1968 г. Январь *Том 94, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

530.10

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОБЛЕМЫ В ФИЗИКЕ *)

В. Гейзенберг

Вопрос о нелинейных проблемах в физике очень трудно обсуждать в силу ряда обстоятельств. Прежде всего: что такое нелинейные проблемы? Практически любой раздел теоретической физики (за исключением, возможно, квантовой теории) имеет дело с нелинейными уравнениями. Однако вопрос о том, будет ли квантовая теория в своей окончательной форме линейной или нелинейной теорией, все еще остается открытым. Таким образом, нелинейные проблемы составляют подавляющую часть теоретической физики.

Отметим, кроме того, что каждая нелинейная задача обладает своими характерными особенностями. Это означает, что каждая нелинейная задача требует особых, обычно очень изощренных и трудных методов. Поэтому маловероятно, что решение какой-либо одной нелинейной проблемы может дать ключ к решению других нелинейных задач.

Наконец, я должен подчеркнуть, что я ни в коей мере не являюсь авторитетом в области нелинейных проблем математики или физики. Однако, занимаясь физикой, мне приходилось сталкиваться с рядом нелинейных проблем, так что я по крайней мере знаком с некоторыми из тех чрезвычайных трудностей и осложнений, которые возникают в задачах такого рода.

В этой ситуации все, что я могу сделать, это, не пытаясь дать полный обзор этой области, рассказать о некоторых проблемах, которые встретились мне при решении физических задач, и указать их общие черты. А я думаю, что все такие проблемы имеют общие черты. Общим для всех их являются трудности, которые весьма схожи, и методы решения возникающих трудностей. Поэтому я позволю себе обсудить вкратце некоторые проблемы и выявить их общие черты.

Я хотел бы начать с кратких исторических замечаний, сказав несколько слов о механике точки, и лишь затем перейти к основным проблемам теории сплошных сред. В заключение мне хотелось бы выяснить, в какой мере квантовая теория может рассматриваться как линейная теория и в какой степени как нелинейная.

*) W. Heisenberg, Nonlinear Problems in Physics, Physics Today **20**, 27 (1967). В оригинале — аннотация: «Взаимодействия полей с веществом, вообще говоря, нелинейны, так что нелинейные проблемы играют основную роль в физике. На самом деле, поскольку нелинейность занимает столь важное место в природе, возможно, что даже такую линейную по своей сути теорию, как квантовая теория, придется заменить на нелинейную». Перевод И. М. Дрёмина.

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В физике, как это видно из ее истории, обычно переходят от простых задач к более сложным. С точки зрения обсуждаемых здесь вопросов простейшей задачей, на которой следует остановиться, является решение линейного однородного уравнения. Следующей по сложности задачей может считаться решение линейного неоднородного уравнения. И, наконец, намного бóльшие сложности возникают при решении задач, в которые входят нелинейные операции. Фактически математическая физика возникла около 300 лет назад вместе с появлением закона инерции, который можно рассматривать как решение линейного однородного уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, где x — координата, а t — время. В законах свободного падения Галилей решал уже линейное неоднородное уравнение; неоднородность была связана с появлением силы. Наконец, Ньютон поставил нелинейную проблему, потому что уравнения ньютоновской механики, конечно, являются нелинейными.

МЕХАНИКА ТОЧКИ

Конечно, Ньютон не мог найти общих решений нелинейных уравнений. Ему сразу пришлось думать о возможных упрощениях. Поэтому и я начну с перечисления некоторых наиболее важных упрощений, которые можно использовать не только при решении нелинейных задач механики точки, но фактически и во всех нелинейных проблемах, с которыми нам приходится сталкиваться.

Симметрия. Среди всех возможных упрощений два являются наиболее важными. Первое из них связано с симметрией задачи. Физики узнали от математиков, что симметрия задачи, как правило, ведет к закону сохранения. Все законы сохранения, известные в физике: сохранение энергии, импульса, момента импульса и т. д., — базируются на фундаментальных симметриях в основных законах природы.

Например, ньютоновские уравнения движения инвариантны относительно галилеевой группы, которая является непрерывной группой с десятью параметрами. Из этого факта следует наличие десяти законов сохранения, которые могут быть использованы для упрощения рассматриваемой задачи. Только благодаря использованию симметрии Ньютону удалось решить задачу двух тел в астрономии. Два тела характеризуются двенадцатью переменными — тремя координатами и тремя проекциями импульса. Из этих двенадцати степеней свободы Ньютон смог устранить десять параметров, используя законы сохранения. Оставшаяся часть задачи была уже довольно простой. Подобные упрощения могут быть использованы в большинстве задач.

