1968 г. Январь *Том 94, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

536.76

ГИПОТЕЗА ПОДОБИЯ В ТЕОРИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

В. Л. Покровский

1. ВВЕДЕНИЕ

Критические явления в различных веществах изучались со второй половины XIX века. Природа критических явлений разнообразна. В точке Кюри T_C вещество переходит из парамагнитного в ферромагнитное (или антиферромагнитное) состояние. Критические явления возникают при переходе вещества в сегнетоэлектрическое состояние. В твердых телах происходят также фазовые переходы с изменением симметрии кристалла. Известны случаи, когда такие переходы вообще не сопровождаются скачкообразным изменением удельного объема и выделением тепла или же эти изменения очень малы (например, переход из α- в β-фазу кварца). Следует также упомянуть об упорядочении сплавов. Переход жидкого гелия в сверхтекучее состояние и переход некоторых металлов в сверхпроводящее состояние также относятся к фазовым переходам II рода — нет скачков удельного объема, тепло не выделяется. С этой точки зрения критическую точку жидкость — газ также следует считать фазовым переходом II рода, так как именно в этой точке скачки плотности и энтропии обращаются в нуль, исчезает различие между жидкостью и газом.

Некоторые общие черты объединяют эти на первый взгляд столь разные явления.

Первая и наиболее общая из них — это аномалия теплоемкости. Во-вторых, отметим рост «восприимчивости» системы к внешним воздействиям. Мы имеем в виду магнитную восприимчивость χ в случае ферромагнетика, изотермическую сжимаемость k_T в случае критической точки жидкость — газ, величину $(\partial c/\partial \mu)_{p,T}$ в случае критической точки двухкомпонентного раствора (c — концентрация, μ — химический потенциал) и т. д. В некоторых случаях (гелий, кварц) обобщенная восприимчивость не имеет простого физического смысла. Почти во всех случаях можно говорить о возникновении дальнего порядка (не исчезающей в макроскопических масштабах корреляции между элементами системы) ниже точки перехода.

В некоторых из описанных случаев наблюдалось аномальное рассеяние света (критическая точка жидкость — газ), нейтронов (ферромагнетики) вблизи точки перехода. Это свидетельствует о росте флуктуаций. Причина аномального роста флуктуаций ясна: вблизи точки перехода упорядоченная фаза почти не отличается от неупорядоченной.

Все описанные явления мы будем называть критическими. Теория критических явлений, восходящая к Гиббсу, предсказывала термодинамические свойства веществ вблизи критической точки на основе простейшего предположения о возможности разложения термодинамического потенциала по степеням отклонений температуры и объема от критических значений (см., например, [1]).

Основные выводы теории таковы. При $V = V_C$ теплоемкость C_V претерпевает конечный разрыв. Вблизи критической точки изотермы приближенно описываются уравнением Ван-дер-Ваальса. Следовательно, кривая сосуществования жидкость — газ имеет вид

$$T_C - T = A(V - V_C)^2.$$

Сжимаемость обращается в бесконечность по закону

$$k_T \sim (T - T_C)^{-1}.$$

Орнштейн и Цернике учли флуктуации плотности в рамках тех же основных предположений, что привело к известной функции корреляции плотностей $\langle n(\mathbf{r})\, n(\mathbf{r}')\rangle \sim e^{-k(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ и позволило объяснить аномальное рассеяние света (критическую опалесценцию).

По мере накопления экспериментальных фактов стало явно, что предположения классической теории неверны (по крайней мере в достаточно близкой окрестности критической точки). В работах Воронеля с сотрудниками [2] было обнаружено, что теплоемкость C_V аномально растет по мере приближения к критической точке. Однако и раньше были замечены отклонения от предсказаний классической теории в поведении сжимаемости, критической изотермы [3].

Аналогичная ситуация возникла в теории фазовых переходов II рода. Феноменологическая теория была впервые предложена Вейссом для ферромагнетиков. Более общая теория была построена Ландау, который впервые указал, что эти переходы связаны с изменением симметрии. Как и теория критических явлений, классическая теория фазовых переходов II рода опиралась на простейшие математические предположения, а физически сводилась к теории однородного самосогласованного поля, величина которого определяется из условия минимума термодинамического потенциала. Указанная теория с большой точностью выполняется при фазовых переходах в сверхпроводниках и в некоторых твердых телах.

Укажем, к чему приводит теория в случае, например, ферромагнетика. Теплоемкость испытывает конечный скачок. Магнитная восприимчивость ведет себя как $(T - T_C)^{-1}$ (закон Кюри). Магнитный момент ниже точки перехода ведет себя как $(T_C - T)^{1/2}$, поэтому выполняется уравнение

$$T_C - T = \widetilde{A} M^2.$$

Дополнение теории в духе Орнштейна — Цернике дает для корреляционной функции моментов величину, пропорциональную $e^{-k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$.

Мы намеренно подчеркивали аналогию между теориями Гиббса, Вейсса, Ландау. Аналогия эта вполне естественна, так как любая из этих теорий исходит из некоторого самосогласованного поля и предполагает, что плотность термодинамического потенциала можно разложить в ряд по четным степеням поля. Обычно достаточно ограничиться членами четвертого порядка. Роль самосогласованного поля играет $V - V_C$ в теории Гиббса, «эффективное» магнитное поле $H_{\text{эфф}}$ в теории Вейсса, параметр порядка η в теории Ландау.

Однако после исследования Онсагера [4], посвященного простой математической модели — плоской решетке Изинга, стало ясно, что физическая картина перехода может быть и не столь простой. В частности, оказалось, что в этой модели теплоемкость ведет себя как $-\ln|T - T_C|$, а магнитный момент $M \sim (T_C - T)^{1/8}$. Численные исследования трехмерной модели Изинга (см., например, [5]) также не согласуются с теорией самосогласованного поля.

Далее, эксперимент Бакингэма, Фэрбенка и Келлерса [6] показал, что теплоемкость в очень малой окрестности λ-точки в гелии логарифмически растет.

Различные аномалии термодинамических величин наблюдались для ферро- и антиферромагнетиков (см. [5]). Таким образом, по крайней мере часть экспериментов не укладывается в теорию самосогласованного поля.

