

532.132+539.128.53/55

ТЕОРИЯ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ ГЕЛИЯ-II *)

Л. Д. Ландау

Производится квантование произвольной системы взаимодействующих частиц (жидкости) с помощью введения операторов плотности и скорости жидкости; выводятся условия коммутации между этими операторами (§ 1). На основании результатов этого квантования определяется общий характер распределения энергетических уровней в спектре квантовой жидкости (§ 2); исследуется характер температурной зависимости теплоемкости гелия-II (§ 3). Оказывается, что при температуре абсолютного нуля квантовая жидкость может обладать свойством сверхтекучести (§ 4). При температурах, отличных от абсолютного нуля, в гелии-II оказывается возможным одновременное существование двух движений — сверхтекучего и нормального, что может быть описано посредством введения понятий о сверхтекучей и нормальной «частях» жидкости; λ -точка гелия-II связана с исчезновением «сверхтекучей части» жидкости (§ 5). Дается истолкование опытов по измерению вязкости и теплопроводности гелия-II; рассмотрен термомеханический эффект в гелии-II (§ 6). Выведена система гидродинамических уравнений, описывающих макроскопическое движение гелия-II (§ 7). С помощью этих уравнений исследовано распространение звука и показано, что в гелии-II должны существовать две скорости звука (§ 8). В § 9 обсуждается проблема сверхпроводимости.

Как известно, жидкий гелий при температурах ниже его λ -точки (так называемый гелий-II) обладает рядом замечательных свойств. Из этих свойств основным является открытая П. Л. Капицей ¹ сверхтекучесть гелия, — отсутствие вязкости при течении гелия-II через тонкие капилляры или щели.

Все эти свойства, как и сам факт существования жидкости вплоть до абсолютного нуля, очевидно, не могут быть объяснены в классической теории и связаны с квантовыми явлениями.

Тисса ² предложил рассматривать гелий-II как вырожденный идеальный бозе-газ. При этом предполагается, что атомы, находящиеся в основном состоянии (состоянии с равной нулю энергией), движутся через жидкость без трения о стенки сосуда и об остальную часть жидкости. Такое представление не может, однако, быть признано удовлетворительным. Не говоря уже о том, что жидкий гелий не имеет ничего общего с идеальным газом, атомы, находящиеся в основном состоянии, отнюдь не вели бы себя как «сверхтекучие». Напротив, ничто не могло бы мешать атомам, находящимся в нормальном состоянии, сталкиваться с возбужденными атомами, т. е. при движении через жидкость они испытывали бы трение и ни о какой «сверхтекучести» не могло бы быть и речи. Таким образом, объяснение, предложенное Тиссой, является только кажущимся и не только не вытекает из делаемых предположений, но прямо противоречит им.

1. КВАНТОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Произвольную систему взаимодействующих частиц (жидкость) можно описывать в классической теории посредством плотности ρ и потока массы $\mathbf{j}$, определяемых следующим образом. Пусть $\mathbf{R}$ есть радиус-вектор произвольной точки в пространстве, а $\mathbf{r}_\alpha$ — радиус-вектор частицы с массой m_α . Тогда ρ определяется как

$$\rho = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R}), \quad (1,1)$$

*) Воспроизводится по ЖЭТФ 11 (6), 592 (1941). Опубликовано также на англ. языке в J. Phys (USSR) 5 (1), 71 (1941).

где δ — трехмерная δ -функция, а суммирование производится по всем частицам в системе. Интеграл по объему $\int \rho dV$ дает полную массу системы. Аналогично плотность потока массы определяется как

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R}) = \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R});$$

$\mathbf{v}_{\alpha}$, $\mathbf{p}_{\alpha}$ — скорость и импульс частицы m_{α} .

Подчеркнем, что при таком описании жидкости не производится никакого усреднения в том смысле, как оно производится в статистике. Описание исходит из микроскопической картины, поскольку все частицы обладают (в данный момент) определенными координатами $\mathbf{r}_{\alpha}$ и скоростями $\mathbf{v}_{\alpha}$.

При переходе к квантовой теории надо рассматривать ρ и $\mathbf{j}$ как некоторые операторы; определим вид этих операторов. Для простоты предположим, что система состоит всего из одной частицы. Тогда классическая плотность $\rho = m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$. Оператор ρ должен быть определен таким образом, чтобы его математическое ожидание $\int \psi(\mathbf{r})^* \rho \psi(\mathbf{r}) dV$ [$\psi(\mathbf{r})$ — волновая функция частицы] было равно плотности массы в точке $\mathbf{R}$, т. е. $m |\psi(\mathbf{R})|^2$. Отсюда следует, что оператор ρ должен иметь тот же вид $\rho = m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$, а в случае произвольной системы частиц — соответственно вид (1,1).

Классическая плотность потока для одной частицы есть $\mathbf{j} = \mathbf{p} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$. Легко видеть, что соответствующий ей квантовый оператор

$$\mathbf{j} = 1/2 [\mathbf{p} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \mathbf{p}],$$

где $\mathbf{p}$ — обычный оператор импульса

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$$

(∇ обозначает дифференцирование по $\mathbf{r}$). Действительно, математическое ожидание $\mathbf{j}$ есть

$$\int \psi^*(\mathbf{r}) \mathbf{j} \psi(\mathbf{r}) dV = \frac{\hbar}{2i} \int \psi^* \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \psi dV + \frac{\hbar}{2i} \int \psi^* \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \nabla \psi dV,$$

или, интегрируя в первом члене по частям,

$$\begin{aligned} \int \psi^* \mathbf{j} \psi dV &= \frac{\hbar}{2i} \int \{ -\psi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \nabla \psi^* + \psi^* \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \nabla \psi \} dV = \\ &= \frac{\hbar}{2i} \{ \psi^*(\mathbf{R}) \nabla \psi(\mathbf{R}) - \psi(\mathbf{R}) \nabla \psi^*(\mathbf{R}) \}, \end{aligned}$$

т. е. как раз то, что и должно было быть. Для произвольной системы частиц имеем аналогично

$$\mathbf{j} = 1/2 \sum_{\alpha} \{ \mathbf{p}_{\alpha} \delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R}) + \delta(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{R}) \mathbf{p}_{\alpha} \}, \quad \mathbf{p}_{\alpha} = \frac{\hbar}{i} \nabla_{\alpha}. \quad (1,2)$$

Определим теперь условия коммутации. Для плотности ρ имеем, очевидно,

$$\rho_1 \rho_2 - \rho_2 \rho_1 = 0 \quad (1,3)$$

[ρ_1 , ρ_2 обозначает соответственно $\rho(\mathbf{R}_1)$, $\rho(\mathbf{R}_2)$].

При определении условий коммутации ρ с $\mathbf{j}$ и $\mathbf{j}$ с $\mathbf{j}$ можно рассматривать для краткости в суммах (1,1), (1,2) всего по одному члену, поскольку операторы, соответствующие разным частицам, коммутируют

друг с другом. Для определения коммутации ρ с $\mathbf{j}$ пишем

$$\mathbf{j}_1 \rho_2 - \rho_2 \mathbf{j}_1 = \frac{m\hbar}{2i} \{ [\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \nabla] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) - \\ - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) [\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \nabla] \}.$$

Для упрощения стоящего справа выражения замечаем, что оператор вида

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2)$$

можно преобразовать следующим образом:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) (\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2)) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) \nabla,$$

где в первом члене $\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2)$ означает просто градиент δ -функции, т. е. ∇ уже не является оператором. Благодаря наличию множителя $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1)$ в этом члене можно писать $\nabla \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$ вместо $\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2)$. Таким образом,

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) (\nabla \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) \nabla.$$

Аналогично,

$$\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2) \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \nabla \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2).$$

В результате получаем

$$\mathbf{j}_1 \rho_2 - \rho_2 \mathbf{j}_1 = \frac{\hbar}{i} m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \nabla \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)$$

или для произвольной системы

$$\mathbf{j}_1 \rho_2 - \rho_2 \mathbf{j}_1 = \frac{\hbar}{i} \rho_1 \nabla \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \quad (1,4)$$

(писать ли справа ρ_1 , или ρ_2 — безразлично ввиду наличия δ -функции от $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$).

Аналогичным образом можно получить условие коммутации между компонентами вектора $\mathbf{j}$ друг с другом. Вычисления в этом случае более длинные, и мы их не приводим здесь.

Введем оператор $\mathbf{v}$ скорости движения жидкости согласно

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2} (\rho \mathbf{v} + \mathbf{v} \rho), \quad (1,5)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} + \mathbf{j} \frac{1}{\rho} \right). \quad (1,6)$$

Для дальнейшего оказывается более удобным пользоваться оператором $\mathbf{v}$ вместо оператора тока $\mathbf{j}$.

Для условия коммутации $\rho(\mathbf{v})$ имеем

$$\mathbf{v}_1 \rho_2 - \rho_2 \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_1 \frac{1}{\rho_1} \right) \rho_2 - \frac{1}{2} \rho_2 \left(\frac{1}{\rho_1} \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_1 \frac{1}{\rho_1} \right) = \\ = \frac{1}{2\rho_1} (\mathbf{j}_1 \rho_2 - \rho_2 \mathbf{j}_1) + (\mathbf{j}_1 \rho_2 - \rho_2 \mathbf{j}_1) \frac{1}{2\rho_1},$$

или, подставляя (1,4),

$$\mathbf{v}_1 \rho_2 - \rho_2 \mathbf{v}_1 = \frac{\hbar}{i} \nabla \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2). \quad (1,7)$$

Аналогичным образом, но более длинно получаем из условий коммутации для компонент $\mathbf{j}$

$$\mathbf{v}_{1i}\mathbf{v}_{2k} - \mathbf{v}_{2k}\mathbf{v}_{1i} = \frac{\hbar}{i} \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \frac{1}{\rho_1} (\text{rot } \mathbf{v})_{ik}, \quad (1,8)$$

где $(\text{rot } \mathbf{v})_{ik}$ обозначает разность $\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$.

