

## К ТЕОРИИ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ \*)

*Н. Н. Боголюбов*

В настоящей статье сделана попытка построения последовательной молекулярной теории явления сверхтекучести, без допущения определенных предположений о структуре энергетического спектра.

Наиболее естественно здесь исходить из модели неидеального газа Бозе — Эйнштейна со слабым взаимодействием между частицами.

Аналогичные попытки объяснения сверхтекучести с помощью явления вырождения идеального газа Бозе — Эйнштейна уже делались в свое время Тиссой и Лондоном, но столкнулись с сильной критикой.

---

\*) Воспроизводится по Изв. АН СССР, сер. физ. **11**(1), 77 (1947).

Указывалось, например, что гелий-II ввиду наличия интенсивного взаимодействия между его молекулами не имеет ничего общего с идеальным газом. Это возражение, впрочем, не может считаться существенным, так как, если поставить целью создание не феноменологической теории, а молекулярной, и исходить только из общепринятых «микроскопических» уравнений квантовой механики, совершенно ясно, что попытки теоретического расчета свойств реальной жидкости безнадежны. От молекулярной теории сверхтекучести, во всяком случае на первом этапе, можно требовать лишь принципиального, качественного объяснения, основанного на упрощенной модели.

Действительно, существенное возражение против указанного круга идей состоит в том, что в вырожденном идеальном газе Бозе — Эйнштейна частицы, находящиеся в основном состоянии, не могут вести себя как «сверхтекучие», поскольку ничто не могло бы помешать им обмениваться импульсом с возбужденными частицами при столкновениях и тем самым испытывать трение при их движении через жидкость.

В настоящей статье мы постараемся преодолеть эту основную трудность и показать, что при некоторых условиях в слабо неидеальном газе Бозе — Эйнштейна «вырожденный конденсат» может двигаться без трения относительно элементарных возбуждений с произвольной, достаточно малой скоростью. Существенно отметить, что в нашей теории эти элементарные возбуждения являются коллективным эффектом и не могут отождествляться с индивидуальными молекулами. Необходимость рассмотрения «коллективных» элементарных возбуждений вместо индивидуальных молекул была впервые подчеркнута Л. Д. Ландау в его известной работе по теории сверхтекучести.

1

Рассмотрим систему  $N$  одинаковых одноатомных молекул, заключенных в некотором макроскопическом объеме  $V$  и подчиняющихся статистике Бозе.

Предположим, как обычно, что ее гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{(1 \leq i \leq N)} T(p_i) + \sum_{(1 \leq i < j \leq N)} \Phi(|q_i - q_j|),$$

где

$$T(p_i) = \frac{|p_i|^2}{2m} = \sum_{(1 \leq \alpha \leq 3)} \frac{(p_i^\alpha)^2}{2m}$$

— кинетическая энергия  $i$ -й молекулы,  $\Phi(|q_i - q_j|)$  — потенциальная энергия пары  $(i, j)$ .

Тогда, воспользовавшись методом вторичного квантования, напомним основное уравнение в следующей форме:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + \int \Phi(|q - q'|) \Psi^*(q') \Psi(q') dq' \Psi, \quad (1)$$

причем

$$\Psi = \sum_f a_f \varphi_f(q), \quad \Psi^* = \sum_f a_f^* \varphi_f^*(q).$$

В этих формулах  $a_f$ ,  $a_f^*$  — сопряженные операторы с перестановочными соотношениями известного типа

$$a_f a_{f'} - a_{f'} a_f = 0, \quad a_f a_{f'}^* - a_{f'}^* a_f = \Delta_{f, f'} = \begin{cases} 0, & f \neq f', \\ 1, & f = f', \end{cases}$$

а  $\{\varphi_f(q)\}$  — ортонормированная,

$$\int \varphi_f^*(q) \varphi_{f'}(q) dq = \Delta_{f,f'},$$

полная система функций.

Для простоты изложения будем применять в дальнейшем систему собственных функций оператора импульса одной частицы

$$\varphi_f(q) = \frac{1}{V^{1/2}} e^{i \frac{(f \cdot q)}{\hbar}}, \quad (f \cdot q) = \sum_{(1 \leq \alpha \leq 3)} f^\alpha q^\alpha,$$

для которой оператор  $N_f = a_f^* a_f$  представляет число молекул с импульсом  $f$ . При конечном значении  $V$  вектор  $f$ , очевидно, является квантованным. Например, при обычных граничных условиях типа периодичности

$$f^\alpha = \frac{2\pi n^\alpha \hbar}{l},$$

где  $n^1, n^2, n^3$  — целые числа,  $l$  — сторона куба, объем которого  $V$ .