Линеаризация. Другое упрощение состоит в линеаризации задачи. Этот метод используется очень широко, он оказался весьма важным при обсуждении нелинейных проблем. Предположим, что более или менее случайно нам удалось найти простые решения рассматриваемой проблемы, например, статические решения, когда все тела покоятся, или же, что имеет место в гидрóдинамике, стационарные решения, когда движение не меняется с течением времени, т. е., по крайней мере, скорости постоянны. Во всех этих случаях можно изучить поведение общих решений нелинейной задачи в окрестности выбранного нами частного решения. В этом, до известной степени, и заключается основная задача теории возмущений. Для малых возмущений относительно известного движения мы получаем линейные уравнения. Таким образом, мы возвращаемся к более простым математическим задачам, для которых уже можно найти полную систему решений. Полученные решения могут быть проанализированы на всем временно́м интервале, от минус бесконечности до плюс бесконечности; эти решения характеризуются их асимптотическим поведением в пространстве и времени.

Если исходное частное решение является статическим, или стационарным, то имеется дополнительное преимущество, обусловленное тем, что коэффициенты линейных уравнений, возникающих при использовании теории возмущений, не зависят от времени. Поэтому можно искать решения в виде функций, экспоненциально зависящих от времени, т. е. в виде $e^{i\omega t}$ или же $e^{\alpha t}$.

Если такую систему решений удастся найти, то можно сразу же ответить на вопрос об устойчивости или неустойчивости. Если существуют только периодические решения или же решения, в которых возмущения затухают с течением времени, то система устойчива: возмущенное решение, начиная с некоторого момента, не будет с течением времени отклоняться заметно от первоначально выбранного простого решения. Если же существуют решения линейного уравнения, которые экспоненциально растут со временем, то решение уже не будет устойчивым. Такой метод упрощения проблемы может применяться даже тогда, когда первоначальное решение не является статическим. Об общей теории возмущений написано много работ, и с помощью этой теории удалось прояснить существо многих проблем.

Н е п р е д с к а з у е м о с т ь. Однако и здесь мы весьма скоро сталкиваемся с реальными трудностями нелинейных проблем. Прежде всего я упомяну о трудностях, которые возникают в механике точки. Рассмотрим, например, хорошо известную проблему трех тел в астрономии или же еще более сложную задачу о нашей планетной системе. Конечно, здесь использовались методы теории возмущений, однако при этом сразу ясно, что определить пределы применимости такой теории весьма сложно. Движение планет можно довольно легко рассчитать с помощью методов теории возмущений на конечном отрезке времени, скажем, в течение нескольких тысячелетий. Однако с течением времени возмущения могут оказаться отнюдь не малыми.

Так, например, были обнаружены резонансные эффекты, связанные с соизмеримостью орбитальных частот различных планет. С течением времени эти эффекты могут привести к значительным изменениям движения планет, так что, в конце концов, уже не удастся предсказать, будет иметь место периодическое движение по орбите или же планета улетит из планетной системы. Дать ответ на такие вопросы чрезвычайно сложно.

Мне хотелось бы остановиться на одном весьма парадоксальном результате математического анализа, а именно — на теореме Генриха Брунса. Он доказал, что даже в бесконечно малой окрестности той точки, в которой ряд теории возмущений сходится, всегда должны существовать такие точки, где ряд теории возмущений расходится. Таким образом, можно утверждать, что точки, в которых сходится ряд теории возмущений, и точки, в которых он расходится, образуют всюду плотное многообразие. Из этого результата следует, что по прошествии достаточно долгого времени уже нельзя предсказать, какова будет орбита. Мы можем предсказать, что́ произойдет в действительности только лишь на некотором конечном отрезке времени.

Этот математический вывод представляет интерес не только для астрономов. Он имеет и весьма важные практические применения. В качестве примера мне бы хотелось упомянуть о той проблеме, которая беспокоила нас около 15 лет назад при проектировании протонного синхротрона в ЦЕРНе. Для большого ЦЕРНовского ускорителя было весьма важно знать, будет ли устойчив на орбите протон, движущийся по кругу в ускорителе. Можно было создать такие условия, при которых существовали бы устойчивые осцилляции около основной орбиты. Но когда имеется какой-либо небольшой возмущающий дефект, приводящий к изменению орбиты, то могут появиться резонансы. Частота вращения протона в ускорителе и частота осцилляций на орбите могут стать соизмеримыми, и тогда возникнут трудности, подобные тем, с которыми мы сталкиваемся в астрономии.

Следует ожидать, что амплитуда осцилляций будет расти при наличии резонанса. Но тогда вы вскоре вступаете в ту область, где проблема перестает быть линейной и теория возмущений не применима. Вследствие нелинейности задачи частота изменится и система выйдет из резонансной области. Таким способом будет проявляться стабилизирующее влияние нелинейных членов до тех пор, пока система не пройдет ту критическую область, где имеет место резонанс.

