

538.3

## О МАГНИТОФОРМОЗНОМ (СИНХРОТРОННОМ) ИЗЛУЧЕНИИ И ЕГО РЕАБСОРБЦИИ

*В. Л. Гинзбург, В. Н. Сазонов, С. И. Сыроватский*

### СОДЕРЖАНИЕ

Введение	63
1. Элементарное рассмотрение излучения, возникающего при движении заряда по винтовой линии	64
2. О черенковском излучении при прохождении частицы через пластинку (слой вещества)	67
3. Магнитотормозное излучение отдельной частицы, движущейся под произвольным углом к полю	68
4. Излучение системы частиц	71
5. Реабсорбция излучения ультраквантитативистских частиц	74
6. Об изменении магнитного поля, связанном с магнитотормозным излучением (потерями)	81
Цитированная литература	89

### ВВЕДЕНИЕ

Магнитотормозное (синхротронное) излучение уже в течение многих лет обсуждается в литературе, а соответствующие формулы широко используются, особенно в астрофизике (см., например, <sup>1, 2</sup>). Тем более удивительно, что в последнее время в этой области были выяснены новые моменты. Более того, оказалось, что в ряде статей приводятся и частично используются неверные или неточные формулы. Это относится к случаю излучения частиц, движущихся в магнитном поле не по окружности, а по винтовой линии (другими словами, речь идет о движении частиц со скоростями  $v$ , составляющими с магнитным полем  $H$  угол  $\theta \neq \pi/2$ ). Конкретно, неправильно интерпретируются, а в точном смысле слова, неверны полученные в довольно известных работах <sup>3-5</sup> формулы для интенсивности магнитотормозного излучения одного электрона, движущегося под углом  $\theta \neq \pi/2$ . Вместе с тем выражения для интенсивности магнитотормозного излучения совокупности частиц, используемые в радиоастрономии (см. <sup>1, 2</sup>), базируются именно на этих формулах для интенсивности излучения отдельного электрона. К счастью, отмеченная неточность <sup>\*)</sup> исходных формул не сказывается при переходе к интенсивности излучения совокупности электронов, находящихся в фиксированной области (например, в оболочке сверхновой звезды). Поэтому все применения формул магнитотормозной теории в <sup>1, 2</sup> и в ряде других статей оказались правиль-

<sup>\*)</sup> На это обстоятельство (несправедливость или неточность некоторых используемых выражений при  $\theta \neq \pi/2$ ), насколько нам известно, обращали внимание другие лица (В. А. Разин, Э. Г. Мычелкин, Г. Б. Филд и Дж. Скарл). Кроме того, в ряде статей приведены правильные общие формулы для излучения одной частицы <sup>6, 7</sup>, но они не были явно применены и интерпретированы для ультраквантитативистского случая.

ными. Если бы, однако, речь шла о магнитотормозном излучении облака релятивистских электронов, вырывающегося из какого-то источника и движущегося тоже с релятивистской скоростью, то применение некоторых из имеющихся в<sup>1, 2</sup> формул привело бы к существенной ошибке.

Целью настоящей статьи является, во-первых, осветить указанный вопрос о магнитотормозном излучении при винтовом движении, что имеет и практическое, и методическое значение. Во-вторых, мы остановимся на проблеме реабсорбции магнитотормозного излучения, которая в последнее время (особенно в связи с обсуждением радиоизлучения квазаров) привлекает к себе большое внимание<sup>8-10</sup>. В то же время в<sup>1, 2</sup> этот вопрос был освещен недостаточно подробно. В настоящую статью мы сочли целесообразным включить также раздел 6, посвященный рассмотрению движения частиц в магнитном поле при наличии потерь и, одновременно, при учете их взаимодействия с создающим поле источником (например, с «соленоидом»). Здесь не получается каких-либо неожиданных результатов, но с методической точки зрения задача представляет несомненный интерес. Не исключено, что она окажется и практически важной, когда речь пойдет об излучении совокупности частиц с достаточно высокой плотностью энергии.

#### 1. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ РАССМОТРЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯДА ПО ВИНТОВОЙ ЛИНИИ

Движущийся в вакууме ультрарелятивистский электрон<sup>\*)</sup> (только такой случай и будет нас в основном интересовать) излучает практически лишь в направлении своей мгновенной скорости или, точнее, в конусе с углом раствора

$$\Psi \sim \frac{mc^2}{E}, \quad E \gg mc^2. \quad (1,1)$$

Ниже при качественном анализе будем считать, когда возможно, излучение игольчатым, т. е. угол  $\psi$  сколь угодно малым. При движении в постоянном и однородном магнитном поле напряженностью  $H$  электрон движется, вообще говоря, по винтовой линии со скоростью  $v_{||} = v \cos \theta$  вдоль поля и скоростью  $v_{\perp} = v \sin \theta$  поперек поля (разумеется, полная скорость  $v = \sqrt{v_{||}^2 + v_{\perp}^2}$ ). Частота обращения  $\omega_H$  зависит лишь от  $v$  и равна

$$\omega_H = \frac{eH}{mc} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{eH}{mc} \frac{mc^2}{E}. \quad (1,2)$$

Если движение происходит по окружности (т. е.  $v_{||} = 0, v_{\perp} = v$ ), то в силу сказанного ультрарелятивистский электрон излучает лишь в плоскости орбиты. Находящийся в этой плоскости наблюдатель (регистрирующий прибор) «увидит» всплески излучения в те моменты, когда электрон движется как раз в направлении наблюдателя (нужно при этом, конечно, учесть запаздывание на время распространения излучения, в случае вакуума равное  $r/c$ , где  $r$  — расстояние от электрона до наблюдателя). Очевидно, всплески будут повторяться каждый период или, иными словами, следовать один за другим через время

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_H} = \frac{2\pi mc}{eH} \frac{E}{mc^2}.$$

Как подробно показано в<sup>1, 2</sup>, при условии (1,1) характерная длительность

<sup>\*)</sup> Для определенности будем говорить об электронах. Но, разумеется, все буквенные выражения относятся к частицам с зарядом  $e$  и массой покоя  $m$ .

каждого всплеска порядка

$$\Delta t \simeq \frac{mc}{eH} \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2,$$

и наблюдатель регистрирует поле, схематически изображенное на рис. 1. Ясно, что разложение этого поля в ряд Фурье приводит к спектру, состоящему из обертонов частоты  $\omega_H$ . Все соответствующие выражения для напряженности поля, интенсивности и других величин, приведенные в <sup>1-5</sup>, для этого случая верны, и на них нет оснований останавливаться \*).

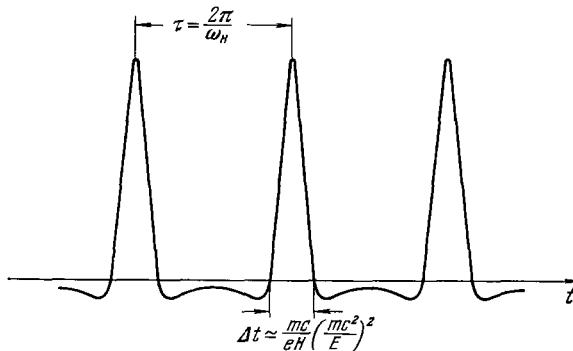


Рис. 1.

Неправильными же являются, как уже упоминалось, формулы для некругового движения, когда продольная скорость  $v_{||} = v \cos \theta \neq 0$ , т. е. угол  $\theta \neq \pi/2$ . Источник ошибки особенно хорошо виден из исходного (например, в статье <sup>5</sup>) выражения для напряженности поля излучения, которое записывается как

$$\mathcal{E} = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n e^{-in\omega_H t} \right). \quad (1,3)$$

Дело в том, что при  $v_{||} \neq 0$  импульсы излучения следуют друг за другом вовсе не через время  $\tau = 2\pi/\omega_H$ , а через время  $\tau^*$ , которое отличается от  $\tau$  в результате эффекта Допллера.

Время  $\tau^*$  легко найти элементарным путем, пользуясь рис. 2. Для выбранного наблюдателя вспышки излучения приходят тогда, когда электрон находится в точках  $A, B, C, \dots$  (для простоты здесь и ниже считаем, что излучение строго игольчатое). Другими словами, именно в этих точках электрон «смотрит» на наблюдателя. Интервал времени между моментами, когда электрон проходит точки  $A$  и  $B$ , равен, конечно, периоду  $\tau = \frac{2\pi}{\omega_H}$ . Расстояние между точками  $A$  и  $B$  равно  $v_{||}\tau = vt \cos \theta$  ( $\theta$  — угол между  $v$  и  $H$ ), а импульс, испущенный в точке  $A$ , за это время пройдет путь  $ct$ . Из рис. 2 ясно, что импульс, испущенный в точке  $B$ , пойдет к наблюдателю с отставанием от первого импульса на время

$$\tau^* = \tau \left( 1 - \frac{v_{||} \cos \theta}{c} \right) = \tau \left( 1 - \frac{v}{c} \cos^2 \theta \right) \simeq \tau \sin^2 \theta = \frac{2\pi}{\omega_H} \sin^2 \theta, \quad (1,4)$$

где при переходе к предпоследнему выражению учтено, что весь расчет ведется для предельного случая  $v \rightarrow c$ . Заметим, что использованная картина, в которой излучение приходит к наблюдателю в виде отдельных импульсов, пригодна лишь при  $\theta \gg \psi \sim mc/E$ . Фактически, однако,

\* ) Излучение при круговом движении подробно рассмотрено в работе <sup>11</sup>.

выражение

$$\tau^* = \tau \left( 1 - \frac{v_{||} \cos \theta}{c} \right)$$

имеет общий характер и не связано ни с допущением об «игольчатости» излучения, ни с возможностью разделять его на дискретные импульсы (при этом  $v_{||} \cos \theta$  заменяется на  $v_{||} \cos \theta'$ ; см. раздел 3).

Итак, поле излучения ультраквантитативистского электрона в волновой зоне состоит из обертонов частоты

$$\omega_H^* = \frac{2\pi}{\tau^*} = \frac{\omega_H}{\sin^2 \theta}. \quad (1,5)$$

Само по себе это обстоятельство не очень существенно, если учесть, что в интересующих нас случаях обертоны не разрешаются, и приходится иметь дело со сплошным спектром. Приведенная же в <sup>1, 2</sup> оценка ширины импульсов

$$\Delta t \sim \frac{mc}{eH_{\perp}} \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2,$$

а значит, и характерной частоты  $\omega_m \sim 1/\Delta t$  совершенно правильно (здесь и ниже  $H_{\perp} = H \sin \theta$ ). Однако изменение интервала между импульсами сказывается не только на спектре, но и на всех характеристиках поля излучения, в частности, на его интенсивности, фиксируемой в точке наблюдения. Действительно,

пусть электрон за каждый оборот (за время  $\tau = 2\pi/\omega_H$ ) теряет на излучение энергию  $\Delta E = P\tau$ . Тогда в силу сказанного очевидно, что к «наблюдателям», расположенным на некоторой фиксированной сфере на расстоянии  $r$  от электрона, эта энергия поступит за время  $\tau^*$  и, следовательно, средняя наблюдаемая мощность излучения (полный поток энергии) будет равна

$$P^* = \frac{\Delta E}{\tau^*} = \frac{P\tau}{\tau^*} = \frac{P}{\sin^2 \theta}. \quad (1,6)$$

На первый взгляд может показаться, что здесь имеется какое-то противоречие с законом сохранения энергии. Электрон теряет в единицу времени энергию  $P$  (значение  $P$  определяется хорошо известной формулой; см., например, <sup>2</sup>, формула (2,10) и ниже, формула (4,1)). Вся эта энергия переходит в излучение и, казалось бы, должна равняться полному потоку излучения через рассматриваемую сферу. Так часто и поступают — вычисляют радиационные потери, испытываемые частицей, и приравнивают их полному потоку излучения. В стационарном случае для излучателя, центр тяжести которого неподвижен, подобным образом, конечно, можно поступать. Вообще же, как это общеизвестно, работа, совершаемая излучателем в единицу времени (мощность потерь  $P$ ), равна полному потоку энергии через некоторую поверхность плюс изменение энергии поля

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left( \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) dV$$

в объеме, охватываемом этой поверхностью. В интересующем нас случае область пространства, занимаемая излучением и расположенная между движущимся электроном и фиксированной в пространстве поверхностью,

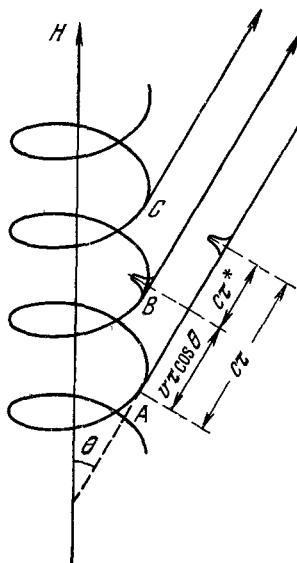


Рис. 2.

