

# УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

530.145

## МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

В. В. Бабиков

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Область приложения квантовой механики к задачам современной физики, химии и техники непрерывно расширяется. Кроме того, с созданием быстродействующих электронно-счетных машин актуальным стал вопрос о нахождении наиболее эффективных алгоритмов решения квантовомеханических задач. Поэтому для широкого круга специалистов представляет интерес ознакомиться с новым подходом к формулировке и решению проблем в квантовой механике, отличным от стандартного метода решения уравнения Шредингера. Этот подход интенсивно развивался в последнее время (1963—1966 гг.) и пока не нашел отражения в учебниках или монографиях. Весь материал содержится в ряде журнальных статей<sup>1-42</sup>. Настоящая статья является кратким обзором \*) основных уравнений и результатов, полученных в новом методе, называемом методом фазовых функций.

Математической основой метода является тот хорошо известный в теории дифференциальных уравнений факт, что линейное однородное уравнение второго порядка, каким является уравнение Шредингера, может быть сведено к нелинейному уравнению первого порядка — уравнению Риккати. Физическое содержание такого подхода состоит в том, что удовлетворяющая уравнению Риккати функция (фазовая функция) имеет в каждой точке смысл сдвига (по сравнению со случаем свободного движения) фазы волновой функции при рассеянии на обрезаемом в этой точке потенциале. Таким образом, задача сводится к непосредственному определению искомой фазы рассеяния. В то же время знания фазовой функции, как оказывается, достаточно для полного определения волновой функции. Можно ввести также функции, отвечающие другим наблюдаемым величинам, таким, например, как парциальные амплитуды рассеяния, полюсы которых отвечают энергиям связанных состояний. Метод фазовых функций \*\*) (м. ф. ф.), развитый первоначально для случая рассеяния на сферически-симметричном потенциале, был распространен в дальнейшем на более общие случаи: рассеяние в поле нецентральных сил, многоканальное рассеяние, релятивистские уравнения и т. д.

\*) Обзор охватывает работы, опубликованные по май 1966 г.

\*\*) Этот термин, отражающий функциональный характер искомой величины, представляется нам предпочтительнее употребляемого иногда выражения «фазовый метод» (phase method). В то же время следует отметить, что термин м. ф. ф. является весьма ограниченным, ибо данный метод применяется не только для вычисления сдвигов фаз, но и для вычисления других параметров рассеяния, например длины рассеяния и т. п., а также энергий связанных состояний.

По-видимому, любая проблема квантовой механики, будь то рассеяние или связанные состояния, может быть сформулирована и решена в терминах фазовых функций.

Преимуществами нового метода являются:

1) наглядный физический смысл ф. ф., являющейся в каждой точке фазой рассеяния на соответствующей части потенциала, что позволяет в процессе решения непосредственно видеть эффект действия различных областей потенциала;

2) монотонный, а не осциллирующий характер ф. ф., что позволяет проводить численные расчеты с большей точностью и облегчает оценку погрешности расчета;

3) тот факт, что исследуемое уравнение является уравнением первого порядка, хотя и нелинейным. Это, с одной стороны, уменьшает количество операций (а следовательно, и время) при расчетах на электронно-счетных машинах, а с другой — дает возможность использовать ряд известных результатов теории дифференциальных уравнений;

4) как показывается в настоящем обзоре, м. ф. ф. приводит к построению новых алгоритмов точного вычисления различных параметров рассеяния (фазы, длины рассеяния, эффективных радиусов и т. д.) и энергий связанных состояний, а также к новым приближенным методам расчета;

5) м. ф. ф. позволяет простым образом получать известные общие теоремы: аналитические свойства амплитуд рассеяния, числа связанных состояний в поле заданного потенциала и др.

Излагаемый материал распадается на несколько разделов. В разделе 2 приводятся уравнения для фазовых функций, отвечающие нерелятивистскому и релятивистскому потенциальному рассеянию; описан новый метод вычисления энергий связанных состояний. Важный случай низкоэнергетического рассеяния и вычисления таких параметров, как длина рассеяния, эффективный радиус и др., рассматривается в разделе 3. Раздел 4 содержит изложение приближенных методов решения уравнений для ф. ф. В разделе 5 в рамках м. ф. ф. анализируются некоторые общие вопросы теории потенциального рассеяния. В заключительном разделе кратко обсуждаются возможности дальнейшего развития и применения метода фазовых функций.

Ниже широко используются следующие обозначения \*) для функций Риккати — Бесселя действительного и мнимого аргумента и функций Риккати — Ганколя:

$$\left. \begin{aligned} j_l(x) &\equiv \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{l+1/2}(x), & n_l(x) &\equiv \sqrt{\frac{\pi x}{2}} N_{l+1/2}(x), \\ i_l(x) &\equiv \sqrt{\frac{\pi x}{2}} I_{l+1/2}(x) = (-i)^{l+1} j_l(ix), \\ k_l(x) &\equiv \sqrt{\frac{\pi x}{2}} K_{l+1/2}(x) = \frac{\pi}{2} i^{l+1} h_l^{(1)}(ix), \\ h_l^{(1)}(x) &\equiv \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{l+1/2}^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x), \\ h_l^{(2)}(x) &\equiv \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{l+1/2}^{(2)}(x) = j_l(x) - in_l(x). \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

\*) Часто символами  $j_l(x)$ ,  $n_l(x)$  обозначают сферические функции Бесселя, отличающиеся от определений (1.1) множителем  $x^{-1}$ . Для упрощения вида формул мы решили здесь избегать более сложных обозначений.

Эти функции простым образом выражаются через тригонометрические и степенные функции, например,

$$\left. \begin{aligned} j_0(x) &= \sin x, & n_0(x) &= -\cos x, \\ j_1(x) &= \frac{1}{x} \sin x - \cos x, & n_1(x) &= -\frac{1}{x} \cos x - \sin x. \end{aligned} \right\} \quad (1,2)$$

Для значений  $l > 1$  функции  $j_l(x)$  и  $n_l(x)$  могут быть получены из (1,2) с помощью рекуррентных соотношений

$$z_{l+1}(x) = \frac{2l}{x} z_l(x) - z_{l-1}(x), \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (1,3)$$

Отметим также поведение  $j_l(x)$ ,  $n_l(x)$  при больших и малых значениях аргумента:

$$j_l(x) \rightarrow \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right), \quad n_l(x) \rightarrow -\cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right), \quad x \rightarrow \infty, \quad (1,4)$$

$$j_l(x) \rightarrow \frac{x^{l+1}}{(2l+1)!!}, \quad n_l(x) \rightarrow -\frac{(2l-1)!!}{x^l}, \quad x \rightarrow 0. \quad (1,5)$$

## 2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

В данном разделе приведены точные уравнения для фазовых функций, очень удобные в практических численных расчетах. Рассмотрены наиболее важные случаи потенциального рассеяния.

### 2.1. Центральные потенциал

Рассмотрим случай упругого рассеяния на центральном потенциале или несколько более общий случай упругого рассеяния на произвольном потенциале, не приводящем к смешиванию парциальных волн с различными орбитальными моментами  $l$ , т. е. одноканальную реакцию. Тогда уравнение Шредингера для радиальной волновой функции  $u_l(r)$  имеет вид \*)

$$u_l'' + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - V(r) \right] u_l = 0. \quad (2,1)$$

Двумя линейно независимыми решениями свободного ( $V \equiv 0$ ) уравнения (2,1) являются функции  $j_l(kr)$  и  $n_l(kr)$ .

Введем две новые функции  $\delta_l(r)$  и  $A_l(r)$ , положив

$$u_l(r) = A_l(r) [\cos \delta_l(r) j_l(kr) - \sin \delta_l(r) n_l(kr)]. \quad (2,2)$$

Выражение (2,2) еще не позволяет определить однозначно обе новые функции.

Потребуем дополнительно, чтобы производная волновой функции в каждой точке имела вид

$$u_l'(r) = A_l(r) [\cos \delta_l(r) j_l'(kr) - \sin \delta_l(r) n_l'(kr)]. \quad (2,3)$$

Это эквивалентно дополнительному условию для  $A_l(r)$  и  $\delta_l(r)$ :

$$A_l' [\cos \delta_l j_l - \sin \delta_l n_l] - \delta_l' A_l [\sin \delta_l j_l + \cos \delta_l n_l] = 0. \quad (2,4)$$

Условия (2,3), (2,4) являются очевидными при  $r \rightarrow \infty$ , если мы хотим, чтобы на больших расстояниях, где  $V(r) \rightarrow 0$ , функции  $\delta_l(r)$  и  $A_l(r)$  стремились к постоянным значениям, а именно, к фазе рассеяния и нормировочной константе волновой функции. Смысл этих же условий при конечных значениях  $r$  можно пояснить следующим образом. Предположим,

\*) Здесь и всюду ниже, если это не оговорено особо, полагается  $\hbar = 2m = 1$ . Штрих везде означает дифференцирование по  $r$ .

что потенциал имеет конечный радиус действия  $R$ , так что  $V(r) = 0$  при  $r > R$ . Тогда в области  $r > R$  функции  $\delta_l(r)$ ,  $A_l(r)$  также должны принять постоянные значения  $\delta_l(R)$ ,  $A_l(R)$ , соответствующие сдвигу фазы и нормировке волновой функции при рассеянии на обрезанном в точке  $r = R$  потенциале  $V(r)$ . Соотношение (2,3) отвечает при этом, как легко видеть, условию непрерывности производной волновой функции в точке  $r = R$ . Следовательно, дополнительное условие (2,4), наложенное на  $\delta_l(r)$  и  $A_l(r)$ , соответствует определенному выбору физического смысла этих функций.

Из уравнений (2,1), (2,2) и (2,4) следует, что функции  $\delta_l(r)$  и  $A_l(r)$  удовлетворяют уравнениям первого порядка. При этом уравнение для  $\delta_l(r)$  оказывается не зависящим от  $A_l(r)$

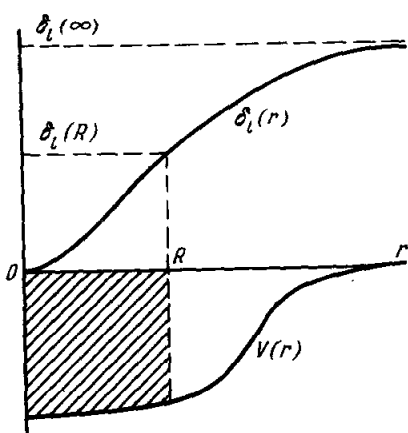
$$\delta_l'(r) = -\frac{1}{k} V(r) [\cos \delta_l(r) j_l(kr) - \sin \delta_l(r) n_l(kr)]^2, \quad \delta_l(0) = 0. \quad (2,5)$$

Как уже отмечалось выше и непосредственно следует из уравнений (2,2) и (2,5), значение функции  $\delta_l(r)$  в любой точке  $r = R$  является фазой рассеяния на обрезанном в этой точке потенциале  $V(r) \theta(R-r)$ . Поэтому начальное условие  $\delta_l(0) = 0$  отвечает фактическому отсутствию потенциала, если  $R = 0$  (рис. 1); функция  $\delta_l(r)$  называется фазовой функцией \*) (ф. ф.).