Поскольку, однако, мы здесь будем заниматься исследованием термодинамических, объемных свойств, мы должны всегда иметь в виду предельный переход, при котором стенки сосуда раздвигаются до бесконечности,  $V \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ , а удельный объем  $v = V/N$  остается постоянным. Поэтому в конечном результате будем переходить к непрерывному спектру, заменяя суммы вида  $\sum_f F(f)$  интегралами

$$\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int F(f) df.$$

Уравнения (1) являются точными уравнениями задачи  $N$  тел, и, чтобы продвинуться в исследовании движения рассматриваемой совокупности молекул, нам необходимо совершить некоторую аппроксимацию, основанную на допущении малости энергии взаимодействия. В соответствии с этим допущением будем считать потенциальную функцию  $\Phi(r)$  пропорциональной некоторому малому параметру  $\varepsilon$ . Какое безразмерное отношение может быть принято за  $\varepsilon$  — выяснится из дальнейшего. Заметим лишь, что, строго говоря, сделанное предположение соответствует пренебрежению конечностью радиуса молекул, поскольку мы здесь не учитываем интенсивного возрастания  $\Phi(r)$  при малых  $r$ , обеспечивающего непроницаемость молекул. Впрочем, как мы увидим, результаты, которые будут получены, могут быть обобщены и на случай учета конечности радиуса.

Переходя к формулировке приближенного приема, заметим, что если бы взаимодействие полностью отсутствовало, т. е. если бы параметр  $\varepsilon$  точно равнялся нулю, то при нулевой температуре мы могли бы положить  $N_0 = N$ ,  $N_f = 0$  ( $f \neq 0$ ). В рассматриваемом же случае малого  $\varepsilon$  и слабо возбужденных состояний газа эти соотношения выполняются импульсами, близкими к нулю. Разумеется, выбор нулевого импульса, как предельного для частиц в основном состоянии, очевидно, соответствует специальному выбору координатной системы именно такой, в которой «конденсат» покоится.

На этих соображениях мы основываем следующий прием для приближенного решения уравнений (1).

1. Ввиду того, что  $N_0 = a_0^* a_0$  весьма велико по сравнению с единицей, выражение

$$a_0 a_0^* - a_0^* a_0 = 1$$

должно быть мало по сравнению с самими  $a_0, a_0^*$ , и потому мы будем считать  $a_0, a_0^*$  обычными числами\*), пренебрегая их некоммутативностью.

2. Полагая

$$\Psi = \frac{a_0}{\sqrt{V}} + \vartheta, \quad \vartheta = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{(f \neq 0)} a_f e^{i \frac{(f \cdot q)}{\hbar}},$$

будем считать  $\vartheta$  «поправочным членом первого порядка» и пренебрежем в уравнении (1) членами, начиная с квадратичных относительно  $\vartheta$ , что соответствует учету слабости возбуждения.

Тогда получим основные приближенные уравнения в виде

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \vartheta + \frac{N_0}{V} \Phi_0 \vartheta + \frac{N_0}{V} \int \Phi(|q - q'|) \vartheta(q') dq' + \\ + \frac{a_0^2}{V} \int \Phi(|q - q'|) \vartheta^*(q') dq', \\ i\hbar \frac{\partial a_0}{\partial t} = \frac{N_0}{V} \Phi_0 a_0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\Phi_0 = \int \Phi(|q|) dq.$$

Для перехода от операторной волновой функции  $\vartheta$  к операторным амплитудам  $a_f$  воспользуемся разложением Фурье

$$\Phi(|q - q'|) = \sum_f \frac{1}{V} e^{i \frac{f \cdot (q - q')}{\hbar}} \nu(f). \quad (3)$$

Благодаря радиальной симметрии потенциальной функции, амплитуды

$$\nu(f) = \int \Phi(|q|) e^{-i \frac{(f \cdot q)}{\hbar}} dq$$

в этом разложении зависят лишь от длины  $|f|$  вектора  $f$ .

Подставив (3) в уравнение (2), найдем

$$i\hbar \frac{\partial a_f}{\partial t} = \left\{ T(f) + E_0 + \frac{N_0}{V} \nu(f) \right\} a_f + \frac{a_0^2}{V} \nu(f) a_{-f}^*, \quad E_0 = \frac{N_0}{V} \Phi_0$$

или, полагая

$$a_f = e^{\frac{E_0}{i\hbar} t} b_f, \quad a_0 = e^{\frac{E_0}{i\hbar} t} b, \quad (4)$$

можем написать также

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial b_f}{\partial t} &= \left( T(f) + \frac{N_0}{V} \nu(f) \right) b_f + \frac{b^2}{V} \nu(f) b_{-f}^*, \\ -i\hbar \frac{\partial b_{-f}^*}{\partial t} &= \frac{(b^*)^2}{V} \nu(f) b_f + \left( T(f) + \frac{N_0}{V} \nu(f) \right) b_{-f}^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Решая эту систему двух уравнений с постоянными коэффициентами, убеждаемся, что зависимость от времени операторов  $b_f, b_f^*$  выражается линейной комбинацией экспоненциалов вида

$$e^{\pm \frac{E(f)}{i\hbar} t},$$

\*) Аналогичное замечание было использовано Дираком в его монографии «Основы квантовой механики», 2-е англ. изд., в конце § 63 «Волны и бозе — эйнштейновские частицы».