на которой проводятся наблюдения, все время уменьшается. Уменьшается и заключенная в этой области энергия, а поэтому мощность принимаемого излучения  $P^*$  больше мощности потерь  $P$ . Между тем, например, в работе <sup>4</sup> при переходе к спектральным величинам использовалась мощность потерь  $P$ . Такой подход не может, конечно, при учете перемещения излучателя привести к правильным выражениям для интенсивности излучения, фиксируемой на некоторой неподвижной поверхности. Вместе с тем, если излучающие частицы находятся в фиксированном объеме (например, в оболочке сверхновой звезды) или, точнее, функция распределения излучающих частиц не меняется со временем, интенсивность излучения совокупности частиц совпадает со спектральной мощностью потерь. Это заключение ясно из закона сохранения энергии и, конечно, подтверждается прямым расчетом (см. раздел 4).

Такова суть дела. Как мы полагаем, тот факт, что весь этот, по существу, совершенно элементарный вопрос не был так долго полностью выяснен, оправдывает стремление изложить содержащийся в настоящей статье материал в достаточно подробной форме.

## 2. О ЧЕРЕНКОВСКОМ ИЗЛУЧЕНИИ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧАСТИЦЫ ЧЕРЕЗ ПЛАСТИНКУ (СЛОЙ ВЕЩЕСТВА)

Сделанное замечание о том, что для движущегося или, в общем случае, нестационарного источника полный поток излучения не совпадает с потерей энергии в единицу времени, носит, разумеется, весьма общий характер. В качестве иллюстрации, помимо магнитоморзного излучения, остановимся на потоке черенковского излучения, возникающего при прохождении частицы через пластинку (рис. 3). Для простоты, считаем среду недиспергирующей или, если угодно, ограничивающейся областью частот, для которой дисперсия мала, так что групповая скорость света равна фазовой скорости  $c/n$ . Потери энергии на черенковское излучение в рассматриваемой области частот, отнесенные к единице длины, обозначим через  $(dE/dx)_c$ . Частица, имеющая скорость  $v$ , пройдет пластинку толщиной  $d$  за время  $t = d/v$ , потеряв при этом энергию  $(dE/dx)_c d$ . Отнесенные к единице времени потери равны

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_c v = P.$$

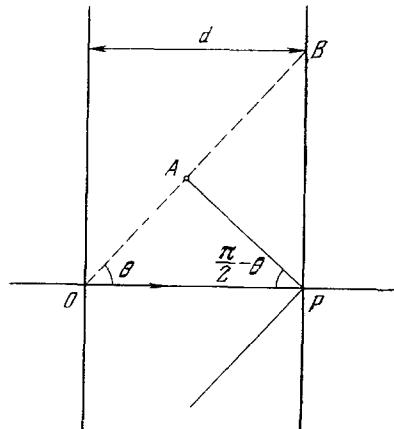


Рис. 3.

Частица начинает излучать по вхождении в пластинку (момент  $t = 0$ ) и излучает все время  $t = d/v$  до ее выхода из пластиинки. Излучение при этом располагается на поверхности конуса с углом раствора  $\pi - 2\theta$ , где  $\cos \theta = c/nv$  (дисперсией пренебрегается). Из рис. 3 ясно, что свет начинает выходить из пластиинки в момент  $t = d/v$ , и вспышка закончится, когда точка  $A$  (задняя часть конуса, излученная в момент  $t = 0$ ) дойдет до точки  $B$ . Очевидно, расстояние

$$OA = \frac{c}{n} t = \frac{c}{n} \frac{d}{v} = d \cos \theta$$

и расстояние

$$OB = \frac{d}{\cos \theta}.$$

Отсюда

$$AB = d \left( \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta \right) = d \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

и длительность вспышки черенковского свечения на поверхность  $PB^*$ )

$$t^* = \frac{d \sin^2 \theta}{\cos \theta \cdot c/n} = t \operatorname{tg}^2 \theta, \quad (2.1)$$

поскольку  $d = vt$  и  $\cos \theta = c/nv$ . Следовательно, полный поток излучения во вспышке через поверхность пластинки равен

$$P^* = \frac{(dE/dx)_c d}{t \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{P}{\operatorname{tg}^2 \theta} = P \operatorname{ctg}^2 \theta, \quad (2.2)$$

где  $P$  — потери энергии в единицу времени, отражением от поверхности пластиинки пренебрежено (просветленная оптика). Итак, полный поток, вообще говоря, не равен потерям энергии в единицу времени и в данном случае существенно зависит от ориентации выбранной поверхности.

### 3. МАГНИТОТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТДЕЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ К ПОЛЮ

Выберем систему координат в соответствии с рис. 4 так, чтобы ось  $e_3$  была направлена вдоль внешнего магнитного поля,  $\mathbf{H} = H e_3$ . Частица с зарядом  $e$  движется в поле  $\mathbf{H}$  по траектории

$$\mathbf{r}_0(t) = \frac{c \beta_{\perp}}{\omega_H} \{ -e_1 \cos \omega_H t + e_2 \sin \omega_H t \} + e_3 c \beta_{\parallel} t, \quad (3.1)$$

$$\beta(t) = \beta_{\perp} \{ e_1 \sin \omega_H t + e_2 \cos \omega_H t \} + e_3 \beta_{\parallel}.$$

Здесь  $\beta$  — скорость частицы в единицах скорости света  $c$ ,  $\beta_{\parallel}$  и  $\beta_{\perp}$  — значения ее проекций в направлении поля и в поперечном направлении,

$\omega_H$  определено выражением (1.2). Для отрицательно заряженной частицы  $\omega_H < 0$ . На рис. 4 изображена траектория отрицательно заряженной частицы (например, электрона).

На больших расстояниях от частицы, в волновой зоне, фурье-компоненты вектор-потенциала и напряженности электрического поля частицы соответственно равны (см. <sup>13</sup>, § 66)

$$\mathbf{A}_{\omega} = e^{i \frac{\omega}{c} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{e}{2\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(t) e^{i \{ \omega t - \frac{\omega}{c} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0(t) \}} dt,$$

$$\mathbf{E}_{\omega} = i \frac{\omega}{c} [\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\omega} \mathbf{k}] = i \frac{\omega}{c} (\mathbf{A}_{\omega} - \mathbf{k} (\mathbf{A}_{\omega} \mathbf{k})), \quad (3.2)$$

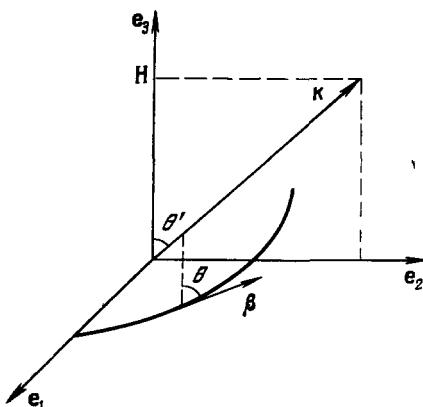


Рис. 4.

где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор в направлении излучения (в направлении от частицы к наблюдателю),  $\mathbf{r} = r \mathbf{k}$ ,  $r$  — расстояние между наблюдателем и положением электрона в некоторый фиксированный момент времени; считаем, что вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $(e_2, e_3)$  и составляет угол  $\theta'$  с направлением магнитного поля, т. е.  $\mathbf{k} = \{0, k_2, k_3\} = \{0, \sin \theta', \cos \theta'\}$ . Напомним, что угол между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{H}$  обозначен через  $\theta$  (см. рис. 4).

<sup>\*)</sup> Вопрос о длительности черенковской вспышки, в частности, в применении к черенковским счетчикам, рассмотрен в <sup>12</sup>.

Как следует из (3, 2), в выражение для  $\mathcal{E}_\omega$  входит лишь поперечная к направлению излучения компонента скорости:

$$\beta_t = \beta - \mathbf{k}(\beta \mathbf{k}) = \mathbf{e}_1 \beta_\perp \sin \omega_H t + (\mathbf{e}_2 k_3 - \mathbf{e}_3 k_2) (\beta_\perp k_3 \cos \omega_H t - \beta_\parallel k_2). \quad (3,3)$$

Удобно ввести тройку единичных векторов  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{k}$ , таких, что

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{e}_3 k_2 - \mathbf{e}_2 k_3, \quad \mathbf{l}_1 = [\mathbf{l}_2 \mathbf{k}] = -\mathbf{e}_1. \quad (3,4)$$

Вектор  $\mathbf{l}_2$  направлен вдоль проекции  $\mathbf{H}$  на плоскость, перпендикулярную к направлению наблюдения (картишную плоскость), т. е. вдоль вектора  $\mathbf{e}_3 - \mathbf{k}(\mathbf{e}_3, \mathbf{k})$ .

Из выражений (3,2) — (3,4) получаем

$$\mathcal{E}_\omega = e^{i \frac{\omega}{c} r} \frac{ie\omega}{2\pi c r} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_t(t) e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} \mathbf{k} \mathbf{r}_0(t))} dt, \quad (3,5)$$

где

$$\beta_t(t) = -\mathbf{l}_1 \beta_\perp \sin \omega_H t - \mathbf{l}_2 (\beta_\perp k_3 \cos \omega_H t - \beta_\parallel k_2). \quad (3,6)$$

Для вычисления интеграла (3,5) заметим, что показатель подынтегральной экспоненты в выражении (3,5) равен (см. (3,1))

$$\omega t - \frac{\omega}{c} \mathbf{k} \mathbf{r}_0(t) = (1 - \beta_\parallel k_3) \omega t - z \sin \omega_H t, \quad (3,7)$$

где

$$z = \frac{\omega}{\omega_H} \beta_\perp k_2. \quad (3,8)$$

Далее, воспользуемся представлением

$$e^{-iz \sin \omega_H t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{-in\omega_H t}, \quad (3,9)$$

где  $J_n(z)$  — бесселева функция I рода.

Интегрирование по  $t$  приводит к появлению  $\delta$ -функций:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\omega = e^{i \frac{\omega}{c} r} \frac{ie\omega}{2\pi c r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} & \left\{ \mathbf{l}_1 \beta_\perp J'_n(z) - \right. \\ & \left. - i \mathbf{l}_2 \left( \beta_\perp k_3 \frac{n}{z} - \beta_\parallel k_2 \right) J_n(z) \right\} \delta \{(1 - \beta_\parallel k_3) \omega - n\omega_H\}. \end{aligned} \quad (3,10)$$

Таким образом, излучение имеет дискретный спектр с частотами

$$\omega = \omega_n \equiv n \frac{\omega_H}{1 - \beta_\parallel k_3} \equiv \frac{n\omega_H}{1 - \beta \cos \theta \cos \theta'}. \quad (3,11)$$

В ультраквантитивистском случае  $\beta \rightarrow 1$  и излучение практически направлено вдоль мгновенной скорости частицы (см. <sup>13</sup>, § 72), т. е. угол  $\theta \approx \theta'$  и

$$\omega_n = \frac{n\omega_H}{1 - \frac{v}{c} \cos^2 \theta} \approx \frac{n\omega_H}{\sin^2 \theta} = n\omega_H^*,$$

что находится в согласии с (1,5).