Уравнение (2,5) было получено в работах Друкарева<sup>2</sup>, Бергмана<sup>3</sup>, Ольсона<sup>4</sup>, Кинча<sup>6</sup>, Спраха<sup>7</sup> и Калоджеро<sup>8</sup>. Особенно простой вид уравнение для ф. ф. принимает при  $l = 0$ :

$$\delta_0'(r) = -\frac{1}{k} V(r) \sin^2[kr + \delta_0(r)], \quad \delta_0(0) = 0. \quad (2,6)$$

Рис. 1. Характер поведения фазовой функции для потенциала притяжения.



Уравнение для функции  $A_l(r)$ , которую естественно называть амплитудной функцией, оказывается линейным:

$$A_l' = -\frac{1}{k} A_l V [\cos \delta_l j_l - \sin \delta_l n_l] [\sin \delta_l j_l + \cos \delta_l n_l] \quad (2,7)$$

и при известном решении уравнения (2,5) может быть проинтегрировано в явном виде

$$A_l(r) = \exp \left\{ -\frac{1}{k} \int_{r_0}^r dr' V(r') [\cos \delta_l(r') j_l(kr') - \sin \delta_l(r') n_l(kr')] \times \right. \\ \left. \times [\sin \delta_l(r') j_l(kr') + \cos \delta_l(r') n_l(kr')] \right\}. \quad (2,8)$$

Здесь предполагается следующая нормировка амплитудной функции  $A_l(r_0) = 1$ , где  $r_0$  — произвольная точка.

В практических расчетах из-за сингулярного поведения функций  $n_l(kr)$  при  $l > 0$  уравнение (2,5) следует интегрировать от точки  $r = \varepsilon > 0$ . Начальное условие для ф. ф. при этом определяется поведением потенциала на малых расстояниях и может быть получено непосредственно

\*) Этот термин был введен в работе Морза и Аллиса<sup>1</sup>, которые, по-видимому, впервые использовали уравнение для фазовой функции (2,5) в частном случае  $l = 0$ .

из уравнения (2,5). записанного в интегральном виде

$$\delta_l(r) = -\frac{1}{k} \int_0^r V(r') [\cos \delta_l(r') j_l(kr') - \sin \delta_l(r') n_l(kr')]^2 dr'. \quad (2,9)$$

Возможны три случая. Первый — потенциал не сингулярен или слабо сингулярен, т. е.

$$r^2 V(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0. \quad (2,10)$$

Тогда нетрудно убедиться, используя (1,5), что

$$\delta_l(\varepsilon) \rightarrow -\frac{1}{k [(2l+1)!!]^2} \int_0^{\varepsilon} V(r) r^{2l+2} dr, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2,11)$$

Например, при

$$V(r) \rightarrow V_0 r^p [1 + O(r^s)], \quad p > -2, \quad s > 0, \quad (2,12)$$

имеем

$$\delta_l(\varepsilon) = -\frac{V_0 (k\varepsilon)^{2l+1} \varepsilon^{2+p}}{(2l+3-p) [(2l+1)!!]^2} [1 + O(\varepsilon^m)], \quad m = \min(s, 2, 2+p). \quad (2,13)$$

Поправочные члены возникают соответственно от поправок к потенциалу ( $m = s$ ), от разложения функции  $j_l(kr)$  ( $m = 2$ ) и от учета члена  $\delta_l(r) n_l(kr)$  ( $m = 2+p$ ). Нормировка амплитудной функции в случае несингулярного или слабо сингулярного потенциала совершенно произвольна. В частности, можно положить в (2,8)  $r_0 = 0$ , так что  $A_l(0) = 1$ .

Второй возможный случай — сильно сингулярный отталкивательный потенциал

$$r^2 V(r) \rightarrow +\infty, \quad r \rightarrow 0. \quad (2,14)$$

Нетрудно убедиться, что тогда

$$\delta_l(\varepsilon) = -\frac{(k\varepsilon)^{2l+1}}{(2l+1)!! (2l-1)!!} \left[ 1 - \frac{2l+1}{\varepsilon \Gamma^{1/2}(\varepsilon)} \right]. \quad (2,15)$$

Первый член выражения (2,15) равен фазовому сдвигу при рассеянии на твердой сфере радиуса  $\varepsilon$  ( $k\varepsilon \ll 1$ ). Это соответствует тому, что на самых малых расстояниях потенциальный барьер становится очень большим. Амплитудная функция в этом случае может быть нормирована на единицу только при конечном  $r_0$ . При  $r \rightarrow 0$  функция  $A_l(r)$  становится экспоненциально малой:

$$A_l(r) \rightarrow \exp \left[ -\int_l^{r_0} dr' V^{1/2}(r') \right], \quad r \rightarrow 0. \quad (2,16)$$

Частным случаем сильно сингулярного потенциала является твердая отталкивательная сердцевина конечного радиуса  $r_0$ :

$$V(r) = +\infty, \quad 0 < r < r_0. \quad (2,17)$$

Начальное условие при  $r = r_0$  для фазовой функции определяется тогда соотношением

$$\delta_l(r) = \arctg \frac{j_l(kr)}{n_l(kr)}, \quad 0 < r < r_0. \quad (2,18)$$

Амплитудная функция при этом разрывна

$$\begin{aligned} A_l(r) &= 0, & 0 < r < r_0, \\ A_l(r_0) &= 1. \end{aligned} \quad (2,19)$$

Третий случай — промежуточный:

$$r^2 V(r) \rightarrow \text{const} = \beta > -(l+1/2)^2, \quad r \rightarrow 0. \quad (2,20)$$

Ограничение на величину  $\beta$  возникает из условия, чтобы не было падений на центр при притягивающем потенциале ( $\beta < 0$ ). Как показывает анализ, тогда при  $r \rightarrow 0$

$$\delta_l(r) \rightarrow -q_l \frac{(kr)^{2l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!}, \quad A_l(r) \rightarrow \text{const} \cdot r^{\frac{\beta(1-q_l)}{2l+1}}. \quad (2.21)$$

Здесь используется обозначение

$$q_l = 1 + \frac{(2l+1)^2}{2\beta} - \frac{(2l+1)^2}{2\beta} \sqrt{1 + \frac{4\beta}{(2l+1)^2}}, \quad -1 < q_l < 1. \quad (2.22)$$

Несмотря на то, что амплитудная функция  $A_l(r)$  в случае притягивающего потенциала сингулярна, ограничение  $\beta > -(l+1/2)^2$  обеспечивает интегрируемость квадрата волновой функции (2,2).

Таким образом, задача определения фазы рассеяния на потенциале  $V(r)$  сводится к интегрированию уравнения (2,5) и нахождению асимптотического значения ф. ф.  $\delta_l(\infty)$ .

Во введении уже были отмечены основные преимущества такого подхода. Добавим здесь только, что, отправляясь от уравнения (2,5), можно получить также новые уравнения для таких, например, величин, как функция тангенса фазы  $t_l(r) \equiv \text{tg } \delta_l(r)$ :

$$t'_l(r) = -\frac{1}{k} V(r) [j_l(kr) - t_l(r) n_l(kr)]^2, \quad t_l(0) = 0, \quad (2.23)$$

или для функции парциальной амплитуды рассеяния  $f_l(r) \equiv e^{i\delta_l(r)} \sin \delta_l(r)$ :

$$f'_l(r) = -\frac{1}{k} V(r) [j_l(kr) + if_l(r) h_l^{(1)}(kr)]^2, \quad f_l(0) = 0, \quad (2.24)$$

или для функции элемента  $S$ -матрицы  $S_l \equiv e^{2i\delta_l} = 1 + 2if_l$ :

$$S'_l(r) = -\frac{1}{2k} V(r) [h_l^{(2)}(kr) + S_l(r) h_l^{(1)}(kr)]^2, \quad S_l(0) = 1. \quad (2.25)$$

Уравнение (2,23), в отличие от (2,5), может использоваться при численных расчетах только при условии  $\delta_l(r) < \pi/2$  во всем интервале интегрирования. Если при рассеянии на какой-либо из последовательности обрезаемых потенциалов  $V(r)$  в  $(R-r)$  возможен резонанс, т. е. если  $\delta_l(R) = \pi/2$ , можно в области  $r \approx R$  перейти к аналогичному (2,23) уравнению для обратной величины, а именно для функции  $\text{ctg } \delta_l(r)$ . В работах Франчетти<sup>6</sup>, Калоджеро<sup>8</sup>, Дашена<sup>15</sup> и Калоджеро и Равенхолла<sup>18</sup> содержатся также другие варианты основного уравнения (2,5).

До сих пор неявно предполагалось, что потенциал  $V(r)$  спадает при  $r \rightarrow \infty$  быстрее, чем  $O(r^{-1})$ . Однако уравнение (2,5) может быть легко распространено на случай присутствия кулоновского взаимодействия:  $V(r) + 2k\eta/r$ . Как было показано Ольсоном<sup>4</sup>, Кинчем<sup>5</sup>, Бабиковым<sup>17</sup>, Калоджеро и Равенхоллом<sup>18</sup> и Титцем<sup>33</sup>, для этого необходимо во всех выражениях, начиная с (2,2), произвести замену функций Риккати — Бесселя на кулоновские функции

$$j_l(kr) \rightarrow F_l(kr, \eta), \quad n_l(kr) \rightarrow -G_l(kr, \eta). \quad (2.26)$$

Тогда уравнение для ф. ф. примет вид

$$\delta'_l(r, \eta) = -\frac{1}{k} V(r) [\cos \delta_l(r, \eta) F_l(kr, \eta) + \sin \delta_l(r, \eta) G_l(kr, \eta)]^2, \\ \delta_l(0, \eta) = 0. \quad (2.27)$$

Заметим, что асимптотика волновой функции теперь равна

$$u_l \approx \sin \left( kr - \eta \ln 2kr - \frac{\pi l}{2} + \sigma_l + \delta_l \right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (2,28)$$

где  $\sigma_l = \arg \Gamma(l+1+i\eta)$  — сдвиг фазы при чисто кулоновском рассеянии.