где

$$E(f) = \sqrt{2T(f) \frac{N_0}{V} \nu(f) + T^2(f)}. \quad (6)$$

Заметим теперь, что если

$$\nu(0) = \int \Phi(|q|) dq > 0,$$

то в рассматриваемом случае ( $\epsilon$  достаточно мало) подкоренное выражение в (6) будет положительным и, таким образом,  $b_f$ ,  $b_f^*$  оказываются периодическими функциями времени. Если, наоборот,  $\nu(0) < 0$ , то для малых импульсов это подкоренное выражение будет отрицательным и, следовательно,  $E(f)$  окажется комплексным. Поэтому  $b_f$ ,  $b_f^*$  будут содержать вещественный экспоненциал, возрастающий со временем, ввиду чего состояния с малыми  $N_f$  оказываются неустойчивыми.

Чтобы обеспечить устойчивость слабо возбужденных состояний, будем рассматривать в дальнейшем только такие типы взаимодействия между молекулами, для которых неравенство (7) удовлетворяется. Интересно отметить, что неравенство (7) представляет собою не что иное, как условие термодинамической устойчивости газа при абсолютном нуле.

В самом деле, при абсолютном нуле свободная энергия совпадает со средней энергией, а главный член в выражении этой последней имеет вид

$$E = \frac{N^2}{2V} \int \Phi(|q|) dq,$$

так как поправочные члены, например, средняя кинетическая энергия, будут пропорциональны высшим степеням  $\epsilon$ .

Поэтому давление  $P$  выразится формулой

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = \frac{N^2}{2V^2} \int \Phi(|q|) dq = \frac{\rho^2}{2m^2} \int \Phi(|q|) dq,$$

где  $\rho = \frac{Nm}{V}$  — плотность газа. Следовательно, неравенство (7) эквивалентно условию термодинамической устойчивости  $\frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$ .

Заметим, наконец, что, поскольку мы здесь учитываем лишь главные члены, вместо (6) можем написать с тем же приближением

$$E(f) = \sqrt{2T(f) \frac{N}{V} \nu(f) + T^2(f)} = \sqrt{\frac{|f|^2 \nu(f)}{mv} + \frac{|f|^4}{4m^2}}, \quad (6_1)$$

откуда для малых импульсов

$$E(f) = \sqrt{\frac{\nu(0)}{mv}} |f| (1 + \dots) = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} |f| (1 + \dots), \quad (7)$$

где многоточие обозначает члены, исчезающие вместе с  $f^*$ .

Условимся теперь всегда приписывать всякому квадратному корню, с которым будем иметь дело, положительный знак.

Тогда для малых импульсов

$$E(f) = c |f| (1 + \dots), \quad (8)$$

где  $c$  — скорость звука при абсолютном нуле. Наоборот, для достаточно больших импульсов можно разложить  $E(f)$  по степеням  $\epsilon$  и написать

$$E(f) = \frac{|f|^2}{2m} + \frac{1}{v} \nu(f) + \dots \quad (9)$$

\*) Если мы построим здесь соответствующую частоту  $E(f)/\hbar$  и перейдем к пределу:  $\hbar \rightarrow 0$ ,  $f/\hbar = k$ , то получим классическую формулу А. А. Власова для зависимости частоты от волнового числа.

Так как  $v(f)$  стремится к нулю при увеличении  $|f|$ , то для достаточно больших импульсов  $E(f)$  приближается к кинетической энергии одной молекулы  $T(f)$ .