Интеграл Фурье электрического поля излучения частицы сводится к ряду:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n e^{i\omega_n \left( \frac{r}{c} - t \right)}, \quad (3,12)$$

где амплитуда  $n$ -й гармоники поля есть

$$\mathcal{E}_n = \frac{2e}{cr} \frac{n\omega_H \beta \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta \cos \theta')^2} \left\{ l_1 J'_n(z_n) - i l_2 \frac{\cos \theta' - \beta \cos \theta}{\beta \sin \theta \sin \theta'} J_n(z_n) \right\} \quad (3,13)$$

и

$$z_n = n \frac{\beta \sin \theta \sin \theta'}{1 - \beta \cos \theta \cos \theta'} \cdot \quad (3,14)$$

Выражения (3,12) — (3,14) полностью определяют поле излучения, создаваемое в некоторой достаточно удаленной точке пространства частицей, движущейся под произвольным углом к магнитному полю. В дальнейшем удобно использовать «тензор поляризации излучения», по определению равный

$$\tilde{p}_{\alpha\beta}(n) = \frac{c}{8\pi} \mathcal{E}_n, \alpha \mathcal{E}_n^*, \beta, \quad (3,15)$$

где  $\alpha, \beta = 1, 2$  и  $\mathcal{E}_n, \alpha$  — компоненты электрического вектора (3,13). При этом средняя за период плотность потока энергии (вектора Пойнтинга) в  $n$ -й гармонике равна

$$\tilde{p}_n = \text{Sp} \tilde{p}_{\alpha\beta}(n) = \frac{c}{8\pi} |\mathcal{E}_n|^2. \quad (3,16)$$

Для ультрарелятивистских частиц

$$\xi = mc^2/E \ll 1, \quad (3,17)$$

и основную роль играет излучение на высоких гармониках  $n \sim \xi^{-3} \gg 1$ , сосредоточенное в пределах малого угла

$$\psi = \theta - \theta' \ll \xi = \frac{mc^2}{E}. \quad (3,18)$$

Характерные частоты излучения (см. (1,5) или (3,11)) при  $\beta \approx 1, \theta \approx \theta'$  равны

$$v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n\omega_H}{2\pi \sin^2 \theta}. \quad (3,19)$$

Для перехода в (3,13) к ультрарелятивистскому пределу можно воспользоваться приближенным выражением для бесселевых функций с большими значениями индекса и аргумента (см. <sup>14</sup>, стр. 979). Это приводит к следующему выражению для амплитуды  $n$ -й гармоники электрического поля излучения ультрарелятивистского электрона \*):

$$\mathcal{E}_n = \frac{2e\omega_H}{\sqrt{3} \pi cr} \frac{n}{\sin^5 \theta} \{ l_1 (\xi^2 + \psi^2) K_{2/3}(g_n) + i l_2 \psi (\xi^2 + \psi^2)^{1/2} K_{1/3}(g_n) \}, \quad (3,20)$$

где

$$g_n = n \frac{(\xi^2 + \psi^2)^{3/2}}{3 \sin^3 \theta} = \frac{v}{v_c} \left( 1 + \frac{\psi^2}{\xi^2} \right)^{3/2}. \quad (3,21)$$

Во втором из равенств (3,21) мы перешли от номера гармоники  $n$  к частоте  $v$  (см. (3,19)) и использовали обозначение

$$v_c = \frac{3\omega_H \sin \theta}{4\pi \xi^3} = \frac{3eH_{\perp}}{4\pi mc} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2. \quad (3,22)$$

\*) Здесь и в дальнейшем мы будем считать  $\omega_H > 0$  и, соответственно, в выражении (3,12)  $\omega_n > 0$ . При этом изменению знака заряда  $e$  будет соответствовать переход к комплексно-сопряженной амплитуде в (3,13), как это видно из (3,12) при замене  $-\omega_n$  на  $\omega_n$ . Например, для положительно заряженной частицы (позитрона) амплитуда является комплексно-сопряженной по отношению к (3,20), что отвечает противоположному направлению вращения электрического вектора.

В области высоких гармоник спектр излучения практически непрерывен и вместо тензора поляризации излучения на  $n$ -й гармонике (3,15) можно ввести «спектральную плотность тензора поляризации»:

$$\tilde{p}_{\alpha\beta}(v) = \tilde{p}_{\alpha\beta}(n) \frac{dn}{dv} = \frac{2\pi \sin^2 \theta}{\omega_H} \tilde{p}_{\alpha\beta}(n). \quad (3,23)$$

Отсюда и из выражений (3,15), (3,20) находим спектральную плотность потоков излучения с двумя главными направлениями поляризации:

$$\tilde{p}_v^{(1)} \equiv \tilde{p}_{11}(v) = \frac{3e^2\omega_H}{4\pi^2 r^2 c \xi^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{v}{v_c} \right)^2 \left( 1 + \frac{\psi^2}{\xi^2} \right)^2 K_{2/3}^2(g_v), \quad (3,24)$$

$$\tilde{p}_v^{(2)} \equiv \tilde{p}_{22}(v) = \frac{3e^2\omega_H}{4\pi^2 r^2 c \xi^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{v}{v_c} \right)^2 \frac{\psi^2}{\xi^2} \left( 1 + \frac{\psi^2}{\xi^2} \right) K_{1/3}^2(g_v), \quad (3,25)$$

где  $g_v = g_n$  (см. (3,21)).

Заметим здесь, что формулы (3,17)–(3,25) легко обобщаются на случай, когда излучающая частица находится в плазме, показатель преломления которой в хорошем приближении можно считать равным

$$n = 1 - \frac{\omega_0^2}{2\omega^2},$$

где  $\omega_0 = \sqrt{4\pi N_0 e^2/m}$ ,  $N_0$  — концентрация электронов плазмы. Это приближение справедливо, если  $\omega \gg \omega_0$  и  $\omega \gg \omega_H^0 = eH/mc$ . В таких условиях в формулах (3,17)–(3,25) следует заменить величину  $\xi$  в тех местах, где она входит явно, на

$$\eta = \sqrt{\xi^2 + \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}. \quad (3,26)$$

Как ясно из предыдущего, при этом предполагается, что  $\eta \ll 1$ .

Выражения (3,24), (3,25) и, соответственно, параметры Стокса излучения отдельного электрона отличаются от использованных в  $1^{-5}$  появлением множителя  $\sin^2 \theta$  в знаменателе. Именно в этом отношении приведенные в  $1^{-5}$  выражения для интенсивности и параметров Стокса неверны, если речь идет об излучении отдельной частицы или совокупности частиц, перемещающихся в пространстве.

Если же, как обычно и имеет место, нас интересует излучение частиц из фиксированного в пространстве объема, то нужно использовать именно выражения, приведенные в  $1^{-5}$ . К рассмотрению этого вопроса мы теперь и перейдем.

#### 4. ИЗЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

Если с помощью (3,24), (3,25) вычислить полный поток энергии излучения через фиксированную поверхность, т. е. вычислить интеграл от плотности потока по всем частотам и направлениям, то он оказывается в  $1/\sin^2 \theta$  раз больше известного выражения для потерь энергии ультраквантитативистской частицы

$$P = -\frac{dE}{dt} = \frac{2e^4 H_{\perp}^2}{3m^2 c^3} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2. \quad (4,1)$$

Как уже указывалось в § 1, это различие вызвано нестационарностью поля излучения. Именно, полный поток энергии через фиксированную поверхность

$$P^* = \oint_S \tilde{p} dS = P - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV \quad (4,2)$$

определяется не только работой  $P$ , совершающейся частицей, но и изменением энергии поля в ограниченном поверхностью  $S$  объеме  $V$ . Изменение энергии поля связано, очевидно, с поступательным движением частицы и становится существенным, когда скорость поступательного движения частицы сравнима со скоростью света.

Фактически этот результат является следствием запаздывания, обусловленного конечной скоростью распространения электромагнитного поля. В самом деле, рассмотрим излучение отдельного электрона, пересекающего элемент объема  $r^2 dr d\Omega$  на расстоянии  $r$  от наблюдателя (рис. 5). Электрон находится в рассматриваемом элементе объема в течение времени  $dt' = dr/v_r$ , где  $v_r$  — проекция в направлении наблюдателя средней скорости поступательного движения частиц  $v_{||}$ . Очевидно,  $v_r = v_{||} \cos \theta' = v \cos \theta \cos \theta'$ . Если

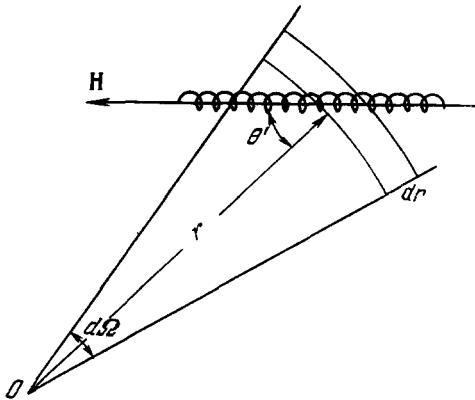


Рис. 5.

$r(t)$  — переменное расстояние до частицы, то момент наблюдения  $t$  связан с моментом излучения  $t'$  соотношением  $t = t' + r(t)/c$  (рассматривается излучение в вакууме). Поэтому излучение, испущенное электроном за время  $dt'$ , соответствующее перемещению на расстояние  $dr$ , будет принято наблюдателем за время

$$dt = dt' \left(1 - \frac{v_r}{c}\right) = \left(1 - \frac{v_r}{c}\right) \frac{dr}{v_r}. \quad (4,3)$$

Отсюда следует, что энергия, излученная за время  $dt'$  и прошедшая через единицу поверхности в точке наблюдения за время  $dt$ , равна

$$\tilde{p}_v dt = \tilde{p}_v \left(1 - \frac{v_r}{c}\right) dt' = p_v dt', \quad (4,4)$$

где  $\tilde{p}_v = \tilde{p}_v^{(1)} + \tilde{p}_v^{(2)}$  (см. (3,24) и (3,25)) и через  $p_v$  обозначена величина

$$p_v = \tilde{p}_v \left(1 - \frac{v_r}{c}\right) = \tilde{p}_v \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \cos \theta'\right). \quad (4,5)$$

Как следует из (4,4), эта величина  $p_v$  имеет смысл плотности потока энергии, излученной электроном в единицу времени. Нетрудно убедиться, что интеграл от  $p_v$  по всем частотам и направлениям излучения приводит к правильному выражению для потерь энергии (т. е. в ультрарелятивистском случае к выражению (4,1)).

Таким образом, соотношение (4,5) устанавливает связь между наблюдаемым потоком  $\tilde{p}_v$  излучения и излучаемой электроном «мощностью»  $p_v$ . Очевидно, аналогичное соотношение имеет место для всех компонент тензора поляризации излучения (см. (3,15) и (3,23)):

$$p_{\alpha\beta}(v) = \tilde{p}_{\alpha\beta}(v) \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \cos \theta'\right). \quad (4,6)$$

В ультрарелятивистском случае ( $v \simeq c$ ,  $\theta \simeq \theta'$ ) отсюда следует, что

$$p_{\alpha\beta}(v) = \tilde{p}_{\alpha\beta}(v) \sin^2 \theta. \quad (4,7)$$

Покажем теперь, что если речь идет об излучении частиц из фиксированного объема, то следует пользоваться именно величиной  $p_{\alpha\beta}(v)$ .

Фактически это ясно уже из (4,4), так как соотношение (4,4) как раз и показывает, что энергия, принятая наблюдателем с отрезка траектории  $dr$ , определяется величиной  $p_v$  и временем  $dt' = dr/v_r$ , за которое электрон проходит этот отрезок. Рассмотрим этот вопрос несколько более подробно с целью получить выражения для интенсивности и других параметров Стокса.

Пусть нас интересует интенсивность излучения совокупности частиц, функция распределения которых есть  $N(E, \tau, r, t)$ . По определению, величина  $N(E, \tau, r, t) dE d\Omega_\tau dV$  равна числу частиц с энергиями в интервале  $E, E + dE$  и направлениями скорости в пределах телесного угла  $d\Omega_\tau$ , содержащихся в момент  $t$  в элементе объема  $dV = r^2 dr d\Omega$ .