Ниже нам понадобится также условие коммутации между ρ и $\text{rot } \mathbf{v}$. Применяя операцию rot (с дифференцированием по координатам $\mathbf{R}_1$) к обеим сторонам уравнения (1,7), получим

$$\text{rot } \mathbf{v}_1 \rho_2 - \rho_2 \text{rot } \mathbf{v}_1 = 0. \quad (1,9)$$

Легко убедиться в том, что при применении полученных соотношений к макроскопическому движению жидкости получаются, как и должно было быть, обычные уравнения гидродинамики, написанные в операторном виде. Энергия единицы объема классической жидкости, рассматриваемой макроскопическим образом, есть $\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon(\rho)$, где $\varepsilon(\rho)$ — внутренняя энергия единицы массы жидкости. Энергия ε предполагается зависящей только от плотности ρ жидкости; в этом проявляется макроскопичность рассмотрения, связанная со статистическим усреднением. При микроскопическом рассмотрении такое предположение, конечно, несправедливо.

Соответствующий написанному классическому выражению квантовый оператор есть *)

$$\frac{\mathbf{v} \rho \mathbf{v}}{2} + \rho \varepsilon(\rho).$$

Функция Гамильтона H жидкости есть интеграл по объему

$$H = \int \left\{ \frac{\mathbf{v} \rho \mathbf{v}}{2} + \rho \varepsilon(\rho) \right\} dV. \quad (1,10)$$

Определим производную $\dot{\rho}$ от плотности по времени. Имеем

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} (H\rho - \rho H).$$

Обозначим временно координаты точки, в которой берется ρ , индексом «1», а координаты переменной точки в области интегрирования в (1,10) — индексом «2». Тогда

$$\dot{\rho}_1 = \frac{i}{\hbar} \int \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{v}_2 \rho_2 \mathbf{v}_2 \rho_1 - \rho_1 \mathbf{v}_2 \rho_2 \mathbf{v}_2] + [\rho_2 \varepsilon(\rho_2) \rho_1 - \rho_1 \rho_2 \varepsilon(\rho_2)] \right\} dV_2.$$

В силу (1,3) второй член под знаком интеграла исчезает, а первый можно написать в виде

$$\frac{1}{2} [\mathbf{v}_2 \rho_2 (\mathbf{v}_2 \rho_1 - \rho_1 \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_2 \rho_1 - \rho_1 \mathbf{v}_2) \rho_2 \mathbf{v}_2],$$

или, подставляя (1,7),

$$\frac{\hbar}{2i} \nabla \delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) (\mathbf{v}_2 \rho_2 + \rho_2 \mathbf{v}_2) = \frac{\hbar}{i} \nabla \delta(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \mathbf{j}_2.$$

*) Оператор $\frac{\mathbf{v} \rho \mathbf{v}}{2}$ можно написать также и в виде $\frac{\rho \mathbf{v}^2 + \mathbf{v}^2 \rho}{4}$.

Таким образом,

$$\dot{\rho}_1 = \int \nabla \delta (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \mathbf{j}_2 dV_2 = - \int \delta (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \operatorname{div} \mathbf{j}_2 dV_2 = - \operatorname{div} \mathbf{j}_1,$$

т. е. мы приходим к уравнению непрерывности в операторном виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div} \frac{\rho \mathbf{v} + \mathbf{v} \rho}{2}. \quad (1,11)$$

Аналогичным образом можно вычислить производную

$$\mathbf{v} = \frac{i}{\hbar} (H \mathbf{v} - \mathbf{v} H).$$

Вычисление приводит к уравнению

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{1}{2} \left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d\varepsilon}{d\rho}, \quad (1,12)$$

т. е. к уравнению Эйлера в операторном виде ($d\varepsilon/d\rho$ есть давление p жидкости).

Подчеркнем еще раз, что уравнения (1,11) и (1,12) являются менее общими, чем условия коммутации (1,3) — (1,9), которые применимы и при точном, микроскопическом рассмотрении жидкости.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР КВАНТОВОЙ ЖИДКОСТИ

В классической гидродинамике идеальной жидкости показывается, что если в некоторый момент времени движение является потенциальным ($\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$) во всем объеме жидкости, оно будет потенциальным и во все другие моменты времени (теорема Лагранжа). Оказывается, что в квантовой гидродинамике имеется аналог этой классической теоремы.

Согласно условию коммутации (1,9) $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ всегда коммутирует с плотностью ρ . Компоненты $\operatorname{rot} \mathbf{v}$, однако, не коммутируют, вообще говоря, ни друг с другом, ни с компонентами скорости $\mathbf{v}$ [при применении операции rot к уравнению (1,8) правая сторона равенства не исчезает]. Поэтому $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ не коммутирует, вообще говоря, и с функцией Гамильтона, т. е. не сохраняется.

Исключением является случай, когда во всем объеме жидкости $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$. В этом случае в правой стороне (1,8) стоит нуль, и $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ коммутирует с ρ и $\mathbf{v}$, а потому и с функцией Гамильтона *).

Таким образом, равный нулю ротор скорости сохраняется. Другими словами, квантовая жидкость всегда обладает такими стационарными состояниями, в которых $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ равен нулю во всем объеме. Такие состояния могут быть названы, по аналогии с классической гидродинамикой, состояниями потенциального движения жидкости.

По поводу полученного результата можно привести аналогию (чисто формальную) с моментом количества движения $\mathbf{M}$ в квантовой механике. Коммутация двух компонент $\mathbf{M}$ друг с другом приводит к третьей компоненте $\mathbf{M}$; в результате компоненты $\mathbf{M}$ все коммутируют друг с другом, а потому существуют одновременно, только если все они равны нулю. Известно также, что не существует состояний со сколь угодно малыми значениями момента: первые отличные от нуля его собственные значения порядка $\hbar$. Это является следствием неоднородности условий коммутации: левая сторона их квадратична по M , а правая — линейна.

*) Причем не только с функцией Гамильтона (1,10), но и со всякой другой функцией, содержащей ρ , $\mathbf{v}$ и их производные любого порядка по координатам.

Аналогичное утверждение можно высказать и о $\text{rot } \mathbf{v}$ в квантовой гидродинамике. Именно, не существует таких состояний, в которых $\text{rot } \mathbf{v}$ был бы отличен от нуля, но сколь угодно мал во всем объеме жидкости. Другими словами, между состояниями потенциального ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) и вихревого ($\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$) движений квантовой жидкости нет непрерывного перехода.

Отсюда непосредственно вытекают основные особенности энергетического спектра жидкости. Наличие разрыва между состояниями потенциального и вихревого движений означает, что между низшими энергетическими уравнениями вихревых и потенциальных движений должен существовать некоторый конечный энергетический интервал. Что касается вопроса о том, который из этих двух уровней лежит ниже, то логически, по-видимому, возможны оба случая.

Ниже будет показано, что явление сверхтекучести получается, если предположить, что нормальный уровень потенциальных движений лежит ниже нормального уровня вихревых движений. Поэтому надо считать, что в жидком гелии осуществляется именно этот случай. Надо, впрочем, отметить, что поскольку существует всего лишь одна квантовая жидкость — жидкий гелий, то вопрос о том, является ли такое расположение уровней, а потому и свойство сверхтекучести, свойственным всем квантовым жидкостям, не может быть выяснен экспериментально.

Мы приходим, таким образом, к следующей картине распределения уровней в энергетическом спектре жидкого гелия (подчеркиваем, что речь идет не об уровнях для отдельных атомов гелия, а об уровнях, соответствующих состояниям всей жидкости в целом). Этот спектр складывается из двух налагающихся друг на друга непрерывных спектров. Один из них соответствует потенциальным движениям, а другой — вихревым. При этом наиболее низкий уровень вихревого спектра расположен выше низшего уровня потенциального спектра, являющегося нормальным, невозбужденным состоянием жидкости; энергетический интервал между этими двумя уровнями обозначим посредством Δ .

Что касается величины «энергетической щели» Δ , то она не может быть вычислена точно. По порядку величины она должна быть равна

$$\Delta \sim \frac{\hbar^2 \rho^{2/3}}{m^{5/3}} \quad (2,1)$$

(m — масса атома гелия, ρ — плотность жидкого гелия). Это есть единственная величина размерности энергии, которую можно составить из m , ρ и $\hbar$. Подстановка чисел дает $\Delta/k \sim 1^\circ \text{ K}$, т. е. Δ , как и следовало ожидать, порядка kT_λ , где T_λ — температура λ -точки гелия [см. также (3,8)].

Рассмотрим какой-нибудь из возбужденных уровней, причем такой, который расположен не слишком высоко над началом спектра (вихревого или потенциального).

Всякое слабо возбужденное состояние можно рассматривать как совокупность отдельных «элементарных возбуждений». Что касается возбужденных уровней потенциального спектра, то потенциальное внутреннее движение жидкости представляет собой не что иное, как продольные, т. е. звуковые волны. Поэтому соответствующие «элементарные возбуждения» представляют собой просто звуковые кванты, т. е. фононы. Энергия фононов является, как известно, линейной функцией от их импульса p , т. е.

$$\varepsilon = cp, \quad (2,2)$$

где c — скорость звука. Следовательно, в начале потенциального спектра энергия пропорциональна первой степени импульса.

«Элементарные возбуждения» вихревого спектра могут быть названы «ротонами» *). Для них не существует тех специальных причин, которые обуславливают линейную зависимость ϵ от p и имеют место у фононов. При малых импульсах p энергия ротона может быть просто разложена в ряд по степеням p ; в силу изотропии жидкости разложение скаляра ϵ по вектору p содержит только члены четных степеней, так что можно написать

$$\epsilon = \Delta + \frac{p^2}{2\mu}, \quad (2,3)$$

где μ — некоторая «эффективная масса» ротона [в (2,3), как и (2,2), энергия отсчитывается от нормального состояния **)].

До тех пор, пока количество фононов и ротонов (отнесенное к единице объема жидкости) не велико, можно рассматривать их совокупность как смесь двух идеальных газов — газа фононов и газа ротонов. Фононный газ подчиняется, как известно, статистике Бозе. Что касается ротонов, то они, вероятно, тоже подчиняются статистике Бозе. Надо, впрочем, отметить, что поскольку энергия ротона всегда содержит большую по сравнению с kT величину Δ (при низких температурах, когда только и можно трактовать совокупность ротонов как газ), различие между распределениями Бозе и Ферми в применении к ним несущественно и можно вообще пользоваться для ротонов распределением Больцмана.

3. ТЕПЛОЕМКОСТЬ ГЕЛИЯ-II

Из описанных свойств энергетического спектра непосредственно следуют некоторые выводы о характере температурной зависимости теплоемкости гелия-II.