Примечательно, что различные фазовые переходы обнаруживают черты сходства. Например, теплоемкость ведет себя как $-\ln|T-T_C|$ (или, в пределах точности эксперимента, как малая степень $|T-T_C|$) во всех «аномальных» случаях. Далее, в ферромагнитных переходах магнитный момент ниже точки перехода ведет себя как $|T-T_C|^\beta$, где $\beta \approx 1/3$ (см. [5]). Аналогичное поведение найдено для скачка плотности вблизи критической точки [7].

Построение последовательной микроскопической теории фазовых переходов оказалось трудной задачей. Причина затруднений состоит в том, что возросшие флуктуации сильно взаимодействуют между собой вблизи критических точек. Даже в случае слабого «затравочного» взаимодействия частиц (спинов) эффективное взаимодействие вблизи точки перехода является сильным. Поскольку радиус корреляции становится большим по сравнению с расстоянием между частицами, многочастичные взаимодействия столь же важны, сколь и двухчастичные. Теоретик не может использовать свое основное орудие — теорию возмущений. Общая задача о фазовом переходе — одна из последних нерешенных задач в физике конденсированного состояния. Неудивительно, что она привлекает внимание физиков. На первый взгляд трудности носят чисто математический характер, ибо в принципе решение задачи заключено в статистике Гиббса и законах классической или квантовой механики.

По этому поводу следует вспомнить теорию турбулентности, где некогда возникла аналогичная ситуация. Казалось бы, вся информация заложена в уравнениях гидродинамики и теплопроводности. Однако потребовалось предварительно уяснить простую физическую картину турбулентного состояния (передача энергии вихрям близких масштабов и т. д.), что позволило Колмогорову построить простую теорию, основанную на соображениях размерности.

Напрашивается идея аналогичного подхода к теории критических явлений. В последнее время появился ряд работ [9-12], выдвинувших простые гипотезы о структуре вещества в области фазового перехода *).

2. ГИПОТЕЗА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЯЧЕЕК

Авторы используют рост радиуса корреляции r_C системы вблизи критической точки (кривой) и мысленно делят систему на ряд подсистем (ячеек) с большим числом частиц, но размера меньше или порядка r_C. Простейшие предположения о свойствах этих систем приводят к выводам о связи между различными термодинамическими функциями вблизи точки перехода.

Впервые соображения такого рода высказал Бакингэм [9]. Модель вещества в дальнейших рассуждениях не слишком конкретизируется. Это может быть «решеточный газ» (см., например, [17]), модели Изинга или Гейзенберга для магнетиков, упорядочивающийся сплав и т. п. Для определенности мы будем говорить о решеточном газе. Способ «перевода» с языка этой модели на язык модели магнетиков хорошо известен (см. раздел 5).

*) Гипотеза подобия в теории фазовых переходов была впервые высказана в работе [8].

Как было сказано выше, Бакингэм делил систему на ячейки объема V. Энергия взаимодействия таких ячеек мала по сравнению с энергией самих ячеек (поверхность ячейки мала по сравнению с объемом). Но именно этот слабый поверхностный эффект приводит к особенностям в термодинамических величинах. Действительно, «выключив» взаимодействие, мы придем к совокупности невзаимодействующих систем конечного объема. Термодинамические функции конечной системы не имеют особенностей. Поэтому фазовый переход в системе объема V как бы размазывается на интервал температур $\Delta T(V)$. В дальнейшем будем измерять температуру в единицах T_C и введем обозначение $t(V) = \Delta T(V)/T_C$. Очевидно, $t(\infty) = 0$. Включение взаимодействия существенно меняет энтропию системы. Согласно упрощенной схеме Бакингэма на кривой равновесия при выключенном взаимодействии каждая ячейка может быть заполнена веществом в первой фазе либо во второй. Это дает энтропию $\ln 2$ на ячейку или $\ln 2/V$ на частицу (V измеряется в единицах объема ячейки). Включение взаимодействия приводит к полной корреляции соседних объемов и изменяет энтропию на величину $-\ln 2/V$.

Включение взаимодействия эквивалентно замене объема V бесконечно большим объемом. Поэтому можно записать для энтропии s_V объема V в расчете на одну частицу

$$\Delta s_V = s_\infty - s_V = -\ln 2/V. \tag{1}$$

Будем теперь менять температуру. Введем обозначение $\tau = (T - T_C)/T_C$. Формула (1) справедлива в предположении $t(V) \ll |\tau| \ll 1$ $(\tau < 0)$. Увеличивая τ, мы перейдем в однофазную область, где все ячейки заполнены одинаково. В этой области $\Delta s_V = 0$. Основное предположение Бакингэма состоит в том, что единственным характерным размером Δs_V как функции τ является $t(V)$, и $\Delta s_V(\tau)$ можно записать в виде

$$\Delta s_V(\tau) \equiv s_\infty(\tau) - s_V(\tau) = \frac{\ln 2}{V} f\left(\frac{\tau}{t(V)}\right), \tag{2}$$

где $f(x)$ — универсальная функция, принимающая значения

$$f(-\infty) = -1, \quad f(+\infty) = 0.$$

Количественное описание перехода, предложенное выше, вряд ли можно считать физически обоснованным, так как и в двухфазной, и в однофазной областях возможны флуктуации, которые могут существенно изменить энтропию. Поэтому нам кажется естественным принять менее ограничительное предположение

$$\Delta s(\tau, V) = t^{1-\alpha} f\left(\frac{\tau}{t}\right). \tag{3}$$

Величина Δs остается конечной при любых условиях. Поэтому $\alpha < 1$. Дифференцируя (3) по τ при заданном $V(t)$, получим

$$C(\tau, 0) - C(\tau, t) = \mathrm{const} \cdot t^{-\alpha} f'\left(\frac{\tau}{t}\right), \tag{4}$$

где $C(\tau, t)$ — теплоемкость, рассчитанная на один узел в ячейке объема V, находящейся в термостате с заданным τ. Соотношение между V и $t(V)$ в данной теории не устанавливается.