За единицу времени в рассматриваемый элемент объема (см. рис. 5) попадает число частиц

$$v_r N \left( E, \tau, r, t - \frac{r}{c} \right) dE d\Omega_\tau r^2 d\Omega;$$

здесь  $t$  — момент наблюдения,  $t - \frac{r}{c}$  — момент излучения из фиксированной точки пространства. Каждая частица излучает из рассматриваемого элемента объема энергию (см. (4,4))

$$p_v dt' = p_v \frac{dr}{v_r}.$$

В результате полный поток принимаемого излучения равен

$$F_v = \int p_v N \left( E, \tau, r, t - \frac{r}{c} \right) r^2 dr d\Omega dE d\Omega_\tau, \quad (4,8)$$

а интенсивность излучения равна

$$I_v = \frac{dF_v}{d\Omega} = \int p_v N \left( E, \tau, r, t - \frac{r}{c} \right) r^2 dr dE d\Omega_\tau. \quad (4,9)$$

Аналогичные выражения имеют место, очевидно, для всех компонент тензора

$$I_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U + iV \\ U - iV & I - Q \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (4,10)$$

где  $I, Q, U, V$  — параметры Стокса принимаемого излучения. Именно,

$$I_{\alpha\beta} (v) = \int p_{\alpha\beta} (v) N \left( \tau, r, t - \frac{r}{c} \right) r^2 dr dE d\Omega_\tau. \quad (4,11)$$

Для стационарной функции распределения, в условиях, когда  $N(E, \tau, r, t) \equiv N(E, \tau, r)$ , выражения (4,8) — (4,11) совпадают с приведенными в 1,2 и ранее в 15.

Если же рассматривается совокупность (облако) перемещающихся частиц, то наблюдаемая интенсивность  $I_v$  (или поток  $F_v$ ) существенно определяются зависимостью функции распределения от времени. В частности, для отдельного электрона  $N \left( E, \tau, r, t - \frac{r}{c} \right) \propto \delta \left( r + v_r \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)$  и в результате интегрирования по  $r$  в (4,8) получаем

$$[F_v = \frac{p_v}{1 - (v_r/c)} = \tilde{p}_v = \tilde{p}_v^{(1)} + \tilde{p}_v^{(2)}], \quad (4,12)$$

как и должно быть в согласии с (3,24) и (3,25).

Допустим теперь, что мы имеем дело со стационарным «облаком» частиц, движущимся как целое со скоростью  $V$  и проекцией скорости

в направлении наблюдателя  $V_r$ . Это значит, что в (4,9) функция  $N(E, \tau, r, t) = N_0(E, \tau, r - Vt)^*$ . Интенсивность излучения от такого облака равна

$$I_v = P_v \left(1 - \frac{V_r}{c}\right)^{-1},$$

где

$$P_v = \int p_v N_0(E, \tau, r) r^2 dr dE d\Omega_\tau$$

— мощность излучения (потери энергии на излучение в единицу времени).

## 5. РЕАБСОРБЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

Если на луче зрения находится достаточно большое количество излучающих частиц, то начинает сказываться поглощение и вынужденное (индуцированное) испускание магнитотормозного излучения самими релятивистскими электронами. Этот процесс обычно называют реабсорбцией. Реабсорбция может, в принципе, существенно изменить интенсивность и поляризацию излучения. Более того, при некоторых условиях возможна отрицательная реабсорбция, т. е. усиление излучения<sup>9, 10</sup>. Это значит, что система излучающих электронов действует подобно мазеру.

При исследовании реабсорбции в<sup>9</sup>, как и в более ранних работах (см. 1, 2 и указанную там литературу), использовались усредненные по всем направлениям выражения для интенсивности излучения отдельной частицы. Условия применимости и сама возможность такого подхода заранее неясны. Достаточно сказать, что излучение имеет конечное угловое распределение, причем поляризационные свойства излучения существенно зависят от угла  $\psi = \theta - \theta'$  между направлением скорости и направлением излучения (см. (3,24), (3,25)). Поэтому при анализе реабсорбции и особенно отрицательной реабсорбции с учетом поляризации излучения необходим более строгий анализ угловых и поляризационных свойств магнитотормозного излучения. Ниже будут приведены соответствующие результаты для магнитотормозного излучения ультрарелятивистских частиц.

Наиболее полной характеристикой излучения является тензор  $I_{\alpha\beta}(v)$  (см. (4,10)). В пределах применимости геометрической оптики, в стационарных условиях тензор  $I_{\alpha\beta}$  можно найти из уравнения переноса излучения, имеющего вид

$$\frac{dI_{\alpha\beta}}{dr} = \mathcal{E}_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta\sigma\tau} I_{\sigma\tau}. \quad (5,1)$$

Здесь

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} = \int r^2 p_{\alpha\beta} N(E, \tau, r) dE d\Omega_\tau \quad (5,2)$$

— излучательная способность единицы объема, т. е. мощность спонтанного излучения единицы объема в единичном телесном угле и единичном интервале частот,  $R_{\alpha\beta\sigma\tau}$  — тензор реабсорбции, учитывающий поглощение и вынужденное излучение релятивистскими электронами, а также поглощение и изменение поляризации в среде, если она имеется. В случае, если излучающие электроны находятся в нерелятивистской плазме, мы будем

\*) В этом пункте, ради простоты, мы пользуемся усредненной по периоду движения скоростью, т. е. скоростью  $v_{||}$ . В этой связи под  $N(E, r, \tau, t)$  нужно понимать среднее за период выражение, в силу чего зависимость  $N$  от  $\tau$  сводится к зависимости только от угла  $\theta$ .

предполагать, что показатель преломления  $n = 1 - \omega_0^2/2\omega^2$  и выполнено условие  $\eta = \sqrt{\xi^2 + (\omega_0/\omega)^2} \ll 1$  (см. (3,26)).

Вычисление тензора  $R_{\alpha\beta\sigma\tau}$  было предпринято в <sup>7</sup> для среды с показателем преломления  $n = 1$ , но с учетом фарадеевского вращения плоскости поляризации. В этой работе, однако, была неверно определена отнесенная к единице объема вероятность спонтанного излучения (и, соответственно, излучательная способность  $E_{\alpha\beta}$ ; см. (5,2)). Именно, при ее вычислении вместо  $p_{\alpha\beta}$  использовалась величина  $p_{\alpha\beta}$  (см. § 4).

Для магнитормзного излучения ультраквантитивистских электронов тензор  $R_{\alpha\beta\sigma\tau}$  вычислен в <sup>16</sup>. В случае изотропной функции распределения \*)  $N(E, \tau, r) = N(E, r)$  компоненты тензора  $R_{\alpha\beta\sigma\tau}$ , отнесенные к осям  $l_1, l_2$  (см. (3,4)), равны \*\*)

$$\left. \begin{aligned} R_{1111} &= -\frac{c^2}{v^2} \int dE E^2 \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{N(E, r)}{E^2} \right) \int r^2 p_{11}(v) d\Omega, \\ R_{2222} &= -\frac{c^2}{v^2} \int dE E^2 \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{N(E, r)}{E^2} \right) \int r^2 p_{22}(v) d\Omega, \\ R_{1112} = R_{2111} = R_{2212} = R_{2122} &= -R_{1121} = -R_{1211} = -R_{2221} = R_{1222} = \\ &= -\frac{c^2}{2v^2} \int dE E^2 \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{N(E, r)}{E^2} \right) \int r^2 p_{12}(v) d\Omega, \\ R_{1212} = R_{2121} &= \frac{R_{1111} + R_{2222}}{2}, \\ R_{1122} = R_{1221} = R_{2112} = R_{2211} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5,3)$$

Входящие в выражения (5,3) интегралы по  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta \simeq \simeq 2\pi \sin \theta d\psi$  равны ( $\psi = \theta - \theta'$ ; существенны лишь малые  $\psi$ , в силу чего в конечных выражениях можно положить  $\theta' = \theta$ )

$$\left. \begin{aligned} \int r^2 p_{11(22)}(v) d\Omega &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{e^2 \omega_H \sin \theta}{\eta} \frac{v}{v_c} \left[ \int_{v/v_c}^{\infty} K_{5/3}(z) dz \pm K_{2/3} \left( \frac{v}{v_c} \right) \right], \\ \int r^2 p_{12} d\Omega &= \frac{-2i}{\sqrt{3}} e^2 \omega_H \cos \theta \left[ \int_{v/v_c}^{\infty} K_{1/3}(z) dz + \frac{v}{v_c} K_{1/3} \left( \frac{v}{v_c} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (5,4)$$

где

$$v_c = \frac{3 \sin \theta}{4\pi} \frac{\omega_H}{\eta^3} \quad (5,5)$$

\*) Фактически требуется лишь, чтобы в направлениях, близких к направлению наблюдения  $k$ , функция распределения  $N(E, \tau, r)$  мало изменялась с изменением  $\tau$ . Конкретно, выражения (5,3) для  $R_{1111}$  и  $R_{2222}$  остаются приближенно справедливыми и для неизотропной функции распределения, если выполнено условие  $\partial N/\partial \theta \ll \ll \eta^{-2} N$ . По сравнению с  $R_{1111}$  и  $R_{2222}$  коэффициенты  $R_{1112} = R_{2111} = \dots$  и т. д. имеют порядок величины  $\eta$  (см. ниже (5,4) и (5,5)), но существенно зависят от степени анизотропии функции распределения. Поэтому для неизотропной функции распределения выражениями (5,3) при вычислении этих коэффициентов можно пользоваться только при условии  $\partial N/\partial \theta \ll N$ . При этих условиях в формулах (5,3) под  $N(E, r)$  следует понимать функцию  $N(E, \tau, r)$  при  $\tau = k$ .

\*\*) В <sup>16</sup> тензор  $R_{\alpha\beta\sigma\tau}$  вычислялся методом кинетического уравнения. Это можно сделать также методом коэффициентов Эйнштейна (см., в частности, <sup>7</sup>). При этом существенно, что электрон, движущийся в магнитном поле с заданными  $E$  и  $\theta$ , излучает в данном направлении и на заданной частоте волну с вполне определенной (в общем случае — эллиптической) поляризацией. Поглощать или усиливать рассматриваемый электрон будет только волны с той же поляризацией, которую он может излучать (этот вывод особенно ясен из квантовой теории, поскольку вероятности спонтанного излучения, поглощения и индуцированного излучения пропорциональны квадрату модуля одного и того же матричного элемента).

и предполагается, что  $\theta \gg \eta$ ,  $\theta \gg \pi - \eta$  (при  $n = 1$ , очевидно,  $\eta = \xi$ , и выражение (5,5) совпадает с (3,22)).

При интегрировании по энергии  $E$  в выражениях (5,2), (5,3) существенно, что для больших значений  $v/v_c$  выражения (5,4) экспоненциально малы. С другой стороны,

$$\frac{v}{v_c(E)} = \frac{\omega_0^2}{3\pi \sin \theta} \frac{mc}{eHv} \left( \frac{E_0}{E} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{E}{E_0} \right)^2 \right]^{3/2}, \quad (5,6)$$

где обозначено

$$E_0 = mc^2 \frac{\omega}{\omega_0} = mc^2 \frac{2\pi v}{\omega_0}. \quad (5,7)$$

Поэтому в интегралах (5,2), (5,3) существенна лишь область энергий  $E_1 < E < E_2$ , для которой

$$\frac{v}{v_c(E_1)} \gg 1, \quad \frac{v}{v_c(E_2)} \gg 1, \quad E_1 \ll E_0 \ll E_2. \quad (5,8)$$

Поведение энергетического спектра электронов вне интервала (5,8) мало сказывается на величине интегралов (5,2) и (5,3). Таким образом, если электронный спектр задан в интервале энергий  $E_1, E_2$  и выполнены условия (5,8), то интегрирование по  $dE$  можно распространить на весь интервал энергий.

Отметим, что первое из условий (5,8) фактически не зависит от присутствия плазмы. В самом деле,

$$\frac{v}{v_c(E_1)} \simeq \frac{4\pi}{3 \sin \theta} \frac{mcv}{eH} \left( \frac{mc^2}{E_1} \right)^2 \text{ при } E_1 \ll E_0. \quad (5,9)$$

Напротив, второе условие (5,8) существенно зависит от концентрации плазмы:

$$\frac{v}{v_c(E_2)} \simeq \frac{\omega_0^3}{6\pi^2 \sin \theta} \frac{mc}{eHv^2} \frac{E_2}{mc^2} \text{ при } E_2 \gg E_0. \quad (5,10)$$

Условия, при которых можно распространить интегрирование на весь интервал энергий при полном отсутствии плазмы, указаны в <sup>1, 2</sup>.