При достаточно низких температурах, когда делается несущественным аномальное поведение теплоемкости вблизи самой λ -точки, теплоемкость можно рассматривать как складывающуюся из двух частей — из фононной и ротонной. Что касается первой ($C_{\text{фн}}$), то она представляет собой не что иное, как дебаевскую теплоемкость, пропорциональную кубу температуры. Эта часть теплоемкости может быть вычислена точно ***), поскольку дебаевская температура может быть вычислена из имеющихся данных о сжимаемости гелия, из которой в свою очередь можно вычислить скорость звука в гелии. Взяв для сжимаемости значение из ⁴, получаем скорость звука, равную 250 м/сек. По известной формуле получаем для теплоемкости одного грамма гелия

$$C_{\text{фн}} = 4,4 \cdot 10^{-3} T^3 \text{ кал} \cdot \text{град}^{-1} \text{г}^{-1}. \quad (3,4)$$

Ротонная часть теплоемкости ($C_{\text{р}}$) имеет благодаря наличию энергетической щели Δ между нормальными и вихревыми уровнями, экспоненциальную температурную зависимость ($C_{\text{р}} \sim e^{-\Delta/kT}$); коэффициент при экспоненциальном множителе может быть выражен через Δ и эффективную массу ротона μ . При рассматриваемых температурах можно, как уже указывалось, применять к ротонному газу распределение Больцмана.

*) Это название предложено И. Е. Таммом.

**) Б а й л ь ³ в недавней работе производил исследование общих свойств энергетического спектра жидкости и пришел к выводу о наличии «энергетической щели» между нормальным и всеми возбужденными состояниями. Этот результат неправдоподобен уже потому, что он означал бы, что в жидкости невозможно распространение колебаний (звуковых волн) малых частот.

***)) Это вычисление было произведено еще в 1940 г. А. Б. Мигдалом, которому я хотел бы выразить благодарность за сообщение полученных результатов.

Свободная энергия газа с незадаанным числом частиц (число частиц ротонного газа само является функцией температуры, определяясь из условия минимальности свободной энергии) есть

$$F_p = -kTV \int e^{-\varepsilon/kT} \frac{d\tau_p}{(2\pi\hbar)^3} \quad (d\tau_p = dp_x dp_y dp_z)$$

(V — объем). Ниже мы будем относить свободную энергию на 1 г гелия, соответственно чему положим $V = 1/\rho$ (ρ — плотность гелия), так что

$$F_p = -\frac{kT}{\rho(2\pi\hbar)^3} \int e^{-\varepsilon/kT} d\tau_p. \quad (3,2)$$

Число же ротонов есть при этом

$$N_p = \frac{1}{\rho(2\pi\hbar)^3} \int e^{-\varepsilon/kT} d\tau_p. \quad (3,3)$$

Подставляя сюда $\varepsilon = \Delta + p^2/2\mu$, получим

$$F_p = -\frac{kT}{\rho} \left(\frac{\mu kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\Delta/kT}, \quad (3,4)$$

$$N_p = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\mu kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\Delta/kT}. \quad (3,5)$$

Отсюда энтропия

$$S_p = -\frac{\partial F_p}{\partial T} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\mu k}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} T^{1/2} \Delta e^{-\Delta/kT} \left(1 + \frac{5kT}{2\Delta} \right) \quad (3,6)$$

и теплоемкость

$$C_p = T \frac{\partial S_p}{\partial T} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{k^{1/2} \Delta^2}{T^{1/2}} e^{-\Delta/kT} \left[1 + 3 \frac{kT}{\Delta} + \frac{15}{4} \left(\frac{kT}{\Delta} \right)^2 \right]. \quad (3,7)$$

Если воспользоваться данными Кеезона и мисс Кеезом⁵ для теплоемкости в интервале 1,2—1,5° К, то из приведенных формул получаются для μ и Δ значения

$$\Delta/k = 8-9^\circ \text{ К}, \quad \mu = 7-8m_{\text{He}} \quad (3,8)$$

(m_{He} — масса атома гелия).

При достаточно низких температурах C_p должно сделаться меньше $C_{\text{фн}}$, т. е. должна остаться практически лишь фононная часть теплоемкости. Надо, однако, отметить, что вычисленная по формуле (3,1) фононная теплоемкость оказывается при 1,2° К примерно в 22 раза меньше ее экспериментального значения. Таким образом, еще при температурах в два раза ниже λ -точки ротонный газ играет преобладающую роль в теплоемкости.

Для более низких температур теплоемкость измеряли до настоящего времени только Б. Блинни и Ф. Симон⁶ (в интервале от 0,25 до 0,8° К). Полученные ими значения все еще раз в 10 превышают даваемые формулой (3,1) значения фононной теплоемкости. С другой стороны, Блинни и Симон находят возможным описать найденный ими температурный ход теплоемкости законом $\sim T^3$ во всем интервале от 0,25 до 0,8° К. Отсюда следовало бы, что и избыточная над $C_{\text{фн}}$ часть теплоемкости, т. е. теплоемкость C_p , тоже подчиняется этому закону, между тем как по теории следует ожидать для нее экспоненциального хода. Надо, впрочем, отметить, что Блинни и Симон не опубликовали своих измерений полностью и не исключена возможность внесения в эти результаты поправок. С другой стороны,

измерения П. Л. Капицы⁹ показывают, что значение энтропии при 1,33° К, вычисленное из формулы (3,6) со значениями μ и Δ из (3,8), согласуется с опытом, что не имеет места, если вычислять энтропию из данных Блинни и Симона.

4. СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ ГЕЛИЯ-II ПРИ АБСОЛЮТНОМ НУЛЕ

Покажем теперь, что сверхтекучесть гелия-II следует из описанных выше свойств энергетического спектра. Начнем с рассмотрения жидкого гелия при абсолютном нуле. При этой температуре жидкость находится в своем нормальном невозбужденном состоянии.

Рассмотрим гелий, текущий по капилляру с постоянной скоростью V . Наличие вязкости должно было бы проявиться в том, что благодаря трению о стенки капилляра и трению внутри самой жидкости происходила бы диссипация кинетической энергии движения жидкости и ее постепенное замедление.

Удобнее рассматривать это течение в системе отсчета, движущейся вместе с гелием. В этой системе гелий покоится, а стенки капилляра движутся со скоростью V . При наличии вязкости покоящийся гелий тоже должен начать двигаться. Физически очевидно, что благодаря взаимодействию с движущимися стенками трубки не может с самого начала возникнуть движение сразу всей жидкости как целого. Появление движения должно начаться с возбуждения внутренних движений в близких к стенке слоях жидкости, т. е. с возбуждения в жидкости фононов или ротонов.

Предположим, что в жидкости может возбудиться фонон. Тогда энергия E_0 жидкости (в системе отсчета, где она первоначально покоилась) делается равной энергии ε этого фонона (энергию нормального состояния принимаем условно за нуль), а ее импульс P_0 — импульсу p фонона. Поскольку $\varepsilon = cp$, то

$$E_0 = cp, \quad P_0 = p.$$

Перейдем теперь обратно к системе координат, в которой капилляр покоится. Согласно известным формулам преобразования энергии и импульса в классической механике имеем для энергии E и импульса P в этой системе

$$E = E_0 + P_0 V + \frac{MV^2}{2}, \quad P = P_0 + MV,$$

где M — масса жидкости. Подставляя сюда E_0 и P_0 , находим для энергии

$$E = cp + Vp + \frac{MV^2}{2}. \quad (4,1)$$

Член $MV^2/2$ представляет собой первоначальную кинетическую энергию текущего гелия; выражение же $cp + Vp$ есть изменение энергии благодаря возбуждению фонона. Это изменение должно быть отрицательно, поскольку энергия движущейся жидкости должна уменьшаться:

$$cp + Vp < 0.$$

Выполнение этого условия требует, во всяком случае, чтобы скорость V была по абсолютной величине больше скорости звука c :

$$V > c. \quad (4,2)$$

При меньших скоростях в движущейся жидкости фононы не могут возбуждаться (благодаря взаимодействию со стенками трубки).

Аналогичные рассуждения можно произвести для возбуждения ротона. В этом случае

$$E_0 = \varepsilon = \Delta + \frac{p^2}{2\mu}$$

и вместо (5,1) получаем

$$E = \Delta + \frac{p^2}{2\mu} + \mathbf{Vp} + \frac{MV^2}{2}. \quad (4,3)$$

Для того чтобы было $E < \frac{MV^2}{2}$, во всяком случае необходимо, чтобы

$$\Delta + \frac{p^2}{2\mu} - Vp < 0,$$

т. е.

$$V > \frac{p}{2\mu} + \frac{\Delta}{p}.$$

Стоящее справа выражение имеет минимум при $p^2 = 2\mu\Delta$, так что для того, чтобы мог возбудиться ротон, во всяком случае должно быть

$$V > \sqrt{2\Delta/\mu}. \quad (4,4)$$

Таким образом, при неслишком больших скоростях течения в гелии-II не могут возбудиться ни фононы, ни ротонны. Это значит, что течение жидкости не будет замедляться, т. е. гелий обнаружит явление сверхтекучести *).

Заметим, что сверхтекучесть должна исчезнуть при достаточно больших скоростях уже хотя бы по указанным выше причинам. Мы оставляем при этом в стороне вопрос о том, не прекратится ли сверхтекучесть уже при меньших скоростях по каким-либо иным причинам [предельная скорость, получающаяся из (4,2), очень велика — скорость звука в гелии равна 250 м/сек; (4,4) дает величину в несколько раз меньшую].

5. ГЕЛИЙ-II ПРИ ТЕМПЕРАТУРАХ ВЫШЕ АБСОЛЮТНОГО НУЛЯ

Рассмотрим теперь гелий при температуре, отличной от 0° К. Тогда гелий не находится в основном состоянии, в нем имеются возбуждения, о которых при достаточно низкой температуре можно сказать, что они образуют газ, состоящий из фононов и ротонов. Произведенный в § 4 вывод сам по себе остается в силе и теперь, поскольку в этом выводе не было использовано непосредственно то обстоятельство, что жидкость находилась первоначально в основном состоянии. Поэтому новые фононы и ротонны не могут возбудиться благодаря движению гелия относительно стенок сосуда и при температурах, отличных от 0° К. Необходимо, однако, выяснить, каким образом будет проявляться наличие фононов и ротонов, которые имеются уже в жидкости самой по себе.

