до н. э., с последующим ухудшением климата в так называемом «субатлантическом периоде» (X в. до н. э.— III в. н. э.), его улучшением в IV—X вв. н. э. *), вновь ухудшением в XIII—XIV вв., улучшением в XV—XVI вв. и ухудшением в XVII—XIX вв. (так называемый «малый ледниковый период»).

9) *Ледниковые периоды плейстоцена*: гюнц (500—475 тыс. лет до н. э.), миндель (425—325 тыс. лет до н. э.), рисс (200—125 тыс. лет до н. э.), вюрм (60—25 тыс. лет до н. э.), во время которых средняя температура приземного слоя воздуха на Земле (ныне +15°С) понижалась, по-видимому, примерно на 10°. Возможных причин оледенений Земли указывалось столь много (в том числе, например, гипотеза Симпсона³⁵ об увеличении солнечной радиации, приводящем к увеличению испарения, облачности и снегопадов), что, может быть, надо объяснять не появление оледенений, а скорее отсутствие ледников в течение 90% послелембрийского времени.

4. АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

В гл. 2 было показано, что типичное время генерации кинетической энергии синоптических процессов

$$\tau = \left(\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial t} \right)^{-1}$$

имеет порядок недели, и такой же порядок имеет типичное время диссипации кинетической энергии синоптических процессов $\tau(L_0) \sim \varepsilon^{-1/3} L_0^{2/3}$. Сроки $t_a - t_0 < \tau$ естественно называть *краткими*, а сроки $t - t_0 > \tau$ —

*) В период «малого климатического оптимума» VIII—X вв., когда викинги колонизировали Исландию Гренландию, по их летописям ледовитость Арктики была мала. Это свидетельствует против высказывавшегося предположения, что если Арктика растает, то она более не замерзнет, исходившего из преувеличения роли местного альбедо (отражательной способности подстилающей поверхности) для режима Арктики. Учитывая, что в пределах 72° с. ш. Арктика составляет всего 2,5% площади поверхности Земли, более естественно предполагать, наоборот, что местные условия в Арктике (включая ее ледовитость и, следовательно, альбедо) являются не причиной, а следствием (индикатором) состояния общей циркуляции атмосферы.

долгими¹². Таким образом, в теории краткосрочных прогнозов, по самому их определению, можно не учитывать притоков и диссипации энергии, т. е. можно пользоваться адиабатическим приближением; для долгосрочных же прогнозов, оно, очевидно, будет совершенно неприемлемым.

Для адиабатических процессов, которые только и будут рассматриваться в этой статье, имеют место два закона сохранения: при движении любого объема воздуха V в нем сохраняются энтропия $\int S \rho dV$ (S — энтропия на единицу массы, ρ — плотность) и «вихревой заряд» $\int (\Omega_a \nabla S) dV$ (Ω_a — абсолютный вихрь скорости), т. е.

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{(\Omega_a \nabla S)}{\rho} = 0. \quad (4.1)$$

«Удельная завихренность» $\Omega = (\Omega_a \nabla S)/\rho$ называется *потенциальным вихрем*³⁶. Закон сохранения $d\Omega/dt = 0$ впервые выведен Эртелем³⁷ (см. также^{4, 38, 39-40}).

Хольман⁴¹ указал еще три независимые комбинации гидродинамических полей, сохраняющиеся при адиабатических процессах:

$$\psi_3 = \left(\frac{[\nabla S \nabla \Omega]}{\rho} \mathbf{w} \right), \quad \psi_4 = \left(\frac{[\nabla S \nabla \psi_3]}{\rho} \mathbf{w} \right), \quad \psi_5 = \left(\frac{[\nabla S \nabla \Omega]}{\rho} \nabla \psi_3 \right), \quad (4.2)$$

где $\mathbf{w} = \mathbf{v}_a - \nabla W$, причем \mathbf{v}_a — абсолютная скорость, а $W = \int_0^t \Lambda dt$ — так называемое действие (с лагранжианом $\Lambda = (v_a^2/2) - \Phi - \eta$, где Φ — потенциал тяготения, η — удельная энтальпия).

Приращения энтропии dS в сухом воздухе определяются формулой

$$dS = c_p d \ln \frac{p^{1/\kappa}}{\rho} = c_p d \ln \Theta, \quad \Theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \quad (4.3)$$

где p , T — давление и температура; $\kappa = c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме ($c_p = 1,003$ и $c_v = 0,717$ Дж/г·град; $c_p/c_v = 1,41$); Θ — так называемая *потенциальная температура*, p_0 — стандартное давление (обычно $p_0 = 1000$ мб = 10^6 дин/см²). Влаго содержание воздуха всегда мало *); поэтому энтропию ненасыщенного влажного воздуха во многих расчетах (но не всегда) можно определять той же формулой (4,3), а в случае насыщенного воздуха к выражению (4,3) для dS достаточно добавить слагаемое $\mathcal{L} dq_m/T$, где $q_m \approx (R/R_v) (e_m/p)$ — удельная влажность насыщения. Если же притоком тепла за счет фазовых переходов влаги пренебрегать, то с влажностью воздуха часто можно вообще не считаться; так пока чаще всего и поступают в практике оперативных численных краткосрочных прогнозов погоды. В соответствии с этим мы будем пока пользоваться для dS формулой (4,3).

*) Парциальное давление насыщающего водяного пара $e_m(T)$ определяется формулой Клаузиуса — Клапейрона

$$\frac{1}{e_m} \frac{de_m}{dT} = \frac{\mathcal{L}}{R_v T^2}, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - (c_w - c_{pv})(T - T_p) \quad (4.4)$$

(где \mathcal{L} — скрытая теплота испарения; $c_{pv} = 1,81$ и $R_v = 0,461$ Дж/г·град — удельная теплоемкость при постоянном давлении и газовая постоянная водяного пара; $c_w = 4,19$ Дж/г·град — удельная теплоемкость воды) и меняется от 0,509 до 42,47 мб при росте температуры от -30° до $+30^\circ$ С. Удельная влажность q , т. е. отношение плотностей водяного пара и влажного воздуха, обычно не превосходит 3—4%. Содержание жидкой воды и льда в облаках обычно много меньше содержания пара.

Согласно (4,1) любая функция от S и Ω будет адиабатическим инвариантом, т. е. консервативной характеристикой движущихся частиц воздуха при адиабатических процессах. Две независимые такие функции удобно принять за лагранжевы координаты воздушных частиц. Соответствующие координатные поверхности рассекут атмосферу на трубки, через стенки которых воздух не протекает, так что адиабатическая эволюция атмосферы будет заключаться только в деформациях таких трубок. Предвычисление этих деформаций будет основой краткосрочных прогнозов погоды.

В качестве одной из лагранжевых координат удобно взять потенциальную температуру Θ . Учитывая, что ее изменения по вертикали много больше, чем по горизонтали, так что вектор $\nabla\Theta$ направлен приблизительно по вертикали, можно положить

$$\Omega_a \nabla\Theta \approx \Omega_{az} \frac{\partial\Theta}{\partial z} = (\Omega_z + l) \frac{\partial\Theta}{\partial z},$$

где l — упоминавшийся выше параметр Кориолиса, а Ω_z — вертикальная компонента относительного вихря скорости. Пользуясь квазистатическим приближением, т. е. уравнением $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ (g — ускорение силы тяжести; смысл этого приближения будет разъяснен ниже), получаем

$$\frac{\partial\Theta}{\partial z} = \frac{\Theta}{T} (\gamma_a - \gamma),$$

где $\gamma_a = (\kappa - 1)/\kappa (g/R) \approx 10$ град/км — адиабатический, а $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$ — фактический градиенты температуры. Используя эти

результаты, в качестве второй лагранжевой координаты удобно принять, следуя Обухова⁴⁰, функцию

$$\tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{c_p R} - \frac{p^*(\Theta)}{\gamma_a - \gamma^*(\Theta)} \approx (\Omega_z + l) \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a - \gamma^*(\Theta)} \frac{p^*(\Theta)}{p}, \quad (4,5)$$

где $p^*(\Theta)$, $\gamma^*(\Theta)$ — стандартные значения p и γ на поверхностях $\Theta = \text{const}$ (т. е. характеристики так называемой стандартной атмосферы). Поскольку Θ меняется быстрее всего по вертикали, а $\tilde{\Omega}$ — по меридиану (так как обычно $|\Omega_z| \ll l$ и $\Omega_z + l \approx 2\omega \cos\theta$), Θ и $\tilde{\Omega}$ могут заменять вертикальную координату и широту, и наиболее наглядное представление об инвариантных $(\Theta, \tilde{\Omega})$ -трубках даст их меридиональный разрез. Пример такого разреза приведен на рис. 5, а на рис. 6 для того же примера показаны изолинии $\tilde{\Omega} = \text{const}$ на одной из поверхностей $\Theta = \text{const}$. Если обозначить через $\mu(\Theta, \tilde{\Omega}) d\Theta d\tilde{\Omega}$ долю массы атмосферы, содержащуюся в бесконечно тонкой $(\Theta, \tilde{\Omega})$ -трубке, то $\mu(\Theta, \tilde{\Omega})$ можно интерпретировать⁴⁰ как плотность вероятности для значений лагранжевых координат Θ , $\tilde{\Omega}$ случайно выбранной воздушной частицы. На рис. 7 мы приводим пример распределения вероятностей $\mu(\Theta, \tilde{\Omega})$ по данным за период 1—10 апреля 1962 г., любезно предоставленный нам А. Б. Каруниным.

Кроме дифференциальных инвариантов S и Ω (или любых двух функций от них, например Θ и $\tilde{\Omega}$), у адиабатических процессов, как известно,

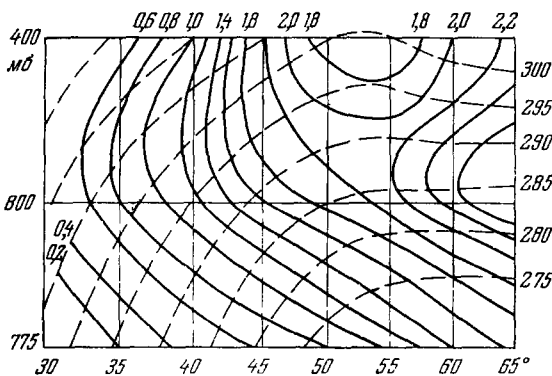


Рис. 5. Меридиональный разрез $(\Theta, \tilde{\Omega})$ -трубок на долготе $100^\circ E$ за 1 апреля 1962 г. (по⁴⁰).

Абсциссы — широты, ординаты — атмосферное давление: $\Omega = \text{const}$ — сплошные линии, $\Theta = \text{const}$ — пунктир; $\tilde{\Omega}$ измеряется в единицах 10^{-4} сек^{-1} .

имеется еще интегральный инвариант — полная энергия $E = K + N$, где

$$K = \int \frac{\rho v^2}{2} dV = \int \frac{v^2}{2} dm$$

— кинетическая энергия (v — модуль скорости, dV — элемент объема, $dm = \rho dV$ — элемент массы, и интеграл распространен на всю атмосферу),

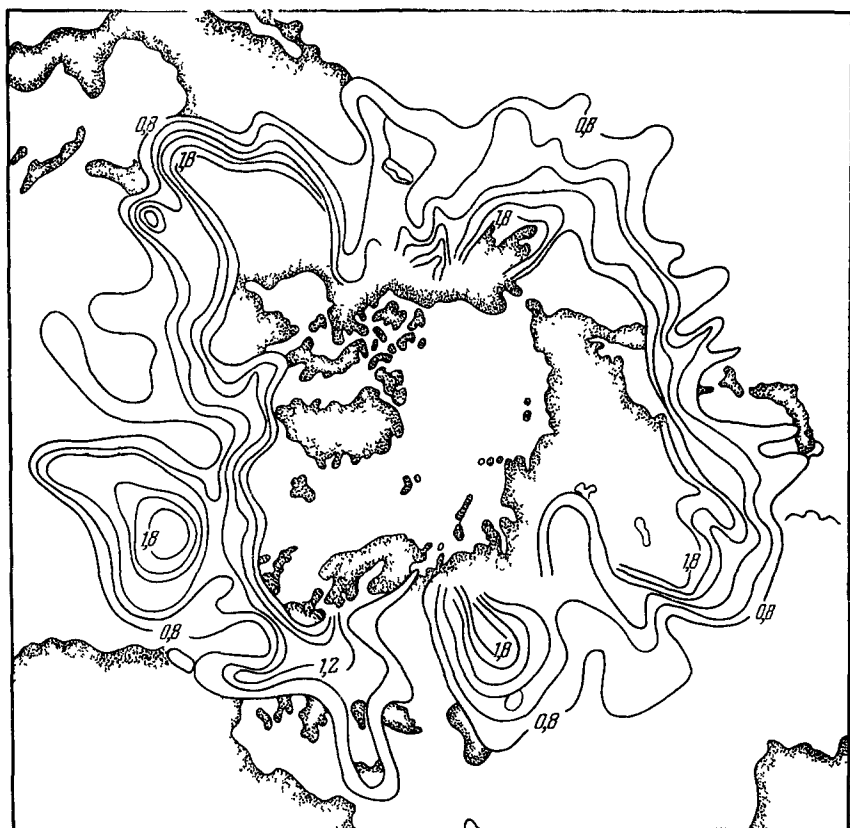


Рис. 6. Конфигурация линий $\tilde{\Omega} = \text{const}$ на поверхности $\Theta = 300^\circ$ за 1 апреля 1962 г. (по 40).

а N — лабильная энергия, т. е. сумма потенциальной энергии $\mathcal{P} = \int \Phi dm$ ($\Phi = gz$ — потенциал силы тяжести) и внутренней энергии $J = \int c_v T dm$. В квазистатическом приближении потенциальная энергия вертикального столба воздуха единичного сечения равна $\int gz \rho dz = - \int z dp = \int p dz$, так что в силу уравнения Клапейрона $p = \rho RT$ получается $\mathcal{P} = \int RT dm$, и, поскольку $c_v + R = c_p$, имеем

$$N = \int c_p T dm = c_p \int \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \Theta dm. \quad (4,6)$$

При адиабатических процессах общая масса воздуха над любой изэнтропической поверхностью $\Theta = \text{const}$ не меняется, так что не меняет-

ся и среднее давление $p^*(\Theta)$ на любой изэнтропической поверхности, а потому и величина

$$N^* = c_p \int \left[\frac{p^*(\Theta)}{p_0} \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \Theta dm, \quad (4,7)$$

т. е. та лабильная энергия атмосферы, которая останется, если атмосферу адиабатически привести к состоянию с постоянным давлением вдоль любой изэнтропической поверхности (и с устойчивой стратификацией). Ясно, что

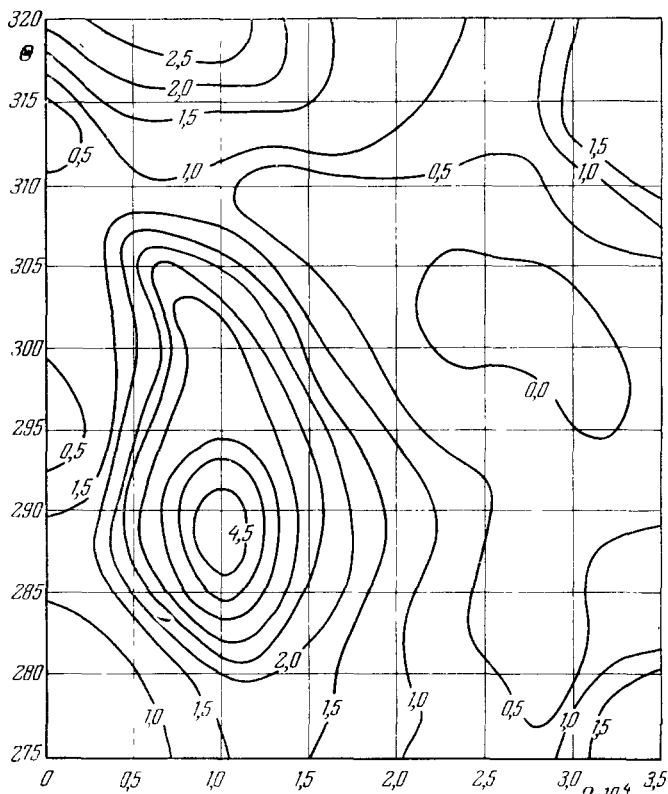


Рис. 7. Плотность вероятности $\mu(\Theta, \tilde{\Omega})$ по данным за период 1—10 апреля 1962 г.