Будем считать, что в интервале энергий  $E_1 < E < E_2$  дифференциальный энергетический спектр электронов можно аппроксимировать функцией

$$N(E, \mathbf{r}) = \frac{N_e(\mathbf{r})}{mc^2} \left( \frac{mc^2}{E} \right)^\gamma = \frac{1}{4\pi} K_e E^{-\gamma}. \quad (5,11)$$

В изотропном случае, очевидно,  $K_e E^{-\gamma} dE$  есть концентрация частиц с энергией в интервале  $E, E + dE$ . Подставляя (5,11) в (5,2), (5,3), получаем, например,

$$R_{1111}(\gamma) = \frac{\gamma+2}{mv^2} \mathcal{E}_{11}(\gamma+1); \quad (5,12)$$

аналогично

$$R_{2222}(\gamma) = \frac{\gamma+2}{mv^2} \mathcal{E}_{22}(\gamma+1), \quad (5,13)$$

$$R_{1112}(\gamma) = \frac{\gamma+2}{2mv^2} \mathcal{E}_{12}(\gamma+1).$$

Здесь  $\mathcal{E}_{\alpha\beta}(\gamma+1)$  — излучательная способность (5,2), вычисленная для степенного спектра (5,11) с показателем  $\gamma+1$  вместо  $\gamma$ .

Таким образом, компоненты тензора реабсорбции для системы электронов с показателем степенного спектра  $\gamma$  выражаются через компоненты

тензора излучательной способности  $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ , соответствующего показателю спектра  $\gamma + 1$ .

Уравнение переноса (5,1) можно записать в более наглядной форме, введя вместо  $I_{\alpha\beta}$  столбец параметров Стокса \*):

$$S_i = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ V \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} + I_{22} \\ I_{11} - I_{22} \\ i(I_{21} - I_{12}) \\ I_{12} + I_{21} \end{pmatrix}. \quad (5,14)$$

В таких обозначениях уравнение (5,1) имеет вид

$$\frac{dS_i}{dr} = \mathcal{E}_i - R_{ij}S_j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad (5,15)$$

где  $\mathcal{E}_i$  — параметры Стокса, соответствующие тензору излучательной способности:

$$\mathcal{E}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_I \\ \mathcal{E}_Q \\ \mathcal{E}_V \\ \mathcal{E}_U = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{22} \\ \mathcal{E}_{11} - \mathcal{E}_{22} \\ i(\mathcal{E}_{21} - \mathcal{E}_{12}) \\ \mathcal{E}_{21} + \mathcal{E}_{12} \end{pmatrix} \quad (5,16)$$

и матрица коэффициентов реабсорбции  $R_{ij}$  равна

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \mu & \lambda & \rho & 0 \\ \lambda & \mu & 0 & 0 \\ \rho & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (5,17)$$

где

$$\begin{aligned} \mu(\gamma) &= \frac{1}{2}(R_{1111} + R_{2222}) = -\frac{\gamma+2}{2m\nu^2} \mathcal{E}_I(\gamma+1), \\ \lambda(\gamma) &= \frac{1}{2}(R_{1111} - R_{2222}) = \frac{\gamma+2}{2m\nu^2} \mathcal{E}_Q(\gamma+1), \\ \rho(\gamma) &= 2iR_{1112} = -\frac{\gamma+2}{2m\nu^2} \mathcal{E}_V(\gamma+1). \end{aligned} \quad (5,18)$$

Равенство нулю величины  $\mathcal{E}_U$  и некоторых компонент матрицы  $R_{ij}$  связано с выбором системы координат. При переходе к последним выражениям в (5,18) использованы формулы (5,12), (5,13).

Рассмотрим некоторые следствия полученных соотношений. Часто представляет интерес случай, когда на луче зрения магнитное поле более или менее равномерно распределено по направлениям. Для такого хаотического поля уравнение переноса можно усреднить по ориентациям поля. Заметим, что выше тензоры  $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$  и  $R_{\alpha\beta\sigma\tau}$  были вычислены в специальной системе координат, в которой проекция магнитного поля на картинную плоскость направлена вдоль оси  $I_2$ . Для перехода к некоторой фиксированной системе координат, в которой направление магнитного поля произвольно, следует воспользоваться тензорными свойствами величин  $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$  и  $R_{\alpha\beta\sigma\tau}$ .

В результате усреднения уравнения (5,1) по направлениям поля и перехода к форме записи (5,15) нетрудно получить следующие

\*). Величины  $S_i$  не образуют вектора по отношению к повороту осей 1,2 в картинной плоскости. Закон преобразования  $S_i$  определяется их связью (4,10) с компонентами тензора  $I_{\alpha\beta}$ .

соотношения (чертка означает усреднение по направлениям поля<sup>17</sup>):

$$\bar{\mathcal{E}}_Q = \bar{\mathcal{E}}_U = \bar{\mathcal{E}}_V = 0, \quad \bar{\lambda} = \bar{\rho} = 0, \quad (5.19)$$

$$\bar{\mathcal{E}}_I = \frac{1}{2} \int_0^\pi \mathcal{E}_I(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (5.20)$$

$$\bar{\mu}(\gamma) = \frac{(\gamma+2)}{2m\nu^2} \bar{\mathcal{E}}_I(\gamma+1). \quad (5.21)$$

Условия (5.19) означают, что собственное излучение полностью деполяризовано, как и должно быть при отсутствии выделенного направления. При этом

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_1 \delta_{ii}, \quad R_{ij} = \mu \delta_{ij} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (5.22)$$

Если нас интересует собственное излучение некоторого конечного объема, то уравнения (5.15) с параметрами (5.22) следует решать с граничными условиями  $S_i = 0$  на дальней границе объема источника (интегрирование уравнения (5.15) нужно проводить вдоль луча от дальней границы к ближней границе источника). Для однородного источника решением, очевидно, служит

$$I = \frac{\bar{\mathcal{E}}_1}{\bar{\mu}} (1 - e^{-\bar{\mu}l}), \quad Q = U = V = 0, \quad (5.23)$$

где  $l$  — протяженность источника по лучу зрения.

При  $\gamma > -2$  коэффициент реабсорбции  $\bar{\mu}$  всегда положителен, что отвечает поглощению (это ясно из (5.21)). Если оптическая толщина источника велика, т. е.  $\bar{\mu}l \gg 1$ , то  $I = \bar{\mathcal{E}}_1/\bar{\mu}$  и излучение выходит лишь из узкого слоя толщиной порядка  $1/\bar{\mu}$ . Выражение  $\bar{\mathcal{E}}_1/\bar{\mu}$  определяет максимально возможную интенсивность при положительной реабсорбции ( $\bar{\mu} > 0$ ).

Необходимым условием отрицательной реабсорбции ( $\bar{\mu} < 0$ ) является условие  $\gamma < -2$ . Этого условия, однако, еще не достаточно. Например, в вакууме отрицательная реабсорбция вообще невозможна<sup>9, 18</sup>. Это не противоречит выражению (5.21), так как в вакууме выражение (5.21) для степенного спектра электронов пригодно лишь при  $\gamma > 1/3$  (см. <sup>2</sup>). Условия реализации отрицательной реабсорбции, для чего необходимо наличие плазмы, обсуждаются в <sup>9, 10</sup>. В случае отрицательной реабсорбции ( $\bar{\mu} < 0$ ) при оптической толще  $|\bar{\mu}|l \gg 1$  интенсивность излучения равна

$$I \simeq \frac{\bar{\mathcal{E}}_1}{\bar{\mu}} e^{|\bar{\mu}|l}$$

и в рамках линейной теории может быть сколь угодно велика при  $l \rightarrow \infty$ .

Подчеркнем здесь, что простую форму (5.15) с коэффициентами (5.22) уравнение переноса принимает только в случае хаотического поля и достаточно плавного распределения электронов по направлениям (см. первое примечание на стр. 75).

В других случаях уравнение переноса следует использовать в общей форме (5.1) или (5.15), даже тогда, когда исследуется только изменение  $I$  — полной интенсивности излучения. Поэтому простым понятием одного коэффициента реабсорбции можно пользоваться только в изотропном случае, соответствующем отсутствию поляризации. В этом случае, проводя необходимые вычисления коэффициента  $\bar{\mu}$  (см. (5.21)), нетрудно убедиться, что для электронов в вакууме (показатель преломления среды  $n = 1$ )

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \mu(\theta) \sin \theta d\theta = \bar{g}(\gamma) \frac{e^3}{2\pi m} \left( \frac{3e}{2\pi m^3 c^5} \right)^{\frac{\gamma}{2}} K_e H^{\frac{\gamma+2}{2}} v^{\frac{\gamma+4}{2}}; \quad (5.24)$$

значения  $\mu$  и  $\lambda$  для однородного поля:

$$\mu(\theta) = \frac{\gamma+10/3}{\gamma+2} \lambda(\theta) = g(\gamma) \frac{e^3}{2\pi m} \left( \frac{3e}{2\pi m^3 c^5} \right)^{\frac{\gamma}{2}} K_e H_{\perp}^{\frac{\gamma+2}{2}} v^{-\frac{\gamma+4}{2}}, \quad (5.25)$$

где  $H_{\perp} \equiv H \sin \theta$ ,

$$\left. \begin{aligned} g(\gamma) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \Gamma\left(\frac{3\gamma+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+22}{12}\right), \\ \bar{g}(\gamma) &= \frac{\sqrt{3\pi}}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+6}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+8}{4}\right)} \Gamma\left(\frac{3\gamma+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+22}{12}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

Приведем таблицу значений коэффициентов  $g(\gamma)$  и  $\bar{g}(\gamma)$ :

$\gamma$	1	2	3	4	5
$g(\gamma)$	0,96	0,70	0,65	0,69	0,83
$\bar{g}(\gamma)$	0,69	0,47	0,40	0,44	0,46

Выражение (5.25) совпадает с приведенным в <sup>2</sup> и получающимся при использовании метода коэффициентов Эйнштейна для усредненного излучения. При этом поле считалось однородным, а в этом случае одной величины  $\mu(\theta)$  недостаточно для характеристики переноса излучения (см. (5.17)).

Если поле в источнике однородно, то учет поляризации излучения оказывается существенным и для полной интенсивности. Это и понятно, поскольку вдоль луча изменяются, вообще говоря, все параметры Стокса и, следовательно, нужно рассматривать все компоненты уравнений (5.15)–(5.17). В интересующих нас условиях можно, однако, воспользоваться тем обстоятельством <sup>15</sup>, что для не слишком резко меняющегося углового распределения электронов  $\mathcal{E}_V/\mathcal{E}_I \sim \eta \ll 1$  и, следовательно,  $\rho/\mu \sim \eta \ll 1$ . Полагая в (5.15)–(5.17)  $\mathcal{E}_V = 0$  и  $\rho = 0$ , получаем две независимые системы уравнений

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_I \\ \mathcal{E}_Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Если рассматривается собственное излучение источника, то можно считать, что на его дальней границе все  $S_i = 0$ . Интегрируя уравнения (5.27) с этим граничным условием, получаем «на выходе» из источника

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{\mathcal{E}_I + \mathcal{E}_Q}{2(\mu + \lambda)} (1 - e^{-(\mu + \lambda)r}) + \frac{\mathcal{E}_I - \mathcal{E}_Q}{2(\mu - \lambda)} (1 - e^{-(\mu - \lambda)r}), \\ Q &= \frac{\mathcal{E}_I + \mathcal{E}_Q}{2(\mu + \lambda)} (1 - e^{-(\mu + \lambda)r}) - \frac{\mathcal{E}_I - \mathcal{E}_Q}{2(\mu - \lambda)} (1 - e^{-(\mu - \lambda)r}), \\ U &= 0, \quad V = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Уравнения (5.29) имеют простой смысл. Если вместо параметров Стокса  $I$  и  $Q$  пользоваться параметрами  $I^{(1)} = I_{11} = 1/2(I + Q)$  и  $I^{(2)} = I_{22} = 1/2(I - Q)$  и аналогичными параметрами для излучательной