При $t \neq 0$ теплоемкость $C(\tau, t)$ не имеет особенностей как функция τ. С другой стороны, $C(\tau, 0)$ по предположению имеет особенность. Следовательно, разность $C(\tau, 0) - \mathrm{const} \cdot t^{-\alpha} f\left(\frac{\tau}{t}\right)$ при $\tau \to 0$ и конечном t

должна оставаться конечной и не зависящей от τ. Это возможно лишь в случае, когда $f'(x)$ имеет асимптотику

$$f'(x) \sim x^{-\alpha} \quad (x \ll 1) \tag{5}$$

и

$$C(\tau, 0) \sim \tau^{-\alpha}. \tag{6}$$

В важном частном случае $\alpha = 0$ вместо уравнения (4) получаем

$$C(\tau, 0) - C(\tau, t) = \text{const} \cdot f'\left(\frac{\tau}{t}\right).$$

Асимптотически при малых τ и конечных t величина $C(\tau, t)$ не зависит от τ лишь в случае, когда

$$C(\tau, 0) \sim -\ln|\tau|. \tag{7}$$

До сих пор предполагалось, что $C(\tau, \infty)$ становится бесконечным при $\tau \to 0$. Разумеется, случай конечного предела C при $\tau \to 0$ не приводит к противоречию с уравнением (4). Итак, условие $\alpha = 0$ приводит к логарифмической расходимости или конечному скачку в теплоемкости.

Теория Бакингэма не дает возможности определить α, но приводит к некоторому закону соответственных состояний. Идея Бакингэма об эквивалентности ячеек различных размеров оказалась плодотворной. Бакингэм считал, что в двухфазной системе задача сводится к модели Изинга с некоторой энергией взаимодействия, зависящей от размера ячеек и близости к точке перехода.

3. МАСШТАБНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАДАНОВА

В наиболее полном виде эти идеи были развиты Кадановым [11]. Рассмотрим упорядочивающийся ферромагнетик. Разобьем его на ячейки, как было указано. Основное предположение Каданова состоит в том, что каждая ячейка обладает некоторым моментом, взаимодействующим с моментами соседних ячеек, а потому при некотором изменении величин τ и приведенного магнитного поля $h = \mu_B H / T_C$ задача о ячейках становится эквивалентной задаче об отдельных спинах $m_{\mathbf{r}}$ (модели Изинга, Гейзенберга и т. д.), где μ_B — магнетон Бора. Пусть размер ячейки L и соответствующие ей значения $\tau(L)$, $h(L)$. Второе предположение Каданова — закон подобия — таково:

$$\tau(L) \sim L^y \tau, \quad h(L) \sim L^x h. \tag{8}$$

Здесь x, y — некоторые постоянные.

Пусть магнетик находится в отличном от нуля внешнем поле (или при $h = 0$ ниже точки перехода). При изменении поля на dh свободная энергия изменится на величину

$$dF = \sum_{\mathbf{r}} dh \langle m_{\mathbf{r}} \rangle = \sum_{\alpha} dh(L) \langle M_\alpha \rangle. \tag{9}$$

Скобки $\langle\ \rangle$ означают усреднение по ансамблю Гиббса. Первая сумма берется по узлам решетки, а вторая по ячейкам. Очевидно

$$\sum_{\mathbf{r} \text{ в пределах ячейки}} \langle m_{\mathbf{r}} \rangle = \langle m \rangle L^d, \tag{10}$$

где d — размерность пространства (в реальном пространстве $d = 3$, но проверку получающихся соотношений удобно проводить на точно

рассчитанной плоской модели Изинга). Из (8) — (10) находим

$$\langle M_\alpha \rangle = L^{d-x} \langle m_r \rangle. \tag{11}$$

В соответствии с принятым допущением будем считать $\langle m \rangle$ и $\langle M \rangle$ одинаковыми функциями аргументов τ, h и $\tau(L)$, $h(L)$ соответственно. Может возникнуть вопрос о правомерности такой гипотезы. В самом деле, в модели Изинга, например, $m^2 = 1$, а $M^2 \neq 1$ и, казалось бы, различные условия нормировки приведут к разным результатам. Более последовательно нужно рассматривать ячейки разных размеров L_1 и L_2, так что $1 \ll L_1, L_2 \ll r_C$.

При таком рассмотрении разница между m и M стирается. С другой стороны, условие $L \gg 1$ не мешает нам экстраполировать полученные соотношения на ячейки единичного размера.

Возвращаясь к соотношению (11), получим для намагниченности $\langle m \rangle$ на одну частицу

$$\langle m \rangle (\tau, h) = L^{-d+x} \langle m \rangle (\tau L^y, hL^x). \tag{12}$$

В дальнейшем скобки, означающие усреднение, будем опускать. Общее решение функционального уравнения (12) имеет вид

$$m(\tau, h) = \tau^{\frac{d-x}{y}} \varphi(\tau/h^{y/x}), \tag{13}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция. Можно указать асимптотики $\varphi(x)$ при $x \gg 1$ и $x \ll 1$. Большим x соответствуют малые магнитные поля. В этом случае выше точки перехода $m \simeq 0$, а ниже точки перехода m слабо зависит от h. Следовательно, $\varphi(+\infty) = 0$, $\varphi(-\infty) = \text{const} \neq 0$.

Из уравнения (13) при $\tau < 0$, $h = 0$ получаем зависимость спонтанного момента от τ:

$$m(\tau, 0) = (-\tau)^\beta, \quad \beta = \frac{d-x}{y}. \tag{14}$$

В обратном предельном случае, соответствующем большим h, момент m не должен зависеть от τ. Отсюда находим асимптотику при $x \to 0$ $\varphi(x) \sim x^{-\beta}$, и намагниченность m при $h \gg \tau^{x/y}$ имеет вид

$$m(0, h) \sim h^{1/\delta}, \quad \delta = \frac{x}{d-x}. \tag{15}$$

Обратимся к вычислению теплоемкости C. Обозначим через $F(\tau, h)$ свободную энергию, рассчитанную на один узел. По определению $F(\tau(L), h(L))$ — свободная энергия, рассчитанная на одну ячейку размера L. Поэтому

$$F(\tau(L), h(L)) \equiv F(\tau L^y, hL^x) = L^d F(\tau, h). \tag{16}$$

Общее решение уравнения (16) имеет вид

$$F(\tau, h) = \tau^{d/y} \tilde{f}(\tau/h^{y/x}). \tag{17}$$

Дифференцируя (17) дважды, находим

$$C(\tau, h) = \tau^{-\alpha} \tilde{\varphi}(\tau/h^{y/x}), \quad \alpha = 2 - \frac{d}{y}, \tag{18}$$

где $\tilde{\varphi}(x)$ — произвольная функция со следующими асимптотиками:

$$\begin{gathered} \tilde{\varphi}(\pm\infty) = \varphi_\pm, \\ \tilde{\varphi}(x) = a_\pm |x|^\alpha \qquad (x \ll 1), \end{gathered} \tag{19}$$

