

539.14

КВАЗИЧАСТИЦЫ В ТЕОРИИ ЯДРА

А. Б. Мигдал

*Ядра — чистый изумруд,
Но, быть может, люди врут.*

(А. С. Пушкин, Сказка о царе Салтане)

I. ВВЕДЕНИЕ

Несколько лет тому назад методы, которые были развиты в теории элементарных частиц, стали очень интенсивно применяться для изучения систем сильно взаимодействующих частиц, таких, как, например, электроны металла, жидкий гелий или атомное ядро.

Если в системе сильно взаимодействующих частиц имеется, как в случае ядра, 100 или 200 частиц, то ясно, что нет никакой надежды точно решить задачу. Даже задача трех взаимодействующих частиц не решается в общем виде.

Энергия взаимодействия в случае ядра сравнима с кинетической энергией частиц, и взаимодействие не может считаться слабым, т. е. теория возмущений неприменима.

Если бы система напоминала газ, где частицы взаимодействуют редко, то можно было бы развить приближенный метод рассмотрения, учитывая только парные соударения частиц. Но в ядре расстояния между частицами того же порядка, что и радиус действия сил, и одновременно взаимодействует несколько частиц.

Должны быть развиты другие приближенные методы. Идея этих методов такая же, как в дисперсионной теории элементарных частиц, где в качестве констант вводятся массы частиц и константы, характеризующие их взаимодействие. Нужно ввести константы, характеризующие движение нейтронов и протонов в ядре, а также константы, описывающие взаимодействие нуклонов между собой, когда они помещены в ядро. Это взаимодействие сильно отличается от взаимодействия двух нуклонов в пустоте.

Для бесконечной системы такая программа была выполнена в теории ферми-жидкости Ландау¹. Ниже мы увидим, какие усложнения вносят конечные размеры ядра.

После введения таких констант все ядерные явления, связанные с малыми энергиями (с энергиями меньше чем 40 Мэв), можно точно рассчитать. Иными словами, можно, найдя константы из нескольких явлений, количественно объяснить все остальные экспериментальные факты ядерной физики малых энергий. Разумеется, речь идет о получении количественных соотношений. Для качественного изучения почти всех ядерных процессов достаточно тех приближенных моделей, которые обычно используются в теории ядра^{2,3}. Впрочем, мы ниже приведем ряд явлений, которые нельзя правильно интерпретировать без строгого подхода.

Ядро представляет собой систему из двух типов ферми-частиц — нейтронов и протонов, сильно взаимодействующих между собой. Поэтому раньше, чем перейти к рассмотрению различных ядерных процессов, полезно выяснить общие физические свойства таких систем.

Как показывает строгое рассмотрение, низколежащие возбужденные состояния ферми-систем даже при сильном взаимодействии имеют очень простую природу.

Прежде всего, существуют так называемые одночастичные возбуждения, которые аналогичны возбуждениям в идеальном ферми-газе. Возбужденные состояния идеального ферми-газа соответствуют переходу частицы из состояния с энергией, меньшей чем граница Ферми, в свободное состояние выше границы Ферми, или, иначе, появлению частицы и дырки на фоне фермиевского заполнения.

Возбуждения в реальной ферми-системе также соответствуют появлению частиц и дырок, но со свойствами, отличающимися от свойств свободных частиц и дырок. В частности, такие, как их принято называть, квазичастицы имеют массу, отличающуюся от массы свободных частиц. Иными словами, одночастичные возбуждения в реальной ферми-системе совпадают с возбуждениями идеального газа, составленного из квазичастиц с фермиевским распределением по энергии.

Физически эти результаты очень естественны. Частица, двигаясь в среде, увлекает в движение прилегающие к ней частицы. При слабых возбуждениях, когда энергия частицы близка к энергии Ферми, характер распределения вовлеченных в движение частиц мало зависит от состояния рассматриваемой частицы. Поэтому во всех процессах, связанных со слабыми возбуждениями, частица и ее окружение выступают как стабильное образование, которое и называется квазичастицей. Поскольку спин сохраняется, спин всего конгломерата, образующего квазичастицу, такой же, как и спин частицы. Следовательно, когда квазичастицы выступают как целое, они должны подчиняться статистике Паули, как любая частица со спином $1/2$. Итак, во всех случаях, когда участвует малое число квазичастиц и квазидырок, они ведут себя как возбуждения в идеальном ферми-газе.

В бесконечной системе для определения спектра одночастичных возбуждений достаточно ввести одну невычисляемую константу — эффективную массу квазичастиц.

В конечной системе для характеристики одночастичных возбуждений приходится вводить, помимо эффективной массы квазичастиц, еще параметры эффективной потенциальной ямы, в которой движутся квазичастицы. Для систем с короткодействующими силами радиуса r_0 к таким параметрам относятся глубина и ширина ямы и ширина слоя ($\sim r_0$), на котором плотность переходит от своего значения внутри системы к нулю.

Помимо одночастичных возбуждений, в системе взаимодействующих частиц существуют так называемые коллективные возбуждения, которые можно интерпретировать как связанные состояния квазичастицы и квазидырки. Примером таких возбуждений могут служить звуковые волны в бесконечной системе. Для определения спектра коллективных возбуждений следует ввести взаимодействие между квазичастицами, которое, как мы увидим, сильно отличается от взаимодействия двух свободных частиц.

Для большинства физических приложений (интенсивности переходов, магнитные и квадрупольные моменты и т. д.) необходимо знать изменения, происходящие в системе под влиянием внешнего поля. Как показывает теория, задача определения реакции системы на внешнее поле сводится к задаче о поведении во внешнем поле газа взаимодействующих квази-

частиц, помещенных в потенциальную яму. При этом достаточно учитывать только парные соударения квазичастиц. Многократные соударения частиц учитываются теорией точно, но приводят только к изменению взаимодействия между квазичастицами и к изменению «заряда» для взаимодействия квазичастиц с внешним полем. «Заряд» в большинстве случаев удается найти из общих соображений (из законов сохранения заряда, энергии, импульса и т. д.).

Эти результаты имеют очень простое и наглядное объяснение. Пусть на систему действует не очень сильное поле, такое, что изменение энергии каждой частицы в этом поле мало по сравнению с ее кинетической энергией. Тогда состояние системы соответствует появлению нескольких квазичастиц и нескольких квазидырок на фоне фермиевского распределения. Число возникших квазичастиц составляет малую долю от полного числа частиц в системе. Если среднее расстояние между частицами порядка радиуса действия сил, то среднее расстояние между квазичастицами будет значительно больше, чем радиус сил взаимодействия, и следовательно, квазичастицы образуют газ, т. е. можно пренебречь случаями, когда одновременно сталкиваются три или больше квазичастиц.

Взаимодействие между квазичастицами такого же порядка, как и взаимодействие между частицами, но существенно от него отличается. Как мы увидим, в некоторых случаях притяжение может заменяться на отталкивание за счет влияния остальных нуклонов среды, которые, в отличие от квазичастиц, имеются в большом количестве и находятся рядом с рассматриваемыми двумя квазичастицами.

Что касается «заряда» квазичастицы по отношению к внешнему полю, то этот «заряд» описывает взаимодействие с полем того конгломерата частиц, который образует квазичастицу. Допустим, к ядру приложено электрическое поле, которое действует только на протоны. Так как при взаимодействии протона с остальными частицами ядра заряд сохраняется, то весь конгломерат, образующий протонную квазичастицу, имеет тот же заряд, что и протон. В этом случае заряд квазичастицы равен заряду частицы. В случае других внешних полей, например для магнитного поля, взаимодействие квазичастицы с полем отличается от соответствующей величины для частицы. Движущийся нейтрон в пустоте взаимодействует с магнитным полем только за счет своего внутреннего магнитного момента, тогда как нейтронная квазичастица при своем движении увлекает в движение также и протоны, в результате чего возникает электрический ток и взаимодействие с магнитным полем изменяется. У нейтронных квазичастиц возникает орбитальный магнетизм, т. е. магнетизм, связанный с их движением по орбите. В отсутствие взаимодействия орбитальный магнетизм есть только у протонов.

Итак, метод квазичастиц в применении к теории ядра состоит в следующем. Прежде всего строго доказывается, что для слабых возбуждений ядро можно рассматривать как газ квазичастиц в потенциальной яме. Взаимодействие между квазичастицами характеризуется несколькими универсальными константами. Это взаимодействие не мало и должно точно учитываться. Единственное приближение состоит в том, что для слабых возбуждений, когда число квазичастиц мало, учитываются только их парные соударения. Для большинства наблюдаемых ядерных явлений можно получить формулы, которые в результате решения уравнений на счетных машинах выражаются через универсальные константы теории.

Константы, определяющие взаимодействие квазичастиц, так же как и параметры потенциальной ямы, не могут быть вычислены без предположения о малости взаимодействия между частицами. Для такого

предположения в ядре нет оснований. Поэтому эти константы должны быть найдены из сравнения теории с экспериментом.

Как показывает сравнение теории с опытом, эффективная масса квазичастиц близка к массе свободного нуклона $\left| \frac{m^* - m}{m} \right| \sim 0,1 - 0,2$. Поэтому параметры потенциальной ямы, которые были найдены в модели оболочек в предположении $m^* = m$, не очень изменяются при более строгом анализе.

Как мы убедимся ниже, взаимодействие между квазичастицами имеет радиус порядка r_0 . Поэтому для всех явлений, связанных с расстояниями, большими чем r_0 , например с расстояниями порядка радиуса ядра, взаимодействие можно рассматривать как δ -образное. Константы при δ -функции мало отличаются от аналогичных констант в бесконечном ядерном веществе и поэтому одинаковы для всех ядер, кроме самых легких, с той же точностью, с какой постоянна плотность ядер по таблице Менделеева, т. е. с той же точностью, с которой выполняется формула для зависимости радиуса ядра R от атомного веса A ($R = r_0 A^{1/3}$). Таким образом, взаимодействие между квазичастицами характеризуется универсальными константами. При этом во всех формулах, содержащих матричные элементы взаимодействия, приходится суммировать по всем состояниям квазичастиц, а не только по состояниям в последней незаполненной оболочке. Мы подчеркиваем это обстоятельство потому, что в этом пункте имеется существенное отличие последовательного метода квазичастиц от часто применяемого подхода.

Во многих работах по теории ядра в качестве объекта изучения рассматриваются только частицы в последней незаполненной оболочке. Мы увидим, что такое рассмотрение вполне законно, но при этом взаимодействие между квазичастицами уже нельзя считать δ -образным и универсальным.

На самом деле, при таком рассмотрении во взаимодействии между квазичастицами, помимо δ -образного слагаемого, следует добавить еще слагаемое, обусловленное поляризацией остальных частиц ядра, когда одна квазичастица возбуждает фермиевский фон, затем это возбуждение передает второй квазичастице. Этот механизм соответствует уже нелокальному взаимодействию между квазичастицами. Теория позволяет строго выразить это нелокальное взаимодействие через константы универсального δ -образного взаимодействия. После введения такого эффективного взаимодействия (состоящего из двух слагаемых) в суммах по состояниям остается только суммирование по состояниям незаполненной оболочки. Вместо этого в работах по теории ядра в качестве эффективного взаимодействия между квазичастицами незаполненной оболочки либо вводится δ -образное взаимодействие, либо (для изучения уровней с моментом 2) вводится так называемое квадрупольно-квадрупольное взаимодействие (см. ²) с константой, определяемой из опыта. При таком введении взаимодействия константы, его определяющие, не универсальны, а меняются от уровня к уровню. Кроме того, такое взаимодействие приводит к неточным результатам для интенсивностей переходов.

Матричный элемент одночастичного перехода нуклона может быть формально записан в виде произведения эффективного заряда нуклона на матричный элемент, вычисленный без учета взаимодействия. Эффективный заряд выражается через универсальные константы теории и называется зависящим от начального и конечного состояний нуклона. Значения амплитуд одночастичных электромагнитных переходов получаются с точностью 20—30%.

Для квадрупольных переходов эффективный заряд можно также вычислить в предположении квадрупольно-квадрупольного взаимодействия. При этом эффективный заряд оказывается не зависящим от состояний нуклона и дает амплитуды одночастичных переходов с ошибкой порядка 100—200%. Особенно существенные изменения по сравнению с таким упрощенным подходом вносит теория в вычисление интенсивностей и частот коллективных переходов. Обнаруживается, что помимо уровней 2^+ , которые получаются в предположении квадрупольно-квадрупольного взаимодействия, возможны еще другие уровни 2^+ и 0^+ , исчезающие при этом выборе взаимодействия.

Требуют правильного учета взаимодействия также задачи, связанные с изменением распределения нуклонов при добавлении частиц к ядру. Одной из таких задач является изменение среднего квадрата электрического радиуса ядра при добавлении нейтронов, которое определяет изотопическое смещение спектральных линий в средних и тяжелых элементах.

Наконец, во многих ядерных расчетах взаимодействие между квазичастицами предполагается слабым, что совершенно недопустимо. Так например, магнитные моменты четно-нечетных ядер иногда отличаются в 2,5 раза от магнитного момента добавленного нуклона. Это отличие целиком обусловлено взаимодействием нечетного нуклона с остальными нуклонами среды и, следовательно, взаимодействие не может считаться слабым. Все эти вопросы подробно рассмотрены в ⁴. Здесь мы приводим только наглядные выводы, поясняющие физический смысл соотношений.

Самый удобный способ получения формул — это так называемый метод графиков Фейнмана. Поэтому мы начнем с наглядного пояснения этого метода.

II. ГРАФИКИ ФЕЙНМАНА

1. Графическое изображение процессов

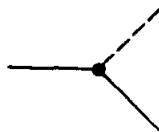
Для получения различных соотношений в теории элементарных частиц широко применяется метод графиков Фейнмана. Этот же метод используется и в том подходе к теории ядра, о котором пойдет речь дальше.

Начинается с того, что в виде рисунков изображают различные физические процессы, которые могут происходить с частицами:

движение кванта света изображается пунктиром

движение частицы изображают линией

График

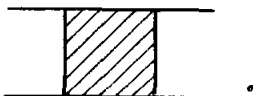


означает, что заряженная частица, допустим электрон, испустила квант света. Сплошная линия нарисована с изломом, чтобы показать, что электрон после испускания кванта приобретает другой импульс.