способности  $\mathcal{E}^{(1)} = (\mathcal{E}_I + \mathcal{E}_Q)/2$ ,  $\mathcal{E}^{(2)} = (\mathcal{E}_I - \mathcal{E}_Q)/2$ , то (5,29) сводится к

$$I^{(1)} = \frac{\mathcal{E}^{(1)}}{\mu + \lambda} [1 - e^{-(\mu + \lambda)l}], \quad I^{(2)} = \frac{\mathcal{E}^{(2)}}{\mu - \lambda} [1 - e^{-(\mu - \lambda)l}]. \quad (5,30)$$

Отсюда следует, что интенсивности излучения с двумя главными поляризациями ведут себя независимо. При этом для интенсивности  $I^{(1)}$ , отвечающей поляризации поперек проекции поля на картинную плоскость, коэффициент реабсорбции равен  $\mu_{\perp} = \mu + \lambda$ , а для излучения с поляризацией вдоль проекции поля (интенсивность  $I^{(2)}$ ) коэффициент реабсорбции  $\mu_{\parallel} = \mu - \lambda$  (см. (5,18) и (5,25)). Для тонкого слоя, когда  $|\mu \pm \lambda|l \ll 1$ ,

$$\frac{I^{(1)}}{I^{(2)}} = \frac{I_0^{(1)}}{I_0^{(2)}} = \frac{\mathcal{E}^{(1)}}{\mathcal{E}^{(2)}}. \quad (5,31)$$

Если реабсорбция положительна, т. е.  $\mu + \lambda > \mu - \lambda > 0$  (или, что эквивалентно,  $\mu > \lambda > 0$ ), при достаточно большой оптической толще  $(\mu - \lambda)l \gg 1$  из (5,30) получаем

$$\frac{I^{(1)}}{I^{(2)}} = \frac{\mathcal{E}^{(1)}}{\mathcal{E}^{(2)}} \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} \ll \frac{\mathcal{E}^{(1)}}{\mathcal{E}^{(2)}} = \frac{I_0^{(1)}}{I_0^{(2)}}. \quad (5,32)$$

В частности, для электронов со степенным спектром в вакууме  $\frac{I^{(1)}}{I^{(2)}} = \frac{3\gamma + 5}{3\gamma + 8} < 1$  (см. (5,18), (5,25)), т. е. излучение становится поляризованным вдоль магнитного поля. При этом степень поляризации уменьшается \*):

$$\Pi \equiv \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I} = \frac{I^{(2)} - I^{(1)}}{I^{(1)} + I^{(2)}} = \frac{3}{6\gamma + 13} < \Pi_0 = \frac{\gamma + 1}{\gamma + 7/3}.$$

Такой результат связан с тем, что для магнитотормозного излучения излучательная способность  $\mathcal{E}^{(1)}$  (поляризация поперек поля) больше  $\mathcal{E}^{(2)}$ , а значит, и обратный процесс, поглощение, сильнее для волн с поляризацией (электрическим вектором), направленной поперек поля. При отрицательной реабсорбции картина иная. Так, если  $\mu + \nu < 0$  и  $\lambda \neq 0$  при достаточно больших  $l$  из выражений (5,29) следует, что

$$|Q| = |I^{(1)} - I^{(2)}| \rightarrow I = I^{(1)} + I^{(2)}, \quad \Pi \rightarrow 1, \quad (5,33)$$

т. е. излучение полностью линейно поляризовано перпендикулярно к проекции магнитного поля на картинную плоскость. Это является результатом большего усиления той поляризации, которая преобладает в спонтанном излучении. Сильная линейная поляризация ( $\geq 75\%$ ) может служить указанием на заметную роль отрицательной реабсорбции для данного источника.

Существенной при отрицательной реабсорбции может оказаться также зависимость коэффициентов (5,18) от угла между лучом зрения и магнитным полем. Если поле в источнике неоднородно (но не полностью хаотично), то излучение преимущественно будет усиливаться в тех направлениях, где  $\mu$  максимально, т. е. в направлениях поперек поля. Поэтому при большой оптической толще отдельные области неоднородного источника будут выглядеть аномально ярко. Иными словами, должны сильно возрасти пространственные флуктуации интенсивности в источнике.

Остановимся, наконец, на возможности появления заметной эллиптической или круговой поляризации. Если не рассматривать резко анизотропных распределений электронов по скоростям и возможную роль фарадеевского вращения в источнике, то эллиптическая поляризация с точностью до членов порядка  $\eta$  отсутствует<sup>15</sup>. В космических условиях

\* ) Как нам недавно стало известно, этот результат содержится в работе<sup>23</sup>.

существование в течение длительного времени резко анизотропных распределений электронных скоростей, как это имело бы место для пучка частиц, маловероятно<sup>19</sup>. Однако оно все же возможно как спорадическое явление, а может быть и квазистационарным в достаточно сильном магнитном поле (не слишком плотный пучок частиц, движущийся вдоль магнитного поля). Еще легче, видимо, могут реализовываться условия, в которых нужно учитывать фарадеевское вращение плоскости поляризации или, точнее, считать плазму магнитоактивной (выше плазма считалась изотропной, в силу чего характеризовалась одним показателем преломления  $n$ ). Распространение и излучение волн в магнитоактивной плазме отличается, как известно, большим многообразием различных возможностей (см. <sup>20</sup> и указанную там литературу). Анализ положительной и отрицательной реабсорбции магнитотормозного излучения в случае резко анизотропных функций распределения излучающих электронов по скоростям и при учете неизотропности (магнитоактивности) относительно холодной «материнской» плазмы, в которой движутся излучающие релятивистские частицы, представляет большой интерес и должен послужить предметом дальнейших исследований (см. <sup>17,21</sup>).

## 6. ОБ ИЗМЕНЕНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, СВЯЗАННОМ С МАГНИТОТОРМОЗНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ (ПОТЕРЯМИ)

При рассмотрении излучения заряженной частицы, движущейся в магнитном поле, а также при учете потерь или приобретения этой частицей энергии за счет любых других механизмов само магнитное поле обычно считается заданным. Совершенно очевидно, что такая постановка задачи имеет ограниченную область применимости. Действительно, движущаяся в магнитном поле частица создает свое собственное магнитное поле  $H_1$ , которое ослабляет внешнее поле  $H_0$  (диамагнитный эффект). Поле  $H_1$  зависит от энергии частицы  $E$  и, конкретно, уменьшается при уменьшении этой энергии:  $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ .

При учете потерь энергии поле  $H_1$  уменьшается, что может привести к изменению не только полного поля  $H = H_0 + H_1$ , но и поля  $H_0$  (речь идет об учете взаимоиндукции; см. ниже). В результате изменения магнитного поля возникает индукционное электрическое поле  $\mathcal{E}$ , которое может в свою очередь изменять энергию частицы. Недавно в этой связи был даже поднят вопрос о том, не может ли частица «черпать» энергию из поля и тем самым терять не только свою кинетическую энергию  $E_k = E - mc^2$ , но и большую энергию<sup>22</sup>. Как будет показано ниже, такое заключение неверно, но, тем не менее, энергетические соотношения при движении частицы в магнитном поле с учетом потерь (или приобретения) энергии представляют несомненный интерес, поэтому мы на них сейчас остановимся. При движении частицы в однородном магнитном поле напряженностью  $H_0$ <sup>\*</sup> частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  имеет магнитный момент

$$\mu = -\frac{mv_\perp^2 H_0}{2H_0^2 \sqrt{1-v^2/c^2}} = -\frac{|e|r_H v_\perp}{2c} \left( \frac{H}{H_0} \right) = -\frac{v_\perp^2 E}{2c^2 H_0} \left( \frac{H}{H_0} \right). \quad (6,1)$$

В самом деле, частота обращения частицы в магнитном поле

$$\omega_H = \frac{|e|H_0}{mc} \frac{mc^2}{E} = \frac{|e|H_0}{mc} \sqrt{1-v^2/c^2}$$

<sup>\*</sup>) По сути дела, речь идет о магнитной индукции  $B_0$ . Мы, однако, за исключением последней части настоящего раздела, будем иметь дело лишь со случаем вакуума и поэтому не станем, если это возможно, различать  $H$  и  $B$ .

и радиус проекции орбиты на плоскость, перпендикулярную к  $H_0$ ,

$$r_H = \frac{v_{\perp}}{\omega_H} = \frac{mv_{\perp}}{|e|H_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Наконец, магнитный момент

$$\mu = \frac{e}{2c} [\mathbf{rv}],$$

откуда и приходим к (6,1), где  $v_{\perp}$  — проекция скорости  $v$  на плоскость, перпендикулярную к полю  $H_0$ . Знак в (6,1) можно выбрать уже из общих соображений, поскольку известно, что газ заряженных частиц диамагнитен (без учета спина). Если частиц много и они движутся независимо, то их моменты просто суммируются. При этом собственное поле всех частиц мало по сравнению с внешним полем  $H_0$  (это поле создается расположенным вне рассматриваемой области источниками) при условии, что  $4\pi N\mu \ll H_0$ , где  $\mu = |\mu|$  и  $N$  — концентрация частиц (моментов). Точнее, если речь идет о частицах с разными значениями  $\mu$ , роль  $N\mu$  играет полный момент единицы объема, т. е. намагничение  $M$ . Упомянутое неравенство  $4\pi M \ll H_0$  в терминах теории магнетиков, очевидно, означает, что  $B = H_0 + 4\pi M \simeq H_0$  (отсюда ясно также появление в указанном неравенстве множителя  $4\pi$ ).

Учитывая (6,1), приходим, следовательно, к условию слабости диамагнитного эффекта в виде

$$\frac{\overline{v_{\perp}^2 EN}}{4c^2} \ll \frac{H_0^2}{8\pi}, \quad (6,2)$$

где черта означает усреднение по энергетическому спектру. При изотропном распределении ультрарелятивистских частиц (для определенности будем иметь в виду космические лучи) по направлениям их скорости

$$\frac{\overline{v_{\perp}^2}}{c^2} = \frac{2}{3}$$

условие (6,2) можно записать в виде

$$w_{\text{кл}} \ll 6w_M, \quad w_{\text{кл}} = \overline{EN}, \quad w_M = \frac{H_0^2}{8\pi}, \quad E \gg mc^2, \quad (6,3)$$

где значение массы частиц  $m$  роли не играет.

Итак, чтобы влияние самих релятивистских частиц на магнитное поле было слабым, плотность их энергии должна быть мала по сравнению с плотностью магнитной энергии. Между тем в космических условиях в ряде случаев<sup>1, 19</sup>

$$w_{\text{кл}} \sim w_M. \quad (6,4)$$

В таких условиях релятивистские частицы, очевидно, уже влияют на поле, но поле может еще, вообще говоря, оставаться достаточно сильным (в том смысле, что поле в среде порядка внешнего поля  $H_0$ ). Если же

$$w_{\text{кл}} \gg w_M = \frac{H_0^2}{8\pi}, \quad (6,5)$$

то динамический эффект мог бы привести к полной экранировке поля, неустойчивостям и т. п. Развитие этих соображений позволит, как можно думать, получить дополнительные аргументы в пользу соотношения (6,4) или, точнее, соотношения  $w_{\text{кл}} \ll w_M$ , против возможности реализовать условия (6,5). Не останавливаясь на этой интересной проблеме подробнее (см. в этой связи<sup>19</sup>), рассмотрим ниже другой случай одной частицы,

свойства и состояние которой описываются значениями

$$e, m, E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \text{ и } v_{\perp};$$

для определенности будем считать внешнее поле  $H_0$  однородным, созданным в достаточно длинном соленоиде (рис. 6). Текущий в «обмотке» соленоида ток, отнесенный к единице длины соленоида,

$$i = \int j dr = \frac{c}{4\pi} H_0,$$

где  $j$  — плотность тока в «обмотке» (при неучете экранировки  $i = jd$ , где  $d$  — толщина «обмотки»). Считаем, что траектория частицы полностью находится в соленоиде, причем расположена достаточно далеко от его стенок. Объем соленоида  $V = \pi r_0^2 L$ ,  $L \gg r_0$ .