при адиабатических процессах в кинетическую энергию может превратиться не вся лабильная энергия, а, самое большое, ее часть $A = N - N^*$, называемая *доступной потенциальной энергией*⁴²⁻⁴³ (величина A оказывается равной среднему взвешенному значению дисперсии Θ на изобарических поверхностях). Следовательно, сумма $K + A$ является адиабатическим инвариантом.

Если атмосферу адиабатически привести к состоянию с безразличной стратификацией (в котором изэнтропические поверхности вертикальны, т. е. Θ не зависит от p), то лабильную энергию \bar{N} в этом состоянии можно вычислить, заменив в (4,6) множитель $p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ под знаком интеграла его средним значением по массе вертикального столба воздуха:

$$\frac{\int p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} dm}{\int dm} = \frac{\kappa}{2\kappa-1} (\bar{p})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}},$$

где \bar{p} — наземное давление; при этом получится

$$\bar{N} = \frac{\kappa}{2\kappa-1} c_p \int \left(\frac{\bar{p}}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \Theta dm. \quad (4,8)$$

Разность $\xi = \bar{N} - N$ называется *параметром макроустойчивости* ⁴⁴. Величина ξ оказывается равной среднему взвешенному значению вертикального градиента потенциальной температуры $\left(-\frac{\partial \Theta}{\partial p} \right)$ во всей толще атмосферы. Она равна количеству кинетической энергии, освобождающейся или затрачиваемой при адиабатическом переходе от данной стратификации к безразличной. Разность $K - \xi$ является адиабатическим инвариантом.

5. КЛАССИФИКАЦИЯ АТМОСФЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Для построения гидродинамической теории краткосрочного прогноза погоды важно выяснить прежде всего, каковы возможные типы атмосферных движений при адиабатических процессах. Все эти движения имеют характер волн, и для их классификации достаточно рассмотреть случай волн малой амплитуды, т. е. малых колебаний атмосферы относительно состояния покоя (в котором давление \bar{p} , плотность $\bar{\rho}$ и температура \bar{T} суть функции лишь от высоты z , связанные уравнением статики $\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g\bar{\rho}$ и уравнением Клапейрона $\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}$). В приближении плоской Земли уравнения движения для малых колебаний имеют вид

$$\bar{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + l\bar{\rho}v, \quad \bar{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - l\bar{\rho}u, \quad \bar{\rho} \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g\bar{\rho}, \quad (5,1)$$

где u, v, w — компоненты вектора скорости \mathbf{v} , а p, ρ — возмущения давления и плотности (эти пять функций полностью характеризуют адиабатические малые колебания), l — как и выше, параметр Кориолиса. К этим уравнениям следует добавить уравнения неразрывности и адиабатичности, имеющие вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \bar{\rho} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + b\bar{\rho}w = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (5,2)$$

где $c^2 = \kappa R \bar{T}$ — квадрат скорости звука, а

$$b = (\kappa - 1)g + \frac{\partial c^2}{\partial z}$$

— параметр стратификации. Естественными краевыми условиями по z для уравнений (5,1)—(5,2) будут требования обращения в нуль вертикального потока массы $\bar{\rho}w$ на границах атмосферы (при $z = 0$ и $z \rightarrow \infty$). Система (5,1) — (5,2) имеет по времени пятый порядок; для ее однозначного решения необходимо задать при $t = 0$ начальные значения v_0, p_0, ρ_0 всех неизвестных функций.

Допустим на время ⁴⁵, что $l = \text{const}$ (что законно для территорий, не слишком протяженных по широте). Тогда уравнения (5,1) — (5,2) будут иметь семейство стационарных решений v_s, p_s, ρ_s , описывающих *движения первого рода*, которые будут обладать следующими свойствами:

- 1) квазистатичность, т. е. $\frac{\partial p_s}{\partial z} = -g\rho_s$; 2) горизонтальность, т. е. $w_s = 0$;
- 3) геострофичность, т. е.

$$u_s = -\frac{1}{l\bar{\rho}} \frac{\partial p_s}{\partial y}, \quad v_s = \frac{1}{l\bar{\rho}} \frac{\partial p_s}{\partial x}$$

(последнее означает, что поле скорости бездивергентно, и его функция тока ψ_s равна $p_s/\bar{l}\bar{\rho}$). Отметим, что наши уравнения имеют два инварианта (стационарные комбинации неизвестных функций)

$$J_1 = (p - c^2 \rho)_{z=0}, \quad J_2 = \bar{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + l \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{p - c^2 \rho}{b} - \rho \right). \quad (5,3)$$

Первый из них представляет собой линеаризованную форму энтропии (при $z = 0$), второй — потенциального вихря. Можно указать один интегральный инвариант, из которого вытекает инвариантность обоих величин J_1, J_2 ; в квазистатическом случае он был найден в работе ⁴⁶.

Укажем также энергетический инвариант

$$J_3 = \int \left[\frac{\bar{\rho} V^2}{2} + \frac{p^2}{2\kappa p} + \frac{g(p - c^2 \rho)^2}{2\kappa p b} \right] dV, \quad (5,4)$$

где первое слагаемое в квадратных скобках соответствует кинетической, второе — упругой и третье — так называемой термобарической ⁴⁷ энергии (связанной с слагами плавучести, действующими на частицу, сместившуюся по вертикали из состояния равновесия).

Произвольное решение уравнений (5,1) — (5,2) будет стационарным тогда и только тогда, если начальные данные обладают свойствами (1) — (3). В противном случае оно будет суммой стационарного решения с инвариантами (5,3), определяемыми по начальным данным (инварианты J_1, J_2 и условия (1) — (3) полностью определяют стационарное решение), и некоторого нестационарного решения, для которого $J_1 \equiv J_2 \equiv 0$. Такие нестационарные решения описывают *движения второго рода*. Эти решения представляют собой суперпозиции волн вида $\Phi(z) \exp \{i(k_1 x + k_2 y - \sigma t)\}$; вследствие адиабатичности и линейности их частоты σ будут вещественными. Имеется два типа волн: 1) *двумерные* волны, в которых отсутствуют вертикальные колебания воздушных частиц, т. е. $w = 0$, 2) *внутренние* волны, в которых $w \neq 0$.

Можно убедиться, что частоты двумерных волн определяются формулой $\sigma^2 = l^2 + k^2 c^2$ (где $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ — горизонтальное волновое число), так что скорость движения фронта волны равна скорости звука c ; их амплитуды монотонно убывают с высотой по закону $\Phi \sim (\bar{p})^{\frac{1}{\kappa}}$. Только такие волны возможны в квазистатической *баротропной* атмосфере; в случае квазистатической *бароклинной* атмосферы они выделены в работе ⁴⁶. При условии $c^2 = \text{const}$, $b = \text{const}$ (точном для изотермической атмосферы) амплитуды внутренних волн зависят от высоты по закону $\exp \{-(b + g)/2c^2 \} z + imz\}$, где $m \neq 0$ — вертикальное волновое число, а их частоты определяются из уравнения

$$(\sigma^2 - l^2) \left[\sigma^2 - \frac{(b + g)^2}{4c^2} - m^2 c^2 \right] = k^2 c^2 \left(\sigma^2 - \frac{bg}{c^2} \right) \quad (5,5)$$

и при произвольных k и m заполняют интервалы $l^2 \leq \sigma^2 < bg/c^2$ и $\sigma^2 > (b + g)^2/4c^2$, которым соответствуют два разных вида внутренних волн. Рассмотрев в изотермической атмосфере ($c^2 = \kappa gH$, $b = (\kappa - 1)g$, где H — толщина однородной атмосферы) случай $l = 0$, убеждаемся, что при предельном переходе $\kappa \rightarrow \infty$ к изопикническим процессам (т. е. к несжимаемой жидкости) второй интервал уходит в бесконечность, а первый принимает вид $\sigma^2 < g/H$ и соответствует внутренним *гравитационным* волнам. При предельном переходе $\kappa \rightarrow 1$ к изотермическим процессам (при которых изотермическая стратификация становится безразличной) первый интервал исчезает в нуле, а второй принимает вид

$\sigma^2 > g/4H$ и соответствует *акустическим* волнам. Поскольку $bg < (b+g)^2/4$, спектры частот акустических и гравитационных волн в изотермической атмосфере не перекрываются. Диккий ⁴⁸, исследовавший спектры волн уже не в изотермической, а в температурно-стратифицированной атмосфере, установил, что в ней возникает лишь очень небольшое перекрытие спектров акустических и гравитационных волн. Эти результаты объясняют наличие минимума в спектре рис. 2.

В квазистатическом приближении, т. е. при пренебрежении левой частью третьего уравнения (5,2) и, следовательно, при использовании уравнения статики $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$, все частоты внутренних акустических

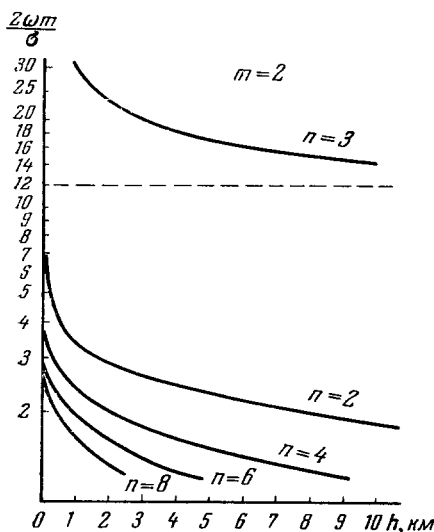


Рис. 8. Собственные кривые $\sigma(h)$ уравнения Лапласа теории приливов при $m=2$ (по ⁵⁸).

волн обращаются в бесконечность, т. е. последние полностью «отфильтровываются». Частоты гравитационных волн при этом несколько завышаются, но тем меньше, чем меньше k (т. е. чем длиннее волны). Частоты двумерных волн, стационарные решения и инварианты при этом не меняются — это и оправдывает использование квазистатического приближения для описания синоптических процессов.

Основное изменение, вносимое в изложенные результаты учетом кривизны поверхности Земли, сводится к превращению стационарных решений (движения первого рода) в медленные *гироскопические волны*. Приближенный учет кривизны Земли можно осуществить, построив по первым двум уравнениям (5,1) уравнения для вихря $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ и дивергенции

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ с учетом зависимости параметра Кориолиса l от координаты

вдоль меридиана y и затем заменив в полученных уравнениях l и $\beta = \frac{\partial l}{\partial y} =$

$= \frac{2\omega \sin \theta}{a}$ константами (т. е. перейдя в так называемую β -плоскость).

Тогда в случае баротропной атмосферы и в пренебрежении ее горизонтальной сжимаемостью (т. е. в предположении $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$) для частот гироскопических волн получается формула $\sigma = -\beta k_1/k^2$ ⁴⁹ (минус означает, что волны движутся на запад).

При точном учете сферичности Земли различие в баротропной атмосфере медленных гироскопических волн, важных для прогнозов погоды, и быстрых двумерных волн, важных для описания приливов, было установлено еще в конце XIX в. Хафом ⁵⁰ (см. также работы по теории приливов Лява ⁵¹, Кочина ⁵², Пекериса ⁵³, Керца ⁵⁴, Зиберта ⁵⁵). Эффект слабой горизонтальной сжимаемости атмосферы здесь можно описать с помощью рядов по степеням параметра $\gamma = (2\omega a/c)^2$ ⁵⁶. При $\gamma \rightarrow 0$ быстрые волны исчезают, а частоты гироскопических волн даются формулой

$$\sigma = \alpha m - \frac{2(\alpha + \omega)m}{n(n+1)}, \quad (5,6)$$

где m, n — целые числа, α — упоминавшийся выше индекс циркуляции^{57, 11}. Для земной атмосферы ($\gamma \approx 10$) при младших n, m эта формула грубовата⁵⁶, но с ростом n, m ее точность быстро растет.

В случае бароклининой атмосферы на сферической Земле описание всех возможных типов волн дано Диким^{58, 59} — в первой из этих работ для изотермической атмосферы, а во второй для так называемой стандартной атмосферы CIRA-1961. Отыскивая волны в виде

$$\Phi(\zeta) \Psi(\cos \theta) e^{i(m\lambda + \sigma t)}$$

(где λ — долгота, θ — дополнение широты, $\zeta = \ln \frac{p}{p_0}$ — вертикальная координата), Дикий получил для Ψ так называемое уравнение Лапласа теории приливов, содержащее m, σ и возникающую при разделении переменных постоянную h (так называемую глубину динамически эквивалентного океана), но не содержащее характеристик стратификации, а для Φ — «вертикальное» уравнение, содержащее σ, h и характеристики стратификации, но не содержащее горизонтального волнового числа m . Каждое из этих уравнений позволяет определить семейство собственных кривых $\sigma(h)$; пересечения кривых разных семейств определяют возможные собственные значения σ и h . На рис. 8 приводятся «горизонтальные» собственные кривые $\sigma(h)$ при $m = 2$; нижние из них отвечают быстрым, верхние — медленным волнам. На рис. 9 приведены «вертикальные» собственные кривые $\sigma(h)$: внизу справа они соответствуют акустическим, наверху слева — гравитационным волнам; цифры у кривых указывают число узлов у соответствующих собственных функций.

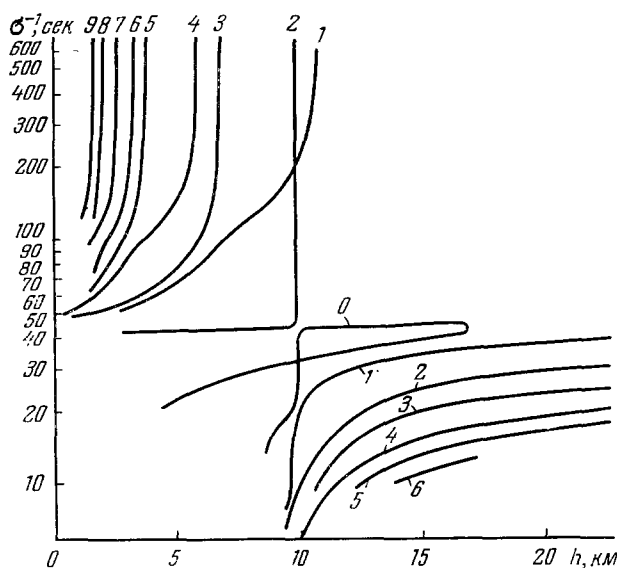


Рис. 9. Собственные кривые $\sigma(h)$ «вертикального» уравнения для стандартной атмосферы CIRA-1961 (по⁵⁸).

6. АДАПТАЦИЯ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Вернемся на время к рассматривавшейся выше упрощенной «плоской» модели атмосферы с $l = \text{const}$. Как уже отмечалось, если начальные данные v_0, p_0, ρ_0 обладают свойствами (1) — (3), т. е. если в начальный момент имеются лишь движения первого рода, то только они останутся и в будущем (так как описывающие их решения уравнений стационарны). Если же в начальный момент в какой-то области пространства V условия (1) — (3) нарушены, то в этой области образуются также и движения второго рода — быстрые волны. Но они разбегаются во все стороны, и когда они покинут область V , то в ней восстановятся условия (1) — (3), т. е. останутся только некоторые движения первого рода (определяемые инвариантными полями J_1, J_2 , которые можно построить по начальным данным). Этот процесс восстановления условий согласованности (1) — (3) метеороло-

гических полей v , p , ρ называют *приспособлением* или *адаптацией* метеорологических полей. Задача об адаптации метеорологических полей в случае квазистатической баротропной атмосферы была впервые сформулирована Россби ⁶⁰ и Каном ⁶¹ и решена Обуховым ³; в случае квазистатической бароклинной атмосферы этой задаче посвящались работы Болина ⁶², Кибеля ⁶³ (без учета двумерных волн), Верониса ⁶⁴, Фьелстада ⁶⁵, Молина ⁴⁶; см. также отличный обзор Филлипса ⁶⁶, посвященный геострофическим движениям (или, по нашей терминологии, движениям первого рода) в атмосфере и океане.