В качестве иллюстрации поведения ф. ф. на рис. 2, взятом из работы<sup>8</sup>, показаны пять кривых, являющихся решениями уравнения (2,6) для прямоугольной ямы глубиной  $V(r) = -V_0 = -9$  и радиуса  $R = 2$  при пяти значениях  $k$ . Как видно из рисунка, при достаточно малых  $k$   $\delta_0(r, k)$  весьма резко меняет свое значение около точек  $r_1 = \pi/6$  и  $r_2 = \pi/2$ , являющихся радиусами потенциальной ямы, при которых возможно появление связанного состояния с нулевой энергией связи. Из (2,6) нетрудно получить следующую оценку интервала  $\Delta r_i$  около точки  $r_i$ , на котором происходит увеличение фазы на  $\pi$  при малых  $k$ :

$$\Delta r_i \approx \frac{k\pi}{V(r_i)}. \quad (2,29)$$

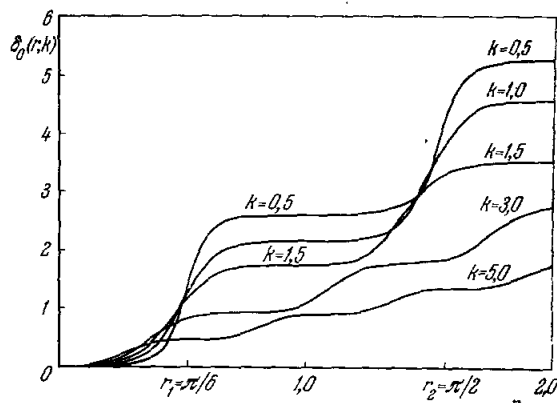


Рис. 2. Фазовая функция  $\delta_0(r, k)$  для прямоугольной потенциальной ямы при различных значениях  $k$ .

В предельном случае  $k = 0$ , при любом  $l$  и при произвольном потенциале, ф. ф. становится ступенчатой ( $N$  — число связанных состояний с моментом  $l$ ):

$$\delta_l(r, 0) = \pi \sum_{i=1}^N \theta(r - r_i). \quad (2,30)$$

Соотношение (2,30) является хорошо известной теоремой Левинсона.

## 2.2. Тензорный потенциал. Многоканальное рассеяние

М. ф. ф. может быть распространен на случай нецентрального тензорного взаимодействия и многоканального неупругого рассеяния. Важным случаем двухканальной реакции является упругое рассеяние друг на друге двух частиц, обладающих спином  $1/2$  (например, нуклонов), при учете тензорного взаимодействия. Тензорные силы  $T_J(r)$  смешивают в триплетном спиновом состоянии парциальные волны, отвечающие при данном полном моменте системы  $J$  различным орбитальным моментам  $L = J \mp 1$ . Уравнения для соответствующих радиальных волновых функций  $u_J(r)$ ,  $w_J(r)$  оказываются связанными:

$$\begin{aligned} u_J'' + \left[ k^2 - \frac{J(J-1)}{r^2} - V_{J, J-1} \right] u_J - T_J w_J &= 0, \\ w_J'' + \left[ k^2 - \frac{(J+2)(J+1)}{r^2} - V_{J, J+1} \right] w_J - T_J u_J &= 0. \end{aligned} \quad (2,31)$$

Связь уравнений (2,31) сильно усложняет вычисление параметров рассеяния, которыми теперь являются два сдвига фазы и параметр сме-

шивания. Дело в том, что при малых  $r$  одно из двух линейно независимых решений системы (2,31) очень сильно превосходит по величине второе. Поэтому трудно «вытянуть» медленно растущее решение на фоне первого решения. М. ф. ф. позволяет получить для трех функций, отвечающих трем параметрам рассеяния, простую систему уравнений первого порядка, свободную от этого недостатка. Известно, что при тензорном потенциале возможна различная параметризация матрицы рассеяния. Уравнения м. ф. ф. для различных представлений параметров были получены в работах Кинча<sup>5</sup>, Бабикова<sup>17, 26</sup> и Кокса и Перлмуттера<sup>34</sup>.

Здесь мы рассмотрим только уравнения для функций  $\bar{\delta}_{J,J-1}(r)$ ,  $\bar{\delta}_{J,J+1}(r)$  и  $\bar{\epsilon}_J(r)$ , отвечающих параметризации Стаппа, наиболее употребительной в ядерной физике. Как и в случае центрального потенциала, эти функции имеют смысл параметров рассеяния на обрезанных в точке  $r$  потенциалах  $V_{J,J-1}(r)$ ,  $V_{J,J+1}(r)$ ,  $T_J(r)$ .

Удобно ввести сокращение записи, положив

$$\left. \begin{aligned} P_{J,L}(r) &\equiv \cos \bar{\delta}_{J,L}(r) j_L(kr) - \sin \bar{\delta}_{J,L}(r) n_L(kr), \\ Q_{J,L}(r) &\equiv \sin \bar{\delta}_{J,L}(r) j_L(kr) + \cos \bar{\delta}_{J,L}(r) n_L(kr). \end{aligned} \right\} \quad (2,32)$$

Тогда искомая система уравнений имеет вид<sup>17, 26</sup>

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta}'_{J,J-1} &= -\frac{1}{k \cos 2\bar{\epsilon}_J} [V_{J,J-1} (\cos^4 \bar{\epsilon}_J P_{J,J-1}^2 - \sin^4 \bar{\epsilon}_J Q_{J,J-1}^2) - \\ &\quad - V_{J,J+1} \sin^2 \bar{\epsilon}_J \cos^2 \bar{\epsilon}_J (P_{J,J+1}^2 - Q_{J,J+1}^2) - 2T_J \sin \bar{\epsilon}_J \cos \bar{\epsilon}_J \times \\ &\quad \times (\cos^2 \bar{\epsilon}_J P_{J,J-1} Q_{J,J-1} - \sin^2 \bar{\epsilon}_J P_{J,J+1} Q_{J,J+1})], \quad \bar{\delta}_{J,J-1}(0) = 0, \\ \bar{\delta}'_{J,J+1} &= -\frac{1}{k \cos 2\bar{\epsilon}_J} [V_{J,J+1} (\cos^4 \bar{\epsilon}_J P_{J,J+1}^2 - \sin^4 \bar{\epsilon}_J Q_{J,J+1}^2) - \\ &\quad - V_{J,J-1} \sin^2 \bar{\epsilon}_J \cos^2 \bar{\epsilon}_J (P_{J,J-1}^2 - Q_{J,J-1}^2) - 2T_J \sin \bar{\epsilon}_J \cos \bar{\epsilon}_J \times \\ &\quad \times (\cos^2 \bar{\epsilon}_J P_{J,J+1} Q_{J,J+1} - \sin^2 \bar{\epsilon}_J P_{J,J-1} Q_{J,J-1})], \quad \bar{\delta}_{J,J+1}(0) = 0, \\ \bar{\epsilon}'_J &= -\frac{1}{k} [T_J (\cos^2 \bar{\epsilon}_J P_{J,J-1} P_{J,J+1} + \sin^2 \bar{\epsilon}_J Q_{J,J-1} Q_{J,J+1}) - \\ &\quad - V_{J,J-1} \sin \bar{\epsilon}_J \cos \bar{\epsilon}_J P_{J,J-1} Q_{J,J-1} - V_{J,J+1} \sin \bar{\epsilon}_J \cos \bar{\epsilon}_J P_{J,J+1} Q_{J,J+1}], \\ &\quad \bar{\epsilon}_J(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2,33)$$

Эти уравнения являются обобщением уравнения (2,5). Легко видеть, что при выключении тензорного потенциала ( $T_J \equiv 0$ ) параметр смешивания тождественно обращается в нуль ( $\bar{\epsilon}_J \equiv 0$ ), и система (2,33) вырождается в два независимых уравнения для парциальных волн с  $L = J - 1$  и  $L = J + 1$ . Кулоновский потенциал учитывается путем включения в уравнения подстановки (2,26). Аналогичные (2,33) системы уравнений получаются<sup>26</sup> для параметрических функций в других представлениях, например, Блатта — Биденхарна или Мак-Хейла — Тэлера.

Величины фазовых функций при малых  $r$  определяются поведением потенциалов при  $r \rightarrow 0$  и могут быть найдены непосредственно из анализа уравнений (2,33). Рассмотрим некоторые наиболее важные случаи. Пусть при  $r \rightarrow 0$

$$V_{J,J-1}(r) \rightarrow V_{J,J-1}^0 r^p, \quad V_{J,J+1}(r) \rightarrow V_{J,J+1}^0 r^p, \quad T_J(r) \rightarrow T_J^0 r^p, \quad p > -2. \quad (2,34)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta}_{J, J-1}(r) &\rightarrow -\frac{1_{J, J-1}^0 k^{2J-1} r^{2J+1+p}}{(2J-1+p) [(2J-1)!!]^2}, \\ \bar{\delta}_{J, J+1}(r) &\rightarrow -\frac{1_{J, J+1}^0 k^{2J+3} r^{2J+5+p}}{(2J+5+p) [(2J+3)!!]^2}, \\ \bar{\varepsilon}_J(r) &\rightarrow -\frac{T_J^0 k^{2J+1} r^{2J+3+p}}{(2J+3+p) (2J-1)!! (2J+3)!!}. \end{aligned} \right\} \quad (2,35)$$

При отталкивательных сингулярных потенциалах

$$r^2 V_{J, J-1}(r) \rightarrow +\infty, \quad r^2 V_{J, J+1}(r) \rightarrow +\infty, \quad r \rightarrow 0, \quad (2,36)$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta}_{J, J-1}(r) &\rightarrow -\frac{(kr)^{2J-1}}{(2J-1)!! (2J-3)!!}, \\ \bar{\delta}_{J, J+1}(r) &\rightarrow -\frac{(kr)^{2J+3}}{(2J+3)!! (2J+1)!!}, \\ \bar{\varepsilon}_J(r) &\rightarrow -\frac{k^{2J+1}}{(2J-3)!! (2J-1)!!} \int_0^r dr' (r')^{2J} \frac{T_J(r')}{V_{J, J-1}^{1/2}(r') V_{J, J+1}^{1/2}(r')} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\int_{r'}^r dr'' [V_{J, J-1}^{1/2}(r'') + V_{J, J+1}^{1/2}(r'')] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2,37)$$

Таким образом, параметр смешивания экспоненциально мал. При твердой сердцевине конечного радиуса  $r_0$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta}_{J, J-1}(r) &= \operatorname{arctg} \frac{1_{J-1}(kr)}{n_{J-1}(kr)}, & 0 < r < r_0, \\ \bar{\delta}_{J, J+1}(r) &= \operatorname{arctg} \frac{1_{J+1}(kr)}{n_{J+1}(kr)}, & 0 < r < r_0, \\ \bar{\varepsilon}_J(r) &= 0, & 0 < r < r_0. \end{aligned} \right\} \quad (2,38)$$

При учете кулоновского потенциала во всех выражениях следует произвести замену (2,26).