Возвратимся теперь к уравнениям (5) и введем вместо операторов  $b_f, b_f^*$  новые взаимно сопряженные операторы  $\xi_f, \xi_f^*$  с помощью соотношений

$$\xi_f = \frac{b_f - L_f b_{-f}^*}{\sqrt{1 - |L_f|^2}}, \quad \xi_f^* = \frac{b_f^* - L_f^* b_{-f}}{\sqrt{1 - |L_f|^2}}, \quad (10)$$

в которых  $L_f$  представляют числа, определенные равенствами

$$L_f = \frac{Vb^2}{N_0^2 v(f)} \left\{ E(f) - T(f) - \frac{N_0}{V} v(f) \right\},$$

так что

$$|L_f|^2 = \left( \frac{\frac{N_0}{V} v(f)}{E(f) + T(f) + \frac{N_0}{V} v(f)} \right)^2, \quad 1 - |L_f|^2 = \frac{2E(f)}{E(f) + T(f) + \frac{N_0}{V} v(f)}. \quad (11)$$

Обращая (10), найдем

$$b_f = \frac{\xi_f + L_f \xi_f^*}{\sqrt{1 - |L_f|^2}}, \quad b_f^* = \frac{\xi_f^* + L_f^* \xi_f}{\sqrt{1 - |L_f|^2}}. \quad (12)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (5), получим

$$i\hbar \frac{\partial \xi_f}{\partial t} = E(f) \xi_f, \quad -i\hbar \frac{\partial \xi_f^*}{\partial t} = E(f) \xi_f^*. \quad (13)$$

Непосредственно убеждаемся также, что новые операторы удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы  $a_f, a_f^*$ :

$$\xi_f \xi_{f'} - \xi_{f'} \xi_f = 0, \quad \xi_f \xi_{f'}^* - \xi_{f'}^* \xi_f = \Delta_{f, f'}. \quad (14)$$

Отсюда уже можно заключить, что возбужденные состояния изучаемой совокупности молекул можно представить как идеальный газ из отдельных «элементарных возбуждений» — «квазичастиц» с энергией, зависящей от импульса согласно формуле  $E = E(f)$ . Подобно тому как молекулы описывались операторами  $a_f, a_f^*$ , эти квазичастицы описываются операторами  $\xi_f, \xi_f^*$  и потому также подчиняются статистике Бозе. Оператор

$$n_f = \xi_f^* \xi_f$$

представляет число квазичастиц с импульсом  $f$ .

Сказанное станет совершенно ясным, когда мы рассмотрим полную энергию

$$H = H_{\text{кин}} + H_{\text{пот}},$$

где

$$\begin{aligned} H_{\text{кин}} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^*(q) \Delta \Psi(q) dq, \\ H_{\text{пот}} &= \frac{1}{2} \int \Phi(|q - q'|) \Psi^*(q) \Psi^*(q') \Psi(q) \Psi(q') dq dq' = \\ &= \frac{1}{2V} \sum_i v(f) \int e^{i\{f \cdot (q - q')\}} \Psi^*(q) \Psi^*(q') \Psi(q) \Psi(q') dq dq'. \end{aligned}$$

Имеем для кинетической энергии

$$H_{\text{кин}} = \sum_f T(f) a_f^* a_f = \sum_f T(f) b_f^* b_f.$$

Потенциальную энергию вычислим в соответствии с принятым приближением, а именно, в выражении

$$\begin{aligned} \Psi^*(q) \Psi^*(q') \Psi(q) \Psi(q') = \\ = \left( \frac{a_0^*}{\sqrt{V}} + \vartheta^*(q) \right) \left( \frac{a_0^*}{\sqrt{V}} + \vartheta^*(q') \right) \left( \frac{a_0}{\sqrt{V}} + \vartheta(q) \right) \left( \frac{a_0}{\sqrt{V}} + \vartheta(q') \right) \end{aligned}$$

отбросим члены, начиная с кубических по отношению к  $\vartheta$ ,  $\vartheta^*$ . Тогда

$$\begin{aligned} H_{\text{пот}} = \Phi_0 \left\{ \frac{1}{2} \frac{N_0^2}{V} + \frac{N_0}{V} \sum_{f \neq 0} b_f^* b_f \right\} + \frac{b^2}{2V} \sum_{f \neq 0} v(f) b_f^* b_{-f}^* - \\ - \frac{(b^*)^2}{2V} \sum_{f \neq 0} v(f) b_f b_{-f} + \frac{N_0}{V} \sum_{f \neq 0} v(f) b_f^* b_f. \end{aligned}$$

Так как здесь

$$\sum_{f \neq 0} b_f^* b_f = \sum_{f \neq 0} N_f = N - N_0,$$

то в принятом приближении

$$\frac{1}{2} \frac{N_0^2}{V} + \frac{N_0}{V} \sum_{f \neq 0} b_f^* b_f = \frac{1}{2} \frac{N^2}{V}$$

и потому

$$\begin{aligned} H = \frac{N^2}{2V} \Phi_0 + \frac{b^2}{2V} \sum_{f \neq 0} v(f) b_f^* b_{-f}^* + \frac{(b^*)^2}{2V} \sum_{f \neq 0} v(f) b_f b_{-f} + \\ + \frac{N_0}{V} \sum_{f \neq 0} v(f) b_f^* b_f + \sum_f T(f) b_f^* b_f. \end{aligned}$$