Таковы были наши надежды. Когда мы провели численные расчеты, то оказалось, что частица в действительности может совершать по орбите около 10 000 оборотов, т. е. оказалось, что стабилизирующий эффект работает достаточно хорошо. Сначала амплитуда нарастает, затем частота выходит из области резонанса, тогда амплитуда вновь уменьшается, и так далее. Но и после 10 000 оборотов частица все равно может уйти с основной орбиты. Так вы приходите к весьма удивительному факту, связанному с нелинейностью задачи, к конечной неустойчивости частицы после длительного периода явной устойчивости на орбите. По моему мнению, это обстоятельство является весьма характерной чертой нелинейных проблем. Поэтому, говоря не очень строго, можно было бы сказать, что нелинейные проблемы обладают определенной непредсказуемостью. Мы не знаем поведения решения за длительные периоды времени. Я думаю, что этот факт является общей чертой нелинейных проблем.

С т а т и с т и ч е с к и е   м е т о д ы. А что можно предпринять, если слишком трудно исследовать каждую орбиту по отдельности, слишком трудно обозримым получается набор всех возможных решений нужного уравнения? Выход состоит в том, чтобы исследовать не каждое отдельно взятое решение, а всю совокупность таких решений. Можно привести доводы и в пользу того, что не обязательно знать все точные решения, что иногда достаточно и неполного знания о системе. В этом случае уже нельзя спрашивать, каково будет состояние системы через определенный промежуток времени. Скорее следует спрашивать, каково будет вероятное состояние системы через некоторое время. Именно такого направления исследований и придерживаются в статистической механике. Если следовать этому направлению, то можно столкнуться с трудной проблемой об эквивалентности усреднения по времени усреднению по ансамблю. Я только упоминаю об эргодической гипотезе; я не могу входить здесь в детали этой проблемы.

Из этого краткого обзора механики точки мы можем заключить, что существуют четыре характерные особенности, с которыми приходится сталкиваться во многих нелинейных задачах. Во-первых, всегда можно использовать симметрии для упрощения поставленной задачи. Во-вторых, линеаризация проблемы возможна в окрестности некоторых частных решений, которые достаточно просты и могут быть найдены из элементарных соображений. В-третьих, получающиеся решения обладают непредсказуемостью — никогда не известно, чтó в конце концов произойдет с решением; при этом может оказаться невозможным вообще определить решение при временах, бóльших некоторого заданного момента времени.

И, наконец, одним из возможных выходов из создавшейся ситуации могут служить статистические методы. Здесь мы можем интересоваться уже не отдельными решениями, а ансамблями, или совокупностями, решений, каждое из которых мы не знаем полностью.

СПЛОШНЫЕ СРЕДЫ

Разрешите мне перейти теперь к современным проблемам. Это — задачи о системах с бесконечно большим числом степеней свободы, или задачи, относящиеся к сплошным средам. Конечно, проблем такого рода существует исключительно много — динамика жидкости, динамика газа, теория упругости, электромагнетизм (электромагнетизм представляет собой нелинейную теорию, если принять во внимание взаимодействие с телами) и, наконец, гравитация.

Я сразу же упомяну о тех осложнениях, которые вновь и вновь проявляют себя в этой области физики. Уравнения, в которых полевые величины зависят от непрерывных переменных x, y, z и t, почти неизбежно являются неверными по следующей причине: на очень малых расстояниях необходимо принимать во внимание атомную структуру вещества. Однако фактически в гидродинамике этого делать не нужно. Например, в уравнении Навье — Стокса мы не учитываем молекулярное строение жидкости, мы просто вводим в него член, зависящий от вязкости. То же самое справедливо и в отношении теории упругости, в газовой динамике и т. д. Однако мы все же должны помнить о том, что на очень малых расстояниях будет происходить нечто новое, какие-то явления, которые не описываются этим уравнением. Эти явления должны быть изучены (особенно если уравнение не предопределяет некоторых эффектов даже на больших расстояниях). И только лишь в квантовой теории поля или в теории электромагнетизма непрерывные переменные могут описывать основополагающий континуум. Но и здесь возникают некоторые сомнения в этом. Поэтому перед нами встает общий вопрос, является ли квантовая теория линейной или нелинейной теорией.