Адаптация к состоянию статического равновесия (1) осуществляется путем генерации и разбегания внутренних акустических волн и занимает время такого же порядка величины, как время, в течение которого

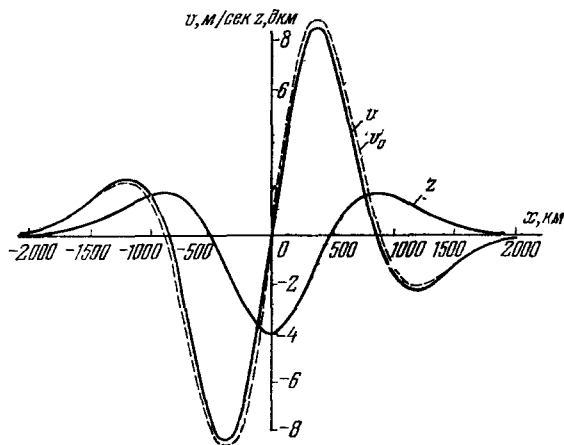


Рис. 10. Пример адаптации метеорологических полей в бароклинной атмосфере (по ⁴⁶).

фронт внутренних акустических волн пробегает (со скоростью звука $c \sim \sim 20$ км/мин) основную толщу атмосферы, на что требуется всего лишь несколько минут. После этого продолжается процесс адаптации атмосферы к состоянию геострофического равновесия (1) — (3), причем в среднем по толще атмосферы это состояние достигается после разбегания из области V двумерных волн (фронты которых движутся с той же скоростью c), а на всех высотах оно устанавливается еще позже — после разбегания

более медленных внутренних гравитационных волн (их скорости зависят от термической стратификации атмосферы ⁶³, ⁴⁶, ⁶⁷ — фронты движутся со скоростью $2 \sqrt{\left[1 - \frac{1}{\kappa}\right] \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma_a}\right] RT}$, а за фронтами, как и в случае двумерных волн, имеется непрерывный «след», в котором происходят затухающие осцилляции).

В качестве примера адаптации метеорологических полей мы приводим на рис. 10 случай ⁴⁶, в котором в начальный момент времени возмущения давления отсутствовали, а поле скорости соответствовало плоскопараллельному течению типа тангенциального разрыва вдоль оси ординат (начальное распределение приземной скорости $v_0(x)$ дано на рис. 10 пунктиром). В результате адаптации поле скорости изменилось мало — см. предельное распределение приземной скорости $v(x)$ (кинетическая энергия уменьшилась на 3% — затраты на генерацию быстрых волн и на формирование неоднородностей поля давления), а поле давления активно «приспособилось» к полю скорости — в нем сформировалась отчетливая ложбина (см. предельное распределение высот приземной изобарической поверхности $z(x)$; по оси ординат она опустилась на 4 дкм).

Пока мы говорили только об адаптации метеорологических полей в «плоской» модели атмосферы с $l = \text{const}$. Учет сферичности поверхности Земли внесет в этот процесс два не очень существенных изменения. Во-первых, разбегающиеся из возмущенной области быстрые волны теперь будут распространяться не в бесконечном, а в горизонтально-ограничен-

ном пространстве, создавая интерференционную картину, которая будет затухать со временем из-за диссипативных процессов (не учитывавшихся выше). Во-вторых, на сфере движения первого рода не будут стационарными — они будут суперпозицией медленных гироскопических волн, движение которых будет все время приводить к изменениям конфигурации полей Θ и Ω , создающим в свою очередь расстройку условий (1) — (3) согласованности метеорологических полей. Таким образом, на сфере непрерывно происходят два конкурирующих процесса: 1) расстройка согласованности полей скорости, давления и плотности вследствие эволюции пространственного распределения энтропии и потенциального вихря и 2) адаптация метеорологических полей вследствие генерации, разбегания и затухания быстрых волн.

До сих пор в этой, как и в предыдущей главе, рассматривались лишь волны малой амплитуды, которые можно описывать линеаризованными динамическими уравнениями. В реальной атмосфере движения второго рода — акустические и гравитационные волны — действительно почти всегда имеют очень малые амплитуды (и потому образуют мало существенные для погоды «метеорологические шумы»), но движения первого рода имеют, вообще говоря, уже не малые амплитуды и описываются нелинейными уравнениями (4,1). Эта нелинейность (как и учет сферичности поверхности Земли) приводит к нестационарности движений первого рода — эволюции пространственного распределения величин Θ и Ω вследствие их переноса воздушными течениями и, как следствие, к постоянной конкуренции между расстройкой согласованности и адаптацией метеорологических полей. Из-за этой конкуренции нарушения условий согласованности (1) — (3) оказываются, как правило, лишь небольшими, и движения первого рода, хотя бы приближенно, все-таки удовлетворяют таким условиям. Это утверждение мы уточним в следующей главе.

7. КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Уравнения гидродинамики желательно упростить так, чтобы упрощенные уравнения достаточно точно описывали важные для погоды движения первого рода, но не содержали среди своих решений несущественных для погоды движений второго рода (т. е. последние были «отфильтрованы»). Выше уже говорилось, что условие квазистатичности (1) для движений первого рода выполняется практически точно и что его использование вместо полного уравнения движения по вертикали приводит к «отфильтровыванию» из решений уравнений гидродинамики акустических волн. Далее мы всюду будем пользоваться таким «квазистатическим приближением», переходя с его помощью к использованию в качестве вертикальной координаты давления p вместо высоты z ; при этом в уравнениях гидродинамики вместо поля давления $p(x, y, z, t)$ будет фигурировать другая неизвестная функция, $z(x, y, p, t)$, значения которой при фиксированных p суть высоты изобарических поверхностей $p = \text{const}$ *).

) При переходе от координат (x, y, z) к (x, y, p) горизонтальный градиент давления ∇_{hp} заменяется на $\rho g \nabla_h z$ (и $\frac{\partial p}{\partial t}$ — на $\rho g \frac{\partial z}{\partial t}$), а уравнение статики $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ переписывается в виде $\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g}$ (определив отсюда ρ , уравнение Клапейрона $p = \rho RT$ можно привести к виду $T = -\frac{g}{R} p \frac{\partial z}{\partial p}$); индивидуальная производная $\frac{d}{dt}$ принимает вид $\frac{d_h}{dt} + w^ \frac{\partial}{\partial p}$, где $\frac{d_h}{dt}$ — производная относительно гори-

Уравнения гидродинамики (точнее, уравнения Эйлера) содержат два размерных параметра — ускорение силы тяжести g и параметр Кориолиса l (на сфере вместо l лучше использовать вихрь вращения Земли 2ω ; в уравнениях на сфере фигурирует еще радиус Земли a). В краевом условии на поверхности Земли добавляются среднее наземное давление p_0 и плотность ρ_0 (с помощью которых можно образовать высоту однородной атмосферы $H = p_0/\rho_0 g$ и изотермическую скорость звука $c_0 = \sqrt{gH}$). Наконец, введем типичные масштабы длины и скорости для синоптических процессов L и U . Из перечисленных размерных величин можно составить следующие четыре безразмерных параметра⁶⁸⁻⁷⁰: 1) *параметр сферичности* L/a ; 2) *параметр квазистатичности* H/L ; 3) *число Кибеля* $Ki = U/Ll$ (в некоторых зарубежных работах называемое иногда также числом Россби); 4) *число Маха* $Ma = U/c_0$ (или параметр горизонтальной сжимаемости атмосферы $L/L_0 = Ma/Ki$, где $L_0 = c_0/l$ упоминавшийся выше масштаб колебаний двумерной сжимаемой атмосферы в поле силы Кориолиса, введенный Обуховым³).

Число Кибеля Ki можно интерпретировать как отношение типичного значения U/L относительного вихря скорости Ω_z к значению вихря вращения Земли $2\omega_z = l$ (или как отношение типичного относительного ускорения U^2/L к типичному ускорению Кориолиса Ul). За исключением тропической зоны это число, как правило, мало: так, по подсчетам Чаплыгиной⁷¹, определявшей значения Ω_z/l по фактическим данным, эти значения по модулю почти всегда меньше 0,4, а в 75% случаев они меньше 0,2. Это значит, что вращение воздуха в крупномасштабных атмосферных вихрях умеренных и высоких широт (циклонах и антициклонах) происходит значительно медленнее, чем вращение Земли. Вследствие этого в масштабах синоптических процессов горизонтальный градиент давления приблизительно уравнивается силой Кориолиса, т. е. приближенно (с точностью до слагаемых порядка UKi) выполняются условия геострофичности (3), в координатах (x, y, p) принимающие вид

$$u = -\frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad v = \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (7,1)$$

Из (7,1) следует, что в масштабах синоптических процессов вариации величины z по горизонтالي имеют порядок lLU/g (такой же порядок имеют вариации z по времени). Тогда из уравнения адиабатичности $dS/dt = 0$, которое с помощью (4,3) и уравнения статики $\frac{1}{\rho} = -g \frac{\partial z}{\partial p}$ приводится к виду

$$gp^2 \frac{dh}{dt} \frac{\partial z}{\partial p} + \alpha_0^2 c_0^2 w^* = 0, \quad (7,2)$$

где $\alpha_0^2 = -\frac{T}{T_0} \frac{p}{c_p} \frac{\partial S}{\partial p}$ — безразмерный *параметр статической устойчивости* (величину $Ri = (1/Ma^2) (T_0^2/T^2) \alpha_0^2$ иногда называют⁶⁸⁻⁶⁹ *числом Ричардсона*), видно, что значения w^* имеют порядок

$$\frac{p_0 U}{L} \frac{L^2}{L_0^2 \alpha_0^2} Ki \approx \frac{p_0 U}{L} Ki$$

горизонтального движения (на изобарических поверхностях), а $w^* = \frac{dp}{dt}$ заменяет вертикальную скорость. Одним из преимуществ координат (x, y, p) является особенно простой вид уравнения неразрывности: $D + \frac{\partial w^*}{\partial p} = 0$, где $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ — горизонтальная дивергенция скорости. Зато краевое условие $w = 0$ при $z = 0$ принимает более сложный вид: $w^* = \rho g \frac{dhz}{dt}$ (обычно выполнения этого условия для простоты требуют не при $z = 0$, а при $p = p_0$, где p_0 — среднее наземное давление)

(в тропосфере обычно $\alpha_0^2 \sim L^2/L_0^2$). Наконец, уравнение неразрывности $D + \frac{\partial w^*}{\partial p} = 0$ показывает, что значения горизонтальной дивергенции скорости имеют порядок $w^*/p_0 \sim (U/L) \text{Ki}$. Таким образом, для движений первого рода (синоптических процессов) выполняются условия

$$\Omega_z \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g}{l} \Delta z \pm O\left(\frac{U}{L} \text{Ki}\right), \quad D \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = O\left(\frac{U}{L} \text{Ki}\right), \quad (7,3)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Для движений второго рода эти условия, наоборот, не выполняются. Поэтому «отфильтровать» быстрые волны можно, отыскивая решения уравнений гидродинамики в виде асимптотических рядов по степеням Ki с главными членами, удовлетворяющими условиям (7,2) (так называемое *квазигеострофическое разложение*, впервые предложенное Кибелем²⁾). Уравнения для этих главных членов будут достаточно точно (с относительной ошибкой лишь порядка Ki) описывать синоптические процессы и не будут содержать среди своих решений быстрых волн. Такими уравнениями будут соотношения (7,1) и уравнение, получаемое из закона сохранения $\frac{dh\Omega}{dt} + w^* \frac{\partial \Omega}{\partial p} = 0$ потенциального вихря $\Omega \approx -\Omega_{az} g \frac{\partial S}{\partial p}$ после исключения из него с помощью (7,2) величины w^* и учета лишь членов нулевого порядка по Ki . Это последнее уравнение приводится к изящному виду *)

$$\mathcal{F} \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{g}{l} [z, \mathcal{F} z \pm l], \quad (7,4)$$

где \mathcal{F} — эллиптический линейный оператор (аналог трехмерного оператора Лапласа), определяемый формулой

$$\mathcal{F} z = \frac{g}{l} \Delta z + \frac{gl}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\alpha_0^2} \frac{\partial z}{\partial p}, \quad (7,5)$$

а квадратные скобки $[A, B]$ здесь и далее означают якобиан $\frac{\partial(A, B)}{\partial(x, y)}$. Метод асимптотических разложений, позволивший вывести из исходных уравнений гидромеханики уравнение (7,4), является частным случаем общих асимптотических методов, разработанных Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым для описания медленных колебаний в нелинейных механических системах, в которых наряду с этими медленными происходят также и быстрые колебания (впервые один из таких методов был разработан Ван-дер-Полем для описания колебаний тока в электрической цепи, содержащей электронную лампу с обратной связью). С чисто математической точки зрения мы здесь имеем дело с уравнениями (описывающими колебания), содержащими малый параметр (число Кибеля) при старших производных (слагаемые в уравнениях движения, описывающие относительные ускорения).

Уравнение (7,4) содержит только одну неизвестную функцию z ; оно описывает синоптические изменения трехмерного поля атмосферного давления в *квазигеострофическом приближении* и имеет первый порядок по времени; это естественно: исходная система уравнений гидродинамики

*) Получаемому из более общей формулы

$$\frac{dh}{dt} \left(\ln \Omega_{az} + \frac{g}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\alpha_0^2} \frac{\partial z}{\partial p} \right) = 0, \quad (7,4')$$

выражающей некоторый приближенный закон сохранения для горизонтальных движений.

имела пятый порядок, но «отфильтрованные» два семейства волн (акустических и гравитационных) «унесли» каждое по два порядка. Таким образом, для предвычисления поля атмосферного давления в квазигеострофическом приближении достаточно знать начальные значения только самого поля давления, а начальные значения поля скорости (которые были бы необходимы для решения полных уравнений гидродинамики) знать уже не надо. Это упрощение очень важно для практики, так как поле ветра сейчас измеряется довольно грубо, и организация его точных измерений была бы очень громоздким и дорогостоящим делом.

Дифференциальное уравнение (7,4) имеет второй порядок по p , и для его решения нужно задать краевые условия на верхней и нижней границах атмосферы $p = 0$ и $p = p_0$. При $p \rightarrow 0$ потребуем ограниченности кинетической энергии, т. е. $p |\nabla_h z|^2 < \infty$, а при $p = p_0$ воспользуемся условием $w = 0$, которое с помощью уравнения (7,2) при $w^* = \rho_0 g \, d_h z / dt$ (см. примечание к стр. 343) приводится к виду

$$\frac{d_h}{dt} \left(p \frac{\partial z}{\partial p} + \alpha_0^2 z \right) = 0.$$

Уравнение (7,4) с такими краевыми условиями можно переписать в интегральной форме

$$\left(\mathcal{G} \Delta - \frac{1}{L_0^2} \right) \frac{\partial z}{\partial t} = - \mathcal{G} \left[z, \frac{g}{l} \Delta z + l \right] - \frac{1}{L_0^2} \int_p^{p_0} \left[z, \frac{\partial z}{\partial p} \right] dp, \quad (7,6)$$

где \mathcal{G} — оператор интегрирования по p , определяемый формулой

$$\mathcal{G} z = \frac{1}{p_0} \int_0^{p_0} z \, dp + \int_p^{p_0} \frac{\alpha_0^2 \, dp}{p^2} \int_0^p z \, dp. \quad (7,7)$$

Уравнение (7,6) особенно удобно для предельного перехода $\alpha_0^2 \rightarrow 0$ к случаю баротропной атмосферы. Для синоптических процессов в *баротропной атмосфере* $\nabla_h z$ и $\frac{\partial z}{\partial t}$ пропорциональны некоторой функции от p (см. работу ⁷²), второе слагаемое в правой части (7,6) пропадает, а оператор \mathcal{G} превращается в единицу, и уравнение (7,6) принимает простой вид

$$\left(\Delta - \frac{1}{L_0^2} \right) \frac{\partial z}{\partial t} = - \left[z, \frac{g}{l} \Delta z + l \right]. \quad (7,6')$$

Такое уравнение было предложено для целей прогноза погоды Обуховым ³ и Чарни ⁴⁻⁵ (близкое уравнение, только без члена с $1/L_0^2$, ранее получил другим методом Эртель ⁷³, но значение этого уравнения тогда понято еще не было). Именно это уравнение было впервые применено в послевоенные годы (например, в работе ⁶) для численных прогнозов поля давления (на некотором среднем уровне в тропосфере).