Пусть есть две невзаимодействующие частицы



Если они взаимодействуют, рисуют такую картинку:



Если их взаимодействие осуществляется с помощью квантов света (это значит, что взаимодействие кулоновское), тогда линии соединяют пунктирной линией:



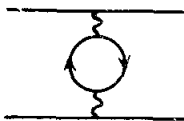
Если это два нуклона и взаимодействие осуществляется передачей π -мезона, тогда рисуют волнообразную линию между линиями частиц:



Этот график показывает, что два нуклона один раз взаимодействовали между собой. Если они взаимодействовали два раза, то рисуют так:



График



изображает более сложный процесс: нуклон испустил π -мезон, который затем распался на нуклон и антинуклон. Эти две частицы превращаются опять в π -мезон, который поглощается вторым нуклоном.

Аналогично можно изобразить и более сложные процессы, происходящие с частицами.

Для того чтобы эти рисунки имели не только иллюстративный, но и количественный смысл, будем понимать под каждым графиком амплитуду перехода из одного состояния в начальный момент в другое состояние в конечный момент времени. Квадрат амплитуды перехода дает вероятность нахождения конечного состояния в конечный момент времени. Так

например, приведенный выше график испускания кванта означает амплитуду перехода заряженной частицы с импульсом p в состояние с квантом импульса q и частицей с импульсом $p - q$.

Согласно принципу суперпозиции полная амплитуда перехода, или, как ее обычно называют, функция Грина, представляет собой сумму всех возможных физически различных амплитуд перехода. Для иллюстрации графического метода получим соотношение, связывающее амплитуду рассеяния двух частиц с потенциалом взаимодействия.

Графически амплитуда рассеяния изобразится, согласно принципу суперпозиции, суммой графиков:

$$\Gamma = \text{[штрихованный квадрат]} = \text{[зигзаг]} + \text{[два зигзага]} + \text{[три зигзага]} + \dots$$

Первый из графиков изображает взаимодействие между частицами. Второй из графиков соответствует двукратному взаимодействию частиц. Между актами взаимодействия стоит амплитуда перехода двух невзаимодействующих частиц.

Будем сопоставлять первому графику потенциал взаимодействия между частицами



а линии — функцию Грина, т. е. амплитуду перехода свободной частицы G . Тогда второй график условно запишется

$$\text{[два зигзага]} = U G G U,$$

так как амплитуда перехода двух свободных частиц равна произведению функций Грина каждой из частиц. Для амплитуды рассеяния получится ряд

$$\Gamma = U + U G G U + U G G U G G U + \dots$$

Выражение, стоящее во втором и следующих членах справа от $U G G$, снова образует сумму, дающую Γ . Для Γ получается уравнение

$$\Gamma = U + U G \Gamma.$$

Функция G , входящая в это уравнение, легко находится. Если Ψ -функция частицы в начальный момент есть суперпозиция различных собственных функций, то задача нахождения G сводится к задаче о распылении волнового пакета. Если же частица в начальный момент находится в состоянии с определенной энергией, то амплитуда перехода определяется совсем просто. Очевидно, что выражение для Γ представляет собой символическую запись известного из квантовой механики уравнения для амплитуды рассеяния

$$\Gamma(p_1, p_2) = U(p_1 - p_2) - \int \frac{U(p_1 - p')}{\epsilon_{p_1} - \epsilon_{p'} + i\gamma} \frac{\Gamma(p', p_2)}{(2\pi)^3} d^3p'.$$

Сравнивая оба уравнения, для Γ легко установить точное соответствие графических и аналитических выражений.

Аналогичным образом можно связать функцию Грина частицы во внешнем поле \tilde{G} с функцией Грина свободной частицы G . Функция Грина

в поле \tilde{G} изобразится суммой частных амплитуд перехода

$$\tilde{G} = \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \bullet \bullet \text{---} + \dots,$$

где точка с пунктиром изображает акт действия внешнего поля:

$$V = \text{---} \bullet \text{---}.$$

Собирая все графики, стоящие в \tilde{G} справа от V , получаем опять \tilde{G} . Таким образом,

$$\tilde{G} = G + GVG + GVGVG + \dots = G + GV\tilde{G}.$$

Сравнивая поправку к G в первом порядке теории возмущений по V

$$G^{(1)} = GVG$$

с известным квантовомеханическим выражением, легко установить, в каком смысле следует понимать умножение в символической формуле для \tilde{G} .

Таким образом, идея графического метода состоит в том, чтобы на простых примерах установить соответствие между элементами графиков и аналитическими выражениями, после чего можно научиться расшифровывать любые графики, состоящие из этих элементов.

2. Функция Грина квазичастицы

Как упоминалось во введении, система сильно взаимодействующих частиц во многих случаях ведет себя как газ квазичастиц. Поэтому функция Грина, описывающая поведение квазичастиц, мало отличается от функции Грина для случая, когда система состоит из одной частицы. Рассмотрим сначала этот случай.

Пусть система собственных функций определяется формулой

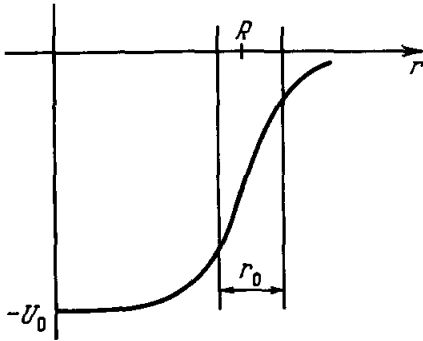
$$H\varphi_\lambda(r) = \epsilon_\lambda^0 \varphi_\lambda(r), \quad H = \frac{p^2}{2m} + U(r),$$

где $U(r)$ — потенциальная яма.

В случае ядра собственные функции и энергия квазичастиц, как мы увидим ниже, определяются таким же уравнением, но с заменой массы свободных частиц на эффективную массу m^* и с потенциалом $U(r)$, имеющим вид, изображенный на рисунке, где R — радиус ядра, а r_0 — ширина «диффузного края», т. е. ширина области, на которой U переходит от постоянного значения внутри к значению вне ядра. В U помимо потенциала, изображенного на рисунке, входят также поправки, связанные с кулоновским и спин-орбитальным взаимодействием между частицами.

Определим функцию Грина (амплитуду перехода) соотношением

$$\Psi(r, t + \tau) = \int G_0(r, r', \tau) \Psi(r', t) dr'.$$



Амплитуда перехода G_0 позволяет выразить волновую функцию $\Psi(\mathbf{r}, t + \tau)$ в момент $t + \tau$ через $\Psi(\mathbf{r}, t)$. В энергетическом представлении получаем

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} C_{\lambda}(t) \varphi_{\lambda}(\mathbf{r}), \quad C_{\lambda}(t + \tau) = \sum G_{\lambda\lambda'}^0(\tau) C_{\lambda'}(t).$$

Так как φ_{λ} — собственная функция, то переходы в другие состояния невозможны и $C_{\lambda}(t + \tau) = e^{-i\varepsilon_{\lambda}^0 \tau} C_{\lambda}(t)$, т. е.

$$G_{\lambda\lambda'}^0(\tau) = G_{\lambda\lambda}^0(\tau) \delta_{\lambda\lambda'} = e^{-i\varepsilon_{\lambda}^0 \tau} \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Функция $G_{\lambda\lambda'}^0(\tau)$ определена только для $\tau > 0$. Положим $G_{\lambda\lambda'}^0(\tau) = 0$ при $\tau < 0$.

Найдем теперь функцию Грина квазичастицы.

Амплитуду перехода из состояния с одной квазичастицей λ в состояние с одной квазичастицей λ' , т. е. функцию Грина $G_{\lambda\lambda'}(\tau)$ квазичастицы, легко найти по аналогии с функцией Грина одной частицы. Для одной частицы мы имели в λ -представлении

$$G_{\lambda\lambda'}^0(\tau) = \delta_{\lambda\lambda'} \begin{cases} e^{-i\varepsilon_{\lambda}^0 \tau}, & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Для нахождения функции Грина квазичастицы нужно только заменить энергию свободной частицы ε_{λ}^0 на энергию квазичастицы ε_{λ} и учесть принцип Паули — должны быть исключены переходы в занятые состояния. Поэтому в функцию Грина квазичастицы должен быть включен множитель $(1 - n_{\lambda})$, где $n_{\lambda} = \{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \}$ — число квазичастиц в состоянии λ . Таким образом, получаем

$$G_{\lambda\lambda'}^+(\tau) = (1 - n_{\lambda}) \delta_{\lambda\lambda'} \begin{cases} e^{-i\varepsilon_{\lambda} \tau}, & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad (2,1)$$

Найдем теперь выражение для амплитуды перехода квазидырки. Так как число дырочных мест на уровне λ пропорционально n_{λ} , то аналогично случаю квазичастицы получаем

$$G_{\lambda\lambda'}^-(\tau) = n_{\lambda} \delta_{\lambda\lambda'} \begin{cases} e^{-i\varepsilon_{\lambda}^- \tau}, & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad (2,2)$$

Здесь ε_{λ}^- — энергия дырки, или, точнее, разность энергий систем после и до появления дырки.

Как это вытекает из определения функции Грина, величина $G_{\lambda}^+(+0)$ должна обращаться в единицу, если $n_{\lambda} = 0$, а величина $G_{\lambda}^-(+0)$ должна равняться единице при $n_{\lambda} = 1$. Выражения (2,1) и (2,2) удовлетворяют этим условиям. Ниже мы убедимся на примерах в правильности выражений (2,1) и (2,2) и для того случая, когда $n_{\lambda} \neq 0,1$ (например, в случае парной корреляции).

Будем сопоставлять величинам $G_{\lambda}^+(t_1 - t_2)$ и $G_{\lambda}^-(t_1 - t_2)$ следующие графики:

$$\begin{aligned} G_{\lambda}^+(t_1 - t_2) &= \frac{\lambda t_2}{t_1 > t_2} \rightarrow \frac{\lambda t_1}{t_1 > t_2}, \\ -G_{\lambda}^-(t_1 - t_2) &= \frac{\lambda t_2}{t_1 > t_2} \leftarrow \frac{\lambda t_1}{t_1 > t_2}. \end{aligned} \quad (2,3)$$

Знак минус во второй формуле взят для упрощения графической записи процессов рождения частицы и дырки во внешнем поле.

Во многих случаях оказывается удобным ввести функцию Грина квазичастицы G_λ , определенную следующим образом:

$$G_\lambda(\tau) = \begin{cases} G_\lambda^+(\tau), & \tau > 0 \\ -G_\lambda^-(\tau), & \tau < 0 \end{cases} = \frac{\lambda t_2}{\lambda t_1}, \quad (2,4)$$

где

$$\tau = t_1 - t_2.$$

Изменение функции Грина во внешнем поле изображается проще через функцию G_λ , чем через функции G_λ^+ и G_λ^- .

Получим выражение для функций $G_\lambda^+(\epsilon)$, $G_\lambda^-(\epsilon)$, $G_\lambda(\epsilon)$, являющихся фурье-представлениями по τ формул (2,1), (2,2) и (2,4). Эти выражения будут часто использоваться в дальнейшем. Представление Фурье $G(\epsilon)$ связано с функцией $G(\tau)$ соотношениями

$$G_\lambda(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\lambda(\epsilon) e^{-i\epsilon\tau} \frac{d\epsilon}{2\pi}, \quad G_\lambda(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\lambda(\tau) e^{i\epsilon\tau} d\tau.$$

Используя выражения (2,1), (2,2) и (2,4), получим

$$\left. \begin{aligned} G_\lambda^+(\epsilon) &= (1 - n_\lambda) \int_0^{\infty} e^{-i\epsilon_\lambda\tau} e^{i\epsilon\tau} d\tau = i \frac{1 - n_\lambda}{\epsilon - \epsilon_\lambda + i\gamma}, \\ G_\lambda^-(\epsilon) &= -n_\lambda \int_0^{\infty} e^{-i\epsilon_\lambda\tau} e^{i\epsilon\tau} d\tau = -i \frac{n_\lambda}{\epsilon - \epsilon_\lambda + i\gamma}, \\ G_\lambda(\epsilon) &= (1 - n_\lambda) \int_0^{\infty} e^{-i\epsilon_\lambda\tau + i\epsilon\tau} d\tau + n_\lambda \int_{-\infty}^0 e^{i\epsilon_\lambda\tau + i\epsilon\tau} d\tau = \\ &= i \left[\frac{1 - n_\lambda}{\epsilon - \epsilon_\lambda + i\gamma} + \frac{n_\lambda}{\epsilon + \epsilon_\lambda - i\gamma} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2,5)$$

где

$$\gamma \rightarrow +0.$$

Из (2,5) следует важное свойство функций $G_\lambda^+(\epsilon)$ и $G_\lambda^-(\epsilon)$ — они имеют полюс при значении ϵ , равном энергии квазичастицы и квазидырки соответственно.

3. Связь функции Грина с матрицей плотности. Вычисление средних

Отметим еще одно важное свойство функции Грина, которое мы в дальнейшем используем.

Введем величину

$$\rho_{\lambda\lambda'} = G_{\lambda\lambda'}^-(0).$$

Эта величина называется матрицей плотности и позволяет вычислять средние значения операторов, действующих на квазичастицы. В отсутствие внешних полей $G_{\lambda\lambda'}(\tau) = G_\lambda(\tau) \delta_{\lambda\lambda'}$ и величина $\rho_{\lambda\lambda'} = n_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}$. Среднее значение какого-либо оператора Q равно

$$\langle Q \rangle = \sum_\lambda n_\lambda Q_{\lambda\lambda} = \sum_{\lambda\lambda'} \rho_{\lambda\lambda'} Q_{\lambda'\lambda}.$$

Такая же связь сохраняется и в присутствии внешних полей, когда $G_{\lambda\lambda'} \neq G_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}$, т. е.

$$\langle Q \rangle = \sum_{\lambda\lambda'} G_{\lambda\lambda'}^-(0) Q_{\lambda'\lambda}.$$


III. ПАРНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

1. Влияние близких уровней на функцию Грина квазичастицы

Если в системе есть возбужденное состояние с теми же интегралами движения и с близкой энергией, что и у состояния с одной квазичастицей, то оба эти состояния смешиваются, и выражение для функции Грина квазичастицы усложняется.