Для этого рассмотрим жидкий гелий, находящийся в аксиально-симметричном сосуде, вращающемся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью Ω . Перейдем к системе отсчета, вращающейся вместе с сосудом. В этой системе сосуд неподвижен, т. е. внешние условия, в которых находится жидкость, стационарны. Поэтому в ней имеет место распределение Гиббса, т. е. вероятность нахождения жидкости в том или ином возбужденном состоянии определяется формулой

$$\text{const} \cdot e^{-E^*/kT},$$

*) Заметим, что для идеального газа $\Delta = 0$ и потому даже при абсолютном нуле он не обнаруживал бы явления сверхтекучести ни при каких скоростях течения, в противоположность предположению Тиссы.

где E' — энергия возбужденного состояния жидкости во вращающейся системе отсчета. Перейдем теперь обратно к неподвижной системе отсчета. Как известно, энергия E' тела во вращающейся системе отсчета связана с энергией E в неподвижной системе соотношением

$$E' = E - M\Omega,$$

где M — момент количества движения тела в данном возбужденном состоянии (в нормальном состоянии $M=0$). Таким образом, распределение Гиббса в неподвижной системе отсчета есть

$$\text{const} \cdot e^{-\frac{E-M\Omega}{kT}}. \quad (5,1)$$

Для наглядности предположим, что температура достаточно низка, так что можно говорить о возбужденном состоянии, как об идеальном газе фононов и ротонов. Тогда энергию E и момент M возбужденного состояния можно написать в виде

$$E = \sum \epsilon, \quad M = \sum m, \quad (5,2)$$

где ϵ , m — энергия и моменты отдельных фононов и ротонов.

Как известно, при подстановке в распределение Гиббса $e^{-E/kT}$ энергии в виде $E = \sum \epsilon$ можно перейти к распределению для отдельных «частиц» газа, в данном случае к распределению Бозе

$$\frac{1}{e^{\epsilon/kT} - 1}$$

для фононов и, вероятно, для ротонов (впрочем, какое именно распределение — несущественно для дальнейшего).

Аналогично при подстановке (5,2) в (5,1) мы получим тем же способом такое же распределение для фононов и ротонов во вращающемся сосуде, с той только разницей, что вместо ϵ будет стоять $\epsilon - \Omega m$; так, распределение Бозе примет вид

$$\frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \Omega m}{kT}} - 1}.$$

Но такое распределение представляет собой не что иное, как распределение во вращающемся как целое (с угловой скоростью Ω) газе. Таким образом, мы приходим к результату, что во вращающемся сосуде с гелием-II устанавливается статистическое равновесие, которое отличается от равновесия в покоящемся сосуде только тем, что газ фононов и ротонов вращается вместе с сосудом, как бы увлекаясь его стенками.

Если вычислить из написанного распределения момент количества движения гелия во вращающемся сосуде при данной температуре, т. е. величину

$$\bar{M} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \int \frac{m d\tau_p dV}{e^{\frac{\epsilon - \Omega m}{kT}} - 1}, \quad (5,3)$$

то при абсолютном нуле, т. е. при полном отсутствии фононов и ротонов, мы получили бы, очевидно, просто нуль. При более высоких температурах момент количества движения будет отличен от нуля, но момент инерции (т. е. коэффициент пропорциональности между M и Ω) будет при достаточно низких температурах еще гораздо ниже обычного (соответствующего вращению вместе с сосудом всей массы жидкости).

Мы приходим, таким образом, к фундаментальному результату, что при движении стенок сосуда только часть массы жидкого гелия увлекает-

ся ими, а другая часть как бы остается неподвижной. Поэтому можно наглядно рассматривать жидкий гелий так, как если бы он представлял смесь двух жидкостей — одной сверхтекучей, не обладающей вязкостью и не увлекающейся стенками сосуда, и другой — нормальной, «зацепляющейся» при движении о стенки и ведущей себя как нормальная жидкость. При этом весьма существенно, что между обеими этими движущимися друг через друга жидкостями нет трения, т. е. не происходит передачи импульса от одной из них к другой. Действительно, само наличие такого взаимного движения мы получили при рассмотрении статистического равновесия в равномерно вращающемся сосуде. Но если какое-либо относительное движение может иметь место в состоянии статистического равновесия, то это значит, что оно не может сопровождаться трением.

Подчеркнем, что рассмотрение гелия как «смеси» двух жидкостей является не больше чем способом выражения, способом, удобным для описания явлений, происходящих в гелии-II. Как и всякое описание квантовых явлений в классических терминах, оно не является вполне адекватным. В действительности надо говорить, что в квантовой жидкости, каковой является гелий-II, могут существовать одновременно два движения, каждое из которых связано со своей «эффективной массой» (так, что сумма обеих этих масс равна полной истинной массе жидкости). Одно из этих движений «нормально», т. е. обладает теми же свойствами, как и движение обычной жидкости, другое же — «сверхтекучее». Оба эти движения происходят без передачи импульса от одного к другому. Особенно подчеркиваем, что здесь нет никакого разделения реальных частиц жидкости на «сверхтекучие» и «нормальные». В определенном смысле можно говорить о «сверхтекучей» и «нормальной» массах жидкости, как о массах, связанных с обоими одновременно возможными движениями, но это отнюдь не означает возможности реального разделения жидкости на две части.

Имея в виду все эти оговорки относительно истинного характера происходящих в гелии-II явлений, удобно все же пользоваться терминами «сверхтекучая» и «нормальная жидкости» как удобным способом краткого описания этих явлений. В дальнейшем мы и будем так поступать.

При вращении сосуда с гелием сверхтекучая часть жидкости, как уже указывалось, остается неподвижной. Можно сказать, что сверхтекучая жидкость не способна к вращению. Математически это означает, что rot скорости сверхтекучего движения равен нулю. Таким образом, движение сверхтекучей жидкости всегда является потенциальным *). Напротив, нормальная часть жидкости может совершать как потенциальное, так и вихревое движение.

В частности, отсюда вытекает следующее интересное свойство движения гелия-II. Как известно из гидродинамики, при потенциальном течении жидкость не оказывает давления на обтекаемые ею тела (так называемый парадокс Эйлера). Поэтому сверхтекучая часть жидкости не будет оказывать при своем движении никакого давления на погруженное в гелий-II тело; оно будет испытывать воздействие только со стороны нормальной части жидкости.

При низких температурах, когда возбуждение не слишком велико, нормальная часть жидкости представляет собой совокупность ротонов и фононов. Поэтому можно вычислить вязкость нормальной жидкости как вязкость смеси фононного и ротонного газов. При этом даже при не очень низких температурах, т. е. таких, при которых количество ротонов еще велико по сравнению с количеством фононов, все же нельзя

*) Более строгое доказательство этого утверждения будет дано в § 9 при рассмотрении аналогичного вопроса для сверхпроводников.

пренебречь фононами и рассчитывать вязкость как вязкость одного только ротонного газа, поскольку «длина свободного пробега» фононов, как можно показать, значительно превосходит длину пробега ротонов.

Важнейшим параметром, определяющим свойства гелия при каждой данной температуре, является отношение между массами сверхтекучей и нормальной частей жидкости. Введем плотность ρ_n нормальной жидкости и плотность ρ_s сверхтекучей; сумма $\rho_s + \rho_n = \rho$ есть полная истинная плотность жидкости.

При абсолютном нуле отношение ρ_n/ρ равно нулю. По мере повышения температуры оно растет, пока не делается равным единице, после чего, конечно, будет оставаться постоянным. Температура, при которой ρ_n/ρ обратится в единицу, и представляет собой точку перехода гелия-II в гелий-I. Таким образом, фазовый переход в жидком гелии связан с исчезновением сверхтекучей части жидкости. Это исчезновение происходит постепенно, т. е. ρ_n/ρ обращается в единицу непрерывным образом, без скачка. Поэтому переход является фазовым переходом второго рода, т. е. λ -точкой (не сопровождается выделением или поглощением скрытой теплоты). Наличие же скачка теплоемкости является, как известно, непосредственным термодинамическим следствием фазового перехода второго рода (см., например, ⁷).

Укажем здесь на следующий возможный способ непосредственного экспериментального определения кривой ρ_n/ρ как функции температуры. Если измерить момент инерции J сосуда, наполненного гелием-II и вращающегося вокруг своей оси, то отношение J к моменту инерции J_0 , рассчитанному в предположении вращения всей массы гелия вместе с сосудом, определяет отношение ρ_n/ρ при данной температуре.

При достаточно низких температурах отношение ρ_n/ρ может быть вычислено. ρ_n складывается при этих температурах из двух независимых частей — эффективной массы идеального газа фононов и массы газа ротонов. Вычислим сначала фононную часть ρ_n . Для этого представим себе, что фононный газ движется как целое, поступательно с постоянной скоростью V . Как известно, функция распределения для газа, движущегося как целое, получается из функции распределения неподвижного газа просто путем замены энергии частицы ϵ величиной $\epsilon - pV$, где p — импульс частицы. Поэтому функция распределения фононов, подчиняющихся статистике Бозе, будет

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - pV}{kT}} - 1}.$$

Вычислим полный импульс P фононного газа (отнесенный к единице объема). Имеем

$$P = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{p d\tau}{e^{\frac{\epsilon - pV}{kT}} - 1}.$$

Предположим, что скорость V мала, и разложим подынтегральное выражение по степеням pV . Член нулевого порядка исчезает при усреднении по направлениям p , и остается

$$P = - \int p(pV) \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} d\tau_p, \quad n_0 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - pV}{kT}} - 1}.$$

Поскольку для фононов $\epsilon = cp$, то $c \frac{p}{p} \frac{\partial n_0}{\partial p} = \frac{\partial n}{\partial p}$, так что можно написать

$$P = - \frac{1}{c} \int p(pV) \frac{\partial n_0}{\partial p} d\tau_p.$$

Интегрируя по частям и производя усреднение по направлениям импульса $\mathbf{p}$, получаем

$$\mathbf{P} = \frac{4}{3c} V \int p n_0 d\tau_p = \frac{4}{3c^2} V \int \epsilon n_0 d\tau_p.$$

Но стоящий здесь интеграл представляет собой не что иное, как энергию $\rho E_{\text{фн}}$ единицы объема фононного газа, так что

$$\mathbf{P} = \frac{4E_{\text{фн}}}{3c^2} \rho V.$$

Коэффициент при V представляет собой искомую эффективную массу единицы объема фононного газа, т. е. фононную часть $\rho_n^{(\text{фн})}$ плотности ρ_n ,

$$\rho_n^{(\text{фн})} = \frac{4E_{\text{фн}}}{3c^2} \rho. \quad (5,4)$$

Энергия $E_{\text{фн}}$ фононного газа, а с нею и $\rho_n^{(\text{фн})}$, пропорциональна T^4 .