Из (7,6') следует, что значение $\frac{\partial z}{\partial t}$ в фиксированной точке M получается интегрированием «адвекции вихря» $[z, (g/l) \Delta z + l]$ по всем точкам плоскости M' с весами $(1/2\pi) K_0(r/L_0)$, где r — расстояние от M' до M , а K_0 — символ цилиндрической функции Макдональда. Функция влияния $K_0(r/L_0)$ убывает с ростом r ; таким образом, изменения давления $\frac{\partial z}{\partial t}$ в каждой фиксированной точке M определяются всем полем давления $z(M')$, но влияние удаленных точек M' оказывается малым («радиусом влияния» служит расстояние L_0). Заметим, что сохранение вычитаемого

$1/L_0^2$ в операторе $\Delta \rightarrow (1/L_0^2)$ в левой части уравнения (7,6') (аналогично — и в операторе $\mathcal{G}\Delta \rightarrow 1/L_0^2$ в левой части уравнения (7,6)) существенно: при пренебрежении этим вычитаемым (описывающим эффект «горизонтальной сжимаемости» атмосферы) функция влияния $K_0(r/L_0)$ заменилась бы на функцию $\ln r$, возрастающую с ростом r , т. е. соответствующую возрастающему с расстоянием r влиянию удаленных точек M' , что, конечно, неестественно. Если представить горизонтальное поле $z(x, y)$ в виде суперпозиции элементарных гармонических волн, то будет ясно, что для волн с длиной много меньше L_0 учет слагаемого $-1/L_0^2$ в динамическом операторе не существен, но он становится весьма существенным для описания эволюции длинных волн (с длиной $L \gtrsim L_0$).

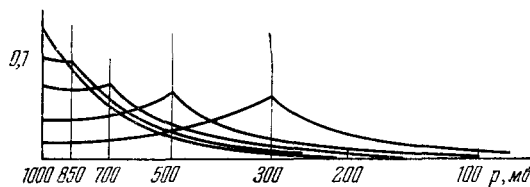


Рис. 11. Функции влияния адвекции вихря в разных слоях воздуха на значения $\partial z/\partial t$ на уровнях $p = 1000, 850, 700, 500$ и 300 мб (по ⁷⁴).

Аналогично изложенному, из (7,6) вытекает, что значение $\frac{\partial z}{\partial t}$ в фиксированной точке $M = (x, y, p)$ бароклинической атмосферы получается интегрированием по всем точкам $M' = (x', y', p')$ суммы «адвекции вихря» $[z, (g/l) \Delta z - l]$ с некоторым весом $G\left(\frac{r}{L_0}; p, p'\right)$ и «адвекции тепла» $-\frac{g}{l} \left[z, p \frac{\partial z}{\partial p} \right]$ с весом $\frac{1}{L_0^2 \alpha_0^2} p' \frac{\partial}{\partial p'} G\left(\frac{r}{L_0}; p, p'\right)$, где r — расстояние по

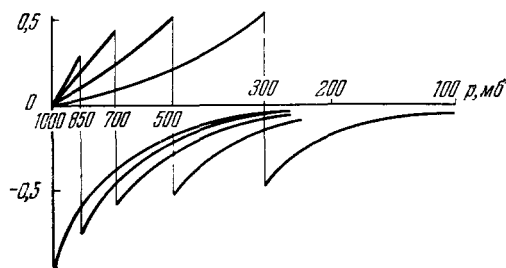


Рис. 12. Функции влияния адвекции тепла в разных слоях воздуха на значения $\partial z/\partial t$ на уровнях $p = 1000, 850, 700, 500$ и 300 мб (по ⁷⁴).

горизонтالي от M до M' . Фигурирующие здесь функции влияния G и $p' \frac{\partial G}{\partial p'}$ впервые были определены (в координатах x, y, z и преобразовании Фурье по x, y) в 1951—1952 гг. Обуховым и Чаплыгиной ⁷⁴ и почти одновременно (в координатах x, y, p) Булеевым и Марчуком ⁷⁵, а затем Хинкельманом ⁷⁶ и Куо ⁷⁷. Простейший их вывод дан в работе ⁴⁶, где установлена также роль этих функций влияния в задаче об адаптации метеорологических полей. На рис. 11—12 приводятся графики этих функций по работе ⁷⁴ (в безразмер-

ном виде, после преобразования Фурье по x, y и при значении безразмерного волнового числа $kL_0 \sqrt{\left[\frac{\gamma_a - \gamma}{\kappa - 1} \right] \left(\frac{\kappa R}{g} \right)} = 4$), наглядно показывающие, с какими относительными весами входят «динамические» и «термические» вклады разных слоев воздуха в значения $\frac{\partial z}{\partial t}$ на тех или иных уровнях.

8. КВАЗИСОЛЕНОИДАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

При приближении к экватору параметр Кориолиса $l = 2\omega \cos \theta$ уменьшается, число Кибеля $Ki = U/Ll$ перестает быть малым, и следовательно, квазистрофическое приближение теряет силу. Кроме того, опыт численных прогнозов поля давления показал, что и вне тропической

зоны описание синоптических процессов с помощью квазигеострофического приближения в некоторых случаях оказывается недостаточно точным. Поэтому может быть полезным вместо условий (7.3) найти другие условия «согласованности» синоптических полей скорости и давления, позволяющие отличить синоптические процессы от быстрых волновых движений.

Такие условия (пригодные не только вблизи экватора, но и повсюду) можно получить, исходя из того, что у поля горизонтальной скорости медленных синоптических движений потенциальная компонента мала по сравнению с соленоидальной, или, другими словами, горизонтальная дивергенция скорости $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ мала (по абсолютной величине) по сравнению с вихрем $\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$. Вследствие этого в уравнении для D , получаемом путем применения к уравнениям движения операции дивергенции, главными будут члены, не содержащие ни D (или $w^* \sim p_0 D$), ни параметра Кориолиса l (который может быть малым). Эти главные члены имеют вид $2[u, v] - g \Delta z$; из их сопоставления вытекает, что вариации величины z имеют порядок $U^2/g = H\text{Ma}^2$, где $\text{Ma} = U/c_0$ — число Маха, которое для синоптических процессов весьма мало. Тогда из (7.2) получается $w^* \sim p_0 U\text{Ma}^2/L\alpha_0^2$, а поэтому и $D \sim U\text{Ma}^2/L\alpha_0^2$. Иначе говоря, условие малости D по сравнению с Ω_z для движений первого рода (синоптических процессов) может быть записано в виде

$$\Omega_z = O\left(\frac{U}{L}\right), \quad D = O\left(\frac{U}{L} \frac{\text{Ma}^2}{\alpha_0^2}\right). \quad (8.1)$$

Для движений второго рода (быстрых волн) эти условия, наоборот, не выполняются. Поэтому можно «отфильтровать» быстрые волны, отыскивая решения уравнений гидродинамики в виде асимптотических рядов по степеням $\text{Ma}^2 = U^2/c_0^2$ с главными членами, удовлетворяющими условиям (8.1), и главным членом для z порядка $H\text{Ma}^2$. Главным членом поля скорости ветра (u, v) при этом будет его соленоидальная компонент $au = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, где ψ — функция тока; по этой причине указанные асимптотические ряды иногда называют *квазисолеоидальным разложением*. Одно из уравнений для главных членов квазисолеоидального разложения получается при учете лишь членов нулевого порядка по Ma в приближенном законе сохранения (7.4'):

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -[\psi, F], \quad F = \ln(\Delta \psi + l) + \frac{g}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\alpha_0^2} \frac{\partial z}{\partial p}. \quad (8.2)$$

В отличие от уравнения квазигеострофического приближения (7.4), содержащего лишь одну неизвестную функцию z , уравнение (8.2) содержит две неизвестные функции z и ψ . Связь между ними (т. е. связь между полями скорости и давления, которая в геострофическом приближении давалась формулами (7.1)), будет задаваться уравнением, получающимся из упоминавшегося выше уравнения для D при сохранении в нем лишь членов нулевого порядка по Ma . Это уравнение, получившее название *уравнения баланса*, имеет вид

$$g\Delta z = (\nabla l \nabla) \psi + 2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]. \quad (8.3)$$

Уравнения (8.2) и (8.3) описывают синоптические изменения полей скорости и давления в *квазисолеоидальном приближении*. Они имеют первый порядок по времени (так как «отфильтрованные» два семейства быстрых волн, акустических и гравитационных, «унесли» каждое по два порядка).

Таким образом, для прогноза синоптических процессов в квазисолеоидальном приближении достаточно иметь начальные значения только одного поля давления z , а начальные значения поля скорости (функции тока ψ) могут быть определены по полю z из уравнения (8,3).

Уравнения квазисолеоидального приближения (8,2) — (8,3) пригодны как вблизи экватора, где l мало и квазигеострофическое приближение теряет силу, так и вне тропической зоны, т. е. в области, где число Кибеля K_i мало. В этой последней области квазигеострофическое приближение справедливо с точностью до членов порядка K_i , а квазисолеоидальное с большей точностью — до членов порядка K_i^2 (здесь второе слагаемое в правой части (8,3) будет на порядок по K_i меньше остальных членов, и если им пренебречь и не учитывать изменений l с широтой, то получится геострофическое соотношение $l\psi \approx gz$, при котором (8,2) превращается в уравнение квазигеострофического приближения (7,4)).

Уравнение баланса (8,3) было получено как второе приближение в квазигеострофическом разложении в работе ⁷³ (см. также работы Болина ⁷⁸, Томпсона ⁷⁹ и более позднюю работу ⁴⁶); популярность оно приобрело после работы Чарни ⁸⁰, в которой оно было указано с ссылкой на неопубликованную работу Фьортофта. Обоснование квазисолеоидального приближения путем асимптотического разложения по степеням Ma предложено в работе ⁶⁷ и, в близкой форме, в работе Чарни ⁶⁸; в работе Гаврилина ⁷⁰ дан вывод уравнений квазисолеоидального приближения для неадиабатических синоптических процессов на сферической Земле.

Фактически квазисолеоидальное приближение использовалось для описания синоптических процессов уже давно: развитая Блиновой ¹¹ теория синоптических волн (по терминологии гл. 5 — гироскопических) была основана на рассмотрении квазисолеоидального приближения для уравнения переноса вихря в адиабатической баротропной атмосфере на сферической Земле (в случае баротропной атмосферы в (8,2) можно положить $\frac{\partial z}{\partial p} = 0$, и тогда F можно заменить просто на $\Delta\psi + l$). В указанной теории это уравнение линейризовалось относительно состояния, в котором атмосфера вращается вокруг Земли, как твердое тело, с угловой скоростью α (упоминавшийся выше индекс циркуляции), и приобретало вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \Delta\psi + 2 \frac{\alpha + \omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0, \quad (8,2')$$

где λ — долгота, a — радиус Земли (аналог этого уравнения в декартовых координатах был ранее предложен для описания гироскопических волн Россби ⁴⁹, получившим из него формулу для скорости движения барических ложбин, т. е. планетарных волн давления; см. гл. 5). Элементарные волновые решения уравнения (8,2') были указаны Гаурвицем ⁵⁷. Блинова ¹¹ построила при помощи этого уравнения общее решение задачи с начальными данными для поля атмосферного давления, связав последнее с полем ψ фактически линейризованным уравнением баланса.

Решение уравнений квазисолеоидального приближения (8,2) — (8,3) встречается с серьезными математическими трудностями (см. ^{80, 68}). Они связаны, во-первых, с необходимостью находить из уравнения баланса (8,3) начальное поле ψ по заданному начальному полю z и, во-вторых, с необходимостью находить на каждом шаге интегрирования по времени уравнения (8,2) поле ψ по полю F , определяемому второй из формул (8,2), при использовании того же уравнения баланса (8,3). Последнее, рассматриваемое как уравнение относительно ψ , принадлежит к классу так называемых уравнений Монжа — Ампера. На практике вследствие неполноты и даже отсутствия синоптической информации на значительной доле поверхности

земного шара уравнение (8,3) приходится решать относительно ψ лишь внутри некоторой ограниченной территории, как-то задав значения ψ на ее границе. Такая краевая задача для уравнения (8,3) будет корректной, лишь если оно является эллиптическим. Условие его эллиптичности приводится к виду $g \Delta z + (l^2/2) > 0$. Быть уверенным в выполнении такого условия можно лишь при малых K_1 , но если K_1 не мало (например, в тропиках), то это условие может и не выполняться. В случае же малых K_1 уравнение (8,3) можно переписать (в простейшей схеме с $l = \text{const}$) в виде ⁴⁶

$$l\Delta\psi = g\Delta z - 2\frac{g^2}{l^2} \left[\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right]. \quad (8,3')$$

9. ПРИМИТИВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В последние годы в ряде работ по гидродинамической теории краткосрочных прогнозов погоды (например, Смагоринский ⁸¹, Хинкельман ⁸², Филлипс ⁸³, Чарни ⁶⁸, Булеев и Марчук ⁸⁴) появилась тенденция отказаться от «отфильтровывания» быстрых волн и вернуться к использованию полных уравнений гидродинамики (правда, в квазистатистическом приближении), которые при этом стали именовать «примитивными», т. е. исходными. Эта тенденция объясняется, вероятно, следующими причинами: 1) квазигеострофическое приближение в ряде случаев оказывается недостаточно точным; 2) решение уравнений квазисоленоидального приближения встречается с математическими трудностями; 3) благодаря развитию вычислительной математики и вычислительной техники численное решение примитивных уравнений является сейчас, пожалуй, не более или лишь немногим более трудным делом, чем решение «отфильтрованных» уравнений (см., например, разностные схемы, которые предлагает использовать для численного решения примитивных уравнений Марчук ⁸⁵⁻⁸⁷, 10).

Как и рассмотренное выше уравнение баланса, примитивные уравнения нужно уметь интегрировать в пределах ограниченных территорий. При этом возникает вопрос о корректной формулировке соответствующих граничных условий: как при недостаточных, так и при излишних граничных условиях решения уравнений будут неустойчивыми, и образующиеся ошибки на каждом шаге интегрирования по времени будут все дальше распространяться от границ вглубь рассматриваемой территории. Чарни ⁶⁸ показал, что корректной краевой задачей для примитивных уравнений будет задание нормальной компоненты скорости на всей границе рассматриваемой территории и значений потенциального вихря на тех участках границы, где движение воздуха направлено внутрь территории (аналогичные граничные условия ранее были сформулированы в работе Чарни, Фюртофта и Неймана ⁶ для уравнения квазигеострофического приближения в баротропной атмосфере). Использование таких граничных условий позволяет при переходе от дифференциальных уравнений к разностным избежать вычисления на границах односторонних нормальных производных от компонент скорости, появление которых привело бы к вычислительной неустойчивости решений разностных уравнений.

Попытка повысить точность описания синоптических процессов (по сравнению с квазигеострофическим приближением) путем возвращения к примитивным, «неотфильтрованным» уравнениям достигается ценою, во-первых, сохранения высокого порядка по времени у используемой системы уравнений и, следовательно, необходимости задавать большое количество начальных данных (а именно, начальных значений не только поля давления, но и поля скорости ветра) и, во-вторых, сохранения в числе решений прогностических уравнений гравитационных волн.