С и м м е т р и я и л и н е а р и з а ц и я. Теперь попытаемся выяснить, можно ли для всего этого многообразия проблем динамики жидкости, теории упругости и т. д. применять те же методы упрощения задачи, о которых упоминалось при анализе нелинейных проблем в механике точки. Прежде всего подчеркнем, что вне всякого сомнения всегда можно использовать свойства симметрии рассматриваемой системы и соответствующие им законы сохранения. Дальше можно использовать процедуру линеаризации. К чему приводит такая линеаризация, я мог бы пояснить на одной задаче, которой я занимался некоторое время тому назад и которая очень интересовала меня многие годы. Это — проблема устойчивости ламинарного гидродинамического течения. В то время изучались в основном несжимаемые жидкости (скажем, вода). Поэтому решение проблемы искали, исходя из уравнения Навье — Стокса, в котором помимо инерции учитывается и вязкость жидкости. Вопрос состоял в том, является ли ламинарный поток устойчивым.

Из экспериментов следовало, что ламинарные течения представляют собой только весьма специальные решения этого уравнения. Общие решения были намного сложнее. Здесь мы сталкиваемся с обширной областью турбулентных течений, которые хорошо известны нам из повседневного опыта. Ламинарные же течения мы обнаруживаем, можно сказать, только в специальных опытах. Мы видим, как жидкость может течь в трубе или между двумя параллельными пластинками, и довольно легко можем определить те решения уравнения Навье — Стокса, которые соответствуют этим простым ламинарным потокам. Они были получены очень давно и вошли в учебники. Однако иногда такие решения неустойчивы. Хорошо известно, что если скорость жидкости, текущей по трубе, превысит некую критическую скорость, движение полностью меняется. Вместо гладкого непрерывного потока вдоль трубы появляются разнообразные вихревые движения. Вихри возникают и вновь исчезают. Естественно задать вопрос: почему это происходит при определенной скорости? Это была типичная задача, решение которой можно было надеяться найти, используя процедуру линеаризации.

Можно было бы исследовать движения в очень малой окрестности ламинарного движения. Поскольку последнее стационарно, то коэффициенты в линейных уравнениях, учитывающих возмущения, не зависят

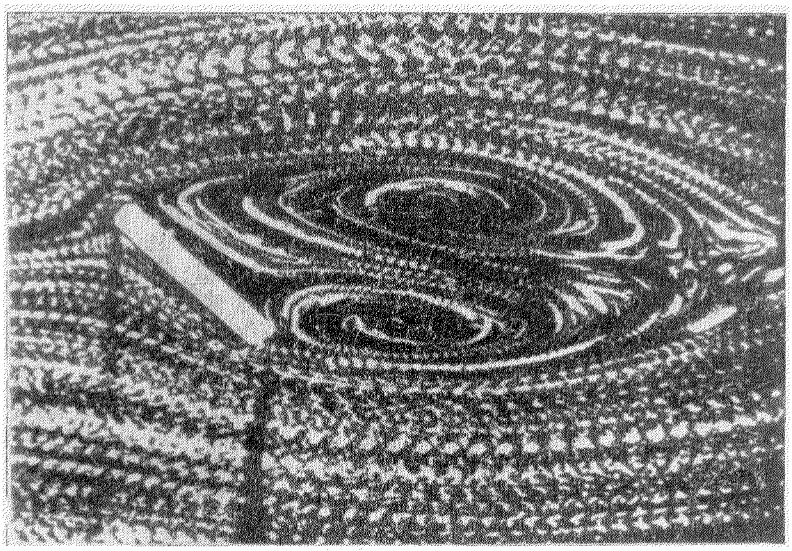

Рис. 1. Ламинарное течение устойчиво при малых числах Рейнольдса, но как только число Рейнольдса окажется выше некоторого критического, появятся возмущения, амплитуда которых возрастает, что и приводит к турбулентному течению.

от времени. Поэтому можно было искать периодические решения, а затем решать обычную задачу на собственные значения, точно так же, как в квантовой теории. При этом можно применять как те математические методы, которые позже оказались весьма полезными в квантовой теории, а именно, исследование асимптотического поведения решений, так и современные достижения прикладной математики и, в частности, использовать электронные вычислительные машины. В результате получится, что для малых чисел Рейнольдса все отклонения от ламинарного движения будут гаснуть, а при числах Рейнольдса, превышающих некоторое число, появляются возмущения, амплитуда которых нарастает и тогда движение приобретает совершенно другой характер, превращаясь в турбулентное, которое уже нельзя рассматривать, применяя теорию возмущений (рис. 1).

Непредсказуемость. Я перейду теперь к подлинно нелинейным проблемам в физике, возникающим в газовой динамике. Они представляют особый интерес. Если в линейных задачах, например, при линейном волновом движении типа звуковых волн, скорость не зависит от амплитуды и частоты волны, то в нелинейном волновом движении это совсем не так. Если, например, в начальный момент времени некоторая функция имеет разрыв, то согласно линейным волновым уравнениям следует ожидать, что этот первоначально существовавший разрыв, скажем, скачок на некоторой поверхности, будет распространяться со скоростью звука подобно всякой другой волне.