где $\varphi_\pm$ и $a_\pm$ — постоянные, вообще говоря, разные. Отсюда получаем поведение $C(\tau, h)$:

$$C(\tau, h) \sim \begin{cases} \tau^{-\alpha} & (\tau \gg h^{y/x}), \\ h^{-\varepsilon} & (\tau \ll h^{y/x}), \quad \varepsilon = \alpha \frac{y}{x}. \end{cases} \tag{20}$$

Мы видим, что четыре величины, α, β, δ, ε, которые можно определить экспериментально, выражаются через показатели x и y. Поэтому между ними существуют два соотношения,

$$\alpha + \beta + \beta\delta = 2, \tag{21}$$

$$\varepsilon\beta\delta = 2\alpha. \tag{22}$$

До сих пор мы рассматривали состояние системы с отличным от нуля моментом. Выше точки Кюри ($\tau > 0$) при $h = 0$ магнитные моменты ячеек имеют флуктуационный характер. Это верно и при достаточно малых h, отличных от нуля. Чтобы связать показатели особенностей физических величин (критические индексы) в этой области с x и y, необходимо еще одно фундаментальное предположение: флуктуационные моменты зависят от размера ячейки L так же, как и постоянные (формула (11)). Это предположение соответствует картине, в которой в ячейке размера L флуктуационно возникает «упорядоченная» фаза. Считается, что зависимость такого момента от L описывается формулой (12). Высказанная гипотеза позволяет получить сведения о корреляционной функции моментов. Введем обозначение

$$G(R, \tau, h) = \langle m_0, m_{\mathbf{R}} \rangle. \tag{23}$$

Из эквивалентности ячеек разных размеров следует, что для ячеек размера L корреляционная функция $\langle M_0, M_{\mathbf{R}} \rangle$ тождественно совпадает с $G\left(\frac{R}{L}, \tau L^y, hL^x\right)$. С другой стороны, из (11) получаем

$$G\left(\frac{R}{L}, \tau L^y, hL^x\right) = L^{2(d-x)} G(R, \tau, h). \tag{24}$$

Общее решение функционального уравнения (24) имеет вид

$$G(R, \tau, h) = R^{-2(d-x)} g(\tau R^y, hR^x), \tag{25}$$

где $g(\xi, \eta)$ — произвольная функция своих аргументов. Из общих соображений очевидно, что $g(\xi, 0)$ и $g(0, \eta)$ — функции, убывающие с ростом аргументов ξ и η соответственно.

Магнитная восприимчивость может быть найдена из соотношения

$$\chi(\tau, h) = \sum_{\mathbf{R}} G(R, \tau, h). \tag{26}$$

В предельных случаях малых τ и h из (25) и (26) получаем

$$\chi(\tau, 0) \sim \tau^{-\gamma}, \quad \gamma = -\frac{d-2x}{y}, \tag{27}$$

$$\chi(0, h) \sim h^{-\lambda}, \quad \lambda = \gamma \frac{y}{x} = 2 - \frac{d}{x}. \tag{27'}$$

Показатели особенности теплоемкости α и ε одинаковы по обе стороны точки фазового перехода. Это очевидно для величины ε, которая соответствует асимптотике большого магнитного поля. Что касается величины α, то здесь можно привести следующие рассуждения. При изменении знака τ остаются прежними ε и δ. Но тогда из соотношений (21) и (22) следует, что и α, β остаются неизменными.

Введем еще один критический индекс ν соотношением

$$G(R, 0, 0) \sim R^{-\nu}. \tag{28}$$

Из (26) — (28) получим

$$\gamma y = \lambda x = d - \nu.$$

Резюме приведенных выше рассуждений дано в двух таблицах. В табл. I даны определения критических индексов α, β, γ, δ, ε, λ, μ, ν. Их выражения через x, y и четыре соотношения между шестью величинами α, β, γ, δ, μ, ν показаны в табл. II. Некоторые из этих соотношений были найдены ранее в работах Фишера, Сайкса и др. [13] и Вайдома [14].

Таблица I

Определения критических индексов

Теплоемкость C	Восприимчивость χ	Намагничение m	Радиус корреляции r_c	Функция корреляции $G(R, 0)$
$\lvert\tau\rvert^{-\alpha}$ / $\lvert h\rvert^{-\varepsilon}$	$\lvert\tau\rvert^{-\gamma}$ / $\lvert h\rvert^{-\lambda}$	$\lvert-\tau\rvert^{\beta}$ / $\lvert h\rvert^{1/\delta}$	$\lvert\tau\rvert^{-\mu}$	$R^{-\nu}$

Таблица II

Критические индексы выражены через постоянные x и y. Соотношения (А) — (Г) связывают индексы α, β, γ, δ, μ, ν

α	β	γ	δ	ε	λ	μ	ν
$2-\frac{d}{y}$	$\frac{d-x}{y}$	$\frac{2x-d}{y}$	$\frac{x}{d-x}$	$\alpha\frac{x}{y}$	$\gamma\frac{x}{y}$	$1/y$	$2(d-x)$

(А) $\alpha+2\beta+\gamma=2$. (Б) $\beta\delta=\beta+\gamma$. (В) $\mu d=2-\alpha$. (Г) $\nu(1+\delta)=2d$.

В теории однородного самосогласованного поля Гиббса — Вейсса — Ландау соотношения подобия выполняются. Точнее говоря, выполняются соотношения (А) и (Б) табл. II. Поскольку поле заранее предполагается однородным, величины μ и ν, определяющие радиус корреляции и поведение функции корреляции, теряют смысл. Приводим значения критических индексов в упомянутых теориях:

$$\alpha = 0, \ \beta = 1/2, \ \gamma = 1, \ \delta = 3.$$

В классических теориях самосогласованного поля можно учесть флуктуации по Орнштейну — Цернике. В теории Ландау с параметром порядка η в термодинамический потенциал вводится член, пропорциональный квадрату градиента η. При этом плотность потенциала $\Phi(\mathbf{r}, \tau)$ имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}, \tau) \sim (\nabla\eta)^2 + a_0\tau\eta^2 + b_0\eta^4, \tag{29}$$

где a_0, b_0 — постоянные. По определению, $\Phi\left(\frac{\mathbf{r}}{L}, \tau(L)\right)$ — термодинамический потенциал ячейки размера L при температуре τ. Поэтому

$\Phi\left(\frac{\mathbf{r}}{L}, \tau(L)\right) = L^d \Phi(\mathbf{r}, \tau)$ (см. (16)). Но однородным преобразованием величин $\eta \to \eta L^\sigma$, $\tau \to \tau L^y$, $\mathbf{r} \to \mathbf{r}/L$ нельзя добиться того, чтобы $\Phi(\mathbf{r}, \tau)$, определенная соотношением (29), перешла в $L^d\,\Phi(\mathbf{r}, \tau)$. В классической теории, учитывающей флуктуации по Орнштейну — Цернике, соотношения подобия не выполняются.

4. СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ ФЛУКТУАЦИЙ

Полезно взглянуть на полученные результаты с другой точки зрения [12]. Аномалии термодинамического поведения системы вызваны флуктуациями большого масштаба, развивающимися вблизи точки перехода. Физическую картину такого состояния мы представляем себе следующим образом. Разобьем весь магнетик на области с линейными размерами порядка r_C. Внутри каждой такой области локальные моменты скоррелированы и суммарный момент по области M отличен от нуля. Но моменты различных областей могут с равной (или почти равной ниже точки перехода) вероятностью иметь противоположные знаки, так что среднее значение полного момента по всему объему системы равно нулю. Единственной величиной, характеризующей взаимодействие флуктуации с внешним магнитным полем h, является Mh. Поэтому естественно предположить, что свободная энергия $F(\tau, h)$ имеет вид

$$F(\tau, h) = F(\tau, 0) + \frac{V}{r_C^d} f(Mh). \tag{30}$$

Мы считали ячейки размера r_C невзаимодействующими, так что $f(Mh)$ — свободная энергия такой ячейки. Полагая $M \sim \tau^{-\rho}$, получим закон соответственных состояний (в обозначениях Каданова $\rho = x/y = 2 - \alpha - \beta$).

Метод масштабных преобразований приводит к аналогичному выводу. Ничто не мешает нам экстраполировать все соотношения предыдущего параграфа и распространить их вплоть до ячеек размера $L \sim r_C$ (но не больше!). Но тогда ясно, что взаимодействие с магнитным полем определяется моментом такой ячейки (поскольку неопределенный масштаб L исчез).

Кратко опишем, как получаются из (30) соотношения предыдущего параграфа. При $\tau \to 0$ функция $F(\tau, h)$ должна стремиться к конечному пределу. Для этого функция $f(\xi)$ при больших ξ должна вести себя как $\xi^{d/x}$. Это означает, что $F(h) - F(0)$ при $\tau \to 0$ ведет себя как $h^{d/x}$. Отсюда находим связь между δ и x (см. табл. II). В слабом поле при $\tau > 0$ $F(h) - F(0) \sim h^2$. Отсюда заключаем, что при малых ξ $f(\xi) \sim \xi^2$, что приводит к соотношению между γ, x и y.

Чтобы связать критические индексы γ, δ, μ и α, необходимо дополнительное предположение: в магнитном поле $h \neq 0$ фазовый переход размазывается и $F(\tau, h)$ становится аналитической функцией τ. Действительно, при $h \neq 0$ возникает отличный от нуля полный момент и, следовательно, далекий порядок в расположении спинов при любой температуре. Фазовый переход исчезает, поскольку единственное, что позволяет различить фазы, — это существование или отсутствие далекого порядка.

Сказанное выше означает, что функция $F(\tau, h)$ при малых τ и конечных h может быть разложена в ряд по целым степеням τ. В асимптотике $f(\xi)$ при больших ξ должен присутствовать член f_0 нулевой степени по ξ. Соответствующее слагаемое в формуле (30) должно скомпенсировать особенность в $F(\tau, 0)$. Это приводит к соотношению между α и y.

Переход в область $\tau < 0$ требует аналитического продолжения функции $f(\xi)$. Для модели Изинга Ли и Янг [15] доказали, что свободная энергия F является аналитической функцией $z = e^h$ с разрезом вдоль окружности $|z| = 1$, за исключением некоторой дуги от $z = e^{-i\omega}$ до $z = e^{i\omega}$. При $T \to T_c$ сверху ($\tau \to 0$, $\tau > 0$) величина $\omega \to 0$. Таким образом, при $\tau > 0$ $F(\tau, h)$ является аналитической функцией $z - 1$ в круге радиуса $|e^{i\omega} - 1|$. При малых τ радиус сходимости приближенно равен ω, а $z - 1 \approx h$. В том же приближении можно считать разрезы в плоскости h простирающимися от $\pm i\omega$ до $\pm i\infty$. Из (30) следует, что $\omega \sim \tau^\rho$, а $f(\xi)$ имеет разрезы от $\pm i\xi_0$ до $\pm i\infty$.

Функция $r_C^{-d}[f(Mh) - f_0]$ является аналитической функцией τ при малых τ и конечных h. Переход от положительных к отрицательным τ означает поворот в плоскости ξ на угол $\pm\pi\rho$ от точки на положительной полуоси ξ ($|\xi| \gg 1$). При таком повороте неизбежно пересекается разрез. Продолжая функцию $f(\xi)$ на втором листе в область малых $|\xi|$ при том же $\arg \xi$, мы попадаем в область, соответствующую $\tau < 0$ и $|\tau|^\rho \ll h$. Но если на первом листе разложение $f(\xi)$ начиналось с ξ^2, то на втором оно содержит член, пропорциональный ξ (т. е. h). Это следует из существования спонтанного момента при $\tau < 0$ и $h = 0$. Величина момента находится по известной функции $F(\tau, h)$, откуда получаем связь ρ с α и β.

Вайдом [10] получил некоторые соотношения для критических индексов жидкости, применяя термодинамические соотношения к объему порядка r_C^d. Эта идея впервые была высказана Пиппардом [16], который предположил, что в области с линейными размерами r_C флуктуация температуры $\Delta\tau$ должна быть того же порядка, что и τ (фазовый переход размазывается в области такого размера). В сочетании с обычными термодинамическими формулами для флуктуации температуры (см., например, [1]) это дает

$$\tau^2 \sim 1/r_C^d C_V ,$$

что эквивалентно (В).