Напомним, что гравитационные волны могут генерироваться, во-первых, вследствие начальной «несогласованности» полей давления и скорости и, во-вторых, благодаря тому, что из-за нестационарности синоптических процессов (создаваемой их нелинейностью, а также влиянием сферичности Земли) постоянно возникает расстройка согласованности указанных полей. При использовании примитивных уравнений второй из этих факторов остается в силе, но можно устранить первый, задав по фактическим данным лишь начальное поле давления, а начальное поле скорости подобрав из условий его согласованности с полем давления (при этом заодно будут устранены ошибки, связанные с неточностью измерения начального поля ветра; см. ⁸⁸). Эти условия могут быть записаны, согласно изложенному выше, в терминах квазигеострофического или квазисоленоидального разложения (см. ⁸³ и ⁶⁷). С точностью до членов порядка Kl^2 эти условия сводятся к тому, что функция тока ψ должна быть связана с z уравнением баланса (8,3), а дивергенция скорости $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ — формулой

$$D = -\frac{g}{l^2} \left\{ \Delta \frac{\partial z}{\partial t} + \left[z, \frac{g}{l} \Delta z + l \right] \right\}, \quad (9,4)$$

в которой еще надо при помощи уравнения (7,4) или (7,6) выразить $\frac{\partial z}{\partial t}$ через значения поля z в тот же момент времени.

Польза возвращения к примитивным уравнениям не может быть связана с учетом гравитационных волн; их, наоборот, надо «отфильтровывать» (хотя бы частично, путем приблизительного «согласования» начальных полей скорости и давления). Но польза может быть заключена в учете фактической ограниченности «радиуса взаимодействия» барического поля, вытекающей из того, что система примитивных уравнений имеет гиперболический тип: барическая тенденция, т. е. производная $\frac{\partial z}{\partial t}$, фигурирует в главной линейной части этих уравнений под знаком гиперболического оператора $\mathcal{G}\Delta - \frac{1}{L_0^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ (где \mathcal{G} определяется формулой (7,7)).

Поэтому значение $\frac{\partial z}{\partial t}$ в фиксированной точке M в момент времени t определяется значениями начальных полей давления и скорости в ограниченной по горизонтали окрестности точки M с радиусом $c_0 t$ и физически не может зависеть от значений начальных полей вне этой окрестности. В «отфильтрованном» же уравнении, например (7,6), указанный гиперболический оператор заменяется эллиптическим оператором $\mathcal{G}\Delta - (1/L_0^2)$, вследствие чего значение $\frac{\partial z}{\partial t}$ в точке M в любой момент времени t становится зависящим от значений начального поля давления во всем пространстве, включая значения этого поля в точках, отстоящих от M на расстояния больше $c_0 t$. Вклады этих точек не имеют физической природы и вносят в значения $\frac{\partial z}{\partial t}$ искажения, ценой которых и достигается «отфильтровывание» гравитационных волн.

Однако для исправления этого недостатка «отфильтрованных» уравнений необязательно целиком возвращаться к примитивным уравнениям, а достаточно, например, заменить в уравнении квазигеострофического приближения (7,6) левую часть $\left(\mathcal{G}\Delta - \frac{1}{L_0^2} \right) \frac{\partial z}{\partial t}$ на

$$\left(\mathcal{G}\Delta - \frac{1}{L_0^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial z}{\partial t}$$

и использовать для получающегося уравнения приблизительно «согласованные» начальные значения полей скорости и давления; такой прием и был рекомендован в работе ⁶⁷.

Впрочем, возвращение от «отфильтрованных» уравнений к примитивным (или восстановление в «отфильтрованных» уравнениях гиперболического оператора) для повышения точности прогнозов синоптических процессов пока вовсе не представляется неизбежным, так как точность, которую в принципе могут дать «отфильтрованные» уравнения, в особенности уравнения квазисоленоидального приближения, при конкретных расчетах практически еще не достигается, прежде всего вследствие ошибок численного расчета, связанных с аппроксимацией непрерывных полей давления и скорости их значениями на конечном множестве точек некоторой пространственно-временной сетки и с соответствующей заменой фигурирующих в уравнениях динамики дифференциальных операторов разностными (а также вследствие ошибок, содержащихся в начальных данных и создаваемых неточной формулировкой краевых условий на подстилающей поверхности с искривленным рельефом).

10. ВЕРТИКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА СИНОПТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Одной из первых задач, возникающих при интегрировании прогностических уравнений, является описание *вертикальной структуры* синоптических процессов, необходимое вследствие того, что эти уравнения содержат двойное дифференцирование по вертикальной координате p (входящее в уравнении (7,4) в оператор \mathcal{F} , а в (8,2) — в инвариант F) или эквивалентное двойное интегрирование (оператор \mathcal{G} в (7,6)).

Вертикальная структура синоптических процессов оказывается наиболее простой в частном случае баротропной атмосферы (см. ⁷²): отклонения $z(x, y, p, t)$ высот изобарических поверхностей от их значений $Z(p)$ в стандартной атмосфере здесь имеют вид

$$z(x, y, p, t) = z_0(x, y, t) \psi_0(p), \quad (10,1)$$

причем функции $z_0(x, y, t)$, являющейся единственным «параметром» баротропной модели атмосферы, можно придать смысл высоты изобарической поверхности на некотором среднем уровне в тропосфере (около 500 мб). В общем случае бароклининой атмосферы функцию $z(x, y, p, t)$ можно аппроксимировать выражением

$$z(x, y, p, t) = \sum_{n=0}^{N-1} z_n(x, y, t) \psi_n(p), \quad (10,2)$$

где $\psi_n(p)$ — некоторые фиксированные функции, а $z_n(x, y, t)$ — «параметры», которые всегда можно выразить через значения $z(x, y, p, t)$ на заданных уровнях $p = p_n$ (так что модели вертикальной структуры синоптических процессов с несколькими «параметрами» эквивалентны моделям с несколькими уровнями). Выражение (10,2) ни при каком конечном числе слагаемых N не может служить *точным решением* прогностических уравнений, но *приближенно* последние могут быть заменены соответствующими уравнениями для «параметров» данной модели. В практике численных прогнозов использовались модели с двумя или тремя параметрами, а в опытах — и с большим числом параметров (или уровней). Функции $\psi_n(p)$ при этом задавались исходя либо из тех или иных качественных предположений о вертикальной структуре синоптических процессов, либо из соображений удобства интерполяции между заданными уровнями.

Но здесь естественно возникает вопрос об оптимальном выборе этих функций.

Критерий оптимальности можно ввести с помощью статистических соображений, рассматривая при фиксированном t значения $z(x, y, p, t)$ в разных точках (x, y) как индивидуальные реализации некоторой случайной функции $\psi(p)$, характеризуемой корреляционной функцией $\beta(p_1, p_2) = \overline{\psi(p_1)\psi(p_2)}$ (черта означает математическое ожидание или осреднение по (x, y) ; среднее значение $\overline{\psi(p)}$ здесь без ограничения общности принято равным нулю). Из общей теории случайных функций следу-

ет ^{89, 90}, что средний квадрат $\sigma_N^2 = \int \left| \psi - \sum_{n=0}^{N-1} z_n \psi_n \right|^2 dp$ ошибки аппро-

ксимации функции $\psi(p)$ суммой первых N членов ее разложения по полной ортонормированной системе функций $\psi_n(p)$ будет при фиксированном N минимальным, если в качестве $\psi_n(p)$ выбрать собственные функции «оператора дисперсии» $\beta(p_1, p_2)$ в интегральном уравнении

$$\int \beta(p_1, p_2) \psi(p_2) dp_2 = \mu \psi(p_1). \quad (10,3)$$

Такой выбор функций $\psi_n(p)$ будет оптимальным со статистической точки зрения. При этом собственные значения μ оператора $\beta(p_1, p_2)$ будут иметь смысл дисперсий коэффициентов разложения $z_n = \int \psi \psi_n dp$ и эти коэффициенты будут попарно некоррелированными. Обухов ⁹⁰ использовал такое статистически оптимальное представление для описания вертикальной структуры поля $\psi(p) = \frac{\partial z}{\partial t}$. В двух реальных примерах таких полей, рассмотренных им на дискретном множестве уровней $p = 1000, 850, 700, 500$ и 300 мб, оказалось, что на первый член оптимального разложения (соответствующий баротропной модели атмосферы) приходится около 70% полной дисперсии поля $\frac{\partial z}{\partial t}$, на сумму первых двух — свыше 90%, и на сумму первых трех — 97%; последующие члены содержат уже очень небольшую долю полной дисперсии и поэтому определяются весьма неточно. Отсюда следует, что в моделях вертикальной структуры синоптических процессов можно ограничиваться двумя-тремя параметрами или уровнями (большее количество уровней может быть полезным в планетарном пограничном слое атмосферы для детального учета эффектов трения и в стратосфере, если нужно прогнозировать ее состояние). Отметим, что в двух примерах Обухова ортонормированные оптимальные функции $\psi_n(p)$ оказались очень близкими. Малая изменчивость таких функций от территории к территории и в течение года как для поля $\psi(p) = \frac{\partial z}{\partial t}$, так и для вертикальной структуры полей зональной и меридиональной компонент скорости ветра и некоторых других синоптических полей установлена специальным исследованием Руховца ⁹¹; в качестве примера на рис. 13 приведены первые пять функций $\psi_n(p)$ для поля $\frac{\partial z}{\partial t}$ в разные сезоны года.

Изложенный метод статистически оптимальных разложений ранее применялся в работах Фукуоки ⁹², Лоренца ⁹³, Уайта с соавторами ⁹⁴ и Багрова ⁹⁵ для описания горизонтальной структуры метеорологических полей в целях их типизации и статистического прогноза. После работы Обухова ⁹⁰ этот метод получил весьма широкое применение (см., например, ⁹⁶).

Другим методом естественного выбора функций $\psi_n(p)$ в разложении (10,2) может быть использование собственных функций «динамического

оператора» \mathcal{H} , фигурирующего в главной линейной части прогностического уравнения, которую запишем в виде $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi$. При некотором общем условии такие функции $\psi_n(p)$ будут совпадать с только что рассмотренными собственными функциями «статистического оператора» $\beta = \psi(p_1)\psi^*(p_2)$ (здесь для общности мы допускаем комплексные функции ψ и звездочка

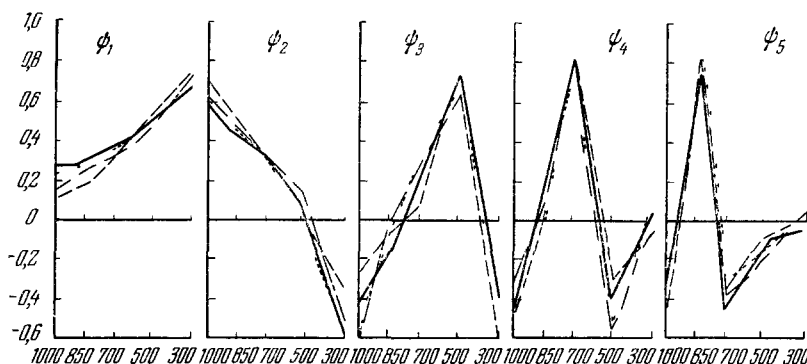


Рис. 13. Собственные функции $\psi_n(p)$ оператора дисперсии $\beta(p_1, p_2)$ поля $\psi(p) = \partial z / \partial t$ в разные сезоны года (по ⁹⁶).

— январь 1958 г., — — — апрель 1959 г., — · — — июль 1959 г. — — — октябрь 1959 г.

означает комплексно сопряженную величину). Действительно, продифференцировав это выражение для β по времени t , заменяя $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ на $\mathcal{H}\psi$ и используя условие $\mathcal{H}^* = -\mathcal{H}$ (обеспечивающее сохранение энергии), получим

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \mathcal{H}\beta - \beta\mathcal{H}, \quad (10,4)$$

так что при условии статистической стационарности, когда оператор дисперсии β не зависит от времени t и левая часть равенства (10,4) обращается в нуль, операторы β и \mathcal{H} оказываются коммутативными и, следовательно, имеют одинаковые собственные функции ⁹⁷. Связь этих собственных функций с «динамическим оператором» \mathcal{H} , который не зависит от времени, может дать объяснение их статистической устойчивости (малой изменчивости от сезона к сезону и от территории к территории), отмечавшейся выше. Но это не относится к дисперсиям μ_n коэффициентов z_n — в рамках линейной теории их значения вообще произвольны, а фактически они устанавливаются в результате слабых нелинейных взаимодействий, и поэтому дисперсии оказываются значительно менее статистически устойчивыми, чем собственные функции операторов β и \mathcal{H} .

Аналогичный метод выбора функций $\psi_n(p)$ в разложении (10,2) был предложен в работе Гаврилина ⁹⁸, где в качестве $\psi_n(p)$ использовались собственные функции «вертикального» оператора $\mathcal{H} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\alpha_0^2} \frac{\partial}{\partial p}$ (при $\alpha_0^2 = \text{const}$), который входит в состав трехмерного эллиптического оператора \mathcal{F} формулы (7,5), фигурирующего в уравнении (7,4) квазигеострофического приближения. Эти собственные функции ранее были найдены в работе ⁶⁷ как решения уравнения $\mathcal{H}\psi = -\mu\psi$ при краевых условиях $p \frac{\partial \psi}{\partial p} + \alpha_0^2 \psi = 0$ при $p = p_0$ (что соответствует обращению в нуль вертикальной скорости w на подстилающей поверхности) и $p |\psi|^2 < \infty$ при $p \rightarrow 0$ (что соответствует ограниченности кинетической энергии на верхней границе атмосферы); такие краевые условия использовались выше при получении

интегральной формы (7,6) уравнения квазигеострофического приближения. Спектр собственных значений μ оператора \mathcal{E} содержит изолированную точку $\mu = 1 - \alpha_0^2$ и полупрямую $1/4\alpha_0^2 < \mu < \infty$ (в пределе при $\alpha_0^2 \rightarrow 0$, т. е. при переходе к баротропной атмосфере, в спектре остается только одна изолированная точка). Изолированной точке отвечает собственная функция $\psi_0(p) = (p_0/p)^{\alpha_0^2}$, остальным точкам спектра — функции

$$\psi_\nu(p) = \sqrt{\frac{p_0}{p}} \left[2\nu \cos\left(\nu \ln \frac{p_0}{p}\right) - (1 - 2\alpha_0^2) \sin\left(\nu \ln \frac{p_0}{p}\right) \right], \quad (10,5)$$

где $\nu = \sqrt{\alpha_0^2 \mu - \frac{1}{4}}$. Указанные собственные функции не нормированы; с точностью до этого замечания они оказываются весьма похожими на статистически оптимальные функции рис. 13. В работе ⁹⁸ рассматривался ограниченный слой атмосферы $p_0 \geq p \geq p_h$ (с краевым условием на верхней границе $p \frac{\partial \psi}{\partial p} + \alpha^2 \psi = 0$); при этом непрерывная часть спектра распадается на счетное множество точек $\nu = \pi n / \ln(p_0/p_h)$, $n = 1, 2, \dots$, а вид собственных функций не меняется. Для «параметров» $z_n(x, y, t)$ разложения (10,2) получаются уравнения

$$\mathcal{F}_n \frac{\partial z_n}{\partial t} = -\frac{g}{l} \left\{ \frac{1}{N_n^2} \sum_{p,q} a_{npq} [z_p, \mathcal{F}_q z_q] + \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial z_n}{\partial x} \right\}, \quad (10,6)$$

где $\mathcal{F}_n = \frac{g}{l} \left(\Delta - \frac{\mu_n}{L_0^2} \right)$, причем μ_n — собственные значения оператора \mathcal{E} ($L_0/\sqrt{\mu_n}$ играет роль масштаба горизонтальных неоднородностей поля z_n); N_n — нормы собственных функций ψ_n и, наконец, $a_{npq} = \int \psi_n \psi_p \psi_q dp$. Эти уравнения показывают, что изменения во времени каждой компоненты $z_n \psi_n$ поля z определяются взаимодействиями между всеми такими компонентами. Любые три компоненты, $z_n \psi_n$, $z_p \psi_p$, $z_q \psi_q$, взаимодействуют как непосредственно (это прямое взаимодействие описывается коэффициентами a_{npq} , симметричными по своим трем индексам), так и через все остальные компоненты. Такая структура изменений поля давления в результате прямых взаимодействий между тройками собственных чисел есть следствие квадратичного вида нелинейностей в уравнениях гидромеханики. Практические приходится ограничиваться учетом лишь конечного числа «параметров» z_n . При этом уравнение для z_0 будет описывать «баротропные» изменения давления. Если положить $z_0 \psi_0 = z^*$, то это уравнение будет иметь вид

$$\mathcal{F} \frac{\partial z^*}{\partial t} = -\frac{g}{l} \left\{ \frac{\psi_0}{N_0^2} \int [z, \mathcal{F} z] \psi_0 dp + \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial z^*}{\partial x} \right\}. \quad (10,6')$$

При $\alpha_0^2 \rightarrow 0$ оно переходит в уравнение (7,6) баротропной модели. Для «бароклининой» компоненты $z' = z - z^*$ получается уравнение

$$\mathcal{F} \frac{\partial z'}{\partial t} = -\frac{g}{l} \left\{ [z, \mathcal{F} z] - \frac{\psi_0}{N_0^2} \int [z, \mathcal{F} z] \psi_0 dp + \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial x} \right\}. \quad (10,6'')$$

Из системы двух уравнений (10,6) и (10,6') можно определить обе компоненты z^* и z' изменений поля давления и тем самым непосредственно оценить роль бароклининых эффектов. Можно думать, что эта роль будет наибольшей во фронтальных зонах (между воздушными массами с разными свойствами), а вне их основную долю изменений давления будет составлять «баротропная» компонента z^*).