Уравнение движения частицы имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = e \left\{ \mathcal{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right\} - \mathbf{f}, \quad (6,6)$$

где  $\mathbf{f}$  — некоторая «сила трения», приводящая к потерям энергии. Отсюда после умножения на скорость  $v$  получаем

$$\frac{dE}{dt} = e\mathcal{E}v - P, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad P = \mathbf{f}v. \quad (6,7)$$

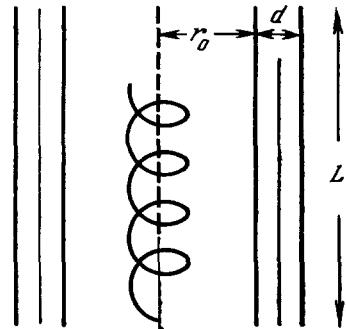


Рис. 6.

Разумеется, если имеет место ускорение, а не потери, то  $P < 0$ ; сила радиационного трения, очевидно, включается в выражение для  $\mathbf{f}$ .

Обозначим плотность токов, создающих поле, через  $j$ ; ток, связанный с рассматриваемой частицей, сюда не включаем, его плотность равна  $e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t))$ . Тогда теорема Пойнтинга, вытекающая из уравнений поля, должна быть записана в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\mathcal{E}^2 + H^2}{8\pi} \right\} + e\mathcal{E}v\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e) = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathcal{E}\mathbf{H}] - \mathbf{j}\mathcal{E} \quad (6,8)$$

или, после интегрирования по некоторому объему  $V$  и учета уравнения (6,7), в виде

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int \frac{\mathcal{E}^2 + H^2}{8\pi} dv + E \right\} = -\oint \mathbf{S} \mathbf{n} d\sigma - \int \mathbf{j}\mathcal{E} dv - P, \quad (6,9)$$

где вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathcal{E}\mathbf{H}]$$

интегрируется по поверхности, ограничивающей объем  $V$  (очевидно,  $\mathbf{n}$  есть внешняя нормаль в этой поверхности).

Выражения (6,6)–(6,9) носят, разумеется, общий характер, но применять мы их будем к случаю поля в соленоиде (при отсутствии частицы поле  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 = \text{const}$ ). Внутри соленоида полное поле  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1$ , где  $\mathbf{H}_1$  — поле, создаваемое самой рассматриваемой частицей. Для простоты будем считать ее движущейся по окружности. На достаточноном большом расстоянии  $r \gg r_H$  от траектории частицы ее усредненное за период поле эквивалентно полю магнитного момента (6,1) с  $v_{\perp} = v$ . Следовательно, вдали от частицы

$$\mathbf{H}_1 = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{\mu}}{r}, \quad \mathcal{E}_1 = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{\mu}}{r}, \quad (6,10)$$

где значение  $\boldsymbol{\mu}(t')$  нужно брать в момент  $t' = t - r/c$  (см. 13, § 72).

Будем теперь считать, что обмотка соленоида находится от частицы на расстоянии  $r$ , много меньшем «длины волн»  $\lambda = c/\tau$ , где  $\tau$  — характерное время изменения момента из-за потерь ( $d\mu/dt \equiv \dot{\mu} \sim \mu/\tau$ ). В этом случае, т. е. пренебрегая запаздыванием,  $\mu(t') = \mu(t)$  и

$$\mathbf{H}_1 = \text{rot } \mathbf{A}_1 = \frac{3r(\mathbf{r}\mu) - \mu r^2}{r^5}, \quad \mathbf{A}_1 = \left[ \nabla \frac{1}{r} \mu \right],$$

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c} \left[ \nabla \frac{1}{r} \dot{\mu} \right] = -\frac{1}{c} \left[ \dot{\mu} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right]. \quad (6,11)$$

Применим теперь соотношение (6,9), выбирая в качестве поверхности интегрирования внутреннюю поверхность цилиндрической «обмотки». Поля  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{E}_1$  являются малыми величинами по сравнению с  $\mathbf{H}_0$ , и поэтому можно положить

$$\int \frac{\mathbf{E}^2 + H^2}{8\pi} dV \simeq \frac{H_0^2}{8\pi} V + \frac{H_0}{4\pi} \int \mathbf{H}_1 dv, \quad \oint \mathbf{S} \mathbf{n} d\sigma \simeq \frac{c}{4\pi} \int [\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_0]_n d\sigma. \quad (6,12)$$

В силу (6,11), а также учитывая, что в данном случае  $\mathbf{n}\mu = \mathbf{n}\dot{\mu} = 0$ ,

$$\mathbf{S} \simeq \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}_0] = \frac{1}{4\pi r^3} \{ \dot{\mu} (\mathbf{H}_0 \mathbf{r}) - \mathbf{r} (\dot{\mu} \mathbf{H}_0) \},$$

$$\oint \mathbf{S} \mathbf{n} d\sigma = -\frac{\dot{\mu} \mathbf{H}_0}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{r} \mathbf{n}}{r^3} d\sigma = -\dot{\mu} \mathbf{H}_0,$$

поскольку

$$\oint \frac{\mathbf{r} \mathbf{n}}{r^3} d\sigma = -\oint \mathbf{n} \nabla \frac{1}{r} d\sigma = -\int \Delta \frac{1}{r} dv = 4\pi \int \delta(\mathbf{r}) dV = 4\pi.$$

Далее, также в силу (6,11),

$$\frac{H_0}{4\pi} \int \mathbf{H}_1 dv = \frac{H_0}{4\pi} \int \text{rot } \mathbf{A}_1 dv = \frac{H_0}{4\pi} \oint \left[ \mathbf{n} \left[ \nabla \frac{1}{r}, \mu \right] \right] d\sigma =$$

$$= \frac{\mu H_0}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{r} \mathbf{n}}{r^3} d\sigma = \mu \mathbf{H}_0. \quad (6,14)$$

Предположим, что поле  $\mathbf{H}_0$  поддерживается постоянным, несмотря на изменение момента частицы  $\mu$ , вызванное потерями. Сделать это можно, конечно, только за счет работы внешних источников э. д. с. («батарей»), включенных в цепь обмотки. В подобных условиях, учитывая (6,12) — (6,14) и предполагая, что  $\mathbf{H}_0 = \text{const}$ , уравнение (6,9) принимает вид <sup>\*</sup>)

$$\frac{dE}{dt} = -p(E), \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (6,15)$$

<sup>\*</sup>) Поверхность интегрирования выбрана так, что источники поля  $\mathbf{H}_0$  находятся вне ее, в силу чего  $\int \mathbf{j} \mathbf{E} dv = 0$  (см. (6,9)). Для того чтобы выяснить условия, в которых можно пренебречь энергией  $\int H_1^2/8\pi dv$ , проведем соответствующую оценку. Легко видеть, что

$$\int \frac{H_1^2}{8\pi} dv \sim \frac{\mu}{r_H} \sim \mu \bar{H}_1,$$

где  $\bar{H}_1 \sim \mu/r_H^3$  — некоторое среднее поле момента  $\mu$  на орбите частицы. Очевидно, условие

$$\frac{H_0}{4\pi} \int \mathbf{H}_1 dv = \mu \bar{H}_0 \gg \int \frac{H_1^2}{8\pi} dv$$

приобретает вид  $\bar{H}_1 \ll H_0$  или

$$H_0 \ll \frac{vE^2}{e^3 c} \ll \frac{m^2 c^3 v}{e^3} \sim 10^{16} \frac{v}{c}.$$

т. е. получается обычно используемое уравнение для энергии частицы при наличии потерь. Конечно, этот результат сразу ясен из (6,7), поскольку при  $H_0 = \text{const}$  электрическое поле  $\mathbf{E} = 0$ . Однако проведенное рассмотрение позволяет видеть, что происходит с магнитным полем и магнитной энергией. Полная энергия поля в объеме  $V$  (в соленоиде) согласно (6,1), (6,12) и (6,14) равна

$$\int \frac{H^2}{8\pi} dv \simeq \frac{H_0^2}{8\pi} V + \frac{H_0}{4\pi} \int H_1 dv = \frac{H_0^2}{8\pi} V + \mu H_0 = \frac{H_0}{8\pi} V - \frac{v^2 E}{2c^2}, \quad (6,16)$$

где положено  $v = v_\perp$  (движение по окружности). По мере того, как частица теряет энергию, момент  $\mu = |\mu|$  уменьшается, и полная магнитная энергия возрастает, так как  $\mu H_0 < 0$ . Это возрастание идет за счет потока энергии, втекающей внутрь соленоида. В конце процесса (частица потеряла энергию и ее момент  $\mu = 0$ ) поле  $H_0$ , по предположению, остается неизменным, а «батареи» затратили энергию

$$-\mu(0) H_0 = \frac{v^2(0) E(0)}{2c^2}, \quad (6,17)$$

где аргумент  $t = 0$  указывает на начальные значения  $\mu$ ,  $v$  и  $E$ . Более интересной является несколько иная постановка задачи, когда поле  $H_0$  не считается заданным<sup>22</sup>, но «обмотка» соленоида является замкнутой и ее образует поток электронов, не испытывающих сопротивления (т. е. электроны описывают окружности с радиусом  $r_0$ , заполняя некий тонкий слой толщиной  $d$ ; см. рис. 6). Поскольку в космической плазме проводимость среды очень велика, такой случай имеет какие-то черты, близкие к реальным. Степень этой близости не следует, однако, переоценивать, ибо в космических условиях следовало бы считать проводящей всю среду и внутри соленоида. Кроме того, для простоты мы будем считать, что «обмотка» не искажает поля частицы, т. е. поля момента  $\mu$ . Это значит, что «обмотка» должна быть достаточно тонкой ( $d \ll \delta$ , где  $\delta = \sqrt{mc^2/4\pi e^2 N_0}$  — глубина проникновения поля в «обмотку» \*)). В обсуждаемых условиях поместим поверхность, ограничивающую рассматриваемый в (6,9) объем, вне обмотки. Здесь  $H_0 = 0$  и в приближении (6,12) поток энергии  $S = 0$ . Выражение же (6,14) остается, при пренебрежении экранировкой, практически без изменений. В итоге уравнение (6,9) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{H_0^2}{8\pi} V + \mu H_0 + E \right\} = -P - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dv, \quad (6,18)$$

где  $\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dv$  берется по объему «обмотки». Очевидно,

$$\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{d}{dt} K,$$

где

$$K = \frac{mu^2}{2} \cdot 2\pi r_0 d L N_0$$

—кинетическая энергия упорядоченного движения электронов в «обмотке», ответственного за создание поля  $H_0$  ( $2\pi r_0 d L$  — объем «обмотки»,  $N_0$  — концентрация электронов, которые считаются нерелятивистскими). Как

\*) Для свободного электронного газа  $\epsilon = 1 - 4\pi e^2 N_0 / m\omega^2$ , и при  $\epsilon < 0$ ,  $|\epsilon| \gg 1$  поле затухает по закону

$$e^{-\frac{\omega}{c} \sqrt{|\epsilon|} z} = e^{-z/\delta}, \quad \delta^2 = \frac{mc^2}{4\pi e^2 N_0}.$$

уже указывалось, плотность тока

$$\frac{i}{d} = \frac{cH_0}{4\pi d}$$

и, с другой стороны,  $j = eN_0u$ . Отсюда

$$u = \frac{cH_0}{4\pi e N_0 d}$$

и

$$K = \frac{mc^2}{e^2 N_0 (2\pi r_0 d)} \frac{H_0^2}{8\pi} V, \quad V = \pi r_0^2 L. \quad (6.19)$$

Множитель

$$\frac{mc^2}{e^2 N_0 (2\pi r_0 d)} = \frac{2\delta^2}{r_0 d}$$

можно сделать значительно меньшим единицы, даже при соблюдении принятого выше условия

$$\delta = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 N_0}} \gg d,$$

за счет увеличения радиуса соленоида  $r_0$ . В подобных условиях, т. е. при  $2\delta^2/r_0 d \ll 1$ , которыми мы и ограничиваемся, учет члена  $\int j \mathcal{E} dv$  в (6.18) означал бы лишь внесение малой поправки к члену  $\frac{d}{dt} \left( \frac{H_0^2}{8\pi} V \right)$ . В результате приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{H_0^2}{8\pi} V + \mu H_0 + E \right\} = -P, \quad (6.20)$$