В качестве примера на рис. 3 приведены результаты интегрирования уравнений (2,33) для фаз  ${}^3P_2$ ,  ${}^3F_2$  и параметра смешивания  $\bar{\varepsilon}_2$  нуклон-нуклонного рассеяния при известном потенциале Хамады — Джонстона с твердой сердцевиной ( $r_0 = 0,343$ ). Сплошные и пунктирные кривые соответствуют значениям энергии  $E = 320$  Мэв ( $k = 2,78$ ) и  $E = 180$  Мэв ( $k = 2,08$ ). Ввиду короткодействия потенциала все функции быстро принимают постоянные асимптотические значения. Резкий излом на кривых  $\bar{\delta}_{2,1}(r)$  отвечает изменению знака потенциала  $V_{J, J-1}(r)$  в точке  $r = r_0$ .

М. ф. ф. для более общих случаев многоканального, в том числе неупругого, рассеяния был развит в работах Кинча<sup>5</sup>, Зимека<sup>20</sup>, Дегаспериса<sup>24</sup> и Кокса<sup>35</sup>. Соответствующие параметрические функции находятся в результате решения системы  $\frac{1}{2} n(n+1)$  нелинейных уравнений первого порядка вида (2,33); здесь  $n$  — число каналов. Амплитудные функции удовлетворяют системе  $n$  линейных уравнений и, в отличие от случая центрального потенциала, не могут быть проинтегрированы в квадратурах. Таким образом, в многоканальном случае задача отыска-

ния параметров рассеяния сводится к решению задачи Коши с начальными условиями, что гораздо удобнее, чем решать систему уравнений Шредингера и строить линейные комбинации решений, удовлетворяющие заданным граничным условиям.

Иногда наряду с каналом упругого рассеяния учитывают только один канал реакции, описывающий все неупругое рассеяние и поглощение. В так называемой оптической модели учету канала неупругого рас-

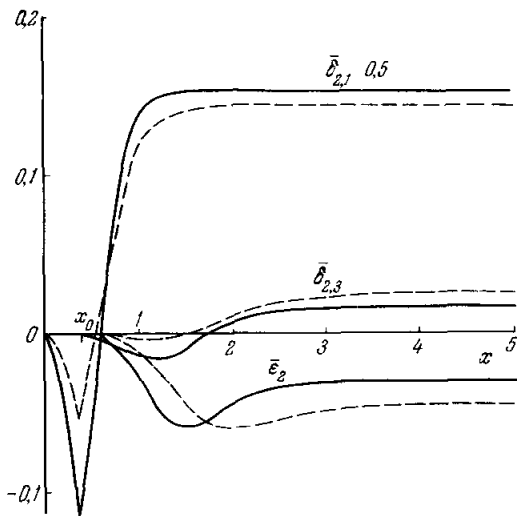


Рис. 3. Сдвиги фаз и параметр смешивания нуклон-нуклонного рассеяния в  ${}^3P_2$ - и  ${}^3F_2$ -состояниях для потенциала Хамады — Джонстона как функции  $x = \mu_\pi r$ .

сеяния отвечает комплексная добавка к потенциалу в канале упругого рассеяния. Параметрами, описывающими рассеяние в этом случае, являются элементы  $S$ -матрицы или коэффициенты рассеяния  $S_l$ . С помощью уравнения (2,25) м. ф. ф. легко может быть использован в оптической модели ядерных реакций<sup>28</sup>. При этом отпадают все вопросы, связанные с нормировкой волновых функций и затрудняющие стандартные способы расчета сечений в оптической модели. Отметим также, что ввиду простого и наглядного физического смысла фазовых функций с помощью м. ф. ф. удобно исследовать такой, например, вопрос, как поверхностный или объемный характер поглощения в ядре. Кроме того, удастся получать дополни-

тельную информацию в процессе интегрирования уравнений для ф. ф.

В рассмотренных выше задачах рассеяния, когда полностью могли быть отделены угловые переменные, использовалось представление, диагональное по моменту. Однако в общем случае произвольного центрального потенциала  $V(r, \theta, \varphi)$  разложение по парциальным волнам непригодно, хотя полная амплитуда рассеяния  $f(\theta, \varphi)$  существует. Пока не получено для этого случая уравнения, эквивалентного уравнению для фазовой функции (2,5). Приведенное в работе<sup>7</sup> и использованное в работе<sup>21</sup> уравнение для функции  $f_r(\theta, \varphi)$  не является корректным ввиду употребления неправильной волновой функции.

### 2.3. Зависящий от скорости потенциал.

#### Рассеяние релятивистских частиц

В ряде задач ядерной и атомной физики приходится иметь дело с эффективным потенциалом, зависящим от скорости:

$$V_{\text{эфф}}(r) = V(r) + \frac{1}{2} [\mathbf{p}^2 W(r) + W(r) \mathbf{p}^2]. \quad (2,39)$$

Уравнение Шредингера для радиальной волновой функции имеет тогда вид

$$(1 + W) u_l'' + W' u_l' + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} (1 + W) - V + \frac{1}{2} W'' \right] u_l = 0. \quad (2,40)$$

Согласно м. ф. ф. можно получить следующие уравнения для фазовой и амплитудной функций, определяемых соотношениями (2,2), (2,3):

$$(1+W)\delta'_l = -\frac{1}{k} \left[ \left( V + k^2 W - \frac{1}{2} W'' \right) P_l + W' R_l \right] P_l, \quad \delta_l(0) = 0, \quad (2,41)$$

$$(1+W)A'_l = -\frac{1}{k} A_l \left[ \left( V + k^2 W - \frac{1}{2} W'' \right) P_l - W' R_l \right] Q_l, \quad A_l(r_0) = 1. \quad (2,42)$$

Наряду с обозначениями (2,32) здесь использовано выражение

$$R_l(r) = \cos \delta_l(r) j'_l(kr) - \sin \delta_l(r) n'_l(kr). \quad (2,43)$$

Решение линейного уравнения (2,42) может быть аналогично (2,8) выражено в квадратурах. Начальные условия в конкретных расчетах, как и выше, следует находить из уравнения (2,41) с помощью разложений в ряд. Уравнение (2,41) было получено Мак-Келларом и Мзем<sup>39</sup>, которые рассмотрели также потенциал вида  $pW(r)p$ . Ими было показано, что исследование фазовой функции в этом случае полезно при сравнении эффектов действия различных зависящих от скорости потенциалов.

В работе Калоджеро<sup>19</sup> м. ф. ф. был обобщен на случай нелокального центрального потенциала. Уравнение для ф. ф. оказывается интегро-дифференциальным, допускающим итерационную процедуру нахождения решения.

Потенциальное рассеяние релятивистских частиц также может быть рассмотрено в м. ф. ф. Для заряженных частиц с нулевым спином релятивистское уравнение Шредингера имеет вид ( $\hbar = 1$ )

$$\Delta\psi + [(E - e\varphi)^2 c^{-2} - (mc^2 - V)^2 c^{-2}] \psi = 0. \quad (2,44)$$

Здесь  $e\varphi(r)$  и  $V(r)$  — соответственно электростатический и статический скалярный потенциалы. Можно показать, что в случае центральной симметрии потенциалов уравнения для фазовой и амплитудной функций совпадают с (2,5) и (2,8), если положить

$$2m = 1, \quad k = \sqrt{E^2 c^{-2} - \frac{1}{4} c^2},$$

$$V_{\text{эфф}} = V + 2Ec^2 e\varphi + c^{-2} V^2 - c^{-2} (e\varphi)^2. \quad (2,45)$$

Если потенциал  $V_{\text{эфф}}(r)$  содержит член, спадающий при  $r \rightarrow \infty$  как  $O(r^{-1})$ , из него следует выделить соответствующее этому члену эффективное кулоновское взаимодействие и перейти в уравнениях к кулоновским функциям (2,26).

Обобщение м. ф. ф. на уравнение Дирака было сделано в работах Кинча<sup>5</sup>, Калоджеро<sup>10</sup> и Калоджеро и Равенхолла<sup>18</sup>. Они рассмотрели рассеяние дираковской частицы на центральном электростатическом \*) потенциале  $e\varphi(r)$ . Уравнение Дирака в случае наличия также статического скалярного потенциала  $V(r)$  имеет вид ( $\hbar = c = 1$ )

$$[E - e\varphi + \alpha p + \beta (m + V)] \psi = 0. \quad (2,46)$$

Ввиду спин-орбитальной связи при заданном полном моменте  $j$  частицы возможны два значения орбитального момента  $l = j \pm 1/2$ , например при  $j = 1/2$  имеются состояния  $s_{1/2}$  и  $p_{1/2}$ . Соответственно этому рассеяние  $j$ -й парциальной волны описывается двумя фазами  $\delta_{j \pm 1/2}$ . Используя обозначения (2,32), уравнения для фазовых и амплитудных функций

\*) Подчеркнем, что, вопреки заголовку работы<sup>10</sup>, полученные в ней результаты относятся в действительности к электростатическому, а не скалярному потенциалу.

можно записать в виде

$$\delta'_{j \pm 1/2}(r) = -\lambda^{-1} [V(r) + e\varphi(r)] P_{j \pm 1/2, j \pm 1/2}^2(r) + \\ + \lambda [V(r) - e\varphi(r)] P_{j \pm 1/2, j \mp 1/2}^2(r), \quad \delta_{j \pm 1/2}(0) = 0, \quad (2,47)$$

$$A'_{j \pm 1/2}(r) = \exp \left\{ -\lambda^{-1} \int_{r_0}^r dr' [V(r') + e\varphi(r')] P_{j \pm 1/2, j \pm 1/2}(r') Q_{j \pm 1/2, j \pm 1/2}(r') - \right. \\ \left. + \lambda \int_{r_0}^r dr' [V(r') - e\varphi(r')] P_{j \pm 1/2, j \mp 1/2}(r') Q_{j \pm 1/2, j \mp 1/2}(r') \right\}. \quad (2,48)$$

Здесь  $\lambda = \sqrt{\frac{E-m}{E+m}}$ ,  $k = \sqrt{E^2 - m^2}$ , так что в нерелятивистском пределе  $\lambda = k/2m$  и эти уравнения переходят в (2,5) и (2,8). В ультрарелятивистском случае  $\lambda = 1$ .

Уравнения (2,47) и (2,48) справедливы при достаточно быстро спадающих на бесконечности потенциалах. Если имеется незранированный кулоновский потенциал, следует поступить аналогично тому, как описано выше для рассеяния скалярной частицы.