11. ПРОГНОЗ ПОГОДЫ

В квазигеострофическом приближении мы имеем дело с уравнениями (7,4) или (7,6), описывающими синоптические колебания поля высот изобарических поверхностей $z(x, y, p, t)$, т. е. *поля давления* в атмосфере (в квазисоленоидальном приближении в уравнениях (8,2) — (8,3) к полю z добавляется еще поле функции тока ψ). При этом естественно возникает вопрос о том, в какой мере возможно по прогнозируемым изменениям поля атмосферного давления (которые сами по себе непосредственно людьми почти не ощущаются) судить о тех особенностях погоды, к которым люди весьма чувствительны, т. е. в первую очередь о *температуре воздуха, ветре* и, наконец, *изменчивой облачности и осадках*, составляющих специфическую прелесть погоды на нашей планете. На этот вопрос можно дать довольно оптимистический ответ.

1) Действительно, знание поля $z(x, y, p, t)$ позволяет, во-первых, рассчитать *температуру воздуха* T по формуле $T = -\frac{g}{R} p \frac{\partial z}{\partial p}$ (приводившейся выше в примечании к стр. 343).

При этом существенно, что прогнозируются лишь *синоптические* колебания поля z , обладающие довольно большими пространственными и временными масштабами, и что прогнозируются они лишь в *адиабатическом* приближении. Поэтому по прогнозируемому полю z может быть рассчитано лишь *сглаженное* поле температуры — «синоптический» температурный фон, на который в природе налагаются мелкомасштабные колебания и суточный ход, создаваемые неадиабатическими факторами, например, в пограничном слое атмосферы у подстилающей поверхности. Прогноз суточного хода приземной температуры может быть произведен отдельно, как это и делается в прогностической практике.

2) Во-вторых, по полю z могут быть рассчитаны *горизонтальные компоненты* u, v *поля ветра* на любом уровне, определяемые в квазигеострофическом приближении формулами (7,1) (в квазисоленоидальном приближении они определяются по функции тока ψ , рассчитываемой одновременно с z). Знание силы и направления ветра на разных высотах очень важно, например, для авиации.

3) В-третьих, по полю z можно рассчитать поле величины $w^* = dp/dt$, которая в координатах (x, y, p) заменяет *вертикальную скорость* (по w^* можно определить дивергенцию $D = -\frac{\partial w^*}{\partial p}$). Именно, для w^* можно получить диагностическое (т. е. не содержащее производных по времени) уравнение, если продифференцировать по p и по t уравнение баланса (8,3) и затем исключить из него производную $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ при помощи уравнения переноса потенциального вихря (8,2) и производную $\frac{\partial z}{\partial t}$ при помощи уравнения адиабатичности (7,2). При этом для w^* получается эллиптическое уравнение с правой частью

$$\frac{\alpha_0^2 c_0^2}{p^2} \Delta w^* + \mathcal{A} l \frac{\partial^2 w^*}{\partial p^2} = -g \Delta \left[\psi, \frac{\partial z}{\partial p} \right] + \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial p} [\psi, \Delta \psi + l], \quad (11,1)$$

где \mathcal{A} — оператор $(\nabla \cdot l \nabla) \Delta^{-1}$ (здесь не выписаны еще малые члены, происходящие от слагаемого $2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]$ в уравнении баланса). В квазигеострофическом приближении достаточно заменить в (11,1) функцию тока ψ на $\frac{g^2}{l}$. В этом приближении (и при $l \approx \text{const}$, когда $\mathcal{A} \equiv l$) примеры построения поля w^* по полю z путем решения уравнения (11,1), были даны, например, Найтингом⁹⁹. Он воспользовался фактическими данными о значениях

поля z на девяти уровнях $p = 1000, 900, 800, \dots, 200$ мб, на сетке в 480 точек с расстояниями между ними около 160 миль, покрывающей значительную часть Северной Атлантики и Западной Европы, и решал разностный аналог уравнения (11,1) при нулевых краевых условиях для w^* на границах рассматриваемой области (в том числе на нижней границе $p = 1000$ мб и верхней границе $p = 200$ мб).

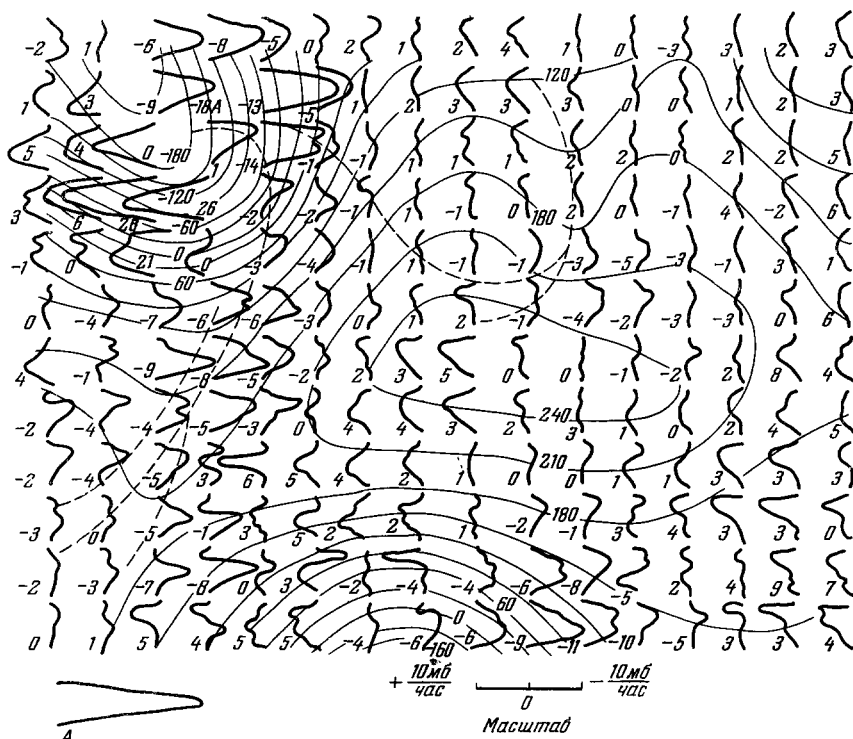


Рис. 14. Профили $w^*(p)$ в слое 1000—200 мб и изогипсы высот изобарической поверхности 1000 мб над Северной Атлантикой и Западной Европой за 01^h 2 декабря 1958 г. (по ⁹⁹).

Один из примеров Найтинга (за 01^h 2 декабря 1958 г.) мы приводим на рис. 14, где в каждой из 16×12 внутренних точек горизонтальной сетки приведен профиль $w^*(p)$ (в мб/час), причем отрицательные w^* , соответствующие восходящим движениям воздуха, откладываются вправо, а положительные w^* , соответствующие нисходящим движениям — влево от начала координат). Сплошными линиями на рис. 14 изображены изолинии высот z (в метрах) изобарической поверхности $p = 1000$ мб, пунктиром — атмосферные фронты. Этот и другие примеры показывают, что вычисленные по уравнению (11,1) профили $w^*(p)$ довольно плавно и закономерно меняются от точки к точке и хорошо соответствуют привычным представлениям синоптиков, например, о подъеме воздуха перед барическими ложбинами и опускании за ними. Если значения w^* велики, то их максимум (а потому и нулевое значение дивергенции $D = -\frac{\partial w^*}{\partial p}$) достигается на среднем уровне в тропосфере, около 500—600 мб; профили $w^*(p)$ в среднем имеют приблизительно параболическую форму.

Впрочем, надо иметь в виду, что по сравнению с полями давления и горизонтального ветра поле вертикальной скорости w (или $w^* = pg/RT[(dh_z/dt) - w]$) заметно более чувствительно к факторам, пока нами не учитывавшимся, и прежде всего —

к искривленности земной поверхности и неадиабатическим факторам. Первую можно учесть, задав форму земной поверхности функцией $z = \zeta(x, y)$, так что при плавном обтекании рельефа будет $w = u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \approx [\psi, \zeta]$ (это условие надо записывать при $z = \zeta$, но при малых ζ его можно приближенно относить и к уровню $z = 0$ или $p = p_0$).

Учитывая из неадиабатических факторов в первую очередь приземное трение, характеризваемое горизонтальным вектором τ напряжения трения у поверхности Земли, значение w на верхней границе слоя трения (или приближенно опять-таки при $p = p_0$) можно определить формулой $w = 1/\rho \cdot |\text{rot } \tau|$; при описании слоя трения так называемой моделью Экмана, с постоянным по высоте коэффициентом турбулентной вязкости \mathcal{K} , получается $w = g/l \sqrt{\mathcal{K}/2l} \Delta z$.

Оба указанных эффекта — наличие рельефа и приземное трение — следует учитывать в краевом условии для уравнения (11,1), которое надо будет записывать в виде

$$w^* = \frac{p_0 g}{RT_0} \left(\frac{dhz}{dt} - [\psi, \zeta] - \frac{g}{l} \sqrt{\frac{\mathcal{K}}{2l}} \Delta z \right) \text{ при } p = p_0. \quad (11,2)$$

Тогда с помощью (11,1) и (11,2) можно будет рассчитывать поле w^* по заданным полям z и ψ . В более полной постановке задачи надо будет учитывать влияние рельефа и трения на поля z и ψ , используя краевое условие (11,2) при решении уравнения квазигеострофического приближения (7,4) (что внесет дополнительные слагаемые в правую часть формулы (7,6) или уравнений квазисоленоидального приближения (8,2) — (8,3)). Впрочем, при этом естественно будет учитывать и остальные неадиабатические эффекты, из которых для поля w^* особенно существенным будет выделение скрытой теплоты конденсации в облаках.

4) Знание поля ψ (в квазигеострофическом приближении равного gz/l) и поля w^* позволяет рассчитывать *перемещения в атмосфере различных примесей*. В случае консервативных примесей для этой цели можно использовать уравнение переноса в виде

$$\frac{dq}{dt} = \mathcal{D}\{q\}, \quad (11,3)$$

где q — удельная концентрация примеси (т. е. отношение ее массы в элементарном объеме воздуха к суммарной массе воздуха с примесью в этом объеме), причем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial q}{\partial t} + [\psi, q] + w^* \frac{\partial q}{\partial p}, \\ \mathcal{D}\{q\} &= -\frac{1}{\rho} \text{div } \mathbf{Q}, \end{aligned} \right\} \quad (11,3')$$

где \mathbf{Q} — плотность диффузионного потока примеси, создаваемого главным образом турбулентной диффузией, который обычно предполагается линейно зависящим от градиента ∇q поля q . Впрочем, в свободной атмосфере (т. е. выше планетарного пограничного слоя атмосферы) в течение не слишком больших промежутков времени турбулентной диффузией примесей (т. е. правой частью уравнения (11,3)) часто пренебрегают.

Если водяной пар в воздухе находится в ненасыщенном состоянии, то он является консервативной примесью, и уравнение (11,3) пригодно для описания эволюции поля удельной влажности q (в этом случае, кстати, знание величины w^* позволяет оценить адиабатическое охлаждение поднимающихся и нагревание опускающихся воздушных частиц с помощью простой формулы $dT/dt = [(\kappa - 1)/\kappa] T/p w^*$). При этом иногда удобнее вместо q характеризовать влажность воздуха так называемой *точкой росы* T_m — температурой, при которой воздух с фиксированными удельной влажностью q и давлением p становится насыщенным (над плоской поверхностью воды). Точка росы определяется из соотношения $q = R/R_v \cdot e_m(T_m)/p$, где R и R_v — газовые постоянные сухого воздуха и водяного пара, а $e = e_m(T)$ — парциальное давление насыщающего водяного пара. Подставляя эту формулу для q в уравнение (11,3) (в пре-

небрежении его правой частью) и пользуясь для $e_m(T)$ формулой Клаузиуса — Клапейрона (4,4), мы получим для дефицита точки росы $\Delta = T - T_m$ уравнение

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T}{p} \left(1 - \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{R_v}{\mathcal{L}} \frac{T_m^2}{T} \right) w^*. \quad (11,4)$$

Льюис ¹⁰⁰ предложил простейший способ прогноза количества облачности и наличия осадков, основанный на использовании эмпирической связи этих явлений со значениями w^* и Δ , которые могут быть рассчитаны при помощи уравнений (11,1) и (11,4). Такая эмпирическая связь показана на рис. 15, где по оси абсцисс отложены значения Δ на уровне 700 мб, а по оси ординат — значения w в средней тропосфере (приближенно $w^* \approx -\rho g w$); различными значками на номограмме изображены фактически наблюдавшиеся явления погоды (в период 15—28 марта 1960 г. в Японии, по ¹⁰¹). Аналогичные способы прогноза облачности и осадков разрабатывались или использовались в работах Швеца ¹⁰², Дупкина, Ломоносова и Лунина ¹⁰³, Ведермена ¹⁰⁴, Овсянникова ¹⁰⁵⁻¹⁰⁶, Кузнецова ¹⁰⁷, Педерсена ¹⁰⁸, Успенского ¹⁰⁹, Багрова ¹¹⁰ и ряда других авторов.

Методы прогноза облачности и осадков по их эмпирической связи со значениями Δ и w^* (или со значениями относительной влажности на том или ином уровне в тропосфере), конечно, очень грубы. Так, согласно

Антонову ¹¹¹, вероятности осуществления осадков, полной облачности или, наоборот, ясной погоды при попадании точки (Δ , w^*) в соответствующие области на номограмме типа рис. 15 составляют 70—80%, а для неполной облачности — только около 50%. Очевидно, следует разработать другую методику прогноза, которая исходила бы из конкретного описания физических процессов образования облаков и осадков. При этом водяной пар уже нельзя будет считать консервативной и пассивной примесью, как это делалось вне облаков при использовании уравнения (11,2); при появлении облаков нужно учитывать фазовые переходы влаги, неадиабатические динамические эффекты выделения или поглощения скрытой теплоты фазовых переходов, а также выпадение влаги с осадками.