Рассуждения Вайдома мы изложим в модифицированном виде применительно к магнетикам. Как и Пиппард, Вайдом предполагает, что к области размера $L \sim r_C$ применимы термодинамические соотношения (естественно, только по порядку величины). В таком случае вклад в свободную энергию от области размера r_C можно записать в виде

$$\Delta F = \text{const} \cdot r_C^{-d} M^2/2\chi. \tag{31}$$

Считается, что в среднем на область такого размера приходится одна степень свободы, связанная с флуктуацией большого масштаба. Тогда $\Delta F \sim T_C$, и из (31) следует соотношение (А) (см. табл. II). Далее находится флуктуационный момент m, приходящийся на одну частицу: $m^2 \sim r_C^{-\nu} \sim |\tau|^{\mu\nu}$. При слабых полях $\chi^{-1} \sim \tau^\gamma \sim m^{2\gamma/\mu\nu}$. Предполагается, что зависимость χ от m останется той же и в сильном поле. Отсюда находим

$$\delta = 1 + 2\gamma/\mu\nu. \tag{32}$$

Соотношение (32) нетрудно получить из табл. II.

5. КРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА ЖИДКОСТЬ — ГАЗ

Можно непосредственно применить полученные ранее результаты к жидкости, если, следуя Ли и Янгу, описать ее решеточной моделью (см., например, [17]).

Частицы могут размещаться лишь в узлах правильной решетки. Каждый узел либо занят одной частицей, либо пуст. Введем числа запол-

нения узлов n_r, принимающие значения 0 и 1. Предполагается, что энергию системы E можно записать в виде

$$E = \Sigma I_{rr'} n_r n_{r'},$$

где $I_{rr'}$ быстро убывает с ростом $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Полное число частиц $N = \Sigma n_r$ сохраняется. Можно ввести сопряженную N величину — химический потенциал ζ и плотность $\rho = \langle n_r \rangle$. Заменой переменных $n_r = (\sigma_r + 1)/2$ задача о решеточном газе сводится к модели Изинга. Правила перевода с языка трехмерной модели Изинга магнетика на язык решеточной модели газа—жидкости даны в табл. III. Вблизи критической точки

Таблица III

Правила перевода с языка модели Изинга на язык модели решеточного газа

Модель Изинга	m	$\left(\frac{1}{2}+m\right)^{-2}\chi$	h	$F-Vh$	C_m
Решеточный газ	$\rho-\rho_C$	k_T	$\zeta-\zeta_C$	$-pV$	C_V

m — момент в расчете на узел, χ — магнитная восприимчивость, ρ — плотность, ρ_C — критическая плотность, ζ — химический потенциал, p — давление, k_T — изотермическая сжимаемость.

можно ввести, как и для магнетиков, критические индексы, связь которых с физическими величинами разъяснена в табл. IV, и записать с их

Таблица IV

Связь критических индексов с величинами, характеризующими жидкость (решеточная модель)

	C_V	Сжимаемость k_T	Скачок плотности $\Delta\rho=\rho_ж-\rho_т$	Поверхностное натяжение σ	Критическая изотерма $\tau=0$
$\lvert\rho-\rho_C\rvert \ll \tau^\beta$	$\lvert\tau\rvert^{\alpha}$	$\lvert\tau\rvert^{-\gamma}$	$\lvert\tau\rvert^{\beta}\ (\tau<0)$	$\lvert\tau\rvert^{(d-1)\mu}\ (\tau<0)$	
$\lvert\rho-\rho_C\rvert \gg \tau^\beta$	$\lvert\rho-\rho_C\rvert^{\alpha/\beta}$	$\lvert\rho-\rho_C\rvert^{1-\delta}$			$p-p_C \sim \sim\lvert\rho-\rho_C\rvert^{\delta}$

помощью уравнение состояния. Оно имеет вид

$$p - p_C - s_C\tau = \tau^{2-\alpha-\beta} g\left(\frac{\rho-\rho_C}{\tau^\beta}\right), \tag{33}$$

где p — давление, ρ — плотность, p_C, ρ_C — их значения в критической точке, s_C — удельная энтропия в критической точке, $g(x)$ — некоторая функция со следующими асимптотиками:

$$g(x) \sim x^\delta \text{ при } x \to 0, \quad g(x) \sim x^2 \text{ при } x \to 0. \tag{34}$$

В частности, уравнение критической изотермы имеет вид

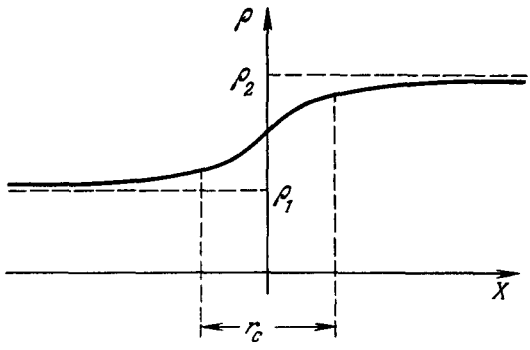
$$p - p_C \sim (\rho - \rho_C)^\delta. \tag{35}$$

Теплоемкость C_p можно найти, пользуясь известным термодинамическим соотношением

$$C_p = C_V - T\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}. \tag{36}$$

Из уравнения состояния (33) следует, что величина $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ остается конечной в критической точке, если $\alpha + \beta < 1$. Ограничиваясь этим случаем, находим связь между теплоемкостью и сжимаемостью вблизи критической точки

$$C_p - C_V \simeq T s_C^2 \rho_C^{-1} k_T. \tag{37}$$



Уравнение кривой сосуществования фаз ($h = 0$ в случае магнетика) имеет вид

$$\rho - \rho_C \sim \pm\tau^\beta. \tag{38}$$

В двухфазной области по мере приближения к критической точке уменьшается поверхностное натяжение. Величину его можно связать с критическими индексами. Для этого будем считать по Вайдому [10] размер переходной области между различными фазами по порядку величины равным r_C. Зависимость плотности от координаты в такой системе изображена на рисунке. В переходной области дополнительная свободная энергия, приходящаяся на единицу объема, равна (ср. (31))

$$\mathrm{const}\cdot(\rho - \rho_C)^2/k_T.$$

Умножая эту величину на толщину переходного слоя, получим энергию единицы площади поверхности

$$\sigma \sim r_C(\Delta\rho)^2/k_T. \tag{39}$$

В частности, на изохоре $\rho = \rho_C$ получим

$$\sigma \sim |\tau|^{2\beta+\gamma-\mu} \sim |\tau|^{(d-1)\mu}. \tag{40}$$

Реальная жидкость, вообще говоря, не описывается решеточной моделью. Тем не менее соотношения между критическими индексами (табл. II) можно получить и в более общей формулировке (А. З. Паташинский [18]).