Для получения функции Грина квазичастицы с учетом конкурирующего состояния напомним графическое уравнение, понимая под тонкими линиями функции Грина квазичастиц без учета переходов в конкурирующее состояние. Точную функцию Грина будем обозначать жирной линией. Тогда для функции Грина G_s получим уравнение

$$\begin{aligned}
 G_s = & \text{---} = \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \\
 & + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots = \\
 & = \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} .
 \end{aligned}$$

Здесь блок  описывает неприводимую амплитуду

перехода g из состояния с одной квазичастицей в конкурирующее состояние. Под «неприводимой» понимается амплитуда, не содержащая частей, соединенных прямой или волнистой линией (последняя изображает функцию Грина конкурирующего состояния). Помимо уравнения для G_s , должно быть написано и уравнение для неприводимой амплитуды g . В результате решения этой системы уравнений получатся окончательные энергии и Ψ -функции рассматриваемых состояний.

Для написания уравнений для g необходимо знать структуру конкурирующих состояний.

Так, например, в ядре с нечетной квазичастицей в незаполненной оболочке состояние с двумя частицами и одной дыркой часто оказывается близким по энергии к состоянию с одной квазичастицей. В некоторых случаях конкурирующим состоянием оказывается состояние с одной квазичастицей и коллективным возбуждением.

Мы проследим детально это явление на примере так называемой парной корреляции, к рассмотрению которой мы сейчас перейдем.

2. Парная корреляция в ядрах

В бесконечной ферми-системе две частицы с противоположными спинами и импульсами в некоторых случаях могут находиться в связанном состоянии с энергией, близкой к границе Ферми, или, как принято говорить, частицы образуют «куперовскую пару». В этом случае происходит перестройка в распределении частиц у границы Ферми и появляется энергетическая щель в спектре одночастичных возбуждений. В результате система делается сверхтекучей или, в случае заряженных частиц, сверхпро-

водящей. На языке функций Грина это означает, что квазичастица может перейти в состояние квазидырка плюс куперовская пара или квазидырка — в состояние квазичастица минус куперовская пара. Иными словами, состояние с одной квазичастицей на фоне N частиц смешивается с состоянием с одной квазидыркой на фоне $N + 2$ частицы, а состояние с одной квазидыркой смешивается с состоянием с одной квазичастицей на фоне $N - 2$ частицы.

В ядрах происходит явление, напоминающее куперовскую парную корреляцию — две квазичастицы (два нейтрона или два протона) образуют состояние с суммарным моментом, равным нулю, так что Ψ -функция этих частиц представляет суперпозицию одночастичных состояний вида

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{vm} G_v (-1)^m \varphi_{vm}(\mathbf{r}_1) \varphi_{v-m}(\mathbf{r}_2),$$

где m — проекция полного момента, v — совокупность остальных квантовых чисел.

Будем предполагать $j - j$ -связь, которая, как известно, осуществляется во всех ядрах, кроме самых легких, т. е. предполагаем, что состояние квазичастицы характеризуется квантовыми числами $\lambda = n, l, j, m$.

Существование парной корреляции приводит к тому, что возникает амплитуда перехода из состояния с одной квазичастицей в состояние с одной квазидыркой и коррелированной парой. Или иначе, возникает блок Δ_λ^+ (аналогичный блоку g предыдущего раздела)

$$i\Delta_\lambda^+(\varepsilon) = \left| \begin{array}{c} \lambda, \varepsilon \\ \xrightarrow{N} \bigcirc \xleftarrow{N+2} \lambda, \varepsilon \end{array} \right|,$$

переводящий частицу на фоне N -частиц в дырку на фоне $N + 2$ частиц, и аналогичный блок Δ_λ^- , переводящий дырку в частицу. Ниже мы напомним уравнение для $\Delta_\lambda(\varepsilon)$, из которого будет видно, что $\Delta_\lambda(\varepsilon)$ слабо зависит от ε и может быть заменена значением при $\varepsilon = \varepsilon_F$:

$$\Delta_\lambda(\varepsilon) \approx \Delta_\lambda(\varepsilon_F) = \Delta_\lambda.$$

Для упрощения формул будем пренебрегать отличием между разностями системы энергий $E_0(N + 2) - E_0(N)$ для добавления и $E_0(N) - E_0(N - 2)$ для вычисления двух частиц. Кроме того, положим $\Delta^{+*}(N) = \Delta^-(N + 2) \approx \Delta^-(N)$. Тогда можно систему уравнений для G_s^+ и G_s^- записать в виде одного уравнения для G_s

$$G_{s\lambda}(\varepsilon) \equiv \frac{\lambda\varepsilon}{N} \frac{\lambda\varepsilon}{N} = \frac{\lambda\varepsilon}{N} \frac{\lambda\varepsilon}{N} + \frac{\lambda\varepsilon}{N} \bigcirc \xleftarrow{N+2} \bigcirc \xrightarrow{N} \lambda\varepsilon,$$

или в аналитической форме

$$-i \left[(\varepsilon - \varepsilon_\lambda) - \frac{|\Delta_\lambda|^2}{\varepsilon + \varepsilon_\lambda} \right] G_{s\lambda} = 1.$$

Здесь энергии ε_λ отсчитываются от границы Ферми.

Для обобщения на случай, когда приложено внешнее поле, удобнее это уравнение записать в виде двух уравнений

$$-i [(\varepsilon - \varepsilon_\lambda) G_{s\lambda} + \Delta_\lambda F_\lambda] = 1, \quad (\varepsilon + \varepsilon_\lambda) F_\lambda = -\Delta_\lambda^* G_{s\lambda}. \quad (3,1)$$

Величина F , введенная нами, означает полную амплитуду перехода от состояния с дыркой к состоянию с квазичастицей. Мы обозначили

через F величину

$$F \equiv \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ N \quad N-2 \end{array} = \begin{array}{c} \longleftarrow \bigcirc \longrightarrow \end{array}.$$

Как легко видеть, наши уравнения (вместе с уравнением для Δ , которое написано ниже) инвариантны относительно преобразования

$$G' = G, \quad F' = e^{i\varphi} F, \quad \Delta' = e^{-i\varphi} \Delta.$$

Поэтому при отсутствии внешних полей можно выбрать фазу φ , чтобы Δ' было вещественно, т. е. $\Delta_\lambda = \Delta_\lambda^*$.

Используя уравнение (3,1), получим

$$-iG_\lambda \frac{1-n_\lambda}{\varepsilon - E_\lambda - i\gamma} + \frac{n_\lambda}{\varepsilon + E_\lambda - i\gamma}, \quad -iF_\lambda = \frac{\Delta_\lambda}{2E_\lambda} \left(\frac{1}{\varepsilon - E_\lambda - i\gamma} - \frac{1}{\varepsilon + E_\lambda - i\gamma} \right), \quad (3,2)$$

где E_λ — энергия квазичастицы, $E_\lambda^2 = \Delta_\lambda^2 + \varepsilon_\lambda^2$, а n_λ — число квазичастиц в состояниях λ

$$n_\lambda = \frac{E_\lambda - \varepsilon_\lambda}{2E_\lambda}.$$

Запишем уравнение (3,3) в координатном представлении:

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - H \right) G_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) + \Delta(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) - i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\tau), \\ \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} + H \right) F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) - \Delta^*(\mathbf{r}) G_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau). \end{aligned} \quad (3,3)$$

Изменение относительного знака $i \frac{\partial}{\partial \tau}$ и H во втором уравнении означает, что второе уравнение соответствует обращенному времени ⁴. Когда уравнения записаны в форме (3,3), то ясно, как вводить внешнее поле. В случае полей, не изменяющихся при замене t на $-t$, к гамильтониану H следует добавить эффективное поле, действующее на квазичастицы. В случае полей, изменяющих знак при замене t на $-t$ (таких, как, например, магнитное поле), в первом уравнении по-прежнему должно быть к H добавлено эффективное поле V , во втором же уравнении, поскольку изменение знака при H связано с обращением времени, к H добавляется $TV(t) = -V(-t)$ (см. ниже). Связь эффективного поля с внешним и уравнения для G и F во внешнем поле будут рассмотрены ниже. Эти формулы должны быть дополнены уравнением для определения Δ , которое нетрудно получить графическим методом ⁴. Мы приведем окончательный результат:

$$\Delta_{\lambda\lambda'} = \sum (\varphi_\lambda^* \varphi_{\lambda'} \gamma(r) \varphi_{\lambda_1}^* \varphi_{\lambda_2}) F_{\lambda_1 \lambda_2}(\tau) |_{\tau=0}. \quad (3,4)$$

$\gamma(r)$ характеризует взаимодействие двух квазичастиц с нулевым моментом.

IV. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ КВАЗИЧАСТИЦАМИ

1. Механизм взаимодействия квазичастиц

Взаимодействие между квазичастицами в ядре сильно отличается от взаимодействия двух нуклонов в пустоте. Действительно, взаимодействие между двумя нуклонами в пустоте осуществляется обменом одним или несколькими мезонами, тогда как внутри ядерного вещества, помимо этого механизма, возможно также взаимодействие за счет обмена частицей и дыркой; на графиках амплитуды рассеяния Γ эти оба механизма изобразятся следующим образом:

$$\Gamma = \begin{array}{c} | \text{---} \text{---} \text{---} | + \begin{array}{c} | \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \dots + \begin{array}{c} | \text{---} \text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} | \end{array} + \dots$$

Волнистая черта означает мезонные функции Грина.

Таким образом, дополнительное взаимодействие представляет собой взаимодействие за счет поляризации среды. Кроме того, из-за принципа Паули изменяются даже те графики взаимодействия, которые не связаны с поляризацией за счет того, что часть состояний занята остальными нуклонами и недоступна для взаимодействующих частиц.

Нахождение взаимодействия в веществе через взаимодействие двух нуклонов в пустоте представляет собой сложную задачу, поскольку влияние среды очень сильно изменяет пустотное взаимодействие. Здесь эта задача не рассматривается. Взаимодействие между квазичастицами будет выражено через несколько констант, которые не вычисляются, а должны быть найдены из сравнения теории с опытом. Эти константы одинаковы для всех ядер с такой же точностью, с какой одинакова плотность ядерного вещества.

Покажем, что радиус сил взаимодействия между квазичастицами приблизительно такой же, как и радиус действия r_0 потенциала взаимодействия в пустоте. Действительно, плотность ядра определяется тем условием, что расстояние между частицами должно быть порядка r_0 . Следовательно, импульс на границе Ферми, который определяется плотностью, связан с r_0 соотношением ($\hbar = m = 1$)

$$p_F r_0 \sim 1.$$

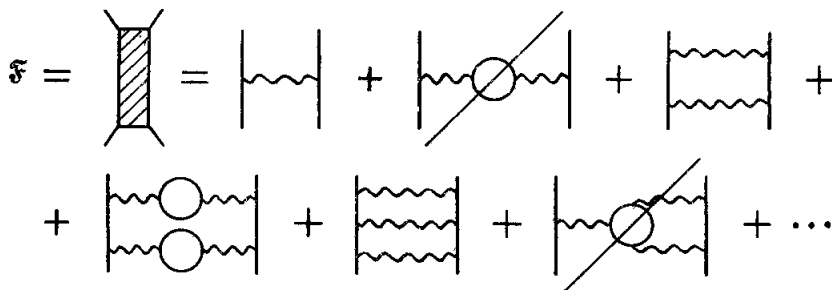
Глубина эффективной потенциальной ямы, в которой движутся ядерные частицы, порядка

$$U \sim \frac{p_F^2}{2} \sim \frac{1}{r_0^2}.$$

Таким образом, все величины в ядерном веществе, а следовательно, и радиус эффективных сил взаимодействия определяются величиной r_0 как единственной величиной размерности длины, характеризующей как пустотное взаимодействие, так и дополнительное взаимодействие, вызываемое поляризуемостью ядерного вещества.

Во многих случаях требуется найти амплитуду рассеяния при малом передаваемом 4-импульсе.

Как мы увидим, все задачи, связанные с внешним полем с частотой ω , малой по сравнению с энергией границы Ферми ε_F , и с волновыми векторами, малыми по сравнению с импульсом p_F на границе Ферми, сводятся к нахождению амплитуды рассеяния с малыми передаваемыми импульсами ($k \ll p_F$, $\omega \ll \varepsilon_F$). В этом случае для получения удобного уравнения следует графики, входящие в Γ , классифицировать следующим способом. Выделим в блок \mathfrak{F} все графики, которые не содержат частей, соединенных двумя линиями квазичастицы и квазидырки. В блок \mathfrak{F} войдут следующие графики:



Зачеркнуты те графики, которые по определению не входят в блок \mathfrak{F} .

Эти графики при малых передаваемых импульсах, как будет показано, существенно зависят от состояний рассеивающихся частиц.

Все графики, за исключением зачеркнутых, соответствуют при малых передаваемых импульсах δ -образному вкладу в блок $\tilde{\gamma}$. Действительно, первый, третий и пятый графики описывают взаимодействие свободных нуклонов и поэтому характеризуются радиусом r_0 , четвертый график слабо зависит от передаваемого импульса, следовательно, тоже характеризуется единственной величиной r_0 размерности длины, входящей в задачу. Вообще все графики, содержащие более двух линий, слабо зависят от передаваемого импульса, поскольку при интегрировании по 4-импульсам внутренних линий существенны большие импульсы и энергии ($p \sim p_F$, $\varepsilon \sim \varepsilon_F$). Когда в импульсном представлении область заметного изменения $\sim \varepsilon_F$, p_F , в координатном представлении рассматриваемый график δ -образен с шириной разброса $\sim r_0$.

С помощью блока $\tilde{\gamma}$ все графики, входящие в Γ , можно классифицировать следующим образом: 1) графики, не содержащие двух линий по каналу квазичастицы — квазидырки (блок $\tilde{\gamma}$); 2) по каналу квазичастица — квазидырка сначала идет блок $\tilde{\gamma}$, затем две линии (квазичастица и квазидырка) и после сумма всех графиков, переводящих квазичастицу и квазидырку в новое состояние (т. е. Γ).

Графически уравнение для Γ изобразится так:

$$\Gamma = \text{[Diagram: A square with two internal lines and four external arrows]} = \text{[Diagram: A square with two internal lines and four external arrows]} + \text{[Diagram: A square with two internal lines and four external arrows]} + \text{[Diagram: A square with two internal lines and four external arrows]}, \quad (4.1)$$

или в аналитической форме

$$\Gamma = \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma} G G \Gamma. \quad (4.2)$$

Поскольку блок $\tilde{\gamma}$ не содержит двух линий, он δ -образен по разности времен. То же относится на основании (4,2) к Γ . Поэтому обе функции Грина берутся при одинаковом времени. Пусть передаваемая 4-я компонента в Γ равна ω ($\Gamma(t) \rightarrow G e^{-i\omega t}$).

