530.145.1

КВАНТЫ, КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ И ПРИНЦИП ФЕРМА *)

Л. де Бройль

I. Планк и Нернст показали, что представление о кванте следует ввести в кинетическую теорию газов для вычисления столь важных в термодинамике констант энтропии и химических констант. С этой целью Планк должен был выбрать элемент объема в фазовом пространстве в виде

$$\frac{1}{h^3}\, dx\, dy\, dz\, dp\, dq\, dr = \frac{4\pi}{h^3} m_0^{3/2} \sqrt{2w}\, dw\, dx\, dy\, dz,$$

где x, y, z, p, q, r — координаты и количества движения атома, m_0 — его собственная масса, w — его кинетическая энергия, h — постоянная действия (постоянная Планка). Сегодня мы в состоянии подтвердить эту гипотезу.

Каждый атом со скоростью βc можно считать связанным с группой волн, фазовые скорости которых равны $V=c/\beta$, частоты $\frac{1}{h}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, а скорость группы U равна βc. Таким образом, состояние газа может быть устойчивым лишь в том случае, если волны, соответствующие каждому атому, образуют систему стоячих волн. Пользуясь известным методом, предложенным Джинсом, находим для числа содержащихся в единице объема стоячих волн, частоты которых лежат между ν и $\nu + d\nu$, соотношение

$$n_\nu\, d\nu = \frac{4\pi}{UV^2}\nu^2\, d\nu = \frac{4\pi}{c^3}\beta\nu^2\, d\nu.$$

Величины ν и w связаны друг с другом соотношением

$$h\nu = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = w + m_0c^2 = m_0c^2(1+\alpha),$$

где

$$\alpha = \frac{w}{m_0c^2},$$

откуда

$$n_\nu\, d\nu = \frac{4\pi}{h^3} m_0^2 c\,(1+\alpha)\sqrt{\alpha(\alpha+2)}\, dw.$$

Каждая волна может переносить 0, 1, 2 или большее число атомов, причем согласно закону канонического распределения число атомов в единице объема с полной энергией $h\nu$ равно

$$\mathrm{const}\,\frac{4\pi}{h^3} m_0^2 c\,(1+\alpha)\sqrt{\alpha(\alpha+2)}\, dw\, dx\, dy\, dz\, \frac{\sum\limits_1^\infty n \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)}{\sum\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)}.$$

Рассмотрим сначала материальный газ, атомы которого обладают относительно большой массой и, следовательно, относительно малыми скоростями. Мы можем пренебречь всеми членами ряда, кроме первого, и считать, что

$$1+\alpha = 1.$$

*) Louis de Broglie. Les quanta, la théorie cinétique des gas et le principe de Fermat, Comp. Rend. 177, 630 (1923). Перевод Н. А. Райской.

Тогда для числа атомов с кинетической энергией w получим

$$\mathrm{const} \cdot \frac{4\pi}{h^3} m_0^{3/2} \sqrt{2w}\, dw\, dx\, dy\, dz e^{-w/kT},$$

что подтверждает метод Планка и приводит к обычной форме закона Максвелла.

В случае газа, состоящего из атомов света, α всегда велико и мы вынуждены учитывать все члены ряда. Вследствие внутренней бинарной симметрии, следующей из волновой аналогии, мы должны ввести множитель 2; тогда методом, намеченным в статье, опубликованной в ноябре 1922 г. в «Journal de Physique», мы получим закон Планка для плотности энергии, т. е.

$$\rho_\nu\, d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \sum_1^\infty \exp\left(-n \frac{h\nu}{kT}\right) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}\, d\nu.$$

II. Попытаемся уточнить идеи, изложенные в наших предыдущих статьях. Если в некоторой среде тело движется по искривленной траектории, то мы говорим, что в среде существует некое силовое поле и в каждой его точке принцип сохранения энергии позволяет найти скорость тела из постоянной величины его полной энергии. Для обеспечения соответствия фаз волны и движущегося тела следует предположить, что волна фазы этого тела с данной полной энергией имеет в каждой точке значения частоты и скорости, которые оно бы имело, находясь в этой точке. Безусловно, расширенная теория электромагнетизма позволит объяснить этот сложный механизм распространения. Представляется, что мы сможем предвидеть ее основной вывод: «Лучевые траектории волн фазы совпадут с динамически возможными траекториями тела». В самом деле, расчет этих путей производится так же, как и расчет для сред с переменной дисперсией, выполненный при помощи принципа Ферма́, который в данном случае дает

$$\delta \int \frac{\nu\, ds}{V} = \delta \int \frac{m_0 \beta c}{h\sqrt{1-\beta^2}}\, ds = 0.$$

Вместе с тем, используя принцип наименьшего действия Мопертюи, получаем для траекторий тела соотношение

$$\delta \int m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \sqrt{1-\beta^2}\right) dt = \delta \int \frac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}\, ds = 0.$$

Итак, окончательно проясняется связь, объединяющая два наиболее важных принципа — геометрической оптики и динамики. Среди всех динамически возможных траекторий некоторые обладают особыми свойствами — они находятся в резонансе с волной фазы; это те стабильные боровские траектории, для которых интеграл $\int \frac{\nu ds}{V}$ равен целому числу.

Отметим, что в интеграл Ферма́ входит произведение частоты на время и что действие появляется только из-за пропорциональности энергии и частоты. Их пропорциональность остается постулатом, физический смысл которого выяснен еще не до конца. Разумеется, эта пропорциональность отражает один из аспектов связи пространства и времени; поскольку наши привычные представления приучили нас разделять эти понятия, такую связь очень трудно понять интуитивно.