Аналогичное вычисление дает для ротонной части массы нормальной жидкости при низких температурах следующее выражение (для ротонов пользуемся распределением Больцмана с $\epsilon = \Delta + p^2/2\mu$):

$$\rho_n^{(p)} = N_p \mu \rho \quad (5,5)$$

[N_p из (3,4)]. Число ротонов N_p , а с ним и $\rho_n^{(p)}$, зависит от температуры экспоненциально.

Кривая зависимости ρ_n/ρ от температуры изображена на рисунке. Еще при 1°K фононная часть ρ_n в 30 раз меньше ротонной части. На рисунке часть кривой, близкая к λ -точке, не может, разумеется, быть вычислена и получена интерполированием.

Можно, впрочем, ожидать, что благодаря очень быстрому росту ρ_n по формуле (5,5) само значение температуры λ -точки можно приближенно получить, полагая $\rho_n/\rho = 1$ и пользуясь при этом формулой (5,5) для ρ_n . Такое вычисление дает для температуры λ -точки $2,3^\circ \text{K}$ в хорошем согласии с известным значением $2,19^\circ \text{K}$.

6. ТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ КАПИЛЛЯРЫ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ГЕЛИЯ-II

Развитые выше представления позволяют удовлетворительно объяснить ряд результатов, наблюдавшихся экспериментально, а также предсказать ряд новых свойств, которые следует ожидать у гелия-II.

Как показано П. Л. Капицей¹, при протекании по капилляру или по тонкой щели гелий-II не обнаруживает вязкости. С точки зрения излагаемой теории это объясняется тем, что при вытекании гелия-II из сосуда по тонкой щели через щель протекает сверхтекучая «часть» жидкости, не обнаруживающая трения; нормальная же «часть» задерживается в сосуде, протекая через щель несравненно медленнее, со скоростью, соответствующей ее вязкости и толщине капилляра.

Известно также, что при измерении вязкости по затуханию крутильных колебаний диска, погруженного в гелий-II⁸, получаются отличные от нуля значения. Этот результат также является вполне естественным.

Действительно, при вращении диска в жидкости, содержащей как сверхтекучую, так и нормальную части, он будет останавливаться уже благодаря трению о нормальную жидкость. Таким образом, в опытах с протеканием по капилляру обнаруживается наличие сверхтекучей части жидкости, в опытах же с вращением диска в гелии-II обнаруживается нормальная часть.

Энтропия гелия-II определяется статистическим распределением фононов и ротонов. Поэтому при всяком движении жидкости, при котором фононный и ротонный газ остается неподвижным, не возникает никакого макроскопического переноса энтропии. Мы приходим, таким образом, к весьма важному результату, что при течении сверхтекучей жидкости не происходит никакого переноса энтропии. Другими словами, сверхтекучая жидкость не переносит при своем движении тепла. Отсюда в свою очередь следует, что движение гелия-II, в котором принимает участие только сверхтекучая часть, является термодинамически обратимым.

Как выше было указано, при протекании гелия-II по тонким капиллярам или щелям мы имеем дело именно с таким течением сверхтекучей жидкости. Поэтому такое протекание должно быть обратимым (вернее, тем более близким к полной обратимости, чем тоньше капилляр и чем меньше проникает в него нормальной жидкости). Это обстоятельство было обнаружено в остроумных опытах, недавно произведенных П. Л. Капицей⁹.

Далее, поскольку протекающий через тонкий капилляр гелий не переносит с собой тепла, мы можем сделать еще один важный вывод. Именно, жидкий гелий, вытекающий из сосуда через тонкий капилляр, должен находиться при температуре абсолютного нуля (вернее, при температуре более низкой, чем температура гелия в сосуде, и равной нулю лишь в идеальном случае бесконечно тонкого капилляра).

Известное свойство гелия-II образовывать движущиеся по твердой поверхности пленки является эффектом, родственным свойствам его перетекания по тонким капиллярам. Сам по себе факт образования пленки не является особым свойством, присущим только гелию-II. Пленки образуются всякой жидкостью, смачивающей данную твердую поверхность. В обычных жидкостях образование пленки и ее распространение на большой участок поверхности происходит чрезвычайно медленно благодаря наличию вязкости, образование же и движение пленки у гелия-II происходит быстро благодаря его сверхтекучести.

Так называемый термомеханический эффект в гелии-II заключается, как известно, в том, что при вытекании гелия из сосуда через тонкий капилляр в сосуде наблюдается нагревание; наоборот, в месте втекания гелия из капилляра в сосуд происходит охлаждение. Само по себе наличие термомеханического эффекта свойственно не одному только гелию*), аномальным у гелия-II является большая величина эффекта. Термомеханический эффект в обычных жидкостях представляет собой необратимое явление типа термоэлектрического эффекта Пельтье.

Такого рода эффект должен существовать и в гелии-II, однако в этом случае он перекрывается значительно превосходящим его другим эффектом, специфическим для гелия-II и не имеющим ничего общего с необратимыми явлениями типа эффекта Пельтье. Именно, нагревание при вытекании происходит просто по той причине, что вытекающий через капилляр гелий не уносит с собой тепла и поэтому имеющееся в сосуде тепло распределяется на меньшее количество гелия-II. При втекании гелия в сосуд имеет место обратное явление.

*) Термомеханический эффект у воды наблюдался недавно Б. В. Дерягиным.

Легко написать, чему равно количество тепла Q , поглощаемого при втекании в сосуд через капилляр 1 г гелия. Поскольку вытекающая жидкость не содержит фононов и ротонов, ее энтропия равна нулю. Для того чтобы находящийся в сосуде гелий остался при своей температуре T , надо было бы сообщить ему количество тепла TS (S — энтропия 1 г гелия при температуре T) так, чтобы скомпенсировать уменьшение приходящейся на единицу массы энтропии благодаря введению 1 г гелия с энтропией, равной нулю. Это значит, что при втекании 1 г гелия в сосуд с гелием при температуре T поглощается количество тепла

$$Q = TS. \quad (6,1)$$

Наоборот, при вытекании 1 г гелия из сосуда с гелием при температуре T выделяется количество тепла TS .

Измерение тепла Q было недавно произведено П. Л. Капицей⁹. Полученные им результаты оказались в прекрасном согласии с формулой (6,1).

Рассмотрим теперь два сосуда с гелием-II при температурах T_1 и T_2 , причем сосуды соединены друг с другом тонким капилляром. Благодаря возможности свободного протекания сверхтекучей жидкости по капилляру быстро установится механическое равновесие гелия в обоих сосудах. Поскольку, однако, сверхтекучая жидкость не переносит тепла, тепловое равновесие, при котором температуры гелия в обоих сосудах сравниваются, установится лишь значительно медленнее.

Условие механического равновесия гелия легко написать, воспользовавшись тем, что установление этого равновесия происходит, согласно предыдущему, при постоянной энтропии S_1 и S_2 гелия в обоих сосудах. Если E_1 и E_2 — внутренние энергии единиц массы гелия при температурах T_1 и T_2 , то условие механического равновесия (т. е. минимума энергии), осуществляемого переносом сверхтекучей жидкости, будет

$$\left(\frac{\partial E_1}{\partial N}\right)_{S_1} = \left(\frac{\partial E_2}{\partial N}\right)_{S_2},$$

где N — число атомов в 1 г гелия. Но производная $(\partial E/\partial N)_S$ есть химический потенциал ζ . Поэтому мы получаем условие равновесия в виде

$$\zeta(p_1, T_1) = \zeta(p_2, T_2)$$

(p_1, T_1 и p_2, T_2 — давление и температура в первом и втором сосудах) или

$$\Phi(p_1, T_1) = \Phi(p_2, T_2), \quad (6,2)$$

где Φ — термодинамический потенциал 1 г гелия-II.

Если давления p_2, p_1 малы, то, разлагая по их степеням и помня, что $\partial\Phi/\partial p$ есть удельный объем V , получаем

$$V\Delta p = \Phi(T_1) - \Phi(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} S dT \quad (6,3)$$

($\Delta p = p_2 - p_1$). Если мала также и разность температур $\Delta T = T_2 - T_1$, то, разлагая по степеням ΔT и замечая, что $\partial\Phi/\partial T = -S$, получаем

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{S}{T}. \quad (6,4)$$

Поскольку $S > 0$, $V > 0$, то и $\Delta p/\Delta T > 0$ в согласии с экспериментом.

Формулы (6,1) и (6,4) были указаны еще Лондоном¹⁰, исходя из представлений Тиссы, словесная формулировка которых в этом пункте совпа-

дает с результатами излагаемой здесь теории. Эти формулы полностью подтверждаются опытами П. Л. Капицы.

Можно отметить, что описываемые явления можно при предлагаемой их интерпретации рассматривать как осмотические явления в «растворе» фононов и ротонов в жидком гелии, причем роль полупроницаемой перегородки играют тонкие капилляры или щели.

Наконец, остановимся на теплопроводности гелия-II. Процесс переноса тепла в гелии-II надо представлять, согласно развиваемой теории, в следующем виде. Рассмотрим сначала теплопроводность гелия-II в капиллярах, большая величина которой была открыта Кеезомом и мисс Кеезом¹¹ и которая была подробно изучена П. Л. Капицей¹².

При нагревании гелия в одном из концов капилляра (или в припаянной к нему бульбочке) в гелии возникают два противоположно направленных встречных потока. От нагретого конца к холодному идет поток нормальной жидкости, переносающей тепло; переносимого таким способом тепла с избытком хватает для объяснения экспериментально наблюдающихся больших величин теплопередачи. В обратном направлении идет поток сверхтекучей жидкости; оба потока по количеству переносимой ими массы в точности компенсируют друг друга, так что никакого реального макроскопического течения в гелии в действительности не возникает.

П. Л. Капица наблюдал отклонение листка, подвешенного перед открытым концом капилляра, при нагревании гелия в бульбочке с другой стороны капилляра. П. Л. Капица предложил истолкование этого явления как обусловленного аксиальным потоком гелия от горячего к холодному концу, идущему практически по всему сечению трубочки; неизменность количества гелия в трубочке предполагалась поддерживающейся посредством обратного втекания гелия по тонкому пристеночному слою.