Тогда выражение GG в (4,2) равно

$$\int G_{\lambda_1}(t_1 - t) G_{\lambda_2}(t - t_1) e^{-i\omega t_1} dt_1 = e^{-i\omega t} \frac{n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}}{\varepsilon_{\lambda_1} - \varepsilon_{\lambda_2} + \omega}.$$

Для Γ получается уравнение

$$(\lambda_1 \lambda_2 | \Gamma | \lambda_3 \lambda_4) = (\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\gamma} | \lambda_3 \lambda_4) + \sum_{\lambda \lambda'} (\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\gamma} | \lambda' \lambda) \frac{n_{\lambda'} - n_{\lambda}}{\varepsilon_{\lambda'} - \varepsilon_{\lambda} - \omega} (\lambda' \lambda | \Gamma | \lambda_3 \lambda_4). \quad (4.3)$$

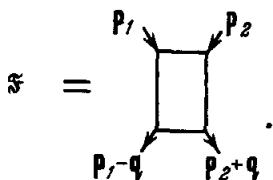
Поскольку блок $\tilde{\gamma}$ в координатном представлении δ -образен и определяется областью радиуса r_0 вблизи изучаемой точки, мы будем величину $\tilde{\gamma}$ называть амплитудой локального взаимодействия или просто локальным взаимодействием.

В случае, когда существенна парная корреляция или когда вблизи поверхности Ферми есть уровни, конкурирующие с одночастичными состояниями, выражение для G_{λ} усложняется и уравнение для Γ не имеет простого вида (4,3).

2. Локальное взаимодействие квазичастиц

Как уже говорилось, эффективное локальное взаимодействие между квазичастицами будет характеризоваться несколькими числами.

Рассмотрим сначала однородное ядерное вещество, а затем внесем поправки, вызванные конечностью размеров ядра. В импульсном представлении амплитуда локального взаимодействия зависит от двух импульсов p_1 , p_2 и от передаваемого импульса q :



Так как блок \mathfrak{F} слабо зависит от импульсов (заметно изменяется при изменении импульсов на величину $\delta p \sim p_F$, $\delta \varepsilon \sim \varepsilon_F$), то при малом передаваемом импульсе можно положить $q = 0$ (с точностью $\sim \frac{k}{p_F}, \frac{\omega}{\varepsilon_F}$). Кроме того, для изучения амплитуды Γ вблизи поверхности Ферми достаточно знать \mathfrak{F} при $|p_1| = |p_2| = p_F$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_F$. Поэтому \mathfrak{F} зависит только от угла между входными импульсами p_1 и p_2 . Взаимодействие между квазичастицами зависит, кроме того, от спинов квазичастиц и от изотопического спина. Предполагая изотопическую инвариантность, получим

$$\mathfrak{F} = C \{f + f' \tau_1 \tau_2 + (g + g' \tau_1 \tau_2) \sigma_1 \sigma_2\}, \quad (4,4)$$

где f, f', g, g' — функции от угла между p_1 и p_2 , τ, σ — изотопические и спиновые матрицы.

Нормировочный множитель C выберем равным

$$C = \frac{\pi^2}{m^* \rho_F}.$$

Тогда f, f', g, g' — безразмерные величины порядка 1.

Мы не включили в (4,4) слагаемые вида $(p_1 \sigma_1) (p_2 \sigma_2)$, которые возникают как релятивистская поправка и обращаются в нуль при малых скоростях частиц.

Впрочем, так как скорости у границы Ферми не очень малы по сравнению со скоростью света — $v/c \sim \frac{1}{4}$, эти слагаемые могут оказаться существенными и их величина должна быть найдена из опыта. Для начала мы пытаемся произвести сравнение с опытом в предположении малости таких слагаемых.

Так называемые тензорные силы пропорциональны k^2 и поэтому не включены в (4,4), хотя, разумеется, они повлияли на численное значение учтенных слагаемых.

Разложим \mathfrak{F} в ряд по полиномам Лежандра, зависящим от косинуса угла между p_1 и p_2 :

$$x = \frac{p_1 p_2}{p_F^2}, \quad \mathfrak{F} = \sum_l \mathfrak{F}_l P_l(x). \quad (4,5)$$

Числа f_l, f_l', g_l, g_l' должны быть найдены из сравнения теории с опытом. Заметим, что это разложение не имеет ничего общего с обычным разложением амплитуды рассеяния по парциальным волнам, где разложение ведется по функциям P_l от угла отклонения, тогда как в $\tilde{\mathcal{F}}$ угол отклонения положен равным нулю ($k = 0$).

Как показывает сравнение с опытом, в ядрах главную роль играют нулевые гармоники разложения (4,5), т. е. локальное взаимодействие квазичастиц мало зависит от их скоростей.

Рассмотрим теперь, какие усложнения вносят конечные размеры ядра. Непосредственно вне ядра взаимодействие между нуклонами резко изменяется — остается только механизм непосредственного взаимодействия. Однако взаимодействие при этом сильно отличается от взаимодействия свободных нуклонов, так как Ψ -функции нуклонов искажены отражением от поверхности ядра. Чтобы учесть переход от взаимодействия внутри к взаимодействию вне ядра, следует задаться какой-то зависимостью $\tilde{\mathcal{F}}(r)$. Поскольку переход этот происходит в узком слое порядка r_0 , а взаимодействие всегда усредняется по интервалу значений r большему, чем r_0 , результаты не очень сильно зависят от вида функции $\tilde{\mathcal{F}}(r)$. Можно, например, взять

$$\tilde{\mathcal{F}}(r) = \frac{n(r)}{n(0)} \tilde{\mathcal{F}}_{\text{in}} + \left[1 - \frac{n(r)}{n(0)} \right] \tilde{\mathcal{F}}_{\text{ex}},$$

где $\tilde{\mathcal{F}}_{\text{ex}} (\tilde{\mathcal{F}}_{\text{in}})$ — значение взаимодействия вне (внутри) ядра. Взаимодействие $\tilde{\mathcal{F}}_{\text{ex}}$ может быть выражено через взаимодействие свободных частиц.

В уравнение для эффективного поля в бесконечной системе входит $\tilde{\mathcal{F}}$ при передаваемом импульсе \mathbf{q} , равном 4-вектору внешнего поля. Поэтому в достаточно однородных полях можно в $\tilde{\mathcal{F}}$ полагать $\mathbf{q} = 0$ (с точностью $\sim \frac{\hbar}{p_F}, \frac{\omega}{\epsilon_F}$).

В конечной системе даже в однородном внешнем поле V^0 эффективное поле V не однородно, а заметно изменяется на расстояниях порядка R . Поэтому нужно иметь выражение для $\tilde{\mathcal{F}}$ при $k \sim 1/R$; при этом можно полагать $\omega = 0$, если $\omega \ll \epsilon_F$. Поскольку

$$\frac{k}{p_F} \sim \frac{1}{p_F R} \sim \frac{1}{A^{1/3}},$$

достаточно учитывать в $\tilde{\mathcal{F}}$ только слагаемые, линейные по k , и пренебрегать членами $\sim k^2$ и, следовательно, пренебрегать тензорными силами, которые содержат k^2 . Наиболее общее выражение, линейное по k , симметричное по значкам частиц и не изменяющееся при замене t на $-t$, следующее:

$$\tilde{\mathcal{F}}^{sl} = \hat{\kappa} (\sigma_1 + \sigma_2) [(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \mathbf{k}].$$

При перестановке $1 \rightleftharpoons 2$ $\mathbf{k} = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2$ переходит в $-\mathbf{k}$. Величина $\hat{\kappa}$ различна для одинаковых и разных нуклонов. Как можно показать, $\kappa = \frac{1}{2} (\kappa^{nn} + \kappa^{np})$ определяет спин-орбитальную добавку к гамильтониану одной квазичастицы

$$\delta U = -\kappa \frac{1}{r} \frac{dn}{dr} \sigma l.$$

Взаимодействие $\tilde{\mathcal{F}}^{sl}$ приводит к спин-орбитальной поправке к магнитным моментам ядер.

В некоторых случаях конечные размеры системы еще сильнее влияют на величину существенного передаваемого импульса. А именно, в некоторых случаях, существенный вклад вносят слагаемые, учитывающие отражение квазичастицы от границы системы⁵. Так как при отражении происходит изменение импульса частицы порядка p_F , то такого же порядка будет и передаваемый импульс. В таких случаях следует вводить в теорию еще одну константу (см.⁵).

3. Взаимодействие через «остов»

Как известно, во многих ядерных расчетах вводится эффективное взаимодействие с различными для разных случаев константами. Наиболее часто используется квадрупольно-квадрупольное взаимодействие, которое в λ -представлении записывается следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{F}}^{QQ} = C Q_{\lambda_1 \lambda_2} Q_{\lambda_3 \lambda_4},$$

где $Q_{\lambda_1 \lambda_2}$ — матричный элемент квадрупольного момента

$$Q_{\lambda_1 \lambda_2} = - \int \varphi_{\lambda_1}^* r^2 P_2(\cos \theta) \varphi_{\lambda_2} d^3 r.$$

Аналогично записывается октупольно-октупольное и другие взаимодействия. Все эти взаимодействия сыграли важную роль для качественной систематизации экспериментального материала.

Мы увидим, что все эти взаимодействия представляют приближенную запись аналогичных взаимодействий, которые строго выводятся из уравнения для амплитуды рассеяния и выражаются через константы локального взаимодействия $\tilde{\mathcal{F}}$.

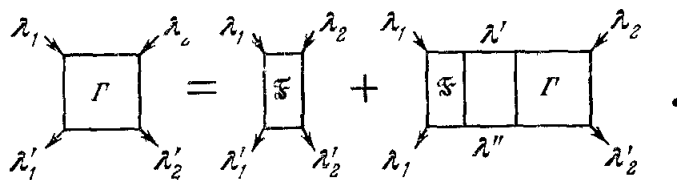
Пренебрежем для простоты парной корреляцией и найдем эффективное взаимодействие между частицами, принадлежащими к одной оболочке.

Запишем уравнение для амплитуды рассеяния в виде

$$\Gamma(v_1, v_2) = \tilde{\mathcal{F}}(v_1, v_2) + \sum_{v'} \tilde{\mathcal{F}}(v_1, v') A(v') \Gamma(v', v_2).$$

Здесь v_1 означает совокупность индексов (λ_1, λ'_1) частицы до и после столкновения, а $v_2 = (\lambda_2, \lambda'_2)$ соответствует тому же для второй частицы, v' — то же для промежуточного состояния.

Имеем графически



Суммирование в этом уравнении происходит по всем состояниям λ' и λ'' , из которых одно выше, а другое ниже границы Ферми в соответствии со значением

$$A(v') = \frac{n_{\lambda'} - n_{\lambda''}}{\varepsilon_{\lambda'} - \varepsilon_{\lambda''} + \omega}.$$

Можно произвести такую перенормировку уравнения для Γ , что суммирование будет происходить только по состояниям оболочки, к которой

принадлежат рассеивающиеся частицы, например, только по состояниям последней незаполненной оболочки. В перенормированное уравнение вместо локального взаимодействия $\tilde{\gamma}$ войдет нелокальное взаимодействие $\tilde{\gamma}'$, которое включает в себя часть взаимодействия, обусловленного возбуждением остальных оболочек (возбуждением «остова»). Действительно, введем величину $\tilde{\gamma}'$ по формуле

$$\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}' A_2 \tilde{\gamma} = (1 + \tilde{\gamma}' A_2) \tilde{\gamma}. \quad (4,6)$$

Значок 2 у A показывает, что суммирование происходит по всем оболочкам, кроме той, к которой принадлежат рассеивающиеся частицы. Умножим уравнение

$$\Gamma = \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma} A \Gamma$$

слева на $1 + \tilde{\gamma}' A_2$. Тогда

$$\Gamma + \tilde{\gamma}' A_2 \Gamma = \tilde{\gamma}' + \tilde{\gamma}' A \Gamma, \quad \Gamma = \tilde{\gamma}' + \tilde{\gamma}' A_1 \Gamma. \quad (4,7)$$

Здесь значок 1 показывает, что суммирование происходит только по состояниям выделенной оболочки.

Поскольку обычно в ядерных расчетах при учете взаимодействия суммируют только по состояниям последней оболочки, то в формулы должна входить сложная величина $\tilde{\gamma}'$ вместо простого локального взаимодействия $\tilde{\gamma}$. Этим и объясняется необходимость вводить различные константы для разных процессов. Между тем по формуле (4,6) $\tilde{\gamma}'$ выражается через величину $\tilde{\gamma}$, которая одинакова для всех ядер (кроме самых легких) и всех типов переходов.

Величина $\tilde{\gamma}'$, так же как и $\tilde{\gamma}$, не может быть изображена в виде произведения двух множителей

$$(\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\gamma}' | \lambda_3 \lambda_4) \neq C Q_{\lambda_1 \lambda_2} Q_{\lambda_3 \lambda_4}.$$

Например, простейший вид $\tilde{\gamma}$ имеет в пренебрежении членами, зависящими от скоростей:

$$(\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\gamma} | \lambda_3 \lambda_4) = \tilde{\gamma}_0 \int \Phi_{\lambda_1}^* \Phi_{\lambda_2} \Phi_{\lambda_3}^* \Phi_{\lambda_4} d^3 r,$$

т. е. не разбивается на множители.

Для изучения, например, квадрупольных возбуждений необходимо составить из входных значков $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\gamma}'$ суперпозицию, имеющую момент 2, и решить соответствующее уравнение для радиальных матричных элементов.

Изображение $\tilde{\gamma}'$ в виде произведения искажает радиальную зависимость этой величины и может привести к заметным ошибкам. Решение уравнений (4,6) и (4,7) (после отделения угловых переменных) на счетной машине представляет настолько простую задачу, что незачем вводить предположения, упрощающие взаимодействие $\tilde{\gamma}$.