Однако при нелинейном движении происходит совершенно иное. Разрыв может либо мгновенно исчезнуть, либо распространяться в виде фронта ударной волны — одного или, может быть, двух фронтов ударной волны, и притом не со скоростью звука, а со сверхзвуковой скоростью (рис. 2). Помимо этого возможно, что в гладком течении, где нет никаких разрывов, со временем образуется разрыв. Мне кажется, что этот факт соответствует в какой-то мере уже упомянутой характерной черте нелинейных уравнений: эти уравнения всегда обладают тенденцией к расходимости, т. е. к приближению с течением времени к таким точкам, за которые не удается продолжить решения этих уравнений.

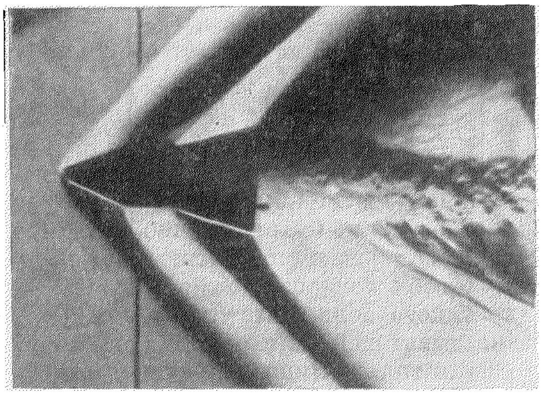

Рис. 2. В нелинейном случае граница разрыва может распространяться в виде фронта ударной волны (одного или двух фронтов ударной волны) и притом не со скоростью звука, а со сверхзвуковой скоростью.

Более строго с математической точки зрения можно было бы сказать, что нелинейные уравнения часто не имеют решений, которые могли бы быть непрерывно продолжены в любую область, в которой само дифференциальное уравнение является регулярным. Таким образом, регулярность уравнения ни в коей мере не гарантирует регулярности решения, и через некоторый конечный промежуток времени в решении могут появиться сингулярности. Если такая сингулярность действительно появляется, то из уравнения уже нельзя определить, чтó случится в последующие моменты времени. По крайней мере, одного этого уравнения становится недостаточно; в этом случае мы сталкиваемся с ситуацией, когда становится существенным поведение материи на очень малых расстояниях.

В гидродинамике или же в газовой динамике в основном уравнении газ или жидкость рассматриваются как непрерывная среда, а это не может быть верным на очень малых расстояниях: здесь нужно уже учитывать молекулярное строение вещества. Когда наши решения становятся разрывными, в окрестности этого разрыва должна играть существенную роль молекулярная структура.

К счастью, иногда в газовой динамике достаточно лишь знать, что в области разрыва должны протекать некоторые необратимые процессы. Необратимость всегда приводит к возрастанию энтропии, а уже одного этого иногда бывает достаточно, чтобы определить развитие ударной волны. По-видимому, это всего лишь счастливое стечение обстоятельств в газовой динамике. По крайней мере в принципе, я не вижу никакой причины, почему это должно быть так. Следует допустить, что нам придется входить в подробности микроскопической картины и изучить поведение атомов для того, чтобы выяснить, чтó же произойдет на самом деле. Однако, как я уже сказал выше, нам может посчастливиться и ситуация окажется проще предполагаемой.

Но даже когда мы переходим к проблемам, в которых атомное строение вещества не играет никакой роли,— к проблемам, которые непрерывны по самому своему существу,— даже тогда мы можем столкнуться с таким фактом, что решения не удается продолжить за некоторый предел во времени, они могут исчезать и возникать. Мне бы хотелось упомянуть об одном примере из квантовой теории поля, который беспокоил меня некоторое время. Попробуем сравнить линейное релятивистское волновое уравнение, а именно, хорошо известное уравнение Дирака, с другим уравнением, которое получается из уравнения Дирака, если там заменить массовый член на некое нелинейное выражение. Эти два уравнения имеют вид

$$\gamma_\nu \frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} + k\psi = 0, \tag{1}$$

$$\gamma_\nu \frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} + \psi(\bar{\psi}\psi) = 0. \tag{2}$$

В линейном уравнении типа (1), как мы знаем, ситуация такова, что если решение обращается в нуль повсюду в некоторый момент времени, оно никогда уже не будет отлично от нуля.

А вот решения соответствующего неоднородного уравнения могут вести себя совершенно по-другому. Можно построить функцию Грина для такого волнового уравнения. Эта функция Грина может быть или запаздывающей, или опережающей функцией, т. е. может быть отлична от нуля только лишь в будущем или только в прошлом. Но для однородного уравнения (1) единственное решение, которое равно нулю на конечных пространственноподобных интервалах и отлично от нуля в будущем или в прошлом, есть решение, задаваемое коммутатором в квантовой теории поля; оно строго равно разности между запаздывающей и опережающей функциями Грина. В некотором смысле эту функцию можно назвать релятивистски инвариантным решением однородного уравнения (1).