Выразив операторы  $b_f$ ,  $b_f^*$  через операторы  $\xi_f$ ,  $\xi_f^*$  с помощью формул (12), найдем окончательно

$$H = H_0 + \sum_{f \neq 0} E(f) n_f, \quad n_f = \xi_f^* \xi_f, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} H_0 = \frac{1}{2} \frac{N^2}{V} \Phi_0 + \sum_{f \neq 0} \frac{E(f) - T(f) - \frac{N_0}{V} v(f)}{2} = \\ = \frac{1}{2} \frac{N^2}{V} \Phi_0 + \frac{V}{2(2\pi\hbar)^3} \int \left\{ E(f) - T(f) - \frac{N_0}{V} v(f) \right\} df. \quad (16) \end{aligned}$$

Итак, полная энергия рассматриваемого неидеального газа складывается из энергии основного состояния  $H_0$  и суммы индивидуальных энергий отдельных квазичастиц. Квазичастицы, очевидно, не взаимодействуют друг с другом и образуют идеальный газ Бозе—Эйнштейна.

Легко видеть, что отсутствие взаимодействия между квазичастицами обусловлено применявшейся аппроксимацией, в которой в выражении энергии отбрасывались члены, начиная с кубических по отношению к  $\xi_f$ ,  $\xi_f^*$ . Поэтому полученный результат относится лишь к слабо возбужденным состояниям.

Если бы мы учли, как малое возмущение, отброшенные кубические члены в выражении энергии или, соответственно, квадратичные члены в уравнениях (13), то мы обнаружили бы слабое взаимодействие между квазичастицами, обуславливающее установление статистического равновесия в их совокупности. Переходя к изучению состояния статистического равновесия, докажем, что полный импульс квазичастиц  $\sum f n_f$  сохраняется. Рассмотрим для этого компоненты полного импульса совокупности молекул. Имеем

$$\sum_{(1 \leq i \leq N)} p_i^\alpha = \int \Psi^*(q) \left\{ -i\hbar \frac{\partial \Psi(q)}{\partial q^\alpha} \right\} dq = \sum_f f^\alpha a_f^* a_f = \sum_f f^\alpha b_f^* b_f,$$

откуда на основании формул преобразования (12) убеждаемся, что

$$\sum_{(1 \leq i \leq N)} p_i^\alpha = \sum_f f^\alpha \frac{(\xi_f^* + L_f^* \xi_{-f})(\xi_f + L_f \xi_{-f}^*)}{1 - |L_f|^2}.$$

Но ввиду инвариантности  $L_f, L_f^*$  при замене  $f$  на  $-f$  можно написать

$$\begin{aligned} \sum_f f^\alpha \frac{L_f^* \xi_{-f} \xi_f}{1 - |L_f|^2} &= \sum_f f^\alpha \frac{L_f \xi_f^* \xi_{-f}^*}{1 - |L_f|^2} = 0, \\ \sum_f f^\alpha \frac{|L_f|^2 \xi_{-f} \xi_{-f}^*}{1 - |L_f|^2} &= \sum_f f^\alpha \frac{|L_f|^2 (\xi_{-f} \xi_{-f}^* - 1)}{1 - |L_f|^2} = - \sum_f f^\alpha \frac{|L_f|^2}{1 - |L_f|^2} \xi_f^* \xi_f, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\sum_{(1 \leq i \leq N)} p_i^\alpha = \sum_f f^\alpha n_f,$$

т. е. что полный импульс совокупности молекул равен полному импульсу совокупности квазичастиц. Поскольку полный импульс совокупности молекул сохраняется, то сумма  $\sum_f f n_f$ , действительно, представляет собою интеграл движения.

Легко заметить, что полное число квазичастиц  $\sum n_f$  не сохраняется; они могут возникать и уничтожаться. Поэтому с помощью обычного рассуждения убеждаемся, что в состоянии статистического равновесия средние значения чисел заполнения  $\bar{n}_f (f \neq 0)$  определяются формулой

$$\bar{n}_f = \left\{ A \exp \left( \frac{E(f) - (f \cdot u)}{\theta} \right) - 1 \right\}^{-1}, \quad A = 1, \quad (17)$$