V. ЯДРА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Многие свойства ядер (статические моменты, вероятности переходов, энергии первых уровней и др.) легко определяются, если известно изменение матрицы плотности квазичастиц во внешнем поле и ее изменение при добавлении частиц к системе. Матрица плотности, как мы видели, просто связана с функцией Грина (стр. 36). Для ее нахождения поступают следующим образом. Сначала определяется изменение функции Грина в эффективном поле, возникающем в системе под влиянием внешнего поля.

Эффективное же поле можно выразить через изменение матрицы плотности. В результате возникает система уравнений для определения эффективного поля. Зная эффективное поле, легко находим изменение G , а следовательно, и изменение матрицы плотности.

1. Эффективное поле

Определим изменение функции Грина квазичастицы во внешнем поле, пренебрегая сначала парной корреляцией. Ограничимся для простоты первым приближением теории возмущений по полю. Взаимодействие между частицами будем учитывать точно. Запишем несколько графиков, входящих в функцию Грина квазичастицы в поле \tilde{G} :

$$\begin{aligned} \tilde{G} = & \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \triangle \text{---} + \text{---} \triangle \text{---} + \dots \\ & = \text{---} + \text{---} \triangle V \text{---} = G + G V \tilde{G} . \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь кружок описывает непосредственное взаимодействие квазичастиц с внешним полем V^0

$$\text{---} \circ \text{---} = e_q V^0 ,$$

e_q — «заряд» квазичастицы. Как мы увидим, для некоторых типов полей $e_q \neq 1$, что означает отличие внешнего поля, действующего на квазичастицы, от внешнего поля, приложенного к частицам. Для невзаимодействующих частиц мы имеем

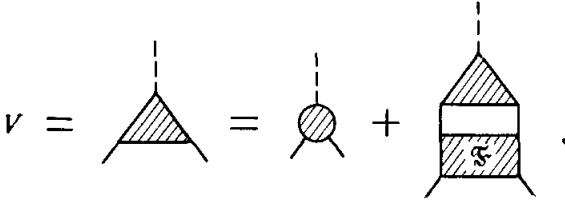
$$\tilde{G}_0 = \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} = G_0 + G_0 V^0 G_0 .$$

Таким образом, заштрихованный треугольник в формуле (5.1) заменяет точку на этом графике и представляет собой эффективное поле V , действующее на квазичастицу.

Получим уравнение для поля V . Среди графиков, входящих в V , есть один график, не содержащий взаимодействия между квазичастицами ($e_q V^0$). Все остальные графики имеют следующую структуру. Если двигаться со стороны основания к вершине треугольника, то все графики начинаются со взаимодействия, затем идут две линии свободного движения и затем совокупность графиков, изображающая эффективное поле. Введем блок \tilde{G} , не содержащий частей, соединенных двумя линиями. Тогда эффективное поле определяется уравнением

$$V = e_q V^0 + \tilde{G} G V . \quad (5.2)$$

Или графически



Первое слагаемое в V описывает непосредственное воздействие внешнего поля на квазичастицу. Второе слагаемое дает дополнительное поле, возникающее из-за поляризации среды, т. е. вызванное воздействием перераспределившихся нуклонов ядра.

В λ -представлении получаем

$$V_{\lambda_1 \lambda_2} = e_q V_{\lambda_1 \lambda_2}^0 + \sum (\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\gamma} | \lambda \lambda') A_{\lambda \lambda'} V_{\lambda' \lambda}, \quad (5,3)$$

где

$$A_{\lambda \lambda'} = \int G_{\lambda}(t) G_{\lambda'}(-t) e^{-i\omega t} dt. \quad (5,4)$$

Как мы видели (стр. 41),

$$A_{\lambda \lambda'} = \frac{n_{\lambda} - n_{\lambda'}}{\epsilon_{\lambda} - \epsilon_{\lambda'} + \omega}. \quad (5,4')$$

2. Эффективный заряд квазичастиц в незаполненной оболочке

Для процессов, связанных с переходами внутри последней незаполненной оболочки, удобно произвести такую перенормировку уравнений (5,3), чтобы суммирование происходило только по состояниям последней оболочки.

Разобьем A на два слагаемых

$$A = A_1 + A_2.$$

$(A_2)_{\lambda \lambda'}$ отлично от нуля, только когда оба состояния лежат вне последней оболочки, $(A_1)_{\lambda \lambda'}$ отлично от нуля, когда одно или оба состояния лежат в последней оболочке. Так как в A_2 оба состояния находятся достаточно далеко от поверхности Ферми, в них всегда можно пренебречь парной корреляцией и вообще влиянием любых близких к поверхности ферми-состояний. Поэтому A_2 определяется простым выражением (5,4').

Запишем уравнение для V в символическом виде

$$V = e_q V^0 + \tilde{\gamma} A_1 V + \tilde{\gamma} A_2 V.$$

В третьем слагаемом заменим V с помощью правой части этого уравнения. Повторяя эту операцию, получим

$$V = e_q \{1 + \tilde{\gamma} A_2 + \tilde{\gamma} A_2 \tilde{\gamma} A_2 + \dots\} V^0 + \{\tilde{\gamma} + \tilde{\gamma} A_2 \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma} A_2 \tilde{\gamma} A_2 \tilde{\gamma} + \dots\} A_1 V.$$

Выражение в фигурной скобке при $A_1 V$ обозначим через $\tilde{\gamma}'$:

$$\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma} A_2 \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma} A_2 \tilde{\gamma} A_2 \tilde{\gamma} + \dots = \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma} A_2 \tilde{\gamma}'. \quad (5,5)$$

В λ -представлении имеем

$$(\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\gamma}' | \lambda_3 \lambda_4) = (\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\gamma} | \lambda_3 \lambda_4) + \sum'' (\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\gamma} | \lambda' \lambda) \frac{n_{\lambda} - n_{\lambda'}}{\epsilon_{\lambda} - \epsilon_{\lambda'} + \omega} (\lambda \lambda' | \tilde{\gamma}' | \lambda_3 \lambda_4). \quad (5,6)$$

Знак " у суммы означает, что ни λ , ни λ' не лежат в последней оболочке.

Это — уравнение для эффективного взаимодействия квазичастиц на последней оболочке.

Обозначим теперь через V' величину

$$V' = e_q \{1 + \tilde{\gamma} A_2 + \tilde{\gamma} A_2 \tilde{\gamma} A_2 + \dots\} V^0 = e_q V^0 + \tilde{\gamma} A_2 \{e_q V^0 + \tilde{\gamma} A_2 V^0 + \dots\} \\ = e_q V^0 + \tilde{\gamma} A_2 V' = e_q (1 + \tilde{\gamma}' A_2) V^0. \quad (5,6')$$

В этих обозначениях уравнение для V принимает вид

$$V = V' + \tilde{\gamma}' A_1 V. \quad (5,7)$$

В уравнении (5,7) суммирование происходит по состояниям, из которых одно или оба лежат в последней оболочке. Величина A_1 в (5,7) должна определяться с учетом искажения функций Грина, вызываемого влиянием близких уровней. Величина V' может быть формально записана в виде произведения

$$V'_{\lambda\lambda'} = (e_{\text{eff}})_{\lambda\lambda'} V^0_{\lambda\lambda'}.$$

Эффективный заряд $(e_{\text{eff}})_{\lambda\lambda'}$ оказывается зависящим от состояний λ и λ' .

3. Эффективное поле в случае парной корреляции

Прежде всего запишем уравнение для V в такой форме, когда оно справедливо независимо от вида функций Грина квазичастиц. Второе слагаемое в уравнении для V всегда может быть изображено в виде

$$V = e_q V^0 = \tilde{\gamma} \delta G, \quad (5,8)$$

где δG — изменение функции Грина в поле. Действительно, если двигаться со стороны свободных концов, то графики $V = e_q V^0$ начинаются со взаимодействия, и если выделить блок $\tilde{\gamma}$, не содержащий двух линий, то далее идут графики, начинающиеся и кончающиеся квазичастицей и содержащие внешнее поле, т. е. изменение функции Грина в поле. В частном случае, когда

$$\delta G = G V \tilde{G},$$

получим прежнее уравнение для V . В случае парной корреляции δG определяется более сложным выражением.

Заметим, что выражение (5,8) имеет очень наглядный смысл. Так как $\tilde{\gamma}$ δ -образно по времени, то $\delta G(t_1, t_2)$ в (5,8) берется при одинаковых временах. Условимся брать $\delta G(t_1, t_2)$ при $t_2 = t_1 + 0$. Тогда, как мы видели в III. 3, функция Грина $G(t_1, t_1 + 0)$ совпадает с матрицей плотности

$$\rho_{\lambda'\lambda}(t) = G_{\lambda\lambda'}(t, t + 0),$$

поэтому правую часть (5,8) можно записать в виде

$$(V = e_q V^0)_{\lambda_1 \lambda_2} = (\tilde{\gamma} \delta G)_{\lambda_1 \lambda_2} = \sum (\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\gamma} | \lambda \lambda') \delta \rho_{\lambda' \lambda}. \quad (5,8')$$

В такой форме выражение (5,8) приобретает простой физический смысл — дополнительное поле, возникающее из-за поляризации среды, определяется как матричное произведение локального взаимодействия квазичастиц на изменение матрицы плотности. В частности, если $\tilde{\gamma}$ не зависит от скоростей и спинов, т. е. имеет в координатном представлении вид

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \tilde{\gamma}_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4),$$

получаем

$$(\tilde{\gamma}\delta\rho)_{\lambda_1\lambda_2} = \tilde{\gamma}_0 \sum_{\lambda\lambda'} \int \Phi_{\lambda_1}^* \Phi_{\lambda_2} \Phi_{\lambda}^* \Phi_{\lambda'} d^3r (\delta\rho)_{\lambda'\lambda}.$$

Но величина

$$\delta n(\mathbf{r}, t) = \sum (\delta\rho)_{\lambda'\lambda} \Phi_{\lambda}^*(\mathbf{r}) \Phi_{\lambda'}(\mathbf{r})$$

есть изменение плотности квазичастиц, и добавочное поле в координатном представлении равно

$$V - e_q V^0 = \tilde{\gamma}_0 \delta n(\mathbf{r}, t),$$

как это и должно быть для δ -образного взаимодействия.

Таким образом, нашей задачей является нахождение в случае парной корреляции изменения $\delta\rho$ матрицы плотности во внешнем поле. Для этого найдем изменение G во внешнем поле. Мы уже говорили в III.2, как вводится эффективное поле в уравнение для функций G и F . Требуется сделать только некоторые уточнения. Уравнения (3,3) для G и F в поле приобретают вид

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t} - H - V \right) \tilde{G} &= i \tilde{\Delta} \tilde{F} + i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \\ \left(i \frac{\partial}{\partial t} + H - V^T \right) \tilde{F} &= i \tilde{\Delta}^* \tilde{G}. \end{aligned} \quad (5,9)$$

Поле V^T в уравнении для \tilde{F} связано с полем $V = V(\omega) e^{-i\omega t}$ соотношением⁴

$$V^T(t) = \pm V(-\omega) e^{-i\omega t}.$$

Знак плюс соответствует четным, а знак минус нечетным по отношению к замене t на $-t$ полям.

Мы поставили здесь величину $\tilde{\Delta}$ вместо Δ , так как должно быть учтено также изменение Δ в поле.

Таким образом, уравнения (5,9) должны быть дополнены уравнением для Δ в поле. В достаточно однородных полях сохранится прежнее соотношение между Δ и F :

$$\tilde{\Delta}_{\lambda\lambda'}(t) = \sum (\Phi_{\lambda}^* \Phi_{\lambda'}(r) \Phi_{\lambda_1}^* \Phi_{\lambda_2}) \tilde{F}_{\lambda_1\lambda_2}(t, t). \quad (5,10)$$

Формулы (5,9) и (5,10) позволяют находить \tilde{G} , \tilde{F} и $\tilde{\Delta}$ в полях, хотя и слабых по сравнению с энергией границы Ферми, но сравнимых с Δ и с расстоянием между уровнями ядра:

$$\Delta \lesssim V \ll \varepsilon_F.$$

При полях $V \sim \varepsilon_F$ все характеристики квазичастиц изменяются, и теория делается слишком громоздкой, чтобы ею стоило заниматься.

В дальнейшем мы ограничимся случаем слабых полей, когда $V \ll \Delta$. Тогда уравнения (5,9) и (5,10) могут быть разложены по степеням поля V . Ограничиваясь первым членом разложения по V , после несложных алгебраических преобразований получим

$$\begin{aligned} \delta G &= GVG - F^* V^T F - G d^{(1)} F - F^* d^{(2)} G, \\ \delta F &= -F d^{(1)} F - G^T d^{(2)} G + FVG + G^T V^T F. \end{aligned} \quad (5,11)$$

Здесь

$$d^{(1)} = \delta\Delta = \tilde{\Delta} - \Delta, \quad d^{(2)} = \delta\Delta^* = \tilde{\Delta}^* - \Delta^*,$$

где $d^{(1)}$ и $d^{(2)}$ с помощью (5,10) выражаются через δF и δF^* .

Уравнения (5,9) и (5,10) вместе с равенством (5,8'), выражающим эффективное поле через изменение матрицы плотности, представляют собой полную систему уравнений для определения V и $\delta\rho$.

Зная V и $\delta\rho$, можно, как мы увидим, вычислить вероятности и частоты переходов.

Запишем изменение матрицы плотности символически в виде

$$\delta\rho = AV.$$

С другой стороны, для V мы имели

$$V = e_q V^0 + \tilde{\gamma} \delta\rho.$$

Подставляя V в выражение для $\delta\rho$, получаем уравнение для изменения матрицы плотности квазичастиц в поле

$$A^{-1} \delta\rho = e_q V^0 + \tilde{\gamma} \delta\rho.$$

В λ -представлении для случая, когда парная корреляция несущественна, можно использовать выражение (5,4') для A . Тогда

$$(\omega + \varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda'}) \delta\rho_{\lambda\lambda'} = (n_\lambda - n_{\lambda'}) \{ e_q V_{\lambda\lambda'}^0 + \sum (\lambda\lambda' | \tilde{\gamma} | \lambda_1 \lambda_2) \delta\rho_{\lambda_1 \lambda_2} \}.$$

Это уравнение в точности совпадает с кинетическим уравнением для матрицы плотности газа частиц со взаимодействием $\tilde{\gamma}$ с зарядом e_q , которое очень просто получается, если рассмотреть газ невзаимодействующих квазичастиц в поле V^4 .