Однако в случае уравнения (2) имеются оба типа решений, т. е. решения, которые обращаются в нуль при пространственноподобных расстояниях и отличны от нуля в прошлом и в будущем, и, кроме того, существуют также решения того же уравнения, которые возникают, так сказать, из ничего. Волновая функция может быть равна нулю в прошлом, и внезапно все становится отличным от нуля в особой точке и развивается подобно запаздывающей функции Грина, несмотря на то, что в рассматриваемом уравнении нет никакого неоднородного члена. Этот факт весьма сильно подчеркивает странное поведение нелинейных уравнений. Мы всегда можем столкнуться и с такой ситуацией, когда решения нелинейного уравнения не удается продолжить в прошедшее или в будущее. Между прочим, эта проблема играет важную роль при окончательном обсуждении вопроса о том, является ли квантовая теория линейной или нелинейной теорией.

Статистические методы. Наконец, мы можем рассматривать нелинейные проблемы в гидродинамике или в газовой динамике статистическими методами, как мы делали это в механике точки. Как я уже упоминал выше, обычно оказывается невозможным определить полный набор решений нелинейного уравнения. Поэтому, может быть, удобнее изучать ансамбли решений, т. е. статистическое поведение жидкости. Основной принцип такого статистического подхода состоит в том, что нас удовлетворяет неполное знание о системе и неполное описание ее. Исходя из этого, мы изучаем возможное развитие системы. Например, в теории турбулентности можно начинать исследование, задавшись общим распределением вихрей. Известен бывает только спектр движения, распределения интенсивностей различных частот, но не фазовые соотношения между соответствующими амплитудами. В этом случае правомерен только лишь вопрос о том, каково возможное развитие движения в жидкости с течением времени.

И снова здесь мы сталкиваемся с трудностями, обусловленными очень малыми расстояниями, т. е. в некотором смысле мы имеем дело с тем, что в квантовой теории поля носит название «ультрафиолетовой катастрофы». Действительно, все происходящее при этом можно описать следующим образом. Мы имеем дело с турбулентным движением (скажем, в потоке воды), если путем внешнего воздействия образуем несколько больших вихрей. Эти большие вихри распадаются на ряд более мелких вихрей, так что образуется все больше и больше маленьких вихрей, по которым и распределяется энергия большого вихря. Наконец, энергия диссипируется в системе с бесконечно большим числом степеней свободы, которая образована из чрезвычайно мелких вихрей. Этот процесс продолжался бы до бесконечности, если не вводить вязкость (рис. 3).

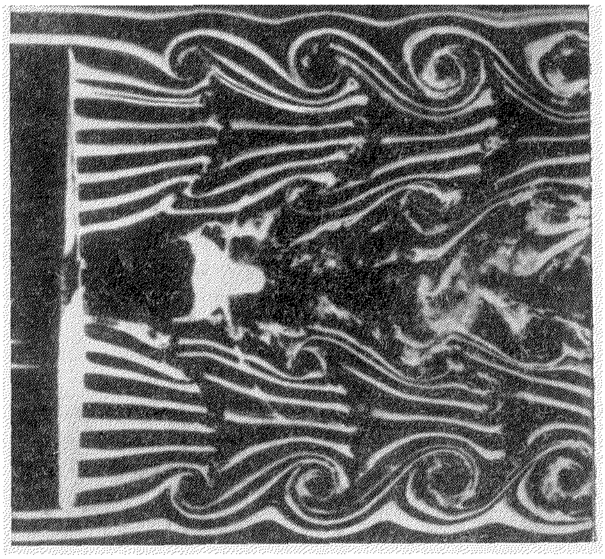

Рис. 3. Турбулентность, возникающая позади пропеллера, отчетливо видна благодаря инжектируемому сзади пропеллера дыму.

Вместо гладкого потока мы видим множество разных завихрений.

В данном случае это понятие является всего лишь очень хорошим обходным путем для того, чтобы не упоминать о том, что мы вступаем в область с размерами порядка молекулярных. В действительности энергия в конце концов тратится на тепловое движение молекул, и именно эта диссипация энергии в движении молекул и может быть заменена формально введением вязкости. Однако существуют и такие проблемы, на которые мы не можем получить ответ, решая обычное уравнение Навье — Стокса.