Согласно развитым выше квантовым представлениям это явление выглядит иначе. Втекающий в капилляр поток сверхтекучей жидкости не производит на обтекаемый ею листок никакого давления (благодаря потенциальности движения; см. § 5). Напротив, вытекающий из капилляра поток нормальной жидкости оказывает на листок давление, отклоняющее его в наблюдаемую сторону. Оба эти потока идут по всему сечению капилляра, и необходимость в предположении пристеночного потока жидкости с аномальными свойствами, таким образом, отпадает.

Еще раз подчеркнем, что понятия «сверхтекучей» и «нормальной» жидкостей являются лишь удобным способом наглядного описания явления. В действительности надо было бы говорить об одновременно происходящих в одной и той же жидкости двух движениях, из которых одно переносит тепло, а другое — нет.

Заметим еще, что мы приходим к весьма своеобразной картине — на погруженное в гелий-II тело может действовать сила, в то время как никакого движения жидкости как целого не происходит.

Рассмотрим еще процесс теплопроводности гелия в больших объемах. Если в гелий-II погружено тело с нагретой поверхностью, то в объеме жидкости опять возникают два потока — поток нормальной жидкости, направленный от нагретой поверхности, и встречный поток сверхтекучей жидкости. Переход одного потока в другой, т. е. переход сверхтекучей жидкости в нормальную, происходит в тонком пристеночном слое. Толщина этого слоя должна быть порядка длины свободного пробега образующих «нормальную часть» жидкости фононов и ротонов. В этом же слое и будет, очевидно, распределение температуры вблизи нагретой поверхности, что, по-видимому, подтверждается опытами Капицы¹².

7. УРАВНЕНИЯ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ГЕЛИЯ-II

Исходя из развитых выше представлений о микроскопическом механизме явления сверхтекучести, можно построить полную систему гидродинамических уравнений, которые описывали бы гелий-II макроскопическим (феноменологическим) образом.

Исходным положением является фундаментальное обстоятельство, что движение гелия-II должно описываться не одной, как в обычной гидродинамике, а двумя скоростями. Одна из этих скоростей — «сверхтекучая» скорость (обозначим ее как $\mathbf{v}_s$) — удовлетворяет условию

$$\text{rot } \mathbf{v}_s = 0, \quad (7,1)$$

а на границе с твердыми поверхностями должна обращаться в нуль только нормальная ее компонента, но не тангенциальная, соответственно тому, что сверхтекучая жидкость не задерживается трением о стенки сосуда. Для «нормальной» же скорости $\mathbf{v}_n$ жидкости на границе с твердой поверхностью должно иметь место (как у обычных жидкостей) условие $\mathbf{v}_n = 0$, выражающее тот факт, что нормальная жидкость «прилипает» к стенкам.

Оказывается, что уравнения гидродинамики с двумя скоростями $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_n$ могут быть получены совершенно однозначным образом из одного только требования, чтобы удовлетворялись все законы сохранения. Эти уравнения для общего случая произвольных скоростей довольно сложны и мы не станем приводить их здесь, а ограничимся лишь упрощенным выводом уравнений, применимых к движению с не слишком большими скоростями $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_n$.

Пусть $\mathbf{j}$ есть макроскопический поток массы жидкости; он является функцией обеих скоростей $\mathbf{v}_s$, $\mathbf{v}_n$. При малых скоростях $\mathbf{j}$ можно разложить по степеням $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_n$. В первом приближении

$$\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s. \quad (7,2)$$

Коэффициенты ρ_n и ρ_s являются, очевидно, тем, что мы называли плотностями сверхтекучей и нормальной «частей» жидкости. Их сумма равна плотности ρ гелия-II:

$$\rho = \rho_n + \rho_s. \quad (7,3)$$

ρ_s и ρ_n являются, конечно, функциями температуры. Заметим, что поток массы (7,2) представляет собой в то же время плотность импульса, т. е. импульс единицы объема жидкости.

ρ и $\mathbf{j}$ должны удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (7,4)$$

Мы будем писать здесь уравнения, применимые к таким движениям, в которых не играет роль вязкость «нормальной жидкости». Тогда уравнения сохранения количества движения запишутся в виде

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik} = 0 \quad (7,5)$$

(по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование), где тензор Π_{ik} потока импульса равен

$$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho_n v_i^{(n)} v_k^{(n)} + \rho_s v_i^{(s)} v_k^{(s)} \quad (7,6)$$

(p — давление). Для того чтобы учесть вязкость нормальной жидкости, надо было бы прибавить к Π_{ik} члены, выражающиеся обычным образом через коэффициенты вязкости и производные по координатам от скорости $\mathbf{v}_n$.

Далее, уравнение сохранения энтропии имеет вид

$$\frac{\partial S\rho}{\partial t} + \operatorname{div} (S\rho \mathbf{v}_n) = 0 \quad (7,7)$$

(S — энтропия единицы массы гелия-II). «Поток энтропии» равен $\rho S \mathbf{v}_n$, поскольку энтропия переносится только нормальной частью жидкости. При учете вязкости нормальной части надо было бы добавить дополнительные члены в правой стороне (7,7), выражающие возрастание энтропии благодаря необратимости процессов.

Наконец, последнее уравнение полной системы гидродинамических уравнений мы получим, приравняв ускорение $d\mathbf{v}_s/dt$ силе, действующей на единицу «сверхтекучей» массы. Для определения этой силы представим себе, что единица массы жидкости переносится из точки 1 в точку 2, причем так, что распределение фоонов и ротонов в жидкости не меняется. Другими словами, можно сказать, что при переносе смещается только «сверхтекучая жидкость», а распределение «нормальной» остается неизменным. Энергия E жидкости меняется при таком переносе на

$$\left(\frac{\partial E}{\partial M} \right)_1 - \left(\frac{\partial E}{\partial M} \right)_2$$

(M — масса жидкости). Производные должны браться здесь при постоянной энтропии (поскольку энтропия связана только с «нормальной жидкостью») и при постоянном импульсе движения нормальной массы жидкости относительно сверхтекучей *); кроме того, постоянным считается, конечно, и объем жидкости.

Из написанного выражения для изменения энергии видно, что величину $\partial E/\partial M$ можно рассматривать как «потенциальную энергию» сверхтекучей жидкости, так что действующая на нее сила есть $-\operatorname{grad} \partial E/\partial M$.

Для вычисления производной $\partial E/\partial M$ замечаем, что производная от энергии при постоянных энтропии и объеме равна производной от термодинамического потенциала при постоянных температуре и давлении. Термодинамический потенциал $M\Phi$ жидкости (Φ — потенциал единицы массы) можно написать в виде суммы $M\Phi_0$ термодинамического потенциала неподвижной жидкости и кинетической энергии $\mathbf{P}^2/2M_n$ относительного движения сверхтекучей и нормальной «частей»:

$$\Phi M = M\Phi_0(p, T) + \frac{\mathbf{P}^2}{2M_n}.$$

Здесь $\mathbf{P}$ — импульс движения нормальной массы относительно сверхтекучей. Дифференцируя $M\Phi$ по M при постоянных p , T и $\mathbf{P}$ и помня при этом, что нормальная масса M_n пропорциональна (при заданных p и T) полной массе M , получаем

$$\Phi_0 = \frac{\mathbf{P}^2}{2M_n M}.$$

Подставляя сюда $\mathbf{P} = M_n(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$ и заменяя отношение масс отношением плотностей, находим окончательно для искомой производной $(\partial E/\partial M)_{S, v, p}$ выражение

$$\Phi_0 = \frac{\rho_n}{2(\rho_n + \rho_s)} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2.$$

*) Движение сверхтекучей жидкости можно рассматривать как внешние условия, в которых движутся фооны и ротонны. Поэтому функция Лагранжа для движения нормальной жидкости зависит не просто от ее скорости $\mathbf{v}_n$, а от разности скоростей $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Сохраняющимся импульсом является поэтому производная от функции Лагранжа по $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, т. е. указанный импульс относительного движения.

Следовательно, искомое гидродинамическое уравнение имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = -\text{grad} \left\{ \Phi - \frac{\rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)}{2(\rho_n + \rho_s)} \right\}$$

(индекс у Φ_0 опускаем). Его можно написать иначе, заметив, что поскольку всегда $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$, то

$$(\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = \frac{\text{grad } v_s^2}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = -\text{grad} \left\{ \Phi + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^2}{2(\rho_s + \rho_n)} \right\}. \quad (7,8)$$

Уравнения (7,1) — (7,8) составляют полную систему гидродинамических уравнений гелия-II.

При стационарном течении в левой стороне (7,8) стоит нуль и мы имеем, следовательно,

$$\frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2(\rho_n + \rho_s)} + \Phi = \text{const}. \quad (7,9)$$

Это уравнение вместе со следующим уравнением (7,10) играет в развиваемой здесь гидродинамике роль уравнения Бернулли.

Рассмотрим такие движения, при которых жидкость можно считать несжимаемой. Считая плотности ρ_n , ρ_s и энтропию S постоянными, находим из (7,4) и (7,7), что $\text{div } \mathbf{v}_s = 0$, $\text{div } \mathbf{v}_n = 0$. Далее, при стационарном движении имеем в (7,5) $\partial \mathbf{j} / \partial t = 0$; воспользовавшись тем, что

$$\frac{\partial v_k^{(s)}}{\partial x_k} \equiv \text{div } \mathbf{v}_s = 0, \quad \frac{\partial v_k^{(n)}}{\partial x_k} = 0,$$

перепишем (7,5) в виде $\nabla p + \rho_n (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n + \rho_s (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = 0$. Помня, что всегда имеет место $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$, можно написать это уравнение как

$$\nabla \left(p + \rho_n \frac{v_n^2}{2} + \rho_s \frac{v_s^2}{2} \right) = \rho_n [\mathbf{v}_n \text{ rot } \mathbf{v}_n].$$

Спроектируем это уравнение на линию тока нормального движения, т. е. на направление $\mathbf{v}_n$. Тогда справа мы получим нуль, так что

$$p + \rho_n \frac{v_n^2}{2} + \rho_s \frac{v_s^2}{2} = \text{const}. \quad (7,10)$$

Подчеркнем, что выражение (7,10) постоянно при стационарном течении только вдоль каждой из линий тока нормального движения, в то время как выражение (7,9) постоянно вдоль всей жидкости.