Таким образом, в случае, когда нет парной корреляции, уравнение для эффективного поля можно получить и без функций Грина. В случае, когда существенна парная корреляция, не существует простого уравнения для ρ , и получение уравнений для эффективного поля без функций Грина представляет собой крайне громоздкую задачу.

4. Изменение матрицы плотности при изменении числа частиц

Рассмотрим теперь изменения матрицы плотности, возникающие от изменения числа частиц в системе. Пусть при этом произошло изменение в числах заполнения квазичастиц, равное δn_λ . Как определяется δn_λ , мы покажем позже.

Выражение для изменения недиагональной части матрицы плотности

$$(\delta\rho)_{\lambda_2 \lambda_1} = A_{\lambda_1 \lambda_2} V_{\lambda_1 \lambda_2}$$

остается верным и в отсутствие внешнего поля, если понимать под V эффективное поле, которое возникло от перестройки чисел заполнения,

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1 \lambda_2} &= \sum_{\lambda\lambda'} (\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\gamma} | \lambda\lambda') (\delta\rho)_{\lambda\lambda'} (1 - \delta_{\lambda\lambda'}) + \sum_{\lambda} (\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\gamma} | \lambda\lambda) \delta n_\lambda = \\ &= \sum'_{\lambda\lambda'} (\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\gamma} | \lambda\lambda') A_{\lambda\lambda'} V_{\lambda\lambda'} + \sum_{\lambda} (\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\gamma} | \lambda\lambda) \delta n_\lambda. \end{aligned} \quad (5,12)$$

Таким образом, если известны δn_λ , то можно найти V и недиагональную часть матрицы плотности. Для изменения матрицы плотности имеем неоднородное уравнение

$$(\delta\rho)_{\lambda_1 \lambda_2} = \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta n_{\lambda_1} + (1 - \delta_{\lambda_1 \lambda_2}) A_{\lambda_1 \lambda_2} \sum (\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\gamma} | \lambda\lambda') (\delta\rho)_{\lambda\lambda'}. \quad (5,13)$$

С помощью уравнения для амплитуды Γ можно уравнения (5,12) и (5,13) представить в другом виде.

Запишем уравнение (5,13) в символическом виде

$$V = \tilde{\gamma} \delta_0 \rho + \tilde{\gamma} A V,$$

где

$$(\delta_0 \rho)_{\lambda_1 \lambda_2} = \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta n_{\lambda_1}.$$

Сравним это уравнение с уравнением для $\Gamma \delta_0 \rho$

$$\Gamma \delta_0 \rho = \tilde{\gamma} \delta_0 \rho + \tilde{\gamma} A \Gamma \delta_0 \rho.$$

Таким образом,

$$V = \Gamma \delta_0 \rho,$$

или в λ -представлении

$$V_{\lambda_1 \lambda_2} = \sum (\lambda_1 \lambda_2 | \Gamma | \lambda \lambda) \delta n_{\lambda}. \quad (5,14)$$

Уравнение для V во внешнем поле с помощью Γ запишется в виде

$$V = e_q V^0 + \tilde{\gamma} A V = (1 - A \Gamma) e_q V^0. \quad (5,15)$$

Аналогично уравнение (5,13) можно записать в виде

$$\delta \rho = \delta_0 \rho + A \tilde{\gamma} \delta \rho = \delta_0 \rho + A \tilde{\gamma} \delta_0 \rho + A \tilde{\gamma} A \tilde{\gamma} \delta_0 \rho + \dots = (1 + A \Gamma) \delta_0 \rho. \quad (5,16)$$

Выясним теперь, как определяется $\delta_0 \rho$, т. е. диагональная часть изменения матрицы плотности квазичастиц. Эффективное поле изменяет энергии квазичастиц. В первом порядке по V имеем

$$\tilde{\epsilon}_{\lambda} = \epsilon_{\lambda} + V_{\lambda \lambda}.$$

Новые числа заполнения $\tilde{n}_{\lambda \lambda}$ находятся из условия минимума энергии системы. Если расстояние между уровнями вблизи поверхности Ферми велико по сравнению с энергией взаимодействия, то требование минимума энергии сводится к условию

$$\tilde{n}_{\lambda}(\tilde{\epsilon}_{\lambda}) = \begin{cases} 1, & \tilde{\epsilon}_{\lambda} < \tilde{\mu}, \\ 0, & \tilde{\epsilon}_{\lambda} > \tilde{\mu}, \end{cases} \quad (5,17)$$

где $\tilde{\mu}$ — новый химический потенциал — определяется изменением полного числа частиц в системе

$$\delta N = \sum_{\lambda} (\tilde{n}_{\lambda}(\tilde{\epsilon}_{\lambda}) - n_{\lambda}(\epsilon_{\lambda})).$$

Если изменение энергий ϵ_{λ} , т. е. $V_{\lambda \lambda}$ меньше, чем расстояние до ближайшего уровня, то изменение n_{λ} состоит в том, что добавленные частицы садятся на ближайшие свободные места. Если же эффективное поле V так велико, что уровни пересекаются, то происходит более сложная перестройка чисел заполнения в соответствии с условием (5,17). Когда добавляется нечетная частица к заполненной оболочке, то возникающее поле имеет, как легко видеть, порядок $V \sim \frac{\epsilon_F}{A}$, что меньше, чем расстояние до ближайшего уровня. Поэтому в этом случае добавленная частица садится на ближайший уровень λ_0 , и изменение в числах заполнения равно

$$\delta n_{\lambda} = -\delta_{\lambda \lambda_0}.$$

Таким образом, пока нет пересечения уровней, δn_{λ} определяется очень просто. Если же уровни пересекаются, то δn_{λ} определяется следующим образом. Задаваясь определенной перестройкой частиц по уровням, следует определить $\delta \rho$. Далее по $\delta \rho$ определяется V и с помощью V новые энергии $\tilde{\epsilon}_{\lambda}$. Затем вычисляется энергия системы квазичастиц с учетом взаимо-

действия \mathfrak{F} . Такое вычисление должно быть сделано для нескольких пробных распределений \tilde{n}_λ . Распределение с наиминизшей энергией определит основное состояние системы.

Итак, в полях, вызывающих пересечение уровней, определение δn_λ с учетом взаимодействия между квазичастицами представляет собой сложную задачу, которая должна решаться заново для каждого конкретного ядра.

В предельном случае совсем сильных полей задача опять упрощается, так как в этом случае участвует много уровней, и изменение матрицы плотности можно найти, пользуясь квазиклассическим приближением.

5. В ы ч и с л е н и е с р е д н и х

Пусть требуется вычислить изменение среднего значения величины Q , например квадрупольного или магнитного момента, при изменении числа частиц или при возбуждении системы.

Величина $\delta \langle Q \rangle$ равна

$$\delta \langle Q \rangle = e_q Q \delta \rho - e_q \sum_{\lambda\lambda'} Q_{\lambda\lambda'} (\delta \rho)_{\lambda\lambda'}.$$

Здесь мы учли, что заряд квазичастицы по отношению к полю Q может отличаться от заряда частицы ($e_q \neq 1$). Пользуясь приведенными в предыдущем разделе формулами (5,15), (5,16), можно записать это выражение в более удобном виде

$$\begin{aligned} \delta Q &= e_q Q \delta \rho = e_q Q (1 + A\Gamma) \delta_0 \rho = V[Q] \delta_0 \rho, \\ V[Q] &= e_q Q + e_q Q A\Gamma = e_q Q + \mathfrak{F}AV[Q]. \end{aligned} \quad (5,18)$$

Здесь мы обозначили через $V[Q]$ эффективное поле, вызываемое внешним полем Q . Таким образом, изменение средних значений определяется следующей простой формулой:

$$\delta Q = e_q \sum_{\lambda\lambda'} V_{\lambda\lambda'}[Q] \delta n_\lambda. \quad (5,19)$$

Пусть к магическому ядру добавлена одна частица. Так как в этом случае пересечение термов не происходит, то к ядру добавляется одна квазичастица в состоянии λ_0 над заполненными уровнями магического ядра. Поэтому δn_λ равно

$$\delta n_\lambda = \delta_{\lambda\lambda_0},$$

и в этом случае изменение среднего дается диагональным матричным элементом эффективного поля по состоянию λ_0

$$\delta Q = e_q V_{\lambda_0\lambda_0}[Q].$$

6. Ч а с т о т ы и в е р о я т н о с т и п е р е х о д о в

Запишем уравнение для V , как и выше, в символическом виде

$$V = e_q V^0 + \mathfrak{F}AV.$$

Здесь $\delta \rho = AV$ — изменение матрицы плотности квазичастиц в поле. Собственная частота ω_s какого-либо состояния s определяется условием

$$V_{\lambda\lambda'} \underset{\omega \rightarrow \omega_s}{=} \frac{\chi_{\lambda\lambda'}^{(s)}}{\omega - \omega_s} + V_{\lambda\lambda'}^r.$$

Вычет V в полюсе удовлетворяет уравнению

$$\chi^{(s)} = \mathfrak{F} A_s \chi^{(s)}. \quad (5,20)$$

Решение этого уравнения определяет собственные частоты ω_s и функции $\chi_{\lambda\lambda'}^{(s)}$, через которые, как мы увидим, выражается вероятность перехода. Так как уравнение (5,20) определяет χ с точностью до постоянного множителя, остается найти нормировку χ . Подставляя выражение V вблизи полюса в уравнение для V , получим

$$V^r(\omega - \omega_s) = e_q V^0(\omega - \omega_s) + \mathfrak{F} \frac{dA}{d\omega} \chi(\omega - \omega_s) + \mathfrak{F} A_s V^r(\omega - \omega_s),$$

или иначе

$$V^r = e_q V^0 + \mathfrak{F} \frac{dA}{d\omega} \chi + \mathfrak{F} A_s V^r.$$

Умножая на χA и используя (5,20), получаем

$$\chi A V^r = e_q \chi A V^0 + \chi \frac{dA}{d\omega} \chi + \chi A V^r.$$

Итак, χ нормировано следующим образом:

$$\sum_v \chi(v) \frac{dA(v)}{d\omega} \chi(v) = -e_q \sum \chi(v) A(v) V^0(v), \quad (5,21)$$

где через v обозначена совокупность значков $\lambda_1 \lambda_2$.

Нам остается выразить вероятность перехода через величины χ и A . Число переходов за единицу времени в состояние s дается известной формулой

$$W_{0s} = 2\pi |H'_{0s}|^2 \delta(\omega - \omega_s), \quad \omega_s = E_s - E_0, \quad (5,22)$$

где оператор возмущения H' равен

$$H' = \sum_n V^0(r_n).$$

Вероятность перехода просто выражается через среднее значение возмущения по возбужденному основному состоянию

$$\langle H' \rangle = (\Phi' H' \Phi') = - \sum_s \left[\frac{|H'_{0s}|^2}{E_s - E_0 - \omega + i\gamma} + \frac{|H'_{0s}|^2}{E_s - E_0 + \omega - i\gamma} \right].$$

Вероятность перехода равна

$$W_{0s} = 2 \operatorname{Im} \langle H' \rangle_s, \quad (5,23)$$

где $\langle H' \rangle_s$ — слагаемое $\langle H' \rangle$, соответствующее переходу в состояние s . Но $\langle H' \rangle$ можно выразить через изменение $\delta\rho$ матрицы плотности квази-частиц в поле

$$\langle H' \rangle = e_q V^0 \delta\rho = \sum e_q V_{\lambda\lambda'}^0 (\delta\rho)_{\lambda'\lambda} = e_q V^0 A V.$$

Вводя V вблизи полюса, находим

$$\langle H' \rangle = e_q V^0 A V = e_q V^0 A \frac{\chi}{\omega - \omega_s + i\gamma},$$

откуда из (5,23)

$$W_{0s} = 2\pi e_q \sum_v V^0(v) A(v) \chi(v) \delta(\omega - \omega_s). \quad (5,24)$$

Обозначим через ρ' вычет в полюсе матрицы плотности в поле

$$\delta\rho = AV = \frac{\rho'}{\omega - \omega_s}, \quad \rho' = A\chi.$$

Тогда из нормировки χ получаем нормировку для ρ'

$$e_q V^0 \rho' = \rho' \frac{dA^{-1}}{d\omega} \rho', \quad (5,25)$$

и W_{0s} можно также записать в виде

$$W_{0s} = 2\pi \sum_{\nu} \rho'(\nu) \frac{dA^{-1}}{d\omega} \rho'(\nu). \quad (5,26)$$

7. Законы сохранения и заряды квазичастиц для различных полей

Законы сохранения накладывают сильные ограничения на заряд e_q квазичастиц. Вывод приведенных ниже результатов дается в ⁴. Мы ограничимся наводящими физическими соображениями.

Прежде всего рассмотрим физические следствия, вытекающие из требования калибровочной инвариантности.

Физический смысл этого требования состоит в следующем. Пусть на нейтроны и протоны наложены векторные поля $\partial f_n / \partial x_i$ и $\partial f_p / \partial x_i$. Как известно, такие поля не производят никаких физических изменений в системе. В частности, не происходит поляризация среды, и эффективное поле, действующее на квазичастицы, совпадает с внешним полем.

Из этого факта вытекает, что в случае скалярного действующего на протоны поля заряды протонной и нейтронной квазичастиц равны:

$$e_q^{pp} = 1, \quad e_q^{np} = 0.$$

Для векторного поля получается более сложное выражение, которое мы приведем ниже.

Дальнейшие сведения о зарядах квазичастиц можно получить, используя тот факт, что в некоторых полях, уже не фиктивных, не происходит перераспределения частиц и, следовательно, эффективное поле равно внешнему. Например, в однородном поле, действующем одинаково на оба типа частиц, система качается как целое без каких-либо внутренних изменений. Из этого требования нетрудно получить

$$V_{\lambda\lambda}^p [p_{\alpha}^p + p_{\alpha}^n] = p_{\alpha} = (e_q^{pp} + e_q^{np}) p_{\alpha},$$

т. е.

$$e_q^{pp} + e_q^{np} = e_q^{nn} + e_q^{np} = 1.$$

Аналогично заключаем, что сумма $e_q^{pp} + e_q^{np} = 1$ для любого возмущения, коммутирующего с гамильтонианом и имеющего только диагональные матричные элементы в λ -представлении, т. е. для возмущения вида

$$H' = \sum a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} Q_{\lambda\lambda},$$

если оператор H' коммутирует с H .