#### 2.4. Энергии связанных состояний

Хотя м. ф. ф., по-видимому, наиболее адекватен задачам рассеяния, в его рамках можно сформулировать, как показали Кинч<sup>5</sup> и Калоджеро<sup>8</sup>, также задачу собственных значений.

Для связанных состояний  $k = i\kappa$  ( $\kappa > 0$ ) и асимптотика решения уравнения Шредингера (2,1) имеет вид

$$u_l(r) \approx \text{const} \cdot [e^{-\kappa r} - (-1)^l \tilde{S}_l^{-1}(\infty, \kappa) e^{\kappa r}], \quad r \rightarrow \infty. \quad (2,49)$$

Поэтому необходимым условием исчезновения волновой функции на больших расстояниях с правильной асимптотикой является наличие полюса при определенном значении  $\kappa$  у элемента  $S$ -матрицы  $\tilde{S}_l(\infty, \kappa) \equiv S_l(\infty, i\kappa)$ , так что

$$\tilde{S}_l^{-1}(\kappa, r) e^{2\kappa r} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (2,50)$$

Условие (2,50) служит основой рассмотрения м. ф. ф. в задачах связанных состояний. Вещественная функция  $\tilde{S}_l(\kappa, r)$  удовлетворяет вещественному уравнению, следующему из (2,25),

$$\tilde{S}_l'(\kappa, r) = (-1)^l \frac{2}{\kappa} V(r) \left\{ i_l(\kappa r) + \frac{(-1)^{l+1}}{\pi} [\tilde{S}_l(\kappa, r) - 1] k_l(\kappa r) \right\}^2, \\ \tilde{S}_l(0, \kappa) = 1. \quad (2,51)$$

Из уравнения (2,51) видно, что в случае связанного состояния при  $r \rightarrow \infty$ , когда  $k_l(\kappa r) \rightarrow \frac{\pi}{2} e^{-\kappa r}$ ,

$$\tilde{S}_l^{-1}(\kappa, r) \approx \frac{(-1)^l}{2\kappa} \int_r^\infty e^{-2\kappa r'} V(r'), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2,52)$$

Таким образом, условие (2,50) действительно выполняется.

Используя уравнение (2,51) и аналогичное уравнение для обратной величины  $\tilde{S}_l^{-1}(\kappa, r)$ , можно численным способом определить энергии связанных состояний  $E_n = -\kappa_n^2$  в данном потенциале. Рассмотрим

потенциал конечного радиуса действия  $R$ . Искомые значения  $\kappa_n$  являются те, для которых  $\tilde{S}_l^{-1}(R, \kappa_n) = 0$ . На приведенном из работы<sup>8</sup> рис. 4 показано поведение при различных  $\kappa$  функций  $\tilde{Y}_l(\kappa, r)$  и  $\tilde{Y}_l^{-1}(\kappa, r)$ , простым образом связанных с  $\tilde{S}_l(\kappa, r)$ ,

$$\tilde{Y}_l(\kappa, r) = \frac{\tilde{S}_l(\kappa, r) k_l(\kappa r)}{k_l(\kappa r) + \pi(-1)^l i_l(\kappa r)}, \quad (2,53)$$

для  $S$ -рассеяния ( $l = 0$ ) на прямоугольной яме глубины  $V_0 = 9$  и радиуса  $R = 2$ . Точки пересечения кривых  $\tilde{Y}_0^{-1}(\kappa, r)$  с осью абсцисс отвечают полюсам  $S$ -матрицы и показывают ширину ямы, в которой имеется уровень  $E = -\kappa^2$ . При  $\kappa = 0$  это происходит в точках  $r_1 = \pi/6$  и  $r_2 = \pi/2$  (ср. рис. 2). Как видно из рис. 4, в яме шириной  $R = 2$  имеются два

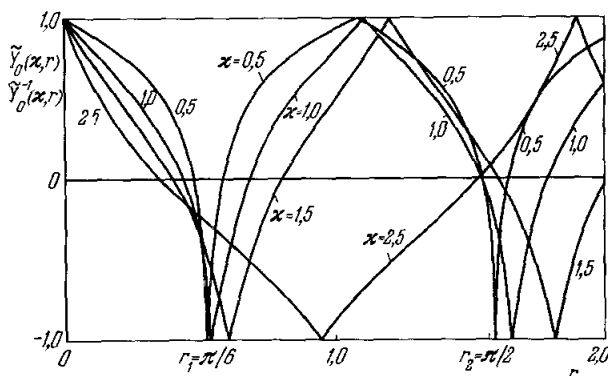


Рис. 4. Функции  $\tilde{Y}_0(\kappa, r)$  и  $\tilde{Y}_0^{-1}(\kappa, r)$  для прямоугольной потенциальной ямы при различных значениях  $\kappa$ .

связанных состояния, первое с энергией немного большей — 2,25 ( $\kappa \approx 1,5$ ) и второе с энергией немного меньшей — 6,25 ( $\kappa \approx 2,5$ ). Аналогичное рассмотрение можно провести при произвольном потенциале  $V(r)$ , обрезая его на достаточно больших расстояниях. Как видно из рис. 4, с ростом  $r$  интервалы между точками  $r_i$ , в которых  $\tilde{Y}_0^{-1}(r_i(\kappa), \kappa) = 0$ , увеличиваются. Поэтому точность определения энергии связанных состояний также возрастает.

Этот метод может быть использован также для определения параметров потенциала, имеющего связанные состояния с заданными энергиями связи.

### 3. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ

Приводятся точные уравнения для вычисления таких параметров низкоэнергетического рассеяния, как длина рассеяния, эффективный радиус и др.

#### 3.1. Короткодействующий центральный потенциал

Пусть потенциал  $V(r)$  является короткодействующим, т. е. спадает при  $r \rightarrow \infty$  по крайней мере экспоненциально. Тогда, как известно, фаза рассеяния  $\delta_l(k)$  и, следовательно,  $\operatorname{tg} \delta_l(k)$  являются нечетными функциями  $k$ , регулярными в точке  $k = 0$ . В этом случае величина

$k^{-1} \operatorname{tg} \delta_l(k)$  может быть разложена в ряд по степеням  $k^2$ , первые коэффициенты которого полностью определяют рассеяние при низких энергиях. М. ф. ф. для вычисления этих коэффициентов был предложен в работах Кинча<sup>5</sup>, Леви и Келлера<sup>11</sup> и Дашена<sup>12</sup>.

Представляя функцию  $\operatorname{tg} \delta_l(r, k)$  в виде ряда

$$\operatorname{tg} \delta_l(r, k) = - \frac{k^{2l+1}}{(2l+1)!! (2l-1)!!} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} a_{ln}(r) \quad (3.1)$$

и используя известные разложения функций  $j_l(kr)$ ,  $n_l(kr)$ , можно получить из (2,23) систему рекуррентных уравнений для коэффициентов  $a_{ln}(r)$ . Первое из уравнений нелинейно, а все последующие линейны; так, например,

$$\begin{aligned} a'_{l0} &= \frac{1}{2l+1} V(r^{l+1} - r^{-l} a_{l0})^2, & a_{l0}(0) &= 0, \\ a'_{l1} &= -\frac{1}{2l+1} r^{-l} V(r^{l+1} - r^{-l} a_{l0}) \left( 2a_{l1} + \frac{r^2}{2l-1} a_{l0} + \frac{r^{2l+3}}{2l+3} \right), & a_{l1}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В случае  $l=0$  уравнения принимают особенно простой вид:

$$\left. \begin{aligned} a'_{00} &= V(r - a_{00})^2, & a_{00}(0) &= 0, \\ a'_{01} &= -2V(r - a_{00}) a_{01} - r^2 V \left( a_{00} - \frac{4}{3} r a_{00} + \frac{1}{3} r^2 \right), & a_{01}(0) &= 0, \\ a'_{02} &= -2V(r - a_{00}) a_{02} + V \left( a_{01}^2 - 2r^2 a_{00} a_{01} + \frac{4}{3} r^3 a_{01} - \frac{1}{3} r^4 a_{00}^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{15} r^5 a_{00} + \frac{2}{45} r^6 \right), & a_{02}(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Начальные условия для уравнений (3,2), (3,3) в случае сингулярных потенциалов легко могут быть найдены из условий (2,13), (2,15), (2,18)

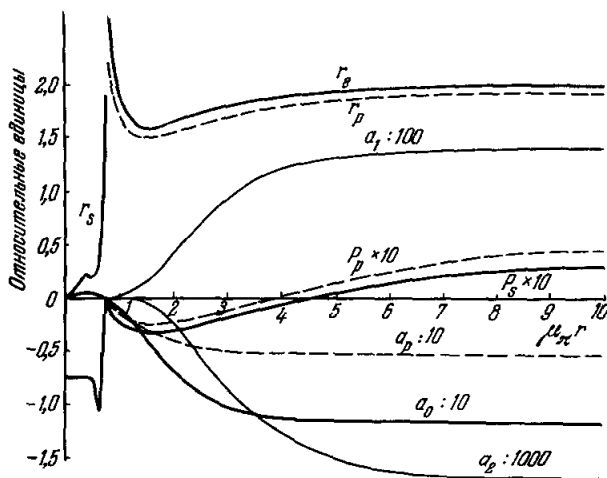


Рис. 5. Решения уравнений (3,3) и параметры  $a_0$ ,  $r_s$ ,  $\rho_s$  синглетного  ${}^1S_0$  нейтрон-протонного рассеяния для потенциала Хамады — Джонстона как функции  $x = \mu_\pi r$ .

Пунктирными кривыми показаны длина рассеяния, эффективный радиус и параметр формы  ${}^1S_0$  протон-протонного рассеяния.

и (2,21). Функции  $a_{0n}$  связаны простым образом с параметрами теории эффективного радиуса: длиной рассеяния  $a_0$ , эффективным радиусом  $r_e$ ,

параметром формы  $P$  и др., которые определяются разложением

$$k \operatorname{ctg} \delta_0 = -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_e k^2 - P r_e^3 k^4 + O(k^6). \quad (3.4)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{r \rightarrow \infty} a_{00}(r), & r_e &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2a_{01}(r)}{a_{00}^2(r)}, \\ P &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \frac{a_{00}^3(r)}{a_{01}^3(r)} [a_{01}^2(r) - a_{00}(r) a_{02}(r)]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При конечных значениях  $r$  соотношения (3,5) определяют функции  $a_0(r)$ ,  $r_e(r)$ ,  $P(r)$ , соответствующие параметрам рассеяния на обрзанном потенциале  $V(r') \theta(r-r')$ .