где  $\theta$  — температурный модуль,  $u$  — произвольный вектор. Длина этого вектора, впрочем, должна быть ограничена сверху. В самом деле, так как средние числа заполнения должны быть положительны, для всех  $f \neq 0$  должно выполняться неравенство

$$E(f) > (f \cdot u),$$

из которого следует неравенство

$$E(f) > |f| |u|.$$

Но в силу ранее установленных свойств  $E(f)$  отношение

$$\frac{E(f)}{|f|}$$

является непрерывной положительной функцией  $|f|$ , принимающей значение  $c > 0$  при  $|f| = 0$  и возрастающей как  $\frac{|f|}{2m}$  при  $|f| \rightarrow \infty$ . Поэтому



рассматриваемое отношение имеет существенно положительное минимальное значение; таким образом, условие положительности чисел  $\bar{n}_f$  эквивалентно неравенству

$$|u| \leq \min \frac{E(f)}{|f|}. \quad (18)$$

Если бы при малых импульсах  $E(f)$  убывало не пропорционально импульсу, а пропорционально его квадрату, как кинетическая энергия молекулы, то правая часть полученного неравенства равнялась бы нулю и единственным возможным значением  $u$  был бы нуль. В нашем же случае вектор  $u$  может быть произвольным, лишь бы его длина была достаточно мала.

Заметим, что формула (17) дает такое распределение импульсов в газе квазичастиц, при котором он как целое движется со скоростью  $u$ . Вначале мы выбрали координатную систему, в которой конденсат, т. е. совокупность молекул, в основном состоянии покоится. Если бы мы перешли к координатной системе, в которой газ квазичастиц как целое покоится, мы обнаружили бы, наоборот, движение конденсата со скоростью  $u$ . Поскольку это относительное движение происходит стационарно в состоянии статистического равновесия при отсутствии внешних сил, мы видим, что оно не сопровождается трением и представляет собой, следовательно, свойство сверхтекучести \*).

Как мы видели, энергия квазичастицы при малых импульсах приближенно равна  $c|f|$ , где  $c$  — скорость звука. Поэтому квазичастица при малых импульсах представляет собою не что иное, как фонон. При увеличении импульса, когда кинетическая энергия  $T(f)$  делается большой по сравнению с энергией связи молекулы, энергия квазичастицы непрерывно переходит в индивидуальную энергию молекулы  $T(f)$ .

Таким образом, ни о каком разделении квазичастиц на два различных сорта, на фононы и ротоны, не может быть речи.

## 2

Рассмотрим теперь распределение импульсов в совокупности молекул для состояния статистического равновесия. Введем функцию  $w(f)$ , определив ее так, чтобы  $Nw(f)df$  представляло среднее число молекул с импульсами из элементарного импульсного объема  $df$ . Эта функция, очевидно, нормирована в том смысле, что

$$\int w(f)df = 1. \quad (19)$$

Пусть теперь  $F(f)$  — произвольная непрерывная функция импульса. Тогда среднее значение динамической переменной

$$\sum_{(1 \leq i \leq N)} F(p_i)$$

\*) Если мы возьмем систему координат, в которой конденсат движется со скоростью  $u$ , нетрудно заметить, что энергия рассматриваемой совокупности молекул будет

$$H = \sum_f \{E(f) - (f \cdot u)\} n_f + H_0 + \frac{Mu^2}{2}.$$

Отсюда с помощью рассуждения Ландау из его ранее цитированной работы свойство сверхтекучести делается непосредственно очевидным, поскольку возникновение элементарных возбуждений энергетически невыгодно, так как сопровождается увеличением энергии.

будет равно

$$N \int F(f) w(f) df. \quad (20)$$

Но, с другой стороны, это же среднее значение равно

$$\sum_f F(f) \bar{N}_f = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int F(f) \bar{N}_f df. \quad (21)$$

Таким образом, сравнивая (20) и (21), находим

$$w(f) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\bar{N}_f}{\bar{N}} = \frac{v}{(2\pi\hbar)^3} \overline{b_f^* b_f},$$

откуда, выражая  $b_f^*$ ,  $b_f$  через  $\xi_f^*$ ,  $\xi_f$ , получим

$$w(f) = \frac{v}{(2\pi\hbar)^3} (1 - |L_f|^2)^{-1} (\xi_f^* + L_f^* \xi_{-f}) (\xi_f + L_f \xi_{-f}^*) = \\ = \frac{v}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\bar{n}_f + |L_f|^2 (\bar{n}_{-f} + 1)}{1 - |L_f|^2}, \quad (22)$$

где на основании (17)

$$\bar{n}_f = \left\{ \exp \left( \frac{E(f) - (f \cdot u)}{\theta} \right) - 1 \right\}^{-1}. \quad (23)$$

Полученное выражение (22) для функции распределения справедливо лишь для  $f \neq 0$ . Поэтому на основании условия нормировки (19) общее выражение для функции распределения импульсов молекул будет

$$w(f) = C \delta(f) + \frac{v}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\bar{n}_f + |L_f|^2 (\bar{n}_{-f} + 1)}{1 - |L_f|^2}, \quad (24)$$

где  $\delta(f)$  —  $\delta$ -функция Дирака,  $C$  — число, определенное равенством

$$C = 1 - \frac{v}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\bar{n}_f + |L_f|^2 (\bar{n}_{-f} + 1)}{1 - |L_f|^2} df. \quad (25)$$

Величина  $C$ , очевидно, равна  $\frac{N_0}{N}$ , так как  $CN$  представляет среднее число молекул с нулевым импульсом.