Действительно, нетрудно видеть, что такое возмущение не производит поляризации среды. Такое возмущение будем называть диагональным. Получим выражение для эффективного заряда в случае возмущения вида $\sigma \mathcal{H}$. Так как заряд e_q определяется локальным взаимодействием частиц, его величина в ядре мало отличается от соответствующей величины в неограниченном ядерном веществе той же плотности. Так как спин-орбитальное

взаимодействие в ядерном веществе малó, то оператор полного спина системы коммутирует с гамильтонианом. Кроме того, в достаточно большой системе спин-орбитальная поправка к гамильтониану квазичастиц играет малую роль и может быть опущена. Тогда функции являются собственными функциями оператора H' . Таким образом, возмущение диагонально и

$$e_q^{pp} + e_q^{nn} = 1.$$

Запишем это условие в виде

$$e_q^{pp} = 1 - \xi_s, \quad e_q^{nn} = \xi_s.$$

Величина ξ_s не вычисляется и должна находиться из опыта. Эта же величина входит в перенормировку аксиальной константы β -распада в ядре. Для разрешенных переходов взаимодействие с электронно-нейтринным полем дает в гамильтониане нуклонов возмущение, пропорциональное $(\tau_x \pm i\tau_y) \sigma_z$ (гамов-теллеровские переходы). Найдём локальный заряд квазичастиц для такого внешнего поля.

Рассмотрим сначала поле $\tau_z \sigma_z$:

$$\tau_z \sigma_z = \frac{1 + \tau_z}{2} \sigma_z - \frac{1 - \tau_z}{2} \sigma_z = \sigma_z^n - \sigma_z^p.$$

Неоднородное слагаемое уравнения для V (содержащее внешнее поле) равно

$$\begin{aligned} e_q V^0 [\tau_z \sigma_z] &= e_q [\tau_z \sigma_z] \tau_z \sigma_z = e_q [\sigma_z^n] \sigma_z - e_q [\sigma_z^p] \sigma_z = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} e_q^{pp} - e_q^{pn} \\ e_q^{np} - e_q^{nn} \end{array} \right\} \sigma_z = \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2\xi_s \\ -(1 - 2\xi_s) \end{array} \right\} \sigma_z = (1 - 2\xi_s) \tau_z \sigma_z. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$e_q [\tau_z \sigma_z] = 1 - 2\xi_s.$$

В силу изотопической инвариантности такой же заряд будет и для поля $(\tau_x \pm i\tau_y) \sigma_z$. Для поля $\tau_x \pm i\tau_y$ (фермиевские переходы) получаем (рассматривая сначала поле τ_z) $e_q = 1$.

Приведем таблицу значений зарядов e_q для различных полей.

Вид поля	Заряд
Скалярное, $f(z)$	$e_q^{pp} = 1, \quad e_q^{pn} = 0$
Векторное, p_α	$e_q^{pp} = 1 - \frac{1}{3} f_1^{np} \frac{1}{m^*},$ $e_q^{pn} = \frac{1}{3} f_1^{np} \frac{1}{m^*}$
Спинорное, σ_α	$e_q^{pp} = 1 - \xi_s, \quad e_q^{pn} = \xi_s$
Орбитальное, $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$	$e_q^{pp} = 1 - \frac{1}{3} f_1^{np} \frac{1}{m^*},$ $e_q^{pn} = \frac{1}{3} f_1^{np} \frac{1}{m^*}$
β -распад- ное, $\begin{cases} \tau_x \pm i\tau_y, \\ (\tau_x \pm \tau_y) \sigma_z \end{cases}$	$e_q = 1$ $e_q = 1 - 2\xi_s$

Поскольку заряды e_q определяются локальными свойствами среды, эти же выражения сохраняются и при умножении приведенных полей на плавные функции координат. По этой же причине заряд для орбитального поля ($r \times p$) равен заряду для векторного (p_α).

VI. ЯДЕРНЫЕ МОМЕНТЫ

1. Схема вычисления ядерных моментов

Изменение энергии ядра в статическом внешнем поле, например в электрическом или магнитном поле атомных электронов, определяется различными моментами. Изменение энергии в однородном магнитном поле определяется дипольным магнитным моментом ядра, который принято называть просто магнитным моментом. В случае, когда неоднородность магнитного поля существенна, приходится вводить октупольные магнитные моменты. Взаимодействие с электрическим полем атомных электронов практически определяется двумя моментами — средним квадратом электрического радиуса ядра, который входит в формулу для изотопического смещения атомных спектральных линий, и квадрупольным моментом, который находится из сверхтонкого расщепления. Все эти величины выражаются как среднее по основному состоянию ядра от соответствующего оператора. Момент Q равен

$$Q = (\Phi_0 \sum_n Q_n \Phi_0).$$

Как мы видели, изменение средних при изменении числа частиц в ядре можно вычислять через изменение матрицы плотности квазичастиц $\delta\rho$ или, еще проще, найдя эффективное поле, создаваемое внешним полем Q (т. е. добавкой вида $H' = \sum_n Q_n$ к гамильтониану), и определив изменение в числах заполнения квазичастиц, которое произошло при переходе от одного ядра к другому. Изменение момента Q равно

$$\delta Q = \text{Sp } e_q \delta\rho \hat{Q} = \sum_\lambda V_{\lambda\lambda}[Q] \delta n_\lambda, \quad (6.1)$$

где e_q — заряд квазичастиц по отношению к полю Q . Так как четно-четные ядра не имеют магнитных моментов, то для вычисления магнитного момента четно-нечетного или нечетно-четного ядра достаточно найти изменение матрицы плотности при добавлении к четно-четному ядру одной частицы. Квадрупольные моменты в области сферических четно-четных ядер равны нулю, поэтому для вычисления квадрупольного момента соседнего ядра тоже достаточно знать изменение матрицы плотности при добавлении одной частицы.

Таким образом, схема вычисления статических моментов такова.

Находится эффективное поле $V[Q]$, соответствующее полю Q . Поле Q равно величине $r^2 P_2(\cos \theta)$ в случае квадрупольных моментов, величине r^2 в случае изотопического смещения или, наконец, оператору магнитного момента одной частицы, когда находится магнитный момент ядра. Далее определяется изменение δn_λ числа квазичастиц на уровне λ при добавлении одной частицы. После этого Q вычисляется по формуле (6.1).

В простейшем случае добавления одной частицы к дважды магическому ядру имеем

$$\delta n_\lambda = \delta_{\lambda\lambda_0},$$

где λ_0 — состояние, на котором появляется нечетная квазичастица. В этом случае

$$Q = V_{\lambda_0 \lambda_0} [Q].$$

Раскроем изотопические индексы в этих соотношениях. Пусть оператор Q действует, как это происходит в случае квадрупольных моментов и изотопического смещения, только на протоны. Тогда

$$\delta Q = \delta Q^n = Q^n \delta \rho^p = \sum_{\lambda} V_{\lambda \lambda}^p [Q^n] \delta n_{\lambda}^p + V_{\lambda \lambda}^n [Q^n] \delta n_{\lambda}^n.$$

Аналогично вычисляются и магнитные моменты, вклад в которые вносит как протонная, так и нейтронная часть оператора момента.

2. Магнитные моменты

Оператор дипольного магнитного момента одного нуклона можно записать в виде суммы двух слагаемых

$$\mu = \mu^j + \mu^s,$$

$$\mu^j = \frac{1+\tau_z}{2} \mathbf{j}, \quad \mu^s = \left[\frac{1+\tau_z}{2} \left(\gamma_p - \frac{1}{2} \right) + \frac{1-\tau_z}{2} \gamma_n \right] \sigma,$$

где $\frac{1+\tau_z}{2}$, $\frac{1-\tau_z}{2}$ — матрицы, соответствующие протонному и нейтронному состояниям, полный момент $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \frac{1}{2} \sigma$, где \mathbf{l} — орбитальный момент, γ_p и γ_n — протонные и нейтронные гиромагнитные отношения.

Необходимо найти эффективное поле $V[\mu_0]$, соответствующее оператору μ , и вычислить магнитный момент по формуле

$$\langle \mu \rangle = \sum_{\lambda} V_{\lambda \lambda} [\mu] \delta n_{\lambda}.$$

По аналогичной схеме вычисляются и магнитные моменты более высокой мультипольности.

При этом оказывается, что орбитальная часть магнитного момента мало изменяется под влиянием взаимодействия между квазичастицами. Спиновая часть же изменяется очень сильно.

Тензор парамагнитной восприимчивости ядра определяется константой g спин-спинового взаимодействия между квазичастицами. Восприимчивость в некоторых случаях отличается от 1 в несколько раз и принимает наибольшие значения на периферии ядра. Кроме того, восприимчивость зависит от угла между направлением магнитного поля и радиус-вектором r . Это обстоятельство количественно объясняет так называемые l -запрещенные переходы (см. ниже). Таблицу экспериментальных и расчетных значений матричных моментов и октупольных магнитных моментов см. в ^{4, 6, 7}. Получается удовлетворительное согласие с экспериментом.

3. Квадрупольные моменты и изотопическое смещение

Для вычисления квадрупольных моментов необходимо найти эффективное поле, создаваемое внешним скалярным полем, равным $V^0 = r^2 P_2(\cos \theta)$. Изотопическое смещение определяется полем $V^0 = r^2$

Изменение квадрупольных моментов и величины $\langle r^2 \rangle$ рассчитывалось в ⁸. Уравнение для эффективного поля решалось на вычислительных машинах.

Сравнение теории с экспериментальными данными показало, что в этом случае (в отличие от вычисления магнитных моментов) необходимо учитывать зависимость взаимодействия от радиуса вблизи поверхности ядра. Сравнение с опытом позволяет определить как внутренние, так и внешние значения констант f_0 и f'_0 и вычислить после этого значения квадрупольных моментов и величины $\delta \langle r^2 \rangle$ для большого числа элементов. Значения f_0 и f'_0 вне ядра получаются, как это и должно быть, хотя и не равные значениям для свободных нуклонов (см. ниже), но и не очень сильно отличающиеся от них.

Таблица сравнения теоретических и экспериментальных значений $\delta \langle r^2 P_2 \rangle$ и $\delta \langle r^2 \rangle$ дана в ⁴.

Во всех случаях получается согласие с экспериментальными значениями в пределах 30—40% (за исключением легких элементов).

VII. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ И β -РАСПАДНЫЕ ПЕРЕХОДЫ

1. Дипольные возбуждения

Будем рассматривать дипольные переходы под действием γ -квантов не очень большой частоты $\omega \ll \epsilon_F$. Тогда можно пренебрегать неоднородностью поля по радиусу ядра ($k^2 R^2 \ll 1$). Для изучения возбуждения ядра, а не движения его как целого, удобно перейти в систему центра инерции. При этом, помимо электрического поля, действующего на протоны, возникает инерционное поле, в результате чего возмущение гамильтониана системы примет вид ($e = 1$)

$$H' = E \left\{ \frac{N}{A} \sum_p \mathbf{r}_i - \frac{Z}{A} \sum_n \mathbf{r}_i \right\}.$$

Эффективное поле, возникающее при возмущении H' , удовлетворяет уравнениям

$$V^p = \frac{N}{A} E x + \mathfrak{F}^{pp} A^p V^p + \mathfrak{F}^{pn} A^n V^n, \quad (7,1)$$

$$V^n = -\frac{Z}{A} E x + \mathfrak{F}^{nn} A^n V^n + \mathfrak{F}^{np} A^p V^p.$$

Для положения максимума кривой гигантского резонанса получается:

$$\omega_s^2 = \omega_0^2 (1 + 2f'_0) = \omega_0^2 \frac{3\beta}{\epsilon_F}.$$

Аналогичное соотношение получается и для ширины максимума ^{9,10}

$$\Gamma^2 = \Gamma_0^2 \frac{3\beta}{\epsilon_F},$$

где Γ_0 — ширина, а ω_0 — положение максимума, которые получаются для системы невзаимодействующих частиц в яме с диффузным краем. Эти результаты удовлетворительно согласуются с экспериментом.

Учет скоростной зависимости сил между квазичастицами изменяет правило сумм для дипольных переходов. Получается

$$\int \sigma(\omega) d\omega = 2\pi^2 \frac{NZ}{|A|} \left[\frac{1 + 2/3f'_1}{1 + 2/3f_1} \right],$$

где f_1 и f'_1 определяются первой гармоникой разложения (4,5). При $f_1 = f'_1$, что означает отсутствие обменных сил, правило сумм принимает обычный вид.

2. Квадрупольные переходы

Имеется большое число хорошо изученных квадрупольных переходов с малыми частотами ($\omega \sim \Delta$). Для этих переходов следует писать выражения, учитывающие парную корреляцию.

Для изучения квадрупольных переходов следует найти эффективное поле, вызываемое внешним полем частоты ω вида

$$V^0 = r^2 P_2(\cos \theta) \equiv Q.$$

Уравнение для эффективного поля имеет вид

$$V^p(\mathbf{r}) = V^0(\mathbf{r}) + [f_0^p \delta n^p(\mathbf{r}) + f_0^n \delta n^n(\mathbf{r})] \left(\frac{dn}{d\varepsilon_F} \right)^{-1},$$

где $\delta n^p(\mathbf{r})$, $\delta n^n(\mathbf{r})$ — изменение плотности протонов и нейтронов в поле.

Обычно при изучении квадрупольных коллективных колебаний используется так называемое квадрупольно-квадрупольное взаимодействие, имеющее вид

$$(\lambda_1 \lambda_2 | \tilde{\mathfrak{F}}^Q | \lambda_3 \lambda_4) = -\kappa Q_{\lambda_1 \lambda_2} Q_{\lambda_3 \lambda_4}.$$

Единственная причина для такого выбора взаимодействия состоит в том, что при этом уравнение (7,1) сводится к алгебраическому уравнению.

Взаимодействие $\tilde{\mathfrak{F}}^Q$ приводит к эффективному полю вида

$$V = C(\omega) V^0,$$

т. е. эквивалентно предположению, что изменение плотности в поле

$$\delta n(r) = \alpha(r) P_2(\cos \theta) = C_1 r^2 P_2(\cos \theta).$$

Такое предположение искажает радиальную зависимость $\delta n(r)$, а следовательно, и величины $V - V^0$. Особенно большая ошибка получится в тех случаях, когда существенны состояния с большим моментом. При этом главный вклад в $V - V^0$ определяется значениями r вблизи поверхности ядра, где величины $f_0(r)$ и $\delta n(r)$ резко изменяются с r .