Уравнения (3,3) очень удобны для численных расчетов. В качестве примера на рис. 5 сплошными кривыми показаны решения уравнений (3,3) и вычисленные<sup>27</sup> параметрические функции  $a_0(r)$ ,  $r_e(r)$ ,  $P(r)$  для  $^1S_0$  нейтрон-протонного рассеяния с потенциалом Хамады — Джонстона. Из рисунка видно, что эффективный радиус  $r_e$  обращается в бесконечность в точке, где длина рассеяния  $a_0(r) = 0$ .

Вычисление длины рассеяния на потенциале, зависящем от скорости, рассматривалось Мак-Келларом и Мэем<sup>39</sup>.

### 3.2. Д а л ь н о д е й с т в у ю щ и й ц е н т р а л ь н ы й п о т е н ц и а л

В случае дальнегодействующего, например, спадающего степенным образом, потенциала фазовая функция  $\delta_l(r, k)$  уже не является аналитической в точке  $k = 0$ , обладая логарифмическими и корневыми особенностями. Поэтому разложение (3,4) принимает более сложный вид, включая члены типа  $k^m \ln k$  и  $k^{m/n}$ . М. ф. ф. для определения коэффициентов разложения в этом случае был развит Леви и Келлером<sup>11</sup>. Они рассмотрели потенциалы, обладающие асимптотикой  $O(r^{-\nu})$  с  $\nu > 3$ . Весьма важный случай короткодействующего и кулоновского потенциала ( $\nu = 1$ ), когда  $\delta_l(k)$  обладает существенной особенностью при  $k = 0$ , был рассмотрен в работах<sup>17, 27</sup>.

Параметры низкоэнергетического  $S$ -рассеяния определяются тогда разложением

$$2\pi\eta(e^{2\pi\eta} - 1) k \operatorname{ctg} \delta_0 + R^{-1}h(\eta) = -\frac{1}{a_p} + \frac{1}{2} r_p k^2 - P_p r_p^3 k^4 + \dots \quad (3.6)$$

Здесь  $R = \hbar^2/2mz_1z_2e^2$ ,  $\eta = (2kR)^{-1}$ ,  $h(\eta)$  — известная функция. Как показано в работах<sup>17, 27</sup>, для вычисления параметров  $a_p$ ,  $r_p$ ,  $P_p$  необходимо решать аналогичную (3,3) систему уравнений. Так, например, для длины рассеяния  $a_p(r)$  имеет место уравнение

$$a'_p(r) = V(r) [rL_1(r/R) - a_p(r) H_1(r/R)]^2, \quad a_p(0) = 0. \quad (3.7)$$

Здесь обозначено:  $L_1(r/R) = (r/R)^{-1/2} I_1(2\sqrt{r/R})$ ,  $H_1(r/R) = 2(r/R)^{1/2} \times \times K_1(2\sqrt{r/R})$ , где  $I_1(x)$ ,  $K_1(x)$  — функции Бесселя мнимого аргумента. Результаты расчета<sup>27</sup>  $a_p(r)$ ,  $r_p(r)$ ,  $P_p(r)$  для  $^1S_0$  протон-протонного рассеяния с потенциалом Хамады — Джонстона показаны на рис. 5 пунктирными линиями. Вычисления показали, что м. ф. ф., позволяющий учесть точным образом кулоновское взаимодействие при ядерном рассеянии, очень удобен при численных расчетах.

### 3.3. Тензорный потенциал

Точная теория эффективного радиуса при рассеянии на тензорном потенциале в м. ф. ф. была развита в работах <sup>26, 27</sup>. В случае короткодействующего потенциала используются разложения

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \bar{\delta}_{J, J-1}(r, k) &= -\frac{k^{2J-1}}{(2J-1)!!(2J-3)!!} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} A_{Jn}(r), \\ \bar{\varepsilon}_J(r, k) &= -\frac{k^{2J+1}}{(2J+1)!!(2J-3)!!} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} B_{Jn}(r), \\ \operatorname{tg} \bar{\delta}_{J, J+1}(r, k) &= -\frac{k^{2J+3}}{(2J+3)!!(2J+1)!!} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} C_{Jn}(r). \end{aligned} \right\} \quad (3,8)$$

Из уравнений (2,33) следуют системы связанных уравнений для каждого из значений  $n$ . В частности, для первых ( $n=0$ ) коэффициентов разложений (3,8) уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} A'_{J0} &= \frac{1}{2J-1} V_{J, J-1} (r^J - A_{J0} r^{-J+1})^2 - 2T_J (r^J - A_{J0} r^{-J+1}) B_{J0} r^{-J-1} + \\ &\quad + (2J-1) V_{J, J+1} B_{J0}^2 r^{-2J-2}, \\ B'_{J0} &= \frac{1}{(2J-1)(2J+3)} T_J (r^J - A_{J0} r^{-J+1}) (r^{J+2} - C_{J0} r^{-J-1}) + T_J B_{J0}^2 r^{-2J} - \\ &\quad - \frac{1}{2J-1} V_{J, J-1} (r^J - A_{J0} r^{-J+1}) B_{J0} r^{-J+1} - \\ &\quad - \frac{1}{2J+3} V_{J, J+1} (r^{J+2} - C_{J0} r^{-J-1}) B_{J0} r^{-J-1}, \\ C'_{J0} &= \frac{1}{2J+3} V_{J, J+1} (r^{J+2} - C_{J0} r^{-J-1})^2 - 2T_J (r^{J+2} - C_{J0} r^{-J-1}) B_{J0} r^{-J+1} + \\ &\quad + (2J+3) V_{J, J-1} \bar{B}_{J0}^2 r^{-2J+2}. \end{aligned} \right\} \quad (3,9)$$

Длиной рассеяния в  ${}^3S_1$ -состоянии является в этом случае величина  $A_{1,0}(r)$ . Соотношения (3,5) связывают остальные параметры низкоэнергетического  ${}^3S_1$ -рассеяния с другими коэффициентами  $A_{Jn}(r)$ .

### 3.4. Регуляризация уравнений при наличии связанных состояний

Все приведенные выше уравнения для коэффициентов низкоэнергетических разложений фаз рассеяния пригодны, только если потенциал не содержит связанных состояний. Иначе в некоторой точке  $r_1$  такой, что потенциал  $V(r) \theta(r_1 - r)$  обладает уровнем с нулевой энергией связи, первый коэффициент  $a_{l0}(r_1)$  и все остальные  $a_{ln}(r_1)$  обращаются в бесконечность. Для  $l=0$  это отвечает хорошо известному факту неограниченной величины длины рассеяния при резонансном рассеянии на уровне нулевой энергии связи.

В данных случаях необходимо переформулировать уравнения (3,2), (3,3), (3,7), (3,9) таким образом, чтобы все входящие в них величины стали конечными. Первое нелинейное уравнение регуляризуется, если

положить <sup>5, 12</sup>  $a_{l0}(r) = \operatorname{tg} \alpha_l(r)$ . Уравнение для функции  $\alpha_l(r)$  имеет вид

$$\alpha'_l(r) = \frac{1}{2l+1} V(r) [r^{l+1} \cos \alpha_l(r) - r^{-l} \sin \alpha_l(r)]^2, \quad \alpha_l(0) = 0. \quad (3,10)$$

При тензорном потенциале регуляризация уравнений (3,9) достигается аналогичным образом <sup>17, 26</sup>.

Линейные уравнения для остальных коэффициентов  $a_{ln}(r)$  в случае центрального потенциала и уравнения для коэффициентов  $A_{ln}(r)$ ,  $B_{ln}(r)$ ,  $C_{ln}(r)$  при тензорном потенциале можно регуляризовать, отделяя расходящиеся члены <sup>17, 27</sup>. В частности, этого можно добиться, определяя новые функции, являющиеся коэффициентами при отрицательных степенях  $\cos \alpha_l(r)$ . Полагая, например,  $a_{01}(r) = \beta_{01}(r) \cos^{-2} \alpha_0(r)$ , получим уравнение для определения  $\beta_{01}(r)$ , не содержащее расходящихся членов,  $\beta'_{01} = -2\beta_{01}V(r \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0)(\cos \alpha_0 + r \sin \alpha_0) -$

$$- \frac{1}{3} r^2 V (r^2 \cos^2 \alpha_0 - 4r \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + 3 \sin^2 \alpha_0), \quad \beta_{01}(0) = 0. \quad (3,11)$$

Эффективный радиус при этом равен  $r_e(r) = 2\beta_{01}(r)/\sin^2 \alpha_0(r)$ . Аналогичным образом можно регуляризовать уравнения для случая тензорного потенциала.

Проще всего, однако, использовать наряду с системой уравнений для функций  $a_{ln}(r)$  систему для обратных величин  $b_{ln}(r) = a_{ln}^{-1}(r)$ , легко получающуюся из (3,2), (3,3). В области  $r$ , где  $|a_{l0}(r)| > 1$ , следует перейти к интегрированию системы уравнений для функций  $b_{ln}(r)$ , и наоборот, там, где  $|b_{l0}(r)| > 1$ , можно вернуться к первой системе.

#### 4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

Метод фазовых функций позволяет наряду с известными приближенными методами получить ряд новых приближенных формул для вычисления фаз и других параметров рассеяния.

##### 4.1. Борновское и модифицированное борновское приближения

Как известно, борновское приближение применимо, когда  $\operatorname{tg} \delta_l(k) \ll 1$ . Поэтому удобно отправляться от уравнения (2,23). Пренебрегая в правой части уравнения членами, содержащими  $\operatorname{tg} \delta_l(r, k)$ , получаем первый член борновского ряда

$$\operatorname{tg} \delta_l(r, k) = -\frac{1}{k} \int_0^r V(r') j_l^2(kr') dr'. \quad (4,1)$$

Подставляя значение (4,1) в правую часть уравнения (2,23), можно найти следующий член борновского приближения. Повторяя эту процедуру, получим весь ряд теории возмущений.

Можно, однако, произвести частичное суммирование ряда теории возмущений, если сохранить в уравнении (2,23) член, линейный по  $\operatorname{tg} \delta_l(r)$ , и полученное уравнение решить точно. Тогда получим <sup>8</sup>

$$\operatorname{tg} \delta_l(r) = -\frac{1}{k} \int_0^r dr' V(r') j_l^2(kr') \exp \left\{ \frac{2}{k} \int_{r'}^r dr'' V(r'') j_l(kr'') n_l(kr'') \right\}. \quad (4,2)$$

Выражение (4,2) отвечает первому члену модифицированного борновского приближения. Подставляя (4,2) в квадратичный по  $\operatorname{tg} \delta_l(r)$  член урав-

нения (2,23) и снова решая линейное уравнение, можно получить новый ряд модифицированной теории возмущений.

Аналогичные приближенные формулы получаются для парциальной амплитуды рассеяния и элемента  $S$ -матрицы, если исходить из уравнений (2,24) и (2,25). Весьма подробное рассмотрение  $S_l(r)$  таким методом было проведено Кляром, Крюгером и Флюгге<sup>41, 42</sup>.