Одна из схем такого рода была разработана в серии работ Матвеева ¹¹²⁻¹¹⁶ (см. также гл. 21, § 3 его книги ¹¹⁷ и работы Лушева и Матвеева ¹¹⁸ с примерами прогнозов крупномасштабной облачности, Быковой и Матвеева ¹¹⁹ с изложением материалов численного эксперимента по эволюции облачности в циклоне, Фейгельсон и Фроловой ¹²⁰ с некоторыми методическими усовершенствованиями). В этой схеме рассматриваются две фазы

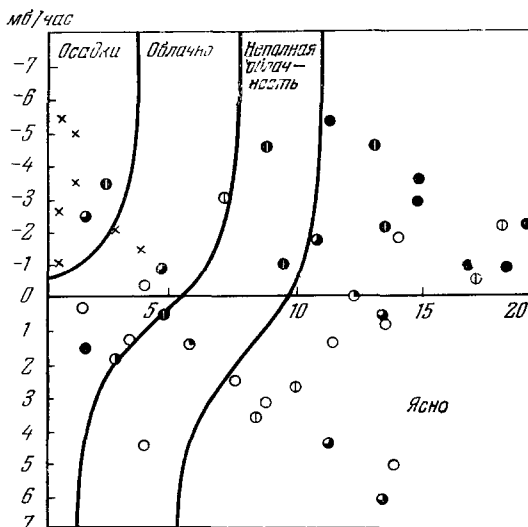


Рис. 15. Эмпирическая связь количества крупномасштабной облачности и наличия осадков со значениями дефицита точки росы Δ на уровне 700 мб и скорости w крупномасштабных вертикальных движений в средней тропосфере (по ¹⁰⁰).

Фактически наблюдавшиеся явления погоды — по ¹⁰¹ (зачерненная доля кружка — балл облачности, крестик — осадки).

влаги в облаках — водяной пар с удельной концентрацией q и капельно-жидкая вода (плюс лед) с удельной концентрацией q_w (называемой *удельной водностью*), и для них принимаются уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \mathcal{D}\{q\} - m, \\ \frac{dq_w}{dt} &= \mathcal{D}\{q_w\} + m - n, \end{aligned} \right\} \quad (11,5)$$

где m — удельная скорость конденсации (плюс сублимации) водяного пара (т. е. масса водяного пара, конденсирующегося или сублимирующегося в единице массы воздуха за единицу времени), а $n = \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q_w}{\partial z}$ — *скорость выпадения осадков*, где Q_w — плотность потока массы капель воды и кристаллов льда, создаваемого их гравитационным оседанием; последнюю можно представить в виде $Q_w = -\rho q_w \tilde{w}$, где \tilde{w} — средняя скорость оседания, взвешенная с весами $r^3 f(r)$, причем $f(r)$ — плотность вероятности для радиусов r облачных элементов, которая в этой схеме считается известной, например логарифмически нормальной с параметрами, связанными теми или иными эмпирическими формулами с q_w . К уравнениям (11,5) добавляется уравнение притока тепла, которое здесь удобно записать в виде

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p} w^* = \mathcal{D}\{T\} + \frac{\varepsilon}{c_p}, \quad (11,6)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_q$ — скорость притока тепла (в единице массы), создаваемого лучистым теплообменом (ε_r) и фазовыми превращениями влаги (ε_q), а $\mathcal{D}\{T\} = -1/c_p \rho \cdot \text{div } Q_T$, где Q_T — плотность турбулентного потока тепла.

Согласно Зилитинкевичу и Лайхтману¹²¹ вертикальная компонента турбулентного потока водяного пара в облаках может быть записана в виде $Q_z = -\rho K \left(\frac{\partial q}{\partial z} + \beta \right)$, где $\beta = c_p / \mathcal{L} (\gamma_a - \gamma_b)$ — равновесный градиент влажности, K — коэффициент турбулентной диффузии, $\gamma_a = [(\kappa - 1)/\kappa] (g/R)$ — адиабатический градиент температуры, а γ_b — так называемый влажноадиабатический градиент температуры, определяемый формулой

$$\gamma_b = \gamma_a \frac{1 + \frac{\mathcal{L}}{R} \frac{q_m}{T}}{1 + \frac{\mathcal{L}}{c_p} \frac{\partial q_m}{\partial T}}. \quad (11,7)$$

При этом вертикальную компоненту турбулентного потока тепла следует записывать в виде $Q_{Tz} = -c_p \rho K \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_b \right)$.

Приток тепла ε_q в атмосфере отличен от нуля лишь в облаках, где происходят фазовые превращения влаги, и там равен $\mathcal{L}m$, где \mathcal{L} — скрытая теплота испарения (или близкая к ней по величине скрытая теплота возгонки). Схема Матвеева основана на том, что уравнения для «эквивалентной температуры» $\Pi = T + (\mathcal{L}/c_p)q$ и «полного удельного влагосодержания» $\tilde{q} = q + q_m$, выводимые (при некоторых упрощениях) из (11,5) — (11,6), не содержат m и имеют одинаковый вид и в облаках, и вне их. Найдя из этих уравнений Π и \tilde{q} , из соотношения

$$\Pi = T + \frac{\mathcal{L} Re_m(T)}{c_p R_v p}$$

можно найти T и определить облака как области, в которых разность $\tilde{q} - (Re_m(T)/R_v p)$ положительна; тогда она есть удельная водность q_w .

Чтобы избежать ненадежного численного расчета этой разности, в работе ¹²⁰ предлагается находить q_w из второго уравнения (11,5), определив в нем m формулой

$$m = \left(1 + \frac{\mathcal{L}}{c_p} \frac{\partial q_m}{\partial T}\right)^{-1} \times \\ \times \left[w^* \frac{q_m}{p} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{q_m} \frac{\partial q_m}{\partial T}\right) + \mathcal{D}\{q_m\} - \frac{\partial q_m}{\partial T} \mathcal{D}\{T\} - \frac{\varepsilon_r}{c_p} \frac{\partial q_m}{\partial T}\right], \quad (11,8)$$

получаемой после исключения dT/dt с помощью (11,6) из первого уравнения (11,5), записанного для облака, т. е. при $q = q_m(T, p)$. Формулу такого вида для m впервые, по-видимому, вывел Швец ¹²². При построении конкретных физико-математических моделей облаков аналогичную формулу для m использовал Лебедев ¹²³⁻¹²⁴.

Более детальная схема предлагается в статье Марчука ¹²⁵ (см. также его книгу ¹⁰), где, кроме q и q_w , отдельно вводится удельная концентрация ледяных кристаллов q_L , фазовые переходы влаги описываются слагаемыми $\sum_i \alpha_{ij} q_i$ в выражениях для dq_j/dt (причем коэффициенты α_{ij} , удовлетворяющие условию $\sum_j \alpha_{ij} = 0$, задаются некоторыми полуэмпирическими формулами), а выпадение осадков в жидкой и твердой фазах описывается простейшими эмпирическими формулами. Еще более детальные схемы будут включать расчет характеристик микроструктуры облака — прежде всего упоминавшейся выше плотности вероятности $f(r)$ для радиусов r облачных элементов (которая, вообще говоря, будет зависеть от пространственных координат и времени). Тем самым потребуются осуществить синтез динамики и микрофизики облаков.

Микрофизика облаков активно развивалась в послевоенные годы, главным образом в связи с опытами по искусственному рассеянию облаков (например, путем их засева кристаллами твердой углекислоты, йодистого серебра или другими коагулянтами) и достигла значительных успехов (обзор которых см., например, в монографии Флетчера ¹²⁶). Если опыты по вызыванию дождя еще не дают уверенных результатов, то рассеяние (хотя бы временное) некоторых типов облаков уже дается с должной надежностью (неиспользование разработанных методов, например, большими аэропортами, является, по-видимому, лишь проявлением организационной косности). В то же время микрофизика облаков не была достаточно нацелена на задачи прогноза погоды, и в этом направлении пока еще выполнено лишь очень немного исследований. В качестве примера назовем работы Буйкова ¹²⁷ и Шулепова и Буйкова ¹²⁸⁻¹²⁹, в которых полагается $m = 4\pi N \tilde{r} \chi (q - q_m)$ (где N и \tilde{r} — среднее число облачных элементов в единице объема и их средний радиус, а χ — коэффициент диффузии водяного пара) и для плотности вероятности $f(r)$ используется кинетическое уравнение

$$\frac{df}{dt} - ar^2 \frac{\partial f}{\partial z} + \chi \frac{q - q_m}{q_w} \frac{\partial}{\partial r} \frac{f}{r} = \mathcal{D}\{f\}, \quad (11,9)$$

где ar^2 — скорость падения облачной капли в неподвижном воздухе.

5) Синтез динамики и микрофизики облаков пока остается делом будущего. Другой еще не решенной задачей является прогноз *конвективных облаков и выпадающих из них осадков*: отдельные конвективные облака по своим пространственным масштабам оказываются не синоптическими, а мезометеорологическими явлениями, так что теория гл. 7—8 для их описания неприменима. В то же время количество осадков из конвективных облаков сравнимо с количеством осадков в крупномасштабных

облачных системах и, следовательно, должно учитываться при описании синоптических процессов. Пока здесь предпринимаются поиски эмпирических связей конвективной облачности и осадков с крупномасштабным синоптическим фоном; возможно, что в установлении таких связей помогут физико-математические модели конвективных ячеек (типа модели, построенной Лебедевым¹²⁴).

При поисках указанных связей, по-видимому, придется различать *свободную* кучевую конвекцию, наблюдаемую, например, в умеренных широтах на *площадях*, занимаемых холодными воздушными массами (внутримассовые ливни и грозы, определяемые прежде всего полем влажности и энергией неустойчивости нижней тропосферы, но, вероятно, мало связанные с крупномасштабной вертикальной скоростью w^* , которая,

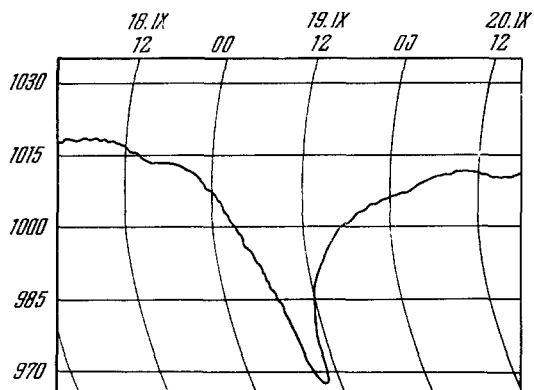


Рис. 16. Барограмма прохождения урагана за 18—20 сентября 1947 г. в Нью-Орлеане, Луизиана, США (по¹³¹).

кстати, в антициклонических областях, типичных для летней конвекции, соответствует оседанию воздуха), и *вынужденную* кучевую конвекцию, наблюдаемую на *линиях* горизонтальной конвергенции (на внутритропической линии конвергенции и холодных фронтах умеренных широт) и в *точках* конвергенции (тропические циклоны) и определяемую прежде всего полем влажности и величиной конвергенции \mathcal{D} (или соответствующей вертикальной скоростью w^*). По идее Чарни кучевая конвекция в какой-то мере сама создает вынуждающую ее горизонтальную конвер-

генцию, поэтому здесь происходит двустороннее взаимодействие между крупномасштабными и мезомасштабными процессами.

Теория гл. 7—8, основанная на адиабатическом приближении и «отфильтрованных» уравнениях, оказывается недостаточной для прогноза не только таких мезометеорологических явлений, как конвективные облака, но и явлений с масштабами на грани между мезометеорологической и синоптической областями, как *тропические циклоны* — ураганы или тайфуны. Тропические циклоны — это наиболее интенсивные явления погоды на Земле (см., например, статью Рила¹³⁰ и книги Рила¹³¹ и Тирона¹³²). Так, в их центрах наблюдается наиболее низкое давление воздуха на уровне моря — трижды зарегистрированный рекорд равен 890 мб (при норме 1013 мб), причем скорость падения давления при приближении урагана иногда достигает 40 мб/20 мин (см. пример на рис. 16), а горизонтальные перепады давления нередко превосходят 50 мб/50 миль — скорость ветра при этом доходит до 100 м/сек. В центрах ураганов наблюдается «глаз бури» — область затишья (конечно, не включающего морского волнения) и частичного или полного прояснения неба (и, следовательно, нисходящих движений воздуха) с диаметром в среднем порядка 30 км. Траектории ураганов в северном полушарии почти всегда направлены от экватора в умеренные широты, причем многие ураганы сначала движутся на северо-запад, а затем поворачивают на северо-восток (рис. 17). Новые, во многом неожиданные сведения о структуре ураганов приносят практические в последние годы героические опыты по самолетному зондированию «глаз бури» и их окрестностей (см., например,¹³³) и фотографирование

с ракет и спутников: например, Фетт¹³⁴ сообщает об обнаружении вдоль границы облачной системы урагана узкой безоблачной зоны оседания с чрезвычайно низкой влажностью (дефицит точки росы $\Delta = 15-20^\circ$), перед которой имеется внешняя зона интенсивной конвекции с мощными

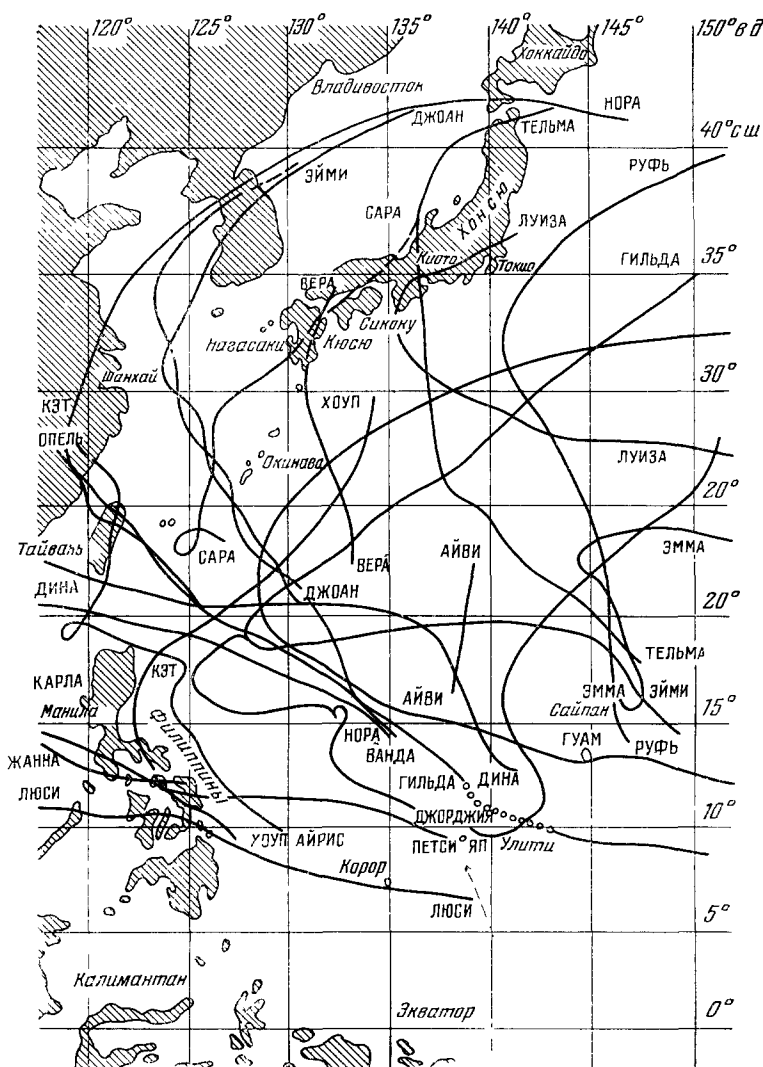


Рис. 17. Пути тайфунов в западной части Тихого океана в сезоне 1962 г.

кучевыми облаками; над зоной оседания на уровне около 200 мб имеется сильное струйное течение, огибающее ураган антициклонически с севера и затем разделяющееся на две ветви.

Синоптические, а также пока еще и гидродинамические методы не обеспечивают необходимой полноты объяснения и точности прогноза движения и эволюции ураганов; в частности, еще не получили физического объяснения наблюдаемые резкие повороты движения ураганов. Согласно Хиллу¹³⁵ суточные прогнозы положения центров ураганов, составляемые Бюро погоды США, которые считаются пока наилучшими, имеют среднюю ошибку больше 200 км, тогда как удовлетворительными можно признать

лишь прогнозы с ошибками не выше 80 км. По-видимому, используемые сейчас упрощенные уравнения гидродинамики недостаточно учитывают ряд факторов, существенных для эволюции ураганов, — выделение тепла конденсации, трение, возможно, вертикальные ускорения.