Рассмотрим реальную жидкость, описываемую величинами p, τ, ρ, ζ — химический потенциал. Предположим, что вблизи критической точки возникают флуктуации плотности ρ больших размеров $\sim r_C$. Отклонение числа частиц ΔN от среднего внутри области таких размеров играет ту же роль, что и флуктуационный момент M магнетика, а $\zeta - \zeta_C$ — роль магнитного поля. Нужно только иметь в виду, что роль свободной энергии в этом случае играет потенциал $\Omega = -pV$, так как именно этот потенциал изменяется на величину $-N\,d\zeta$ при изменении химического потенциала $d\zeta$. Повторяя рассуждения § 2, находим

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{V}{r_C^d} g\,(\Delta N(\zeta - \zeta_C)), \tag{41}$$

где $\Omega_0 = \Omega(T, V, \zeta_C) = -Vp(T, \zeta_C)$, $g(x)$ — некоторая функция. Выпишем связь между величинами p, τ, ζ вблизи критической точки:

$$\zeta - \zeta_C = v_C(p - p_C) - s_C\tau. \tag{42}$$

Формула (41) приводит к тем же соотношениям между критическими индексами.

6. БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИЯ ГЕЛИЯ

Джозефсон [19] распространил идеи масштабного преобразования на случай фазового перехода II рода в жидком гелии *). В качестве параметра порядка Джозефсон выбрал волновую функцию ψ, связанную с плотностью конденсата n_0 известным соотношением

$$n_0 = |\psi|^2. \tag{43}$$

Сверхтекучая часть жидкости может двигаться со скоростью, определяемой с помощью величины

$$m_{\mathrm{He}} v_S = \hbar \frac{\nabla\psi}{\psi}, \tag{44}$$

где m_{He} — масса атома гелия (подразумевается, что характерные гидродинамические размеры велики по сравнению с атомными).

Та же скорость может быть определена гидродинамическим соотношением

$$j_S = \rho_S v_S, \tag{45}$$

где j_S — поток, ρ_S — плотность сверхтекучей части жидкости. Свободная энергия единицы объема жидкого гелия с учетом движения сверхтекучей компоненты принимает вид

$$F(p, T, \psi) = F_0(p, T, |\psi|^2) + \frac{1}{2}\rho_S v_S^2. \tag{46}$$

Мы подразумеваем, что жидкость как целое неподвижна и поток носит флуктуационный характер. Совершим масштабное преобразование, считая $p = p_C$. По определению, $F(\tau(L), \psi(L))$ — свободная энергия ячейки размера L при температуре τ. Поэтому получим

$$F(p_C, \tau(L), \psi(L)) = L^d F(p_C, \tau, \psi). \tag{47}$$

Весьма правдоподобно, что F_0 само по себе удовлетворяет условию масштабного преобразования

$$\rho_S(L) v_S^2(L) = L^d \rho_S v_S^2. \tag{48}$$

Но согласно (44), при масштабном преобразовании v_S переходит в Lv_S. Следовательно (см. (48)),

$$\rho_S(L) \equiv \rho_S(\tau L^y) = L^{d-2}\rho_S(\tau). \tag{49}$$

Из (49) находим

$$\rho_S \sim \tau^{\frac{d-2}{y}}. \tag{50}$$

Напомним, что y связан с критическим индексом теплоемкости соотношением $\alpha = 2 - d/y$. В интересующем нас случае $d = 3$ и

$$\rho_S \sim \tau^{\frac{2-\alpha}{3}}. \tag{51}$$

---

*) Мы приводим здесь вывод соотношения Джозефсона, принадлежащий Каданову [20].

Для λ-перехода в He величина α была измерена Бакингэмом, Фэрбенком и Келлерсом (см. [6]) и найдена равной нулю. Недавно Клау и Риппи [21], а также Тайсон и Дуглас [22] измерили ρ_S вблизи T_C и нашли, что $\rho_S \sim (-\tau)^{2/3\pm0,006}$.

К сожалению, из имеющихся экспериментальных данных пока нельзя извлечь сведений о каком-либо другом критическом индексе. Поэтому мы ничего не знаем о поведении n_0. Очевидно, что n_0 изменяется иначе, чем ρ_S. Обратное означало бы, что корреляционная функция $\langle\psi(r)\psi(r')\rangle$ такая же, как в теории Ландау, чего не может быть в малой окрестности λ-точки.

На первый взгляд и n_0, и ρ_S могут с одинаковым успехом выступать в качестве параметров порядка. Однако действительный дальний порядок характеризуется величиной ψ (или $\sqrt{n_0}$) и соответствующим критическим индексом β. Измеряемая величина ρ_S, как было показано, в теории масштабных преобразований однозначно определяется поведением теплоемкости.

7. ДАННЫЕ РАСЧЕТА И ЭКСПЕРИМЕНТА

Таблица V дает некоторое представление о критических индексах, полученных для математических моделей путем численного расчета

Таблица V

Некоторые данные расчета и эксперимента

	Расчеты [4, 5, 23]			Эксперимент			
	2-Изинг	3-Изинг	Модель Гейзенберга, $d=3$	Железо	Никель	Аргон	Ксенон
α	0	($\tau<0$) 0—0,25 / ($\tau>0$) —0,09÷0,16	$\approx 0(\tau>0)$	≈ 0 [24]		$<0,25$ [25]	$<0,2$ [26]
β	1/8	5/16 0,312 0,303÷0,308				0,4±0,2 [27]	0,35 [3]
γ	7/4	1,23÷1,32	1,32÷1,38	1,33±0,4 [28]	1,37 [29]	0,6±0,2 [30]	1,3±0,2 [3]
δ	15	5,20±0,15			4,2 [29]		4,4±0,4 [3]
ν	1/4	1,059±0,006	1,08±0,04	~1 [31]			
μ	1	0,644±0,002					