В случае низкоэнергетического рассеяния борновское и соответственно модифицированное борновское приближение дают<sup>12</sup> для длины рассеяния, определяемой первым из уравнений (3,3).

$$a_0(r) = \int_0^r V(r') r'^2 dr', \quad (4,3)$$

$$a_0(r) = \int_0^r dr' V(r') r'^2 \exp \left[ -2 \int_{r'}^r r'' V(r'') dr'' \right]. \quad (4,4)$$

Естественно думать, что ряд модифицированной теории возмущений лучше аппроксимирует фазу или длину рассеяния, чем обычное борновское разложение, и быстрее сходится. В этом можно убедиться с помощью

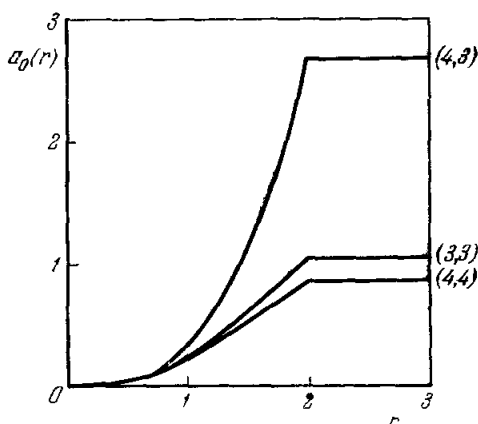


Рис. 6. Точное решение уравнения (3,3) для длины рассеяния на прямоугольном барьере и приближенные решения, соответствующие уравнениям (4,3) и (4,4).

рис. 6, на котором для потенциального барьера  $V(r) = \theta(2-r)$  показано<sup>12</sup> поведение точного решения  $a_0(r)$  и приближенных решений, полученных из (4,3) и (4,4). Тот же вывод следует, если сравнить с разложением по силе связи<sup>42</sup> точного решения разложения выражений (4,3) и (4,4). Ряд приближенных формул для специального случая сингулярного потенциала был получен Калоджеро<sup>22, 36</sup>. Калоджеро и Кассандро<sup>25</sup> и Домби<sup>37</sup>. Аналогичное рассмотрение нетрудно провести для более сложных случаев присутствия кулоновского потенциала и тензорных сил и на случай релятивистского рассеяния.

Вместо базисных функций, отвечающих свободному движению  $j_l(kr)$ ,  $n_l(kr)$  или кулоновскому потенциалу  $F_l(kr, \eta)$ ,  $G_l(kr, \eta)$ , можно выбрать, очевидно, любую другую систему функций, отвечающих какой-то части потенциала  $V_1(r)$ . Приближенное вычисление фаз рассеяния с использованием остальной части потенциала  $V(r) - V_1(r)$  соответствует тогда известному методу искаженных волн в теории ядерного рассеяния.

Рассмотрим, наконец, предельный случай больших энергий. В нерелятивистском случае это означает  $k \rightarrow \infty$ . Нетрудно видеть, используя асимптотические выражения (1,4) для функций Риккати — Бесселя, что

$$\operatorname{tg} \delta_l(k) \rightarrow -\frac{m}{\hbar^2 k} \int_0^\infty V(r) dr \rightarrow 0. \quad (4,5)$$

В ультрарелятивистском случае как для рассеяния бозона, описываемого уравнением Клейна — Гордона (2,44), так и для рассеяния

дираковской частицы (2,47) скалярный потенциал дает в фазу исчезающе малый вклад (4,5) по сравнению с конечным вкладом от четвертой компоненты векторного, в частности, электростатического потенциала ( $l = j \pm 1/2$ )

$$\operatorname{tg} \delta_l(k) \rightarrow -\frac{1}{\hbar c} \int_0^{\infty} e\varphi(r) dr, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4,6)$$

Результат (4,6) связан с тем обстоятельством, что эффективное взаимодействие релятивистской частицы с векторным потенциалом (2,45) растет пропорционально энергии.

Уравнения (4,5) и (4,6) пригодны, конечно, только для несингулярных потенциалов. В противном случае следует выделить область расстояний  $r \lesssim 1/k$  около начала координат, где справедливы разложения (1,5). Тогда можно показать <sup>22</sup>, что сдвиг фазы возрастает с энергией, но не быстрее, чем первая степень  $k$ . В случае больших энергий можно также, исходя из модифицированного борновского приближения для функций  $S_l(r, k)$ , просуммировать все парциальные амплитуды и получить аналитическое выражение <sup>42</sup> для полной амплитуды рассеяния  $f(\theta)$ .

#### 4.2. Квазиклассическое приближение

В работе Дашена <sup>15</sup> было показано, что м. ф. ф. может быть использован для получения известных формул квазиклассического приближения при условии

$$\frac{d}{dr} \ln \sqrt{E - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2} - V(r)} < 1. \quad (4,7)$$

Интересно исследовать поведение сдвига фазы данной парциальной волны  $\delta_l$  как функции  $\hbar$  при  $\hbar \rightarrow 0$ . Рассмотрим случай  $l = 0$ . Выделим явно зависимость от  $\hbar$  и положим  $2m = E = 1$ . Тогда уравнение (2,6) примет вид

$$\delta'_0(r, \hbar) = -\frac{1}{\hbar} V(r) \sin^2 \left[ \frac{r}{\hbar} + \delta_0(r, \hbar) \right], \quad \delta_0(0, \hbar) = 0. \quad (4,8)$$

Заметим, что фазы, будучи нечетными функциями  $k = \hbar^{-1}$ , являются нечетными функциями  $\hbar$ . Соответственно фазу  $\delta_0(r, \hbar)$  можно искать в виде разложения

$$\delta_0(r, \hbar) = \hbar^{-1} \alpha_0(r) + \hbar \alpha_1(r) + \hbar^3 \alpha_2(r) + \dots \quad (4,9)$$

Тогда можно показать, что при регулярном в точке  $r = 0$  потенциале первые два коэффициента равны

$$\alpha_0(\infty) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} V(r) dr, \quad (4,10)$$

$$\alpha_1(\infty) = -\frac{V'(0)}{[2 - V(0)]^3} \exp \left[ -\frac{V(0)}{2 - V(0)} \right]. \quad (4,11)$$

Разложение (4,9) не является квазиклассическим, так как при этом фиксируется величина  $l$ , а не момент  $\hbar l$ , имеющий классический предел. Оно представляет интерес с математической точки зрения. Так, выражение (4,11) показывает, что коэффициенты разложения сдвига фазы по степеням параметра  $\hbar$  содержат существенные особенности относительно силы взаимодействия. Аналогичное заключение можно сделать о разложении сдвигов фаз при  $l > 0$ .

### 4.3. Вариационные методы

Как было показано Спрахом<sup>7</sup>, Калоджеро<sup>8, 9, 13, 16</sup> и Титцем<sup>38</sup>, в рамках м. ф. ф. могут быть сформулированы новые вариационные принципы для фаз рассеяния. В частности, оказывается, что тангенс фазы является стационарным значением функционала<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_l(k) = \operatorname{Stat}_{y_l} \left\{ -\frac{1}{k} \int_0^\infty dr V(r) [j_l(kr) - y_l(r) n_l(kr)]^2 \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ \frac{2}{k} \int_r^\infty dr' V(r') n_l(kr') (j_l(kr') - y_l(r') n_l(kr')) \right] \right\} \quad (4,12) \end{aligned}$$

при вариациях функции  $y_l(r)$ . Выражение (4,12) может служить исходной формулой для получения приближенных значений  $\operatorname{tg} \delta_l(k)$ . Зная потенциал  $V(r)$ , можно ввиду наглядности поведения ф. ф. весьма точно выбрать исходный вид пробной функции  $y_l(r)$ . Например, взяв пробную функцию  $y_l(r) = 0$ , получим модифицированное борновское приближение (4,2).

Если потенциал всюду одного знака, т. е. притягивающий или отталкивательный, могут быть сформулированы вариационные принципы<sup>16</sup> максимума или минимума функционала (4,12). В этом случае вариационный принцип позволяет оценить верхний или нижний пределы фазовых сдвигов и их производных по энергии и моменту. Аналогичные вариационные принципы, естественно, могут быть получены для уравнений (2,24), (2,25), для вычисления параметров низкоэнергетического рассеяния и для оценки энергий связанных состояний. В отличие от стандартных методов, вариационные принципы для уравнения Риккати дают возможность не только уверенно находить класс пробных функций, но и оценивать знак и величину получаемой погрешности.

## 5. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

С помощью метода фазовых функций можно более простым и наглядным, чем обычно, образом получить как известные теоремы, так и ряд новых результатов теории потенциального рассеяния. Ниже это демонстрируется на ряде примеров.

### 5.1. Аналитические свойства парциальных амплитуд рассеяния

В работах Калоджеро<sup>14</sup> и Шадана и Геннеге<sup>23</sup> м. ф. ф. был применен для исследования аналитических свойств парциальных амплитуд рассеяния. Было показано<sup>23</sup>, что уравнение (2,24) очень удобно для прямого анализа особенностей парциальных амплитуд в комплексных плоскостях энергии и углового момента. При этом отпадает необходимость использования таких вспомогательных величин, как функции Иоста. В работах<sup>14, 23</sup> были получены все теоремы Редже и других авторов относительно мероморфности амплитуд рассеяния в области  $\operatorname{Re} l < -1/2$ , их аналитического поведения при  $l \rightarrow \infty$ , комплексных областей локализации полюсов амплитуд, кинематического разреза, начинающегося при  $k = 0$ , и возможных динамических разрезов в комплексной плоскости энергий.

Другим примером приложения м. ф. ф. к общим проблемам теории может служить исследование вопроса сходимости метода ператизации. Этот метод был предложен как инструмент при работе с неперенормируемыми теориями поля. Его аналогом в нерелятивистской теории потенциального рассеяния является утверждение, что фазы рассеяния на сильно сингулярном при  $r \rightarrow 0$  потенциале  $V(r)$  могут быть получены как предельные значения фаз рассеяния на регуляризованном, в частности, обрезанном на малых расстояниях потенциале  $V(r)\theta(r-\epsilon)$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Рассматривая, например, уравнение для длины рассеяния (3,3), можно показать, что его решение  $a_0(\infty, \epsilon, g)$  при потенциале  $V = g^2 r^{-4}\theta(r-\epsilon)$  равно

$$a_0(\infty, \epsilon, g) = g \operatorname{th}(g/\epsilon), \quad g > 0. \quad (5.1)$$

Таким образом, хотя радиус сходимости теории возмущений равен  $\epsilon$  и стремится к нулю при  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} a_0(\epsilon)$  действительно существует и равен значению  $a_0 = g$  для нерегуляризованного потенциала.