В полученных формулах, на основании (11),

$$\frac{|L_f|^2}{1 - |L_f|^2} = \frac{\left( \frac{N_0}{V} v(f) \right)^2}{2E(f) \left\{ E(f) + T(f) + \frac{N_0}{V} v(f) \right\}}, \\ \frac{1}{1 - |L_f|^2} = \frac{E(f) + T(f) + \frac{N_0}{V} v(f)}{2E(f)}, \quad (26)$$

и потому при абсолютном нуле функция распределения импульсов будет

$$w(f) = C \delta(f) + \frac{v}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\left( \frac{N_0}{V} v(f) \right)^2}{2E(f) \left\{ E(f) + T(f) + \frac{N_0}{V} v(f) \right\}},$$

причем

$$1 - C = \frac{v}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\left( \frac{N_0}{V} v(f) \right)^2}{2E(f) \left\{ E(f) + T(f) + \frac{N_0}{V} v(f) \right\}} df. \quad (27)$$

Таким образом, и при абсолютном нуле только часть молекул будет обладать точно нулевым импульсом. Остальные же непрерывно распределены по всему спектру импульса.

В соответствии с ранее сказанным, примененный нами приближенный метод пригоден лишь, пока  $\frac{N-N_0}{N} = 1 - C \ll 1$ ; поэтому взаимодействие между молекулами должно быть достаточно малым, чтобы обеспечить малость интеграла (27).

Теперь выясним, что следует понимать под малостью взаимодействия. Пусть

$$\Phi(r) = \Phi_m F\left(\frac{r}{r_0}\right),$$

где  $F(\rho)$  — функция, принимающая со своими производными значения порядка 1 для  $\rho \sim 1$ , быстро стремящиеся к нулю при  $\rho \rightarrow \infty$ . Тогда

$$v(f) = \Phi_m r_0^3 \omega\left(\frac{|f| r_0}{\hbar}\right),$$

где  $\omega(x)$  — функция, принимающая значения  $\sim 1$  для  $x \sim 1$ , быстро стремящиеся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ .

Переходя в (27) к безразмерным переменным и приводя трехмерный интеграл к одномерному, найдем

$$\frac{N-N_0}{N} = \frac{v}{r_0^3} \eta \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\eta \omega^2(x) x dx}{\alpha(x) \{x\alpha(x) + x^2 + \eta\omega(x)\}}, \quad (28)$$

где

$$\alpha(x) = \sqrt{x^2 + 2\eta\omega(x)}, \quad \eta = \frac{r_0^3 N_0}{V} \Phi_m / \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \sim \frac{r_0^3}{v} \Phi_m / \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}.$$

Нетрудно убедиться, что при малом  $\eta$  интеграл в правой части (28) будет величиной порядка  $\sqrt{\eta}$  и условие применимости нашего метода представится неравенствами

$$\eta \ll 1, \quad \frac{v}{r_0^3} \eta^{\frac{3}{2}} \ll 1,$$

т. е.

$$\frac{r_0^3}{v} \Phi_m \ll \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}, \quad \sqrt[3]{\frac{r_0^3}{v}} \Phi_m \ll \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}. \quad (29)$$

Для температур, отличных от нуля, аналогичное рассмотрение общей формулы (24) приведет к дополнительному условию слабости возбуждения, требующему, чтобы температура была мала по сравнению с температурой  $\lambda$ -точки.

Как видно, условие малости взаимодействия в форме (29) автоматически исключает возможность учета коротко действующих сил отталкивания, так как для этого было бы необходимо принять во внимание интенсивное возрастание  $\Phi(r)$  при  $r \rightarrow 0$ .

Нетрудно, однако, видоизменить полученные здесь результаты с тем, чтобы распространить их на более реальный случай газа малой плотности с молекулами, обладающими конечным радиусом.