Впрочем, некоторые опубликованные физико-математические модели тайфунов дали обнадеживающие результаты. Так, например, Эсток¹³⁶ описывает расчеты по двум моделям — квазиградиентной и основанной на примитивных уравнениях, в которых учитываются вертикальный и горизонтальный турбулентный обмен и выделение скрытого тепла конденсации при восходящих движениях, и решается нестационарная осесимметричная задача с шагами по времени 90 и 15 сек (!). Результаты расчетов воспроизводят опускание воздуха в «глазе бури» и подъем у «стены глаза», втекание воздуха на нижних и отток на верхних уровнях.

Морикава^{137–138} построил модель урагана, в которой, учитывая его малые (мезометеорологические) масштабы, ураган трактуется как точечный вихрь, взаимодействующий с «ведущим потоком». Именно, было предложено использовать для описания урагана решение квазигеострофического баротропного уравнения (7,6') в виде $z = l/g \cdot (\psi_0 + \psi_1)$, где

$$\psi_0 = \frac{\gamma}{2\pi} K_0 \left[\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|}{L_0} \right]$$

$\left(\frac{l}{g} \psi_0 \right.$ есть решение уравнения (7,6'), соответствующее точечному вихрю в точке $\mathbf{r}_0(t) = \{x_0(t), y_0(t)\}$), причем траектория вихря определяется соотношениями

$$\frac{dx_0}{dt} = - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \Big|_{\mathbf{r}_0}, \quad \frac{dy_0}{dt} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{\mathbf{r}_0}.$$

Это решение с некоторым успехом было применено для описания движения урагана «Бетси» 14–17 августа 1956 г.; кроме того, была рассчитана модель с квазиравномерным ведущим потоком

$$\psi_1 = UL_0(e^{-\frac{y}{L_0}} - 1) \approx Uy.$$

Использованное в цитированных работах Морикавы приближенное представление непрерывного поля вихря (или, лучше, потенциального вихря) конечным числом точечных вихрей, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, аналогичное замене непрерывного распределения массы дискретным множеством точечных масс, есть способ приближенного описания непрерывных полей, способный конкурировать с использованием разложений по ортогональным функциям (гл. 10) или дискретных пространственных сеток. В гидродинамике такой прием применялся, например, в работах Онзагера¹³⁹, Ферми, Пасты и Улама¹⁴⁰, Пасты и Улама¹⁴¹, Улама¹⁴²; для задач метеорологии он пропагандировался Чарни¹⁴³.

Подводя итоги, можно признать, что гидродинамическая теория в какой-то мере уже справляется с краткосрочным прогнозом не только поля давления, но и таких особенностей погоды, как температура и ветер, и делает важные шаги в направлении прогноза облачности и осадков. Однако принять заявления метеослужб, что они уже используют гидродинамическую теорию краткосрочных прогнозов погоды на практике, можно будет, конечно, лишь тогда, когда объективные гидродинамические прогнозы будут составлять не вместе с субъективными синоптическими, а вместо них.

Институт океанологии им. П. П. Ширшова
АН СССР, Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. Х. Хргиан, Очерки развития метеорологии, Л., Гидрометеиздат, 1948.
2. И. А. Кибель, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 5, 627 (1940).
3. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз. 13 (4), 281 (1949).
4. J. G. Charney, Geophys. Publ. 17 (2), 17 (1948).
5. J. G. Charney, J. Meteorol. 6 (6), 371 (1949).
6. J. G. Charney, R. Fjörtoft, J. von Neuman, Tellus 2 (4), 237 (1950).
7. И. А. Кибель, Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды, М., Гостехиздат, 1957.
8. P. D. Thompson, Numerical Weather Analysis and Prediction, New York, Macmillan, 1961.
9. П. Н. Белов, Практические методы численного прогноза погоды, Л., Гидрометеиздат, 1963; 2-е изд., 1967.
10. Г. И. Марчук, Численные методы в прогнозе погоды, Л., Гидрометеиздат, 1967.
11. Е. Н. Блинова, ДАН СССР 39 (7), 284 (1943).
12. А. С. Монин, Метеорология и гидрология, № 8, 43 (1963).
13. Е. П. Борисенков, Тр. Аркт. и Антаркт. ин-та, № 253, 109 (1963).
14. P. R. Pisharoty, Final Rep. Gen. Circ. Project, AF 19 (122)-48 (1955).
15. Г. В. Груза, Интегральные характеристики общей циркуляции атмосферы, Л., Гидрометеиздат, 1965.
16. E. Palmén, Geofis. pura e appl. 49 (2), 167 (1961).
17. Е. Пальмен, в сб. «Атмосфера и океан в движении», М., ИЛ, 1963, стр. 127.
18. Д. Брент, Физическая и динамическая метеорология, М.—Л., Гостехиздат, 1938.
19. L. F. Richardson, Proc. Roy. Soc. A110, 709 (1926).
20. W. Rudloff, Wetterlotse 14 (188), 183 (1962).
21. R. Neik, Natural History, № 50 (1960).
22. А. М. Обухов, ДАН СССР 32 (1), 22 (1941); Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 5, 453 (1941).
23. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз. 13 (1), 58 (1949).
24. Г. С. Голицын, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 8, 1253 (1964).
25. В. Н. Колесникова, А. С. Монин, Физ. атм. и океана 1 (7), 653 (1965).
26. J. Van der Hoven, J. Meteorol. 14 (2), 160 (1957).
27. К. Россби, в сб. «Атмосферы Земли и планет», М., ИЛ, 1951, стр. 25.
28. E. N. Lorenz, Tellus 5 (3), 238 (1953).
29. Б. Л. Дзердзеевский, А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6, 562 (1954).
30. А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 452 (1956).
31. A. S. Monin, Proc. of Symposium on Time Series Analysis, New York — London, John Wiley and Sons, 1963, стр. 144.
32. В. Н. Колесникова, А. С. Монин, Физ. атм. и океана 2 (2), 113 (1966).
33. Б. Л. Дзердзеевский, в сб. «А. И. Воейков и проблемы современной климатологии», Л., Гидрометеиздат, 1956, стр. 109.
34. R. A. Craig, H. C. Willett, Compendium of Meteorology, Baltimore, Waverly Press, 1951, стр. 379.
35. G. C. Simpson, Nature 141, 591 (1938).
36. C. G. Rossby, Quart. J. Roy. Met. Soc. 66, Suppl., 68 (1940).
37. H. Ertel, Meteorol. Zs. 59, 277 (1942).
38. H. Arakawa, Geofis. pura e appl. 18, 159 (1950).
39. А. М. Обухов, ДАН СССР 145 (6), 1239 (1962).
40. А. М. Обухов, Метеорология и гидрология, № 2, 3 (1964).
41. G. Hollman, Arch. Met., Geophys. und Bioklimatol. A14 (1) (1964).
42. E. N. Lorenz, Tellus 7 (2), 157 (1955).
43. E. N. Lorenz, Dynamics of Climate, Pergamon Press, London, 1960, стр. 96.
44. E. N. Lorenz, Tellus 12 (4), 364 (1960).
45. А. С. Монин, А. М. Обухов, ДАН СССР 122 (1), 58 (1958); Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1360 (1958); Tellus 11 (2), 159 (1959).
46. А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 497 (1958).
47. Р. Эккарт, Гидродинамика океана и атмосферы, М., ИЛ, 1963.
48. Л. А. Диккий, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 8, 1186 (1959).
49. C. G. Rossby, J. Marine Res. 2 (1), 38 (1939).
50. S. S. Hough, Phil. Trans. Roy. Soc. A189, 201 (1897); A191, 139 (1898).
51. A. E. Love, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 12 (4), 813 (1913).
52. Н. Е. Кочин, Собр. соч., т. 1, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1949.
53. C. L. Pekeris, Proc. Roy. Soc. A158 (825), 650 (1937).
54. W. Kertze, Ann. Met., Beiheft (1951).
55. M. Siebert, Advances Geophys., vol. 7, Acad. Press, New York — London, 1961.

56. А. М. Яглом, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 346 (1953).
57. В. H a u g w i t z, J. Marine Res. 3, 254 (1940).
58. Л. А. Диккий, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 756 (1961).
59. Л. А. Диккий, Физ. атм. и океана 1 (5), 469 (1965).
60. С. G. R o s s b y, J. Marine Res. 1 (3), 239 (1938).
61. A. S a h n, J. Meteorol. 2, 113 (1945).
62. В. B o l i n, Tellus 5 (3), 373 (1953).
63. И. А. Рябелъ, ДАН СССР 104 (1), 60 (1955).
64. G. V e r o n i s, Deep-Sea Res. 3 (3), 157 (1956).
65. J. E. F j e l s t a d, Geofis. Publ. 20 (7), 1 (1958).
66. N. A. P h i l l i p s, Rev. Geophys. 1 (2), 123 (1963).
67. А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 602 (1961).
68. J. G. C h a r n e y, Proc. Int. Symp. on Numerical Weather Prediction in Tokyo, Met. Soc. Japan, 131 (1962).
69. J. G. C h a r n e y, M. E. S t e r n, J. Atm. Sci. 19 (2), 159 (1962).
70. Б. Л. Гаврилин, Физ. атм. и океана 1 (6), 557 (1965).
71. А. С. Чаплыгина, Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, № 33 (160), 60 (1956).
72. А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 76 (1952).
73. H. E r t e l, Meteorol. Zs. 58 (3), 77 (1941).
74. А. М. Обухов, А. С. Чаплыгина, Тр. ИФА АН СССР, № 2, 23 (1958).
75. Н. И. Булеев, Г. И. Марчук, Тр. ИФА АН СССР, № 2, 66 (1958).
76. K. H i n k e l m a n n, Tellus 5, 499 (1953).
77. H. L. K u o, Tellus 8 (3), 373 (1956).
78. В. B o l i n, Tellus 7 (1), 27 (1955).
79. P. D. T h o m p s o n, J. Meteorol. 13, 251 (1956).
80. J. G. C h a r n e y, Tellus 7 (1), 22 (1955).
81. J. S m a g o r i n s k y, Month. Weather Review 86 (12), 457 (1958).
82. K. H i n k e l m a n n, The Atm. and the Sea in Motion, Rockefeller Inst. Press, N.Y., 1959.
83. N. A. P h i l l i p s, Tellus 11, 121 (1959).
84. Н. И. Булеев, Г. И. Марчук, Тр. Всесоюзн. научн. метеорол. совещания, т. 2, Л., 1963.
85. Г. И. Марчук, ДАН СССР 155 (5), 1062 (1964).
86. Г. И. Марчук, ДАН СССР 156 (2), 308 (1964).
87. Г. И. Марчук, ДАН СССР 156 (4), 810 (1964).
88. K. H i n k e l m a n n, Tellus 3 (4), 285 (1951).
89. А. М. Обухов, Тр. Геофизич. ин-та АН СССР, № 24 (151), 3 (1954).
90. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 432 (1960).
91. Л. В. Руховец, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 626 (1963).
92. A. F u k u o k a, Geophys. Mag. № 3, 177 (1951).
93. E. N. L o r e n z, Sci. Rep. MIT № 1, Contract AF19 (604) (1956).
94. R. M. W h i t e, D. S. C o o l e y, R. S. D e r b y, F. A. S e a v e r, J. Meteor. 15 (5), 426 (1958).
95. Н. А. Багров, Тр. ЦИП, вып. 74, 3 (1959).
96. J. H o l m s t r ö m, Tellus 15 (2), 127 (1963).
97. А. С. Монин, А. М. Обухов, в сб. «Динамика крупномасштабных атмосферных процессов», М., «Наука», 1967, стр. 194.
98. Б. Л. Гаврилин, Физ. атм. и океана 1 (1), 8 (1965).
99. E. K n i g t i n g, Quart. J. Roy. Met. Soc. 86 (369), 318 (1960).
100. W. L e w i s, Month. Weather Rev. 85 (9), 297 (1957).
101. Y. N a b e s h i m a, Proc. Intern. Symposium on Numerical Weather Prediction, Tokyo, 1962, стр. 265.
102. М. Е. Швец, Тр. ГГО, вып. 81, 3 (1959).
103. П. К. Душкин, Е. Г. Ломоносов, Ю. Н. Лунин, Метеорология и гидрология, № 12, 3 (1960).
104. J. V e d e r m a n, Month. Weather Rev. 89, (7), 243 (1961).
105. В. В. Овсянников, Тр. ЦИП, вып. 81, 92 (1961).
106. В. В. Овсянников, Метеорология и гидрология, № 3, 67 (1962).
107. Л. А. Кузнецов, Метеорология и гидрология, № 12, 9 (1962).
108. K. R e d e r s e n, Geogys. Publ. 25 (1), 25 (1963).
109. Б. Д. Успенский, Метеорология и гидрология, № 2, 3 (1965).
110. Н. А. Багров, Метеорология и гидрология, № 12, 20 (1965).
111. В. С. Антонов, Метеорология и гидрология, № 9, 54 (1963).
112. Л. Т. Матвеев, Тр. ААНИИ, № 228, вып. 1, 14 (1959).
113. Л. Т. Матвеев, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 130 (1961).
114. Л. Т. Матвеев, Метеорология и гидрология, № 2, 1 (1962).
115. Л. Т. Матвеев, Космические исследования 2 (1), 109 (1964).
116. L. M a t w e e v, Tellus 16 (2), 139 (1964).

117. Л. Т. М а т в е е в, Основы общей метеорологии, Физика атмосферы, Л., Гидрометеиздат, 1965.
 118. Ю. Г. Л у ш е в, Л. Т. М а т в е е в, Физ. атм. и океана 2 (1), 3 (1966).
 119. Л. П. Б ы к о в а, Л. Т. М а т в е е в, Физ. атм. и океана 2 (9), 905 (1966).
 120. Е. М. Ф е й г е л ь с о н, Н. Г. Ф р о л о в а, Физ. атм. и океана 1 (3), 241 (1965).
 121. С. С. З и л и т и н к е в и ч, Д. Л. Л а й х т м а н, ДАН СССР 156 (5), 1079 (1964).
 122. М. Е. Ш в е ц, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6, 547 (1955).
 123. С. Л. Л е б е д е в, Физ. атм. и океана 1 (4), 456 (1965).
 124. С. Л. Л е б е д е в, Физ. атм. и океана 2 (1), 14 (1966).
 125. Г. И. М а р ч у к, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 754 (1964).
 126. N. H. F l e t c h e r, The Physics of Rainclouds, Cambr. Univ. Press, 1962.
 127. М. В. Б у й к о в, Тр. Всесоюз. научн. метеорол. совещания, т. 5, Л., 1963, стр. 122.
 128. Ю. В. Ш у л е п о в, М. В. Б у й к о в, Физ. атм. и океана 1 (3), 248 (1965).
 129. Ю. В. Ш у л е п о в, М. В. Б у й к о в, Физ. атм. и океана 1 (4), 353 (1965).
 130. H. R i e h l, Science 141 (№ 3585), 1001 (1963).
 131. Г. Р и л ь, Тропическая метеорология, М., ИЛ, 1963.
 132. З. М. Т и р о н, Ураганы, Л., Гидрометеиздат, 1964.
 133. С и м а д а К э н д з и, Tenki 9 (5), 164 (1962) (японск.).
 134. R. F e t t, Month. Weather Rev. 92 (2), 43 (1964).
 135. E. C. H i l l, Mariners Weather Log. 6 (5), 153 (1962).
 136. M. A. E s t o q u e, Geofis. Internac. 3 (4), 133 (1963).
 137. G. K. M o r i k a w a, J. Meteorol. 17 (2), 148 (1960).
 138. G. K. M o r i k a w a, Proc. of International Symposium on Numerical Weather Prediction, Tokyo, 1962; стр. 349.
 139. L. O n s a g e r, Nuovo Cimento, Suppl. 6, 3 (1949).
 140. E. F e r m i, J. P a s t a, S. U l a m, Los Alamos Sci. Lab. Report LA-1557 (1953).
 141. J. P a s t a, S. U l a m, Los Alamos Sci. Lab. Report LA-1940 (1955).
 142. С. У л а м, в сб. «Гидродинамическая неустойчивость», М., «Мир», 1964, стр. 289.
 143. J. G. C h a r n e y, Proc. of Symposia in Appl. Math. 15, 289 (1963).
-