## 5.2. Число связанных состояний в данном потенциале

Метод фазовых функций позволяет, как показал Калоджеро<sup>30-32</sup>, получить новые оценки для числа  $n_l$  связанных состояний в данном потенциале и найти простые условия, определяющие класс потенциалов, обладающих по крайней мере одним связанным состоянием с каждым из моментов  $l < L$ . С этой целью ищутся полюсы решений уравнения Риккати (3,2) для функции  $a_{l0}(r)$ , отвечающие, как отмечалось выше, связанным состояниям с нулевой энергией связи. При условии, что потенциал  $V(r)$  всюду является притягивающим, число полюсов определяет число связанных состояний. Результаты анализа таковы<sup>30</sup>: верхняя оценка для несингулярных потенциалов

$$n_l \leq n_0 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dr |V(r)|^{1/2}, \quad V'(r) \leq 0, \quad (5.2)$$

нижняя оценка

$$n_l \geq \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dr \min \left[ q(qr)^{2l}, -\frac{1}{q} \frac{V(r)}{(qr)^{-2l}} \right] \right\}. \quad (5.3)$$

Здесь  $\{ \}$  означают целочисленную часть выражения,  $\min[A, B] = A$  при  $A \leq B$  и равно  $B$  при  $B \leq A$ . Величина  $q$  является произвольной постоянной с размерностью обратной длины. Из условий (5,2) и (5,3) следует, что если  $g$  является константой связи потенциала, то число состояний может возрастать с ростом  $g$  не быстрее, чем квадратный корень, т. е. асимптотически

$$n_l \sim \sqrt{g}. \quad (5.4)$$

Что касается условия, при котором в потенциале  $V(r)$  содержатся связанные состояния с  $l \leq L$ , то оно имеет вид<sup>31</sup>

$$\int_0^\infty \frac{d(qr) |V(r)|}{(qr)^{2l} q^2 + (qr)^{-2l} |V(r)|} > 1. \quad (5.5)$$

Для  $S$ -состояний ( $L = 0$ ), например, этому условию удовлетворяет класс потенциалов Хюльгена

$$V(r) = -\frac{(1+\varepsilon)q^2}{e^{qr}-1}, \quad (5,6)$$

где  $\varepsilon > 0$ ,  $q > 0$  — произвольные постоянные.

Как уже было отмечено в разделе 2, м. ф. ф. дает наглядную интерпретацию теореме Левинсона о связи фазы рассеяния при нулевой энергии с числом связанных состояний<sup>8</sup>.

### 5.3. Обратная задача рассеяния

Уравнения для фазовой функции (2,5) и для других параметров рассеяния можно использовать для нахождения потенциалов, приводящих к данному значению соответствующего параметра. Например, пусть известна величина длины рассеяния  $A_0$ . Тогда, задаваясь произвольной зависимостью функции  $a_0(r)$ , удовлетворяющей граничным условиям \*)  $a_0(0) = 0$ ,  $a_0(\infty) = A_0$ , найдем из (3,3)

$$V(r) = \frac{a'_0(r)}{[r - a_0(r)]^2}. \quad (5,7)$$

Так, если

$$a_0(r) = A_0 r (r + A_0)^{-1},$$

тогда  $V(r) = A_0^2 r^{-4}$ .

Уравнения м. ф. ф. дают также возможность новой постановки проблемы отыскания потенциала  $V(r)$ , если известна зависимость данной фазы  $\delta_l(k)$  от энергии  $E = k^2$  во всем интервале  $0 \leq k < \infty$ . Запишем уравнение (2,23) в виде

$$\int_0^\infty V(r) K_l(r, k) dr = T_l(k). \quad (5,8)$$

Здесь  $T_l(k) = k \operatorname{tg} \delta_l(k)$  — известная функция, а ядро интегрального уравнения

$$K_l(r, k) = [j_l(kr) - t_l(r, k) n_l(r, k)]^2 > 0 \quad (5,9)$$

является функционалом от  $V(r)$ . Уравнение (5,8) является исходным пунктом итерационного процесса для определения  $V(r)$ , если рассматривать его как интегральное уравнение Фредгольма первого рода с известным ядром. В качестве первого шага можно, задаваясь пробной функцией  $V^{(0)}(r)$ , определить из (2,23) начальное значение для тангенса фазы  $t_l^{(0)}(r, k)$  и подставить его в ядро (5,9). С полученным ядром  $K_l^{(0)}(r, k)$  решаем уравнение (5,8) и находим следующее приближение для потенциала  $V^{(1)}(r)$ . Повторяя ту же процедуру достаточное число раз, придем к искомому решению  $V(r)$ . Можно ожидать хорошей сходимости итерационного процесса при удачном выборе первого приближения  $V^{(0)}(r)$ .

Заметим также, что м. ф. ф. очень удобен в моделях типа модели с граничными условиями, в которых действие неизвестной внутренней части потенциала заменяется определенными граничными значениями для фаз рассеяния. Эти граничные условия являются тогда начальными условиями для уравнений (2,5), (2,23) и других.

\*) Необходимо также, чтобы при малых  $r$  производная  $a'_0(r)$  удовлетворяла условиям  $-1 < a'_0(r) \leq 1$ , следующим из (2,18) и (2,21).

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Новый формализм квантовой механики, описанный выше, обладает, как было отмечено, рядом преимуществ перед стандартным методом решения уравнения Шредингера. Это относится как к численным способам расчета фаз и других параметров рассеяния, так и к общим вопросам теории потенциального рассеяния. М. ф. ф. оказался очень удобным при решении многих задач ядерной <sup>29</sup> и атомной <sup>40</sup> физики.

Изложение материала велось таким образом, чтобы, с одной стороны, показать исходные пункты метода, а с другой — дать основные уравнения и результаты в форме, пригодной для непосредственного практического использования. Все более сложные или специальные вопросы освещались весьма кратко с учетом того, что подробности содержатся в оригинальных работах.

Следует подчеркнуть, что ряд вопросов еще ждет своего разрешения. Так, например, нет пока аналога уравнению для фазовой функции, построенного для полной амплитуды рассеяния на произвольном потенциале. Было бы интересно рассмотреть в рамках м. ф. ф. кроме задачи двух тел задачу трех и более тел. Не исследован с этой точки зрения также случай потенциала, зависящего от времени.

В заключение отметим, что большим вкладом в развитие м. ф. ф. является цикл работ Калоджеро, начатый большой статьей <sup>8</sup>.

Объединенный институт  
ядерных исследований

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. P. M. Morse and W. P. Allis, *Phys. Rev.* **44**, 269 (1933).
2. Г. Ф. Друкaрев, *ЖЭТФ* **19**, 247 (1949); Г. Ф. Друкaрев, Теория столкновений электронов с атомами, М., Физматгиз, 1963, стр. 37.
3. O. Bergmann, *Acta Phys. Austriaca* **4**, 62 (1950).
4. P. O. Olsson, *Ark. Fys.* **4**, 217 (1952).
5. G. I. Kynch, *Proc. Phys. Soc.* **A65**, 83, 94 (1952).
6. Franchetti, *Nuovo Cimento* **6**, 601 (1957).
7. L. Spruch, in «Lectures in Theoretical Physics», vol. 4, ed. W. F. Brittin, B. W. Downs and I. Downs, Intern. Publ. Inc., N.Y., 1962.
8. F. Calogero, *Nuovo Cimento* **27**, 261 (1963).
9. F. Calogero, *Nuovo Cimento* **27**, 947 (1963).
10. F. Calogero, *Nuovo Cimento* **27**, 1007 (1963).
11. B. R. Levy, J. B. Keller, *J. Math. Phys.* **4**, 54 (1963).
12. R. F. Dashen, *J. Math. Phys.* **4**, 338 (1963).
13. F. Calogero, *J. Math. Phys.* **4**, 427 (1963).
14. F. Calogero, *Nuovo Cimento* **28**, 66 (1963).
15. R. F. Dashen, *Nuovo Cimento* **28**, 229 (1963).
16. F. Calogero, *Nuovo Cimento* **28**, 320 (1963).
17. В. В. Бабилов, Некоторые методы вычисления параметров потенциального рассеяния, Изд-во ОИЯИ, Р-1728, Дубна, 1964.
18. F. Calogero, D. G. Ravenhall, *Nuovo Cimento* **32**, 1755 (1964).
19. F. Calogero, *Nuovo Cimento* **33**, 352 (1964).
20. Ch. Zemach, *Nuovo Cimento* **33**, 939 (1964).
21. T. F. O'Malley, *Phys. Rev.* **134**, A 1188 (1964).
22. F. Calogero, *Phys. Rev.* **135**, B 693 (1964).
23. K. Chadani, J. Y. Guennegues, *Nuovo Cimento* **34**, 665 (1964).
24. A. Degasperis, *Nuovo Cimento* **34**, 1667 (1964).
25. F. Calogero, M. Cassandro, *Nuovo Cimento* **34**, 1712 (1964).
26. В. В. Бабилов, *Ядерная физика* **1**, 360 (1965).
27. В. В. Бабилов, *Ядерная физика* **1**, 793 (1965).
28. В. В. Бабилов, *Ядерная физика* **1**, 984 (1965).
29. В. В. Бабилов, Материалы Совещания по математическим методам решения задач ядерной физики, Изд-во ОИЯИ, 2005, Дубна, 1965, стр. 28.

30. F. Calogero, Commun. Math. Phys. **1**, 80 (1965).
31. F. Calogero, J. Math. Phys. **6**, 161, 1105 (1965).
32. F. Calogero, Nuovo Cimento **36**, 199 (1965).
33. T. Tietz, Nuovo Cimento **35**, 308 (1965).
34. J. R. Cox, A. Perlmutter, Nuovo Cimento **37**, 76 (1965).
35. J. R. Cox, Nuovo Cimento **37**, 474 (1965).
36. F. Calogero, Nuovo Cimento **37**, 756 (1965).
37. N. Dombey, Nuovo Cimento **37**, 1743 (1965).
38. T. Tietz, Nuovo Cimento **37**, 1774 (1965).
39. B. H. J. McKellar, R. M. May, Nucl. Phys. **65**, 289 (1965).
40. T. F. O'Malley, Phys. Rev. **137**, A 1668 (1965).
41. H. Klar, H. Krüger, Z. Phys. **191**, 409 (1966).
42. S. Flügge, H. Klar, H. Krüger, Z. Phys. **191**, 417 (1966).

*Примечание при корректуре.* Как сообщил нам профессор Ф. Калоджеро, в издательстве Academic Press (N. Y.) в скором времени выходит его книга, посвященная методу фазовых функций.