Действительно, в наших окончательных формулах потенциальная функция  $\Phi(r)$  входит лишь в выражение

$$v(f) = \int \Phi(|q|) e^{-\frac{i(f \cdot q)}{\hbar}} dq, \quad (30)$$

пропорциональное амплитуде борновской вероятности парного соударения. Так как при малой плотности взаимодействие между молекулами осуществляется главным образом с помощью именно парных соударений, выражение (30) должно быть заменено \*) соответствующим выражением, пропорциональным амплитуде «точной вероятности» парного соударения; иными словами, мы должны положить

$$v(f) = \int \Phi(|q|) \varphi(q, f) dq, \quad (31)$$

где  $\varphi(q, f)$  — решение уравнения Шрёдингера для относительного движения пары молекул

$$-\frac{\hbar^2}{m} \Delta \varphi + \{\Phi(|q|) - E\} \varphi = 0,$$

переходящее на бесконечности в  $e^{-\frac{i(f \cdot q)}{\hbar}}$ .

Замена (30) на (31) в формуле для  $E(f)$  и приведет нас к результатам, относящимся к газам малой плотности. Поэтому, например, условие существования сверхтекучести  $v(0) > 0$  запишется в виде

$$\int \Phi(|q|) \varphi(|q|) dq > 0, \quad (32)$$

где  $\varphi(|q|)$  — радиально симметричное решение уравнения

$$-\frac{\hbar^2}{m} \Delta \varphi + \Phi(|q|) \varphi = 0,$$

переходящее на бесконечности в 1.

Чтобы связать, как и раньше, неравенство (32) с условием термодинамической устойчивости, вычислим главный член в разложении свободной энергии газа при абсолютном нуле по степеням плотности. Поскольку при абсолютном нуле свободная энергия совпадает со средней энергией, имеем следующее выражение для этой энергии, отнесенной к одной молекуле:

$$\mathcal{E} = \bar{T} + \frac{1}{2v} \int \Phi(|q|) g(|q|) dq, \quad (33)$$

где  $\bar{T}$  — среднее значение кинетической энергии одной молекулы,  $g(r)$  — молекулярная функция распределения, стремящаяся к 1 при  $r \rightarrow \infty$ .

С другой стороны, по теореме вириала давление  $P$  можно определить по формуле

$$Pv = \frac{2}{3} \bar{T} - \frac{1}{6} \int \Phi'(|q|) |q| g(|q|) dq. \quad (34)$$

Заметим теперь, что главный член в разложении молекулярной функции распределения (при абсолютном нуле) по степеням плотности будет, очевидно, равен  $\varphi^2(|q|)$ . Поэтому, отбрасывая в (33) и (34) члены, пропорциональные квадрату плотности, найдем

$$\mathcal{E} = \bar{T} + \frac{1}{2v} \int \Phi(|q|) \varphi^2(|q|) dq, \quad Pv = \frac{2}{3} \bar{T} - \frac{1}{6v} \int \Phi'(|q|) \varphi^2(|q|) dq.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$Pv = -v \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v},$$

\*) Это важное замечание было мне любезно сообщено Л. Д. Ландау.

получим уравнение для определения главного члена в выражении  $\bar{T}$ . Произведя вычисление, находим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2v} \int \Phi(|q|) \Psi(|q|) dq = \frac{v(0)}{2v}, \quad P = \frac{v(0)}{2v^2}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае (газ малой плотности) условие существования сверхтекучести (32) эквивалентно обычному условию термодинамической устойчивости газа при абсолютном нуле  $\frac{\partial P}{\partial v} < 0$ .

Кроме того, можно также убедиться в том, что при малых импульсах энергии квазичастиц опять будет переходить в  $c|f|$ , где  $c$  — скорость звука.

Рассмотрим в качестве примера модель, в которой молекулы являются идеально упругими шарами с диаметром  $r_0$ , так что

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= +\infty, & r < r_0, \\ \Phi(r) &= 0, & r > r_0. \end{aligned}$$

Произведя простое вычисление, найдем

$$v(0) = 4\pi \frac{\hbar^2 r_0}{m}.$$

Если допустить здесь наличие слабого притяжения между шарами и положить

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= +\infty, & r < r_0, \\ \Phi(r) &= \varepsilon \Phi_0(r) < 0, & r > r_0, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, то с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$  получим

$$v(0) = 4\pi \frac{\hbar^2 r_0}{m} + 4\pi \int_{r_0}^{\infty} r^2 \Phi(r) dr.$$

Таким образом, в данной модели появление сверхтекучести обусловлено соотношением между силами отталкивания и притяжения. Силы отталкивания «благоприятствуют» сверхтекучести, силы притяжения «спрепятствуют».

Заметим в заключение, что переход к рассмотрению реальной жидкости по указанной здесь теории, по-видимому, возможен, если использовать такие полуфеноменологические понятия, как понятие свободной энергии для слабо неравновесных состояний.

Математический институт Академии наук УССР  
Физический факультет  
Московского государственного университета