Если температура и давление мало меняются вдоль объема жидкости, то можно разложить Φ по степеням $\Delta T = T - T_0$ и $\Delta p = p - p_0$, где T_0 , p_0 — температура и давление в какой-нибудь точке жидкости, принятой за исходную. Имеем

$$\Phi = \Phi(p_0, T_0) - S \Delta T + \frac{\Delta p}{\rho}.$$

Подставляя это в (7,9), имеем

$$-\frac{v_s^2}{2} + \frac{(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^2 \rho_n}{2\rho} + S \Delta T - \frac{\Delta p}{\rho} = \text{const}.$$

Комбинируя это уравнение с уравнением (7,10),

$$\Delta p + \frac{\rho_n v_n^2}{2} + \frac{\rho_s v_s^2}{2} = \text{const},$$

получаем

$$\Delta T + \frac{\rho_n}{\rho_s} \mathbf{v}_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) = \text{const.} \quad (7,11)$$

Это соотношение, как и (7,10), имеет место вдоль линий тока нормального движения.

8. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ГЕЛИИ-II

Полученные уравнения могут быть применены к распространению звука в гелии-II. Как обычно, в звуковой волне скорости движения предполагаются малыми, а плотность, давление, энтропия — почти равными своим постоянным равновесным значениям. Тогда в (7,6) и (7,8) можно пренебречь квадратичными по скорости членами, а в (7,7) — вынести в члене $\text{div}(S\rho\mathbf{v}_n)$ энтропию $S\rho$ из-под знака div (поскольку этот член уже содержит малую величину $\mathbf{v}_n$). Таким образом, система гидродинамических уравнений для звуковых волн приобретает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (8,1)$$

$$\frac{\partial S\rho}{\partial t} + S\rho \text{div } \mathbf{v}_n = 0, \quad (8,2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad (8,3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \Phi = 0. \quad (8,4)$$

Дифференцируя (8,1) по времени и подставляя (8,3), получаем

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p. \quad (8,5)$$

Далее, имеем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial S\rho}{\partial t} - \frac{S}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -S \text{div } \mathbf{v}_n + \frac{S}{\rho} \text{div } \mathbf{j},$$

или, подставляя $\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s$,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{S\rho_s}{\rho} \text{div } (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n). \quad (8,6)$$

Далее, для термодинамического потенциала имеет место соотношение

$$d\Phi = -S dT + V dp = -S dT + \frac{1}{\rho} dp$$

(V — удельный объем). Отсюда имеем $\nabla p = S\rho \nabla T + \rho \nabla \Phi$, или, подставляя ∇p из (8,3) и $\nabla \Phi$ из (8,4),

$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + \rho S \nabla T = 0. \quad (8,7)$$

Дифференцируя (8,6) по времени и подставляя (8,7), находим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{S^2 \rho_s}{\rho_n} \Delta T. \quad (8,8)$$

Два уравнения (8,5) и (8,8) определяют распространение звука в гелии-II. Уже из того факта, что этих уравнений два, видно, что в гелии-II должны существовать две скорости распространения звука.

Напишем S , ρ , p , T в виде $S = S_0 + S'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$ и т. д., где величины со штрихом представляют собой обусловленные звуковой волной малые изменения соответствующих величин, а величины с

индексом 0 — их постоянные равновесные значения. Тогда можно написать

$$p' = \frac{\partial p}{\partial p} p' + \frac{\partial p}{\partial T} T', \quad S' = \frac{\partial S}{\partial p} p' + \frac{\partial S}{\partial T} T'$$

и уравнения (8,5) и (8,8) принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' + \frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial S}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \frac{S^2 \rho_s}{\rho_n} \Delta T' = 0.$$

Ищем решение этих уравнений в виде плоской волны, в которой p' и T' пропорциональны множителю в $e^{i\omega(t-x/u)}$ (u — скорость звука) и в качестве условия разрешимости получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} u^2 \frac{\partial p}{\partial p} - 1 & u^2 \frac{\partial p}{\partial T} \\ u^2 \frac{\partial S}{\partial p} & u^2 \frac{\partial S}{\partial T} - S^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$u^4 \frac{\partial(\rho, S)}{\partial(p, T)} - u^2 \left(\frac{\partial S}{\partial T} + S^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial p}{\partial p} \right) + S^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} = 0$$

(где $\frac{\partial(\rho, S)}{\partial(p, T)}$ обозначает якобиан преобразования от ρ, S к p, T). Путем простого преобразования с использованием термодинамических соотношений этому уравнению можно придать вид

$$u^4 - u^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S + \frac{TS^2}{C_v} \frac{\rho_s}{\rho_n} \right] + \frac{S^2 \rho_s T \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T}{\rho_n C_v} = 0 \quad (8,9)$$

(C_v — теплоемкость единицы массы гелия-II). Это квадратное уравнение определяет две скорости распространения звука в гелии-II.

При $\rho_s = 0$, т. е. в λ -точке, один из корней уравнения (8,9) обращается в нуль и мы получаем, как и должно было быть, всего одну обычную скорость звука

$$u = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S}.$$

Практически при всех температурах теплоемкости C_p и C_v близки друг к другу. Согласно известной термодинамической формуле при этих условиях близки друг к другу также и изотермическая и адиабатическая сжимаемости, т. е.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \cong \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S.$$

Обозначим общее значение C_p и C_v буквой C , а общее значение $(\partial p / \partial \rho)_T$ и $(\partial p / \partial \rho)_S$ просто как $\partial p / \partial \rho$; получаем из уравнения (8,9) две скорости звука u_1 и u_2 в виде

$$u_1^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad u_2^2 = \frac{TS^2 \rho_s}{C \rho_n}. \quad (8,10)$$

Таким образом, одна из скоростей (u_1) почти постоянна, а другая (u_2) сильно зависит от температуры, обращаясь в нуль в λ -точке. При температуре 1,33° К отсюда получается для u_2 около 25 м/сек.

При крайне низких температурах, когда $\rho_n^{(\text{Фн})} \gg \rho_n^{(p)}$, получается

$$u_2^2 = \frac{1}{3} c^2. \quad (8,11)$$

Таким образом, при стремлении температуры к нулю скорости звука стремятся к постоянным пределам $u = c$, $u_2 = c/\sqrt{3}$.

9. ПРОБЛЕМА СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Явление сверхпроводимости является во многих отношениях родственным явлению сверхтекучести. Сверхпроводимость также может быть объяснена предположением о наличии энергетической щели в спектре «электронной жидкости» в металле. Характер этой щели, однако, отличен от того, который имеет место у жидкого гелия. Сама постановка вопроса о разделении движений на потенциальные и вихревые не имеет смысла в применении к электронной жидкости в металле.

Идея о связи сверхпроводимости с наличием щели в энергетическом спектре высказывалась неоднократно (см., например, ¹³). При этом, однако, не приводилось ясного доказательства того, что наличие такой щели действительно приводит к явлению сверхпроводимости.

В электронной жидкости в металле можно различать движения чисто внутреннего характера и движения, в которых жидкость движется как целое макроскопическим образом. Последние соответствуют наличию полного тока в металле. Состояния с таким «макроскопическим» движением начинаются непосредственно от нормального, невозбужденного состояния *). Для объяснения сверхпроводимости надо предположить, что между основным состоянием электронной жидкости и началом непрерывного спектра состояний с внутренним движением имеется энергетический интервал.

Величина этого интервала должна быть очень мала — в температурной шкале порядка температуры сверхпроводящего перехода. Что приводит к возникновению такой щели — в настоящее время еще не ясно.

Пусть Ψ_0 есть волновая функция основного состояния электронной жидкости, в котором она находится при абсолютном нуле. Рассмотрим какое-нибудь возбужденное состояние, сколь угодно близкое к основному. Согласно сказанному выше, это состояние является состоянием движения электронной жидкости как целого. Соответственно этому волновая функция Ψ этого состояния должна была бы иметь вид

$$\Psi = \Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}},$$

где $\mathbf{p}$ — импульс макроскопического движения на один электрон, а суммирование производится по радиус-векторам $\mathbf{r}_{\alpha}$ всех электронов.

В действительности, однако, надо иметь в виду, что всякое движение электронной жидкости как целого не обязательно должно иметь одинаковую скорость во всем металле. Поэтому в волновой функции Ψ

экспоненциальный множитель имеет в действительности вид не $e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}}$, а $e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}}$, где χ — некоторая функция от координат одного электрона, о которой можно только сказать, что она почти линейна; различные члены в сумме $\sum \chi_{\alpha}$ отличаются тем, что в них χ берется как функция координат $\mathbf{r}_{\alpha}$ различных электронов:

$$\Psi = \Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}}. \quad (9,1)$$

Определим плотность тока электронной жидкости в состоянии Ψ . Для

*) В этом заключается существенное отличие между сверхпроводником и диэлектриком, в котором тоже имеется энергетическая щель, однако вообще не существует близких к нормальному состояний, соответствующих наличию полного тока.

этого нужно проинтегрировать выражение

$$\frac{\hbar e}{2mi} (\Psi^* \nabla_\alpha \Psi - \Psi \nabla_\alpha \Psi^*) - \frac{e^2}{cm} \mathbf{A} \Psi \Psi^*$$

(m — некоторая «эффективная масса» электрона, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал магнитного поля, e — заряд электрона, c — скорость света) по координатам всех электронов, кроме α -го, и затем просуммировать по всем α (т. е. по всем электронам), взяв значение каждого члена суммы в одной и той же рассматриваемой точке жидкости. При $\Psi = \Psi_0$ и $\mathbf{A} = 0$, т. е. в покоящейся электронной жидкости, ток $\mathbf{j}$, очевидно, равен нулю. В результате получается

$$\mathbf{j} = N \frac{e}{m} \text{grad } \chi \int |\Psi_0|^2 d\tau' - N \frac{e^2}{cm} \mathbf{A} \int |\Psi_0|^2 d\tau'$$

($d\tau'$ — произведение дифференциалов координат всех электронов, за исключением одного; N — полное число электронов). Но интеграл $\int |\Psi_0|^2 d\tau = \int |\Psi|^2 d\tau$ представляет собой не что иное, как плотность вероятности нахождения электрона в данном месте пространства. Поэтому произведение $N \int |\Psi_0|^2 d\tau'$ есть число n электронов в единице объема электронной жидкости. Таким образом,

$$\mathbf{j} = -\frac{ne}{m} \text{grad } \chi - \frac{e^2}{cm} n \mathbf{A}. \quad (9,2)$$

Отсюда находим, исключая χ ,

$$\text{rot } \frac{mc\mathbf{j}}{e^2 n} = -\text{rot } \mathbf{A} = -\mathbf{B} \quad (9,3)$$

($\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ — магнитная индукция). Это уравнение можно рассматривать как дополнительное условие, которому должны удовлетворять возможные состояния макроскопического движения электронной жидкости. Отметим, что это соотношение является обобщением утверждения $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$, имевшего место для сверхтекучести, и переходит в него, если можно пренебречь магнитным полем.