Итак, я полагаю, что и в проблемах механики сплошных сред вы заметили те четыре характерные черты, которые уже упоминались в связи с механикой точки. Здесь тоже приходится часто использовать два наиболее существенных упрощения, а именно, учитывать симметрию задачи и проводить линеаризацию, которые во многих случаях позволяют получить первое представление о решаемой проблеме. Затем вы столкнетесь с сингулярностями, которые приводят к непредсказуемости решений нелинейного уравнения и часто запрещают продолжение решений дальше того момента времени, когда появляется такая особенность. И, наконец, вам придется применять статистические методы, чтобы получить информацию не об одной, отдельно взятой системе, а об ансамбле систем, и поэтому вы сможете предсказать теперь или вероятность осуществления некоторого события или же вероятный ход событий.

ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОЙ ИЛИ НЕТ?

Является ли квантовая теория линейной или же это — нелинейная теория? Нет никакого сомнения в том, что квантовая механика в ее обычной форме представляет собой линейную теорию. Она линейна в том смысле, что хотя операторные уравнения и нелинейны, им можно удовлетворить, решая уравнения Шрёдингера, т. е. находя определенные матрицы преобразования. А уравнения Шрёдингера, конечно, являются линейными уравнениями.

Линейность в квантовой теории имеет очень глубокое, почти философское обоснование, а не просто связана с какой-либо аппроксимацией. В квантовой теории мы имеем дело не с фактами, а с возможностями; квадрат волновой функции описывает вероятность, а суперпозиция волновых функций, т. е. возможность складывать два решения, получая при этом новое решение, исключительно важна для самих основ квантовой теории. Поэтому, несомненно, было бы неправильно утверждать, что линейный характер квантовой теории является лишь приближенным, в том же самом смысле, как приближенна линейность уравнений Максвелла. Линейность квантовомеханических уравнений важна для понимания квантовой теории и для интерпретации ее как статистической основы вычисления того, что происходит с атомами.

С этим обстоятельством связаны интересные математические проблемы, которых я хотел бы коснуться. Давайте, например, рассмотрим с помощью квантовой механики решения проблемы трех тел, скажем, атом гелия. Мы знаем, что, решая линейное уравнение Шрёдингера в координатном пространстве для трех тел, составляющих атом гелия, мы получаем полную систему всех решений. Поэтому можно было бы сказать, что в квантовой механике действительно решена проблема трех тел, которую никак не удается полностью решить в классической механике. Но это выглядит несколько странно, потому что в пределе $h \to 0$ квантовомеханические решения должны, если они соответствующим образом записаны, переходить в классические решения. Поэтому кажется, что мы как бы подменили решение нелинейной проблемы в классической теории решением линейных проблем в квантовой теории, а затем перешли к пределу $h \to 0$.

Разрешите мне обсудить связь между этими двумя теориями несколько подробнее. Предельный переход требует, чтобы мы исходили в нашем решении из волнового пакета в координатном пространстве. Мы расположили бы два электрона в некоторых приближенно определенных положениях около ядра так, чтобы их скорости были также приближенно заданы и соотношение неопределенности при этом было бы выполнено. Конечно, эти волновые пакеты можно было бы делать все меньше и меньше, когда величина h стремилась бы к нулю, но при любом конечном значении h эти волновые пакеты должны быть конечных размеров. Совершенно ясно, что с течением времени каждый волновой пакет расплывается. Он будет становиться все большего размера и менее плотным и, наконец, он расплывается по всей системе. Значит, нам всегда придется сравнивать с этим волновым пакетом не отдельное решение классической проблемы, а вместо этого — ансамбль решений, в частности, ансамбль, соответствующий такому же набору неопределенных начальных условий.

Именно благодаря нелинейному характеру классических уравнений различия между двумя соседними решениями становятся с течением времени все больше и больше. В классической теории, когда мы имеем дело с ансамблем решений, соответствующих распределению начальных условий типа волнового пакета, через некоторое время этот волновой пакет также расплывается по большой области координатного пространства. Итак, легко понять, что если мы вначале заставим величину h и размер волнового пакета стремиться к нулю, а затем перейдем к бо́льшим временам, мы получим полное описание классической теории из квантовой теории. Если же, однако, мы обратим процесс предельного перехода, т. е. если мы сначала перейдем к бесконечным временам, а затем заставим величину h стремиться к нулю, то придем к совершенно отличной ситуации, ибо тогда волновой пакет становится бесконечно большим в любом случае.

Несмотря на эту связь между квантовой теорией и нелинейной классической теорией, квантовая механика определенно является линейной теорией.