Для ряда случаев, когда парная корреляция несущественна, интенсивности одночастичных квадрупольных переходов вычислялись в¹¹. Получается удовлетворительное согласие с экспериментальными данными. Величина $f_0(r)$, входящая в решение, взята такой же, как и при расчете квадрупольных моментов и изотопического смещения.

3. Магнитные переходы

Интенсивности одночастичных или коллективных магнитных переходов вычисляются по той же схеме, что и для электрических переходов¹².

Уравнения для эффективного поля отличаются от уравнений, которые использовались при вычислении магнитных моментов, только присутствием частоты ω в знаменателе $A_{\lambda\lambda'}$. При малых частотах вероятность перехода из состояния λ_0 в состояние λ_1 определяется матричным элементом $V_{\lambda_0\lambda_1}$ статического эффективного поля, который заменяет в формулах перехода одночастичной модели величину $V_{\lambda_0\lambda_1}^0$.

Для переходов с малыми частотами обычно существенную роль играет взаимодействие конфигураций, что приводит к дополнительным запретам¹³.

Взаимодействие конфигураций должно рассчитываться по той же схеме, что и в модели оболочек, только в качестве взаимодействия следует брать эффективное взаимодействие в последней оболочке $\tilde{\mathfrak{F}}'$, которое

должно быть найдено из уравнения

$$\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y} + \mathfrak{Y} A' \mathfrak{Y}',$$

где A' означает, что суммирование происходит по всем оболочкам, кроме последней.

4. β -р а с п а д

Как известно, β -переходы в ядрах (β -распад, K -захват) вызываются следующим возмущением:

$$H' = G_V \int \bar{\Psi} \tau_+ \gamma_\mu (1 + C_1 \gamma_5) \Psi \bar{\varphi}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \varphi_e d^3r,$$

где $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_4$, а Ψ^\dagger , Ψ — операторы рождения и уничтожения нуклона, φ_e , $\bar{\varphi}_e$ — нейтринная и электронная функции. Множитель C_1 равен отношению псевдовекторной и векторной констант взаимодействия:

$$C_1 = \frac{G_A}{G_V} = -1,2.$$

τ_+ — изотопическая матрица, переводящая протон в нейтрон:

$$\tau_+ = \frac{1}{2} (\tau_x + i\tau_y) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Пренебрегая релятивистскими поправками для нуклонов, получим

$$\bar{\Psi} \tau_+ \gamma_\mu (1 + C_1 \gamma_5) \Psi = \delta_{\mu 0} \Psi^\dagger \tau_+ \Psi + C_1 \delta_{\mu \alpha} \Psi^\dagger \tau_+ \sigma_\alpha \Psi,$$

где $\alpha = 1, 2, 3$.

В λ -представлении получаем

$$H' = G_V \sum_{\lambda\lambda'} a_\lambda^\dagger a_{\lambda'} [(\tau_+ j_0)_{\lambda\lambda'} + C_1 (\tau_+ \sigma_\alpha j_\alpha)_{\lambda\lambda'}], \quad (7,2)$$

где $j_\mu = (j_0, j_\alpha)$ — плотность тока легких частиц.

Для получения H' в случае разрешенных переходов считаем $j_\mu(r)$ не зависящим от r (кулоновская функция электрона заменяется своим значением на поверхности ядра). В случае фермиевских переходов отличие эффективного поля от внешнего вызывается только кулоновскими поправками, так как в пренебрежении кулоновским полем возмущение

$$H' = \sum a_\lambda^\dagger a_{\lambda'} (\tau_\pm)_{\lambda\lambda'},$$

в силу изотопической инвариантности, не вызывает поляризации среды, так же как ее не вызывает возмущение

$$H' = \sum a_\lambda^\dagger a_{\lambda'} (T_z)_{\lambda\lambda'} = T_z.$$

Уравнение для $V[\tau_+]$ показывает, что входят поправки только второго порядка по отношению V_Q/ϵ_F , где V_Q — кулоновское поле. Поэтому поправки к фермиевскому матричному элементу, рассчитанному в предположении строгой изотопической инвариантности, оказываются пренебрежимо малыми ($\sim 0,3\%$).

Уравнения для эффективного поля в случае гамов-теллеровских переходов очень близки к уравнениям для эффективного поля, соответствующего спиновой части магнитного момента.

Заряд квазичастиц для поля $\tau_+ \sigma_+$ равен

$$e_q = 1 - 2\zeta_s.$$

В суммах по λ и λ' одно состояние относится к нейтронам, другое к протонам. Как и в случае спиновой части магнитного момента, главную роль играют члены суммы с λ и λ' отличающимися только знаком проекции спина на направление момента j .

В случае зеркальных ядер гамов-теллеровский матричный элемент строго выражается через магнитный момент дочернего или материнского ядра в основном состоянии. Подстановка наблюдаемых магнитных моментов дает амплитуды β -переходов, совпадающие с наблюдаемыми в пределах точности эксперимента.

Расчет вероятностей разрешенных β -переходов с приближенным учетом парной корреляции дан в работе¹⁴. Там же дается сравнение теоретических и экспериментальных значений вероятностей разрешенных переходов.

Во всех случаях, когда нет возмущения конфигураций, получается удовлетворительное согласие абсолютных вероятностей перехода с экспериментальными значениями. Входящие в расчет константа спин-спинового взаимодействия взята той же, что и в случае магнитных моментов.

5. *l*-запрещенные переходы

Среди магнитных переходов и среди разрешенных β -переходов имеются переходы, при которых происходит изменение орбитального момента на две единицы.

Такие *l*-запрещенные переходы невозможны в одночастичной модели, так как матричный элемент σ или $\sigma\tau_+$ равен нулю для переходов с изменением орбитального момента.

Объяснение *l*-запрещенных переходов состоит в следующем.

В вероятность перехода входит матричный элемент не внешнего, а эффективного поля. Эффективное же поле, как в случае внешнего поля σ , так и в случае поля $\sigma\tau_+$, имеет вид

$$V_{\alpha} = V_1(r^2) \sigma_{\alpha} + V_2(r^2) \frac{r_{\alpha} r_{\beta} \sigma_{\beta}}{r^2}.$$

Второе слагаемое в этом выражении имеет матричные элементы для состояний с отличающимися на две единицы значениями орбитального момента. Вычисленные таким образом интенсивности хорошо согласуются с экспериментальными вероятностями *l*-запрещенных переходов¹².

6. μ -захват

При μ -захвате, в отличие от β -распада и *K*-захвата, импульс, уносимый нейтрино, велик, и ядру передается энергия порядка 10—15 *Мэв*. В гамильтониане возмущения ток легких частиц нельзя считать не зависящим от r . Кроме того, возмущение должно быть дополнено индуцированным псевдоскалярным взаимодействием и так называемым слабым магнетизмом. Эти слагаемые вносят пренебрежимо малый вклад в случае β -распада, но дают заметную поправку при μ -захвате. В остальном расчет вероятности μ -захвата ведется по той же схеме, что и расчет дипольных или квадрупольных переходов при больших энергиях возбуждения. В работе¹⁵ произведено в квазиклассическом приближении суммирование по состояниям в уравнении для эффективного поля. Полученная формула для зависимости времени μ -захвата от *A* и *Z*, хорошо согласующаяся с экспериментом. Более точные численные результаты

получены в ¹⁶ при решении уравнения для соответствующего эффективного поля на вычислительной машине. Сравнение теоретических и экспериментальных значений времени μ -захвата дается в этой работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель изложенного подхода к расчету ядер состоит в том, чтобы все задачи, которые решались полуквантитативно с помощью простых моделей, сформулировать на строгом языке и выразить через универсальные константы теории.

Получено удовлетворительное согласование различных явлений ядерной физики. Для этого, как мы видели, достаточно введения взаимодействия между квазичастицами, характеризующегося константами f_0 , f'_0 , g_0 , g'_0 внутри и аналогичными константами вне ядра.

Для получения более достоверных результатов следует уточнить взаимодействие между квазичастицами. Более точное сравнение теории с экспериментом позволит также найти следующие гармоники разложения ξ по углу между входными импульсами частиц.

Перечислим несколько задач, которые еще не решались.

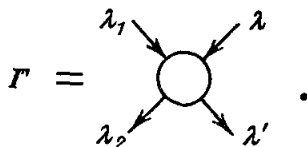
Начнем с ядерных реакций.

Для рассмотрения реакций с образованием промежуточного ядра нетрудно переформулировать существующие расчеты на языке взаимодействующих квазичастиц, используя, как выше, газовое приближение для квазичастиц.

Более интересные результаты можно получить из рассмотрения прямых ядерных реакций. Прямые ядерные реакции подробно изучались в ¹⁷ методом выделения сингулярных частей соответствующих графиков. При этом приходится, как и в изложенном выше подходе, вводить константы, характеризующие несингулярные части графиков.

В простейших случаях эти константы можно выразить через введенные нами константы взаимодействия между квазичастицами.

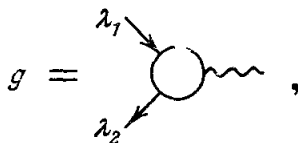
Прежде всего упругое и неупругое рассеяние нуклонов описывается изученными выше графиками амплитуды рассеяния



Здесь λ_1 , λ_2 — начальное и конечное состояния рассеивающегося нуклона, λ и λ' соответствуют одночастичному возбуждению.

Таким образом, эта реакция выражается через константы взаимодействия, входящие в ξ .

Далее блок



соответствующий рассеянию с образованием коллективного возбуждения, представляет собой вычет в соответствующем полюсе амплитуды рассеяния и, следовательно, выражается через ξ .

Не требуют введения новых констант также реакции (γn) и (γp) .

Реакция с образованием дейтронов или α -частиц для процессов, протекающих вблизи поверхности Ферми, можно описывать одной дополнительной константой.

В случае α -частиц эта же константа войдет в уточненную теорию α -распада. Действительно, неприводимый блок, характеризующий образование α -частиц из квазичастиц, лежащих вблизи поверхности Ферми, в координатном представлении δ -образен и характеризуется одной константой.

Интересные явления связаны со скачкообразными изменениями радиусов и формы ядер при добавлении частиц.

При добавлении малого числа частиц к магическому ядру, пока поле добавленных частиц не вызывает пересечения термов, происходит плавное перераспределение плотности без изменения радиуса ядра. Плотность в центре ядра превышает среднее значение, соответствующее формуле $R = r_0 A^{1/3}$. При достаточно большом числе добавленных частиц радиус или форма поверхности ядра скачком изменяются, и восстанавливается среднее значение плотности. Это явление можно было бы наблюдать в опытах типа Хофштадтера.

Представляет большой интерес расчет с эффективным взаимодействием \hat{N}' всех случаев смещения конфигураций, которые приводят к сильным изменениям вероятностей переходов или статических моментов.

Дадут полезную информацию также расчеты дипольного фотопоглощения в предположении, что входной реакцией является одночастичное возбуждение ядра, которое затем перераспределяется по более сложным возбуждениям. Таким образом, можно будет на этом примере до конца проследить механизм входных реакций.

Представляет большой интерес вычисление констант, входящих в так называемую обобщенную модель ядра.

Целый круг задач связан со взаимодействием с ядром μ -мезона, находящегося на K -оболочке, так как при этом возникает сильная электрическая и магнитная поляризация ядра. Из задач этого круга решена только задача об изотопическом смещении в μ -атоме¹⁸.

Особенный интерес представляет расчет явлений, связанных с переходом из сферического состояния в деформированное. В сферическом ядре вблизи точки перехода среди возбужденных состояний есть деформированное, а в деформированном ядре — сферическое. Кроме того, основное состояние представляет собой суперпозицию сферического и деформированного состояний (в точке перехода 50% на 50%).

В деформированных ядрах наряду с локальным взаимодействием имеется еще один механизм взаимодействия квазичастиц, а именно обмен вращательными возбуждениями ядра. Учет этого механизма также будет существенной проверкой теории.

Вычисление констант взаимодействия и констант, характеризующих потенциальную яму через взаимодействие свободных нуклонов, представляет очень большие трудности и не входит в задачи обсуждаемой теории.

Существующие в настоящее время приближенные методы решения этой задачи исходят в той или иной форме из предположения малости взаимодействия или применимости газового приближения, для чего нет никаких теоретических оснований.

Однако если бы в результате таких расчетов были получены правильные значения для тех констант взаимодействия, которые уже известны, то после такой проверки этим расчетам можно было бы доверять.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 35, 97 (1958).
 2. L. S. Kisslinger, R. A. Sorensen, Rev. Mod. Phys. 35, 853 (1963).
 3. A. M. Lane, Nuclear Theory, W. Benjamin, N.Y., 1964.
 4. А. Б. Мигдал, Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер, М., Наука, 1965.
 5. Э. Е. Саперштейн, В. А. Ходель, Ядерная физика 6, № 4 (1967).
 6. М. А. Тропцкий, В. А. Ходель, Ядерная физика 1, 205 (1965).
 7. М. А. Тропцкий, Ядерная физика 2, № 4 (1965).
 8. Г. Г. Бунатян, М. А. Микунянский, Ядерная физика 1, 38 (1965).
 9. A. B. Migdal, A. A. Lushnikov, D. F. Zaretsky, Nucl. Phys. 66, 193 (1965).
 10. A. A. Lushnikov, D. F. Zaretsky, Nucl. Phys. 66, 35 (1965).
 11. С. П. Камерджиев, Ядерная физика 2, 415 (1965).
 12. В. А. Ходель, Ядерная физика 2, 24 (1965).
 13. Э. Е. Саперштейн, В. А. Ходель, Ядерная физика 4, № 4 (1966).
 14. Ю. И. Гапонов, Ядерная физика 2, 1002 (1965).
 15. М. Г. Урин, В. М. Новиков, Ядерная физика 3, 420 (1966).
 16. Г. Г. Бунатян, Ядерная физика 2, 868 (1965).
 17. И. С. Шапиро, Теория прямых ядерных реакций, М., Физматгиз, 1963.
 18. В. М. Осадчиев, М. А. Микунянский, Phys. Lett. 14, 12 (1966).
-