(исключение составляет плоская модель Изинга) и извлеченных из экспериментальных данных для ряда веществ. Данные далеко не полны. Можно убедиться, что соотношения между критическими индексами достаточно хорошо удовлетворяются.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Естествен вопрос: каково соотношение между классической теорией самосогласованного поля и теорией подобия фазовых переходов? Полный ответ на этот вопрос может быть получен лишь после построения микроскопической теории. Можно, однако, найти критерии применимости теории самосогласованного поля. В. Л. Гинзбург [32] предложил следующий критерий: теория самосогласованного поля применима, когда в области размеров порядка радиуса корреляции флуктуации параметра порядка значительно меньше его среднего значения. Параметры теории выражаются

через характеристики данного вещества. Если все коэффициенты (при $(\nabla\eta)^2$, $\tau\eta^2$ и η^4) имеют порядок атомных постоянных, то условие Гинзбурга может быть лишь $\tau \gg 1$. Ясно, что существование области, в которой $\tau \ll 1$ и где тем не менее выполняется условие Гинзбурга, накладывает некоторые условия на параметры вещества. Поэтому для некоторых существует область применимости теории самосогласованного поля, а для других — ее нет. К первым относятся сверхпроводники (см. также [33, 34]), кварц, сегнетоэлектрики, ко вторым — гелий, железо.

Вакс, Ларкин и Пикин [35] построили микроскопическую теорию сегнетоэлектриков, у которых есть область применимости теории Ландау. Оказалось достаточным, чтобы радиус сил взаимодействия превосходил атомную постоянную. Другая возможность, впервые указанная Андерсоном [36], состоит в том, что длинные волны оптической ветви в кристаллах при определенной температуре становятся неустойчивыми. Происходит своеобразная бозе-конденсация фононов. Здесь малой предполагается область неустойчивости (см. подробнее [37]).

Во всех случаях, когда область применимости классической теории существует, есть другая область, достаточно близкая к T_C, где она становится неприменимой. Можно предполагать, что рост флуктуаций в этой области приводит к той картине подобия, которая была описана в настоящем обзоре.

Вопрос о том, можно ли все фазовые переходы описывать одинаковыми критическими индексами (другими словами, роль взаимодействия в микромасштабах), не решен.

Институт теоретической физики
АН СССР, Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., «Наука», 1964.
2. М. Н. Багацкий, А. В. Воронель, В. Г. Гусак, ЖЭТФ **43**, 728 (1962).
3. A. W. Habgood, W. G. Sneider, Can. J. Chem. **32**, 98, 164 (1954).
4. L. Onsager, Phys. Rev. **65**, 117 (1944).
5. C. Domb, A. R. Miedema, Magnetic Transitions, в сб. Progress of Low Temp. Physics, vol. 4, North-Holland, Amsterdam, 1964.
6. C. Buckinghem, W. M. Fairbank, в сб. Progress of Low Temp. Physics, vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 1961.
7. M. H. Edwards, Доклад на 10 Международном конгрессе по физике низких температур; R. H. Sherman, E. F. Hammel, Phys. Rev. Letts **15**, 483 (1965).
8. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, ЖЭТФ **46**, 994 (1964).
9. C. Buckinghem, Proc. of the Conference on Phenomena near Critical Points, Washington, 1965.
10. B. Widom, J. Chem. Phys. **43**, 3892, 3898 (1965).
11. L. P. Kadanoff, Physics **2**, 263 (1966).
12. А. З. Паташинский, В Л. Покровский, ЖЭТФ **50**, 439 (1966).
13. M. E. Fisher, Physica **25**, 521 (1959); J. W. Essam, M. E. Fisher, J. Chem. Phys. **38**, 802 (1963); D. S. Gaunt, M. E. Fisher, M. F. Sykes, J. W. Essam, Phys. Rev. Lett. **13**, 713 (1964).
14. B. Widom, J. Chem. Phys. **41**, 1633 (1964).
15. T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev. **87**, 404 (1952).
16. A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc. **A216**, 547 (1963).
17. Т. Хилл, Статистическая механика, М., ИЛ, 1960.
18. А. З. Паташинский, Письма ЖЭТФ **3**, 208 (1966).
19. B. D. Josephson, Phys. Lett. **21**, 608 (1966).
20. L. P. Kadanoff et al., Static Phenomena near Critical Points. Theory and Experiment. Preprint. University of Illinois, Urbana, Illinois, 1966.
21. J. R. Clow and J. D. Reppy, Phys. Rev. Lett. **16**, 887 (1966).
22. J. A. Tyson and D. H. Douglass, Phys. Rev. Lett. **17**, 472 (1966).
23. M. E. Fisher, The Nature of Critical Points from Lectures in Theor. Phys., vol. VII, University of Colarado Press, Boulder, Colarado, USA.

24. Я. А. Крафтмахер, Т. Ю. Ромашина, ФТТ 7, 2532 (1965).
25. А. В. Воронель, В. Г. Снигирев, Ю. Р. Чашкин, ЖЭТФ 48, 981 (1965).
26. А. В. Воронель, Диссертация, Харьков, 1966.
27. A. Michels, J. M. Levelt, W. de Graaf, Physica 24, 659 (1958); A. Michels, J. M. Levelt, G. J. Walker, Physica 24, 769 (1958).
28. J. Cammel, W. Marshall, L. Morgan, Proc. Roy. Soc. A275 (1963); J. E. Noakes, A. Arrot, J. Appl. Phys. 35, 931 (1964).
29. P. Weiss, R. Forrer, Ann. d. Phys. 5, 1953 (1926); J. S. Kouvell, M. E. Fisher, Phys. Rev. A136, 1626 (1964).
30. J. E. Thomas, P. W. Schmidt, J. Chem. Phys. 39, 2506 (1963).
31. B. Jacrot, J. Constantionovic, G. Parette, D. Cribier, Symposium on Inelastic Scattering of Neutrons in Solids and Liquids, Chalk River, 1962.
32. В. Л. Гинзбург, ФТТ 2 (2), 2031 (1960).
33. D. Thouless, Ann. Phys. 10, 553 (1960).
34. Э. Батыев, А. Паташинский, В. Покровский, ЖЭТФ 46, 2093 (1964).
35. В. Вакс, А. Ларкин, С. Пикин, ЖЭТФ 51, 361 (1966).
36. P. C. Kwok, P. B. Miller, Phys. Rev. 151, 387 (1966).
37. P. W. Anderson, в сб. «Физика диэлектриков», М., Изд-во МГУ, 1960.