Но остается ли это утверждение верным, когда мы переходим к теории элементарных частиц, т. е. к теории, которая не исходит из заранее заданных элементарных частиц, а пытается понять и вывести их? В нашем институте мы интересовались некоторой гипотезой, называемой нелинейной спинорной теорией. Здесь я хочу подчеркнуть, что термин «нелинейная» не обязательно означает нелинейность в том смысле, в котором я использовал это выражение, в силу следующих обстоятельств. Мы исходим из операторного уравнения, которое выглядит более или менее так же, как уравнение (2), и именно поэтому мы называем его нелинейным уравнением. Однако операторные уравнения в квантовой теории всегда являются нелинейными уравнениями, и вопрос состоит в том, соответствует ли решение этих операторных уравнений набору линейных уравнений, или же нелинейным уравнениям.

Как было описано выше, в квантовой механике можно заменять нелинейное операторное уравнение дифференциальным уравнением (уравнением Шрёдингера) или же системой уравнений, которые являются линейными. В том же самом смысле можно было бы также предположить, что нелинейное уравнение, подобное уравнению (2), можно заменить на уравнение Шрёдингера, которое в этом случае уже было бы не линейным дифференциальным или интегральным уравнением, а, скорее, линейным функциональным уравнением. Или же, эквивалентно, можно было бы заменить его на бесконечную систему дифференциальных уравнений, каждое из которых было бы линейным. Это было бы верно, если бы такую теорию удалось проквантовать согласно обычным правилам квантовой теории. В этом случае существовали бы коммутационные соотношения между $\psi(x)$ и $\psi(x')$, которые были бы заданы в виде пространственной дельта-функции при совпадающих временах $t - t' = 0$.

Но и при этом условии проблема все еще оставалась бы внутренне противоречивой. Из того, что мы знаем сейчас, мы можем быть вполне уверенными, что для такого уравнения коммутатор не имеет вида дельта-функции. Обычный коммутатор обладает сильной особенностью, причем именно наличие этой сильной особенности позволяет свести нелинейную операторную проблему к линейной задаче уравнения Шрёдингера. Однако в теории поля можно считать само собой разумеющимся, что в начале координат коммутатор не будет дельта-функцией, потому что, если бы это была дельта-функция, уравнение, подобное уравнению (2), не имело бы никакого смысла. Поэтому характер сингулярности «двуххвостки» или же коммутатора в начале координат представляет собой реальную проблему для любого нелинейного операторного уравнения теории поля, подобного уравнению (2). И мы вынуждены поставить вопрос о том, может ли быть решена эта проблема при помощи дельта-функций таким же образом, как и в квантовой механике. Если написать уравнения для коммутатора или же для одночастичной функции Грина, то эти уравнения оказываются исключительно сложными нелинейными интегральными уравнениями. Если потребуется решить эти уравнения, то проблема будет состоять, конечно, в решении нелинейных уравнений, т. е. уже в самом основании квантовой теории мы вновь приходим к нелинейной математической задаче. Однако возникают сомнения в том, нужно ли вообще решать эти уравнения.

Вполне возможно, что можно ограничиться следующей процедурой. Мы просто-напросто угадываем приближенные решения для такого коммутатора, а затем используем эти выбранные нами решения в приближенных схемах типа метода Тамма — Данкова. При этом, конечно, в каждом конечном приближении результат будет зависеть от того, насколько хорошо было выбрано исходное приближенное решение одночастичной функции Грина. Однако имеются такие примеры, которые показывают, что во все более высоких приближениях ошибки, обусловленные неточным выбором одночастичной функции Грина, становятся все менее и менее существенными. Возможно даже, что, исходя из неверного коммутатора, в конце концов мы получим правильные результаты в бесконечно высоком приближении. По крайней мере, таковой оказалась ситуация в некоторых более простых проблемах квантовой механики, которые изучались Геральдом Штумпфом и другими.

Поэтому вновь может оказаться, что полное исследование нелинейных уравнений можно будет свести к изучению бесконечных процессов, связанных с системами линейных дифференциальных уравнений с произвольным числом переменных. При этом решение нелинейного уравнения может быть получено из решений линейных уравнений с помощью предельного перехода. Здесь ситуация очень напоминает ту, о которой я уже говорил, когда при помощи бесконечного процесса можно подойти к нелинейной задаче трех тел в классической механике, исходя из линейной проблемы трех тел в квантовой механике.

ПРОГРЕСС В РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОБЛЕМ

Сейчас еще не известно окончательно, будет ли основная система уравнений квантовой теории элементарных частиц системой нелинейных или же линейных уравнений.

В заключение я хотел бы еще раз подчеркнуть, что прогресс в физике, безусловно, будет зависеть в значительной степени от прогресса в нелинейной математике, в методах решения нелинейных уравнений. Может еще оказаться, что каждая нелинейная проблема будет формулироваться особо и потребует применения в каждом отдельном случае специальных методов. Тем не менее, как я уже сказал, существуют и общие черты, а потому мы можем кое-что приобрести, сравнивая различные нелинейные проблемы.