которое и применялось без комментариев в <sup>22</sup>. Помимо уравнения (6.20) для решения задачи нужно привлечь уравнение (6.7), выразив поле  $\mathcal{E}$  через  $dH_0/dt$ . Последнее легко сделать, поскольку поле  $\mathcal{E}$  есть просто индукционное поле и, следовательно,

$$2\pi r \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \pi r^2 \frac{dH_0}{dt},$$

или на траектории частицы (где  $r = r_H = mv_\perp c / |e| H_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ) будет

$$\mathcal{E} = -\frac{r_H}{2c} \frac{dH_0}{dt}.$$

Наконец,

$$\mathcal{E} = \frac{mv_\perp \frac{dH_0}{dt}}{2e \sqrt{1 - v^2/c^2} H_0}, \quad (6.21)$$

где знак  $\mathcal{E}$  определяется, например, правилом Ленца (для сохранения потока через контур при  $dH_0/dt > 0$  сила  $e\mathcal{E}$  увеличивает скорость  $v_\perp$ ). Подставляя полученное поле  $\mathcal{E}$  в (6.7), получаем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{mv^2}{2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \ln H_0 - P, \quad (6.22)$$

где положено  $v_\perp = v$  в силу того, что мы рассматриваем лишь движение частицы по окружности. Вычитая (6.22) из (6.20), имеем

$$\frac{d}{dt} \{W - F\} = -\frac{1}{2} F \frac{d}{dt} \ln W, \quad W = \frac{H_0^2 V}{8\pi}, \quad (6.23)$$

$$F = \frac{mv^2}{2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{v^2 E}{2c^2}.$$

Интеграл этого уравнения таков:

$$F = 2W_0 \left\{ \frac{W}{W_0} - \left( 1 - \frac{F_0}{2W_0} \right) \sqrt{\frac{W}{W_0}} \right\}, \quad (6.24)$$

где  $W_0$  и  $F_0$  — значения  $W$  и  $F$  при  $t = 0$ . После того как частица потеряла энергию,  $F = F(\infty) = 0$  и, согласно (6.24),  $W(\infty) — W(0) \simeq -F_0$ , ибо  $F_0/W_0 \ll 1$ ; таким образом, изменение энергии внешнего поля

$$\frac{H_0^2(0)}{8\pi} V - \frac{H_0^2(\infty)}{8\pi} V = \frac{v^2(0) E(0)}{2c^2} = -\mu(0) H_0(0). \quad (6.25)$$

Интегрируя уравнение (6.20), которое можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} (W - F + E) = -P,$$

и учитывая соотношение (6.25), легко видеть, что полные потери

$$\int_0^\infty P dt = E(0),$$

поскольку  $E(\infty) = F(\infty) = 0$ . Таким образом, и в этом случае частица теряет лишь свою энергию  $E(0)$ ; то же, конечно, следует из (6.22), (6.24) и (6.25), если вести расчет только с точностью до членов порядка  $F_0$ , но не  $F_0^2/W_0$  (именно такая точность и была принята в (6.25)).

Смысл соотношения (6.25), где равенство

$$\frac{v^2(0) E(0)}{2c^2} = -\mu(0) H_0(0)$$

следует из (6.1) при  $v_\perp = v$ , совершенно ясен, если вспомнить сказанное в связи с формулами (6.16) и (6.17). Именно, полная энергия магнитного поля в соленоиде

$$\int \frac{H^2}{8\pi} dv \simeq \frac{H_0}{8\pi} V + \mu H_0$$

(см. (6.16)). Далее, по предположению,  $\mu(\infty) H_0(\infty) = F(\infty) = 0$ , и соотношение (6.25) есть, таким образом, просто условие сохранения полной магнитной энергии. При этом, однако, само поле  $H = H_0 + H_1$  изменяется и происходит его перераспределение: с уменьшением абсолютного значения момента  $\mu$  уменьшается также поле  $H_1$ ; поэтому для сохранения полной магнитной энергии должно уменьшиться также однородное поле  $H_0$ , ибо поле  $H_1$  направлено против поля  $H_0$  (диамагнитный эффект).

Итак, ситуация в конце концов оказывается довольно-таки три-вийальной: все сводится к учету диамагнитного эффекта, имеющего место при движении заряженных частиц в магнитном поле, а также использованию закона сохранения энергии (теоремы Пойнтинга). При этом в обеих рассмотренных задачах (постоянное поле  $H_0$  и соленоид с «короткозамкнутой обмоткой») частица теряет только свою энергию и «черпать» энергию из магнитного поля не может!

Для полноты картины и, главное, имея в виду возможность обобщения на более сложный случай совокупности излучающих частиц, рассмотрим обсуждаемый в этом разделе вопрос макроскопическим способом. Для этой цели помимо напряженности поля введем магнитный момент единицы объема  $M$  и магнитную индукцию  $B = H + 4\pi M$ .

Если  $N$  — концентрация частиц, то магнитный момент единицы объема равен  $M = N\mu$ , где магнитный момент одной частицы (6,1) запишем в виде

$$\mu = -\frac{p_{\perp}^2}{2B} \frac{c^2}{E} \frac{B}{B}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad p_{\perp} = \frac{mv_{\perp}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (6,1a)$$

Отличие этого выражения от (6,1) состоит лишь в замене поля  $H_0$  на среднее макроскопическое поле, т. е. на индукцию  $B$  (для простоты, мы не будем ниже различать  $B$  и  $B_0$ ). Учтем теперь постоянство величины  $k = p_{\perp}^2/B$  (адиабатический инвариант) при медленных изменениях поля и ограничимся случаем ультрарелятивистских частиц ( $E \gg mc^2$ ), совершающих круговое движение, когда  $E^2 \simeq c^2 p_{\perp}^2 = kc^2 B$  и

$$\mu = |\mu| = \frac{E}{2B} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{kc^2}{B}}. \quad (6,26)$$

Вычислим энергию (как в (6,28)) системы из поля и частиц, предполагая, что внешнее поле, а также распределение частиц  $N$  в рассматриваемом объеме являются однородными. Тогда

$$dU = \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} d\mathbf{B} = \\ = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} - 4\pi\mu) d\mathbf{B} = d \left( \frac{B^2}{8\pi} \right) - \mathbf{M} d\mathbf{B}. \quad (6,27)$$

Для вычисления последнего члена в (6,27) воспользуемся выражением

$$\mathbf{M} = N\mu = \frac{1}{2} N \sqrt{\frac{kc^2}{B}} \frac{\mathbf{B}}{B},$$

откуда

$$\mathbf{M} d\mathbf{B} = -d(N \sqrt{kc^2 B}) = d(2MB).$$

В результате

$$U = \frac{B^2}{8\pi} - 2MB. \quad (6,28)$$

Энергия частиц в единице объема в силу (6,26) равна  $NE = 2N\mu B = -2MB$ . Таким образом, плотность энергии (6,28) складывается просто из плотности энергии «истинного» среднего поля  $B^2/8\pi$  и плотности энергии частиц  $NE$ .

С помощью соотношения  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$  выражение (6,28) можно записать также в виде

$$U = \frac{H^2}{8\pi} - MH - 6\pi M^2. \quad (6,29)$$

Последний член в (6,29) пропорционален плотности магнитной энергии токов, связанных с частицами, и при условии  $6\pi M \ll H$ , или  $NE \ll B^2/8\pi$  (см. (6,3)), может быть опущен. Таким образом, в приближении слабого намагничения, которое использовалось в <sup>22</sup> и выше, получаем

$$U = \frac{H^2}{8\pi} - MH = \frac{H^2}{8\pi} + MH + NE, \\ NE = -2MH. \quad (6,30)$$

Именно в форме  $U = \frac{H^2}{8\pi} + MH + NE$  плотность энергии системы поля и частиц выражена в <sup>22</sup> и (6,20).

Рассмотрим теперь изменение энергии системы в результате торможения частиц за счет излучения или других потерь в двух несколько различных условиях.

Пусть внешнее поле поддерживается постоянным (первая постановка задачи). Такая ситуация может осуществляться, например, если слой релятивистской плазмы удерживается внешним полем (рис. 7). В этом случае в силу непрерывности тангенциальных компонент  $\mathbf{H}$  имеем  $H_e = H_i = H$ , где индексы  $e$  и  $i$  относятся к величинам на внешней и внутренней сторонах границы раздела.

Энергия системы в начальном состоянии равна

$$U(0) = \frac{H_0^2}{8\pi} - \mathbf{M}(0) \cdot \mathbf{H}(0).$$

Пусть в результате потерь кинетическая энергия частиц в конечном состоянии равна нулю и соответственно  $\mathbf{M}(\infty) = 0$ . Тогда в конечном состоянии

$$U(\infty) = \frac{H^2(\infty)}{8\pi}$$

и изменение энергии

$$\Delta U = U(\infty) - U(0) = \mathbf{M}(0) \cdot \mathbf{H}(0) = -\frac{1}{2} NE(0). \quad (6,31)$$

В этом случае полное изменение энергии системы складывается из энергии  $NE(0)$ , потерянной частицами, и работы внешних токов  $NE(0)/2 = -\mathbf{M}(0) \cdot \mathbf{H}(0)$ , поддерживающих постоянство поля в рассматриваемом объеме.

Рассмотрим теперь второй случай, когда система заключена в сверхпроводящий соленоид, так что на границах объема электрическое поле  $\mathbf{E} = 0$ . Этот случай ближе соответствует задаче, рассмотренной в <sup>22</sup> и выше для короткозамкнутой «обмотки» соленоида. В таких условиях полный магнитный поток  $\int B_n d\sigma = \text{const}$  и, следовательно, при неизменном сечении и однородном поле  $B = \text{const}$ .

Поэтому в силу (6,28) полное изменение энергии системы после потерь частицами их энергии равно (очевидно,  $\mathbf{M}(\infty) = 0$ )

$$U(\infty) - U(0) = 2M(0) \cdot \mathbf{B} = -NE(0), \quad (6,32)$$

т. е. в точности равно энергии, потерянной частицами.

Очевидно, полученные результаты (6,31) и (6,32) находятся в полном согласии с заключениями, сделанными ранее (см., в частности, (6,17) и (6,25)).

Физический институт  
им. П. Н. Лебедева АН СССР  
Московский физико-технический  
институт

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, Происхождение космических лучей. М., Изд-во АН СССР, 1963. Дополненный английский перевод — Pergamon Press, 1964.
2. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, УФН 87, 65 (1965); Annual Rev. Astron., Astrophys. 3, 297 (1965).
3. В. В. Владимировский, ЖЭТФ 18, 392 (1948).
4. J. Schwinger, Phys. Rev. 75, 1912 (1949).
5. K. C. Westfold, Astrophys. J. 130, 241 (1959).

6. Т. Тakanaga, Publ. Astron. Soc. Japan **12**, 352 (1960).
  7. К. Kawabata, Publ. Astron. Soc. Japan **16**, 30 (1964).
  8. В. Л. Гинзбург, Л. М. Озеной, Радиофизика **9**, 221 (1966); Astrophys. J. **144**, 599 (1966).
  9. В. В. Железняков, ЖЭТФ **51**, 570 (1966); Астрон. ж. **44**, 42 (1967).
  10. Р. Месгай, Science **154**, 1320 (1966).
  11. А. А. Соколов, И. М. Тернов, в сб. «Синхротронное излучение», М., «Наука», 1966, стр. 18.
  12. И. М. Франк, УФН **58**, 111 (1956).
  13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., «Наука», 1967.
  14. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, М., Физматгиз, 1962.
  15. А. А. Корчак, С. И. Сыроватский, Астрон. ж. **38**, 885 (1961).
  16. В. Н. Сазонов, В. Н. Цытович, Изв. вузов (Радиофизика) **11** (1968).
  17. В. Н. Сазонов, Астрон. ж. **45** (1968).
  18. J. P. Wild, S. F. Smeerd, A. A. Weiss, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **1**, 291 (1963) (см. перевод: УФН **84**, 99 (1964)).
  19. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, Proc. IAU Symposium, No. 31, Holland, 1966; см. также: УФН **88**, 485 (1966).
  20. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., «Наука», 1967.
  21. В. В. Железняков, Е. В. Суворов, ЖЭТФ **55** (1968).
  22. O. Manley, Phys. Rev. **157**, 1232 (1967).
  23. A. G. Pacholczyk, T. L. Swikart, Polarization of Radio Sources. I, Preprint, November 1966.
-