Если металл однороден, то электронную плотность можно считать одинаковой во всем металле, и уравнение (9,3) можно написать также в виде

$$\text{rot } \mathbf{j} = -\frac{ne^2}{mc} \mathbf{B}. \quad (9,4)$$

Из этого уравнения (введенного впервые Бекером, Заутером, Геллером¹⁴ и впервые написанного в форме (9,4) Лондонами¹⁵) следуют, как известно, как магнитные (эффект Мейсснера), так и электрические (отсутствие сопротивления) свойства сверхпроводников. Уравнение (9,4) находит также, как известно, количественное подтверждение в опытах со сверхпроводимостью тонких слоев¹⁶.

По аналогии с выводами § 5 можно заключить, что при температурах, отличных от абсолютного нуля, уравнение (9,4) по-прежнему имеет место, с той только разницей, что ne равно теперь не полной плотности заряда электронной жидкости, а только некоторой его доле. Таким образом, можно в известном смысле говорить о разделении полной плотности заряда на «сверхпроводящую» и «нормальную» части, со всеми теми оговорками, которые делались по поводу аналогичного разделения плотности массы в жидком гелии. В частности, это утверждение не означает, что в металле есть «сверхпроводящие» и «нормальные» электроны; просто

движение электронной жидкости в металле может описываться как совокупность двух движений, каждое из которых связано с некоторым эффективным зарядом. Сверхпроводимость исчезает при той температуре, при которой «сверхпроводящий заряд» обращается в нуль.

Надо, впрочем, отметить, что в уравнение (9,4) заряд *не* входит в комбинации $\frac{ne}{m}$ с массой *m*. Физическим смыслом поэтому обладает только это отношение, а не каждая из величин *n* и *m* в отдельности. Укажем также, что, как и в гелии-II, мы приходим к выводу, что сверхпроводящий ток не должен переносить тепла. Это подтверждается известным фактом отсутствия термоэлектрических явлений в сверхпроводниках¹⁷.

В заключение мне хотелось бы выразить благодарность П. Л. Капице, любезно сообщившему мне результаты своих экспериментов до их опубликования.

Москва,
Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
15 мая 1941 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Л. Капица, ДАН СССР 18, 28 (1937); Nature 141, 74 (1937).
2. J. V. Tisza, Nature 141, 913 (1938).
3. A. Bijl, Physica 7, 869 (1940).
4. W. H. Keesom, Leiden Comm. Suppl., No. 80b (1936).
5. W. H. Keesom and miss A. Keesom, Physica 2, 557 (1935).
6. B. Blenney and F. Simon, Trans. Farad. Soc. 35, 1205 (1939).
7. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Статистическая физика, М., Гостехиздат, 1940.
8. W. H. Keesom, G. Mac Wood, Physica 5, 257 (1938).
9. П. Л. Капица, ЖЭТФ 11 (6), 581 (1941) (см. стр. 483 этого выпуска.— *Ред.*)
10. H. London, Proc. Roy. Soc. A171, 484 (1939).
11. W. H. Keesom and miss A. Keesom, Physica 3, 359 (1939).
12. П. Л. Капица, ЖЭТФ 11, 1 (1941).
13. H. Welker, Zs. Phys. 114, 535 (1939).
14. R. Becker, G. Heller und F. Sauter, Zs. Phys. 85, 772 (1933).
15. F. London and H. London, Proc. Roy. Soc. A172, 530 (1939).
16. E. T. C. Appleyard and J. T. Bristow, Proc. Roy. Soc. A172, 530 (1939), А. Шальников, ЖЭТФ 10, 630 (1940).
17. W. H. Keesom and C. I. Matthijs, Physica 5, 437 (1938).

ПРИЛОЖЕНИЕ

К ТЕОРИИ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ ГЕЛИЯ-II *)

Скорость «второго звука» в гелии-II была с большой точностью измерена В. Пешковым¹. Его результаты дают возможность произвести количественное сравнение развитой автором теории² с экспериментом. Такое сравнение полностью подтверждает общую картину, даваемую теорией, но в то же самое время обнаруживает заметное несоответствие между вычисленной и наблюдаемой величинами скорости (например, при температуре 1,6° К вычисленная скорость равна 25 м/сек, а наблюдаемая — 19 м/сек). Хотя это несоответствие не очень велико, оно оказывается слишком большим, чтобы его можно было приписать неточности экспериментальных данных о термодинамических величинах гелия-II.

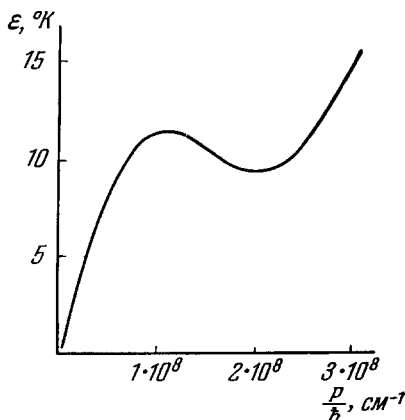
При вычислении скорости второго звука использовались формулы для термодинамических величин (энтропия, теплоемкость), выведенные в² в предположении о том, что энергетический спектр жидкости состоит из двух ветвей — фоновой и ротонной. Знак наблюдаемого расхождения указывает, в каком направлении следует изменить эти предположения. Используя экспериментальные данные, можно формально вычислить массу ротона μ по формулам

$$\rho_n = N\mu, \quad F_p = -NkT. \quad (1)$$

Здесь *N* — число ротон в единице объема, *F_p* — «ротонная» часть свободной

*) Воспроизводится по J. Phys. (USSR) 11, 91 (1947). Перевод И. Е. Дзялошинского.

энергии (т. е. свободная энергия без колебательной части), ρ_n — плотность «нормальной части» жидкости (фононная часть ρ_n пренебрежимо мала по сравнению с ротонной). Вычисленная таким образом масса, вместо того чтобы быть постоянной, оказы-



вается обратно пропорциональной температуре (в температурном интервале 1,3—1,7° K). Следует, однако, отметить, что, хотя сам факт непостоянства μ несомненен, количественный закон ее изменения может быть установлен только весьма приблизительно (главным образом благодаря скудности экспериментальных данных по теплоемкости гелия-II).

Если не делать предположения $\varepsilon = \Delta + p^2/2\mu$ о зависимости энергии ротона ε от его импульса p , а рассмотреть общую зависимость $\varepsilon(p)$, то вычисления по общим формулам, выведенным в ², показывают, что в формулу $\rho_n = N\mu$ вместо μ входит величина $p^2/3\kappa T$ (p^2 — средний квадрат импульса). Если последняя величина обратно пропорциональна температуре, то $p^2 = \text{const}$, т. е. значение импульса ротона в основном лежит в окрестности некоторого p_0 . На первый взгляд этот факт кажется очень странным, но его можно есте-

ственным образом объяснить, предположив, что энергетический спектр гелия-II относится к типу, показанному на рисунке. При малых импульсах элементарного возбуждения его энергия возрастает линейно (фононы), затем достигает максимума, начинает убывать, и при некотором значении $p = p_0$ функция $\varepsilon(p)$ имеет минимум. В окрестности последнего можно написать

$$\varepsilon = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu}, \quad (2)$$

где μ — постоянная. Имея такой спектр, разумеется, нельзя говорить о фононах и ротонах как о строго различных типах элементарных возбуждений. Было бы более корректным говорить просто о длинноволновых (малые p) и коротковолновых (p вблизи p_0) возбуждениях. Следует подчеркнуть, что все заключения, касающиеся сверхтекучести и полностью макроскопической гидродинамики гелия-II, развитые в ², сохраняют свою справедливость также и в случае предлагаемого здесь спектра.

Должны измениться лишь формулы для термодинамических величин. Вместо формул (3,4) — (3,7) в ² для «ротонных» частей свободной энергии, энтропии, теплоемкости (на единицу массы) и плотности «нормальной жидкости» получается

$$F_p = - \frac{2\mu^{1/2} (kT)^{3/2} p_0^2}{(2\pi)^{3/2} \rho \hbar^3} e^{-\Delta/kT}, \quad (3)$$

$$S_p = \frac{2(k\mu)^{1/2} p_0^2 \Delta}{(2\pi)^{3/2} \rho T^{1/2} \hbar^3} \left(1 + \frac{3kT}{\Delta} \right) e^{-\Delta/kT}, \quad (4)$$

$$C_p = \frac{2\mu^{1/2} p_0^2 \Delta^2}{(2\pi)^{3/2} \rho k^{1/2} T^{3/2} \hbar^3} \left[1 + \frac{kT}{\Delta} + \frac{3}{4} \left(\frac{kT}{\Delta} \right)^2 \right] e^{-\Delta/kT}. \quad (5)$$

$$\frac{(\rho_n)_p}{\rho} = \frac{2\mu^{1/2} p_0^4}{3(2\pi)^{3/2} \rho (kT)^{1/2} \hbar^3} e^{-\Delta/kT}. \quad (6)$$

В таком виде теория содержит три константы: Δ , p_0 и μ . Поэтому ее трудно проверить на основании существующих сейчас экспериментальных данных. Для величин Δ , p_0 и μ получается

$$\frac{\Delta}{k} = 9,6^\circ \text{K}, \quad \frac{p_0}{\hbar} = 1,95 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}, \quad \mu = 0,77 m_{\text{He}}. \quad (7)$$

Отметим, что μ имеет порядок массы атома гелия m_{He} , а $\hbar/p_0$ оказывается даже меньшим, чем атомные размеры. Значения (7) были использованы при построении кривой на рисунке.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. P. P e s h k o v, J. Phys. (USSR) **10**, 389 (1946).
2. Л. Д. Л а н д а у, ЖЭТФ **11**, 592 (1941).