

532.507

**ЛОКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В НЕСЖИМАЕМОЙ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ОЧЕНЬ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ
РЕЙНОЛЬДСА *)**

А. Н. Колмогоров

§ 1. Будем обозначать через

$$U_{\alpha}(P) = U_{\alpha}(x_1, x_2, x_3, t), \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

компоненты скорости в момент времени t в точке с прямоугольными декартовыми координатами x_1, x_2, x_3 . При изучении турбулентности естественно считать компоненты скорости $U_{\alpha}(P)$ в каждой точке $P = (x_1, x_2, x_3, t)$

*) Воспроизводится по ДАН СССР 30 (4), 299 (1941).

изучаемой области G четырехмерного пространства (x_1, x_2, x_3, t) с л у ч а й н ы м и в е л и ч и н а м и в смысле, принятом в теории вероятностей [см. по поводу такого подхода работу Миллионщикова ¹].

Обозначая через $\bar{A}$ математическое ожидание случайной величины A , предположим, что

$$\bar{U}_\alpha^2 \text{ и } \overline{\left(\frac{dU_\alpha}{dx_\beta}\right)^2}$$

конечны и ограничены в каждой ограниченной подобласти области G .

Введем в четырехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3, t) новые координаты

$$y_\alpha = x_\alpha - x_\alpha^{(0)} - U_\alpha(P^{(0)})(t - t^{(0)}), \quad s = t - t^{(0)}, \quad (1)$$

где $P^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, t^{(0)})$ — некоторая фиксированная точка из области G . Заметим, что координаты y_α какой-либо точки P зависят от случайных величин $U_\alpha(P^{(0)})$ и поэтому сами являются случайными величинами. Компоненты скорости в новых координатах равны

$$W_\alpha(P) = U_\alpha(P) - U_\alpha(P^{(0)}). \quad (2)$$

Пусть при каких-либо фиксированных значениях величин $U_\alpha(P^{(0)})$ точки $P^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, имеющие в системе координат (1) координаты $y_\alpha^{(k)}$ и $s^{(k)}$, лежат в области G . Тогда можно определить $3n$ -мерный условный закон распределения вероятностей F_n для величин $W_\alpha^{(k)} = W_\alpha(P^{(k)})$, $\alpha = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \dots, n$, при заданных $U_\alpha^{(0)} = U_\alpha(P^{(0)})$.

Вообще говоря, закон распределения F_n зависит от параметров $x_\alpha^{(0)}$, $t^{(0)}$, $U_\alpha^{(0)}$, $y_\alpha^{(k)}$, $s^{(k)}$.

О п р е д е л е н и е 1. Турбулентность называется локально однородной в области G , если при любых фиксированных n , $y_\alpha^{(k)}$ и $s^{(k)}$ закон распределения F_n не зависит от $x_\alpha^{(0)}$, t и $U_\alpha^{(0)}$, пока все точки $P^{(k)}$ помещаются в G .

О п р е д е л е н и е 2. Турбулентность называется локально изотропной в области G , если она однородна и если, кроме того, указанные в определении 1 законы распределения инвариантны по отношению к вращениям и зеркальным отображениям исходной системы координатных осей (x_1, x_2, x_3) .

По сравнению с введенным Тэйлором ² понятием изотропной турбулентности наше определение локально изотропной турбулентности уже в том отношении, что в нашем определении требуется независимость законов распределения F_n от t^0 , т. е. стационарность во времени, и шире в том отношении, что ограничения накладываются лишь на законы распределения разностей скоростей, а не самих скоростей.

§ 2. Гипотеза изотропности в смысле Тэйлора хорошо подтверждается экспериментально в случае турбулентности, вызванной прохождением потока через решетку (см. ³). В большинстве других практически интересных случаев она может рассматриваться лишь как весьма грубое приближение к действительности даже для малых областей G и при очень больших числах Рейнольдса.

В отличие от этого, автору представляется весьма правдоподобным, что в произвольном турбулентном потоке с достаточно большим числом Рейнольдса *) $R = LU/\nu$ в достаточно малых областях G четырехмерного пространства (x_1, x_2, x_3, t) , не лежащих вблизи границ потока, или других его особенностей, осуществляется с хорошим приближением

*) Здесь L и U обозначают типичные масштабы длин скоростей для потока в целом.

гипотеза локальной изотропности. При этом под «малой областью» подразумевается область, линейные размеры которой малы по сравнению с L , а временные — по сравнению с $T = U/L$.

Естественно, что в столь общей и несколько неопределенной формулировке выдвинутое сейчас предположение не может быть строго доказано *). Чтобы сделать возможной его экспериментальную проверку для отдельных частных случаев, мы указываем далее ряд следствий из гипотезы локальной изотропности.

§ 3. Будем обозначать через y вектор с компонентами y_1, y_2, y_3 и рассмотрим случайные величины

$$W_\alpha(y) = W_\alpha(y_1, y_2, y_3) = U_\alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, t) - U_\alpha(x_1, x_2, x_3, t). \quad (3)$$

В силу предположения локальной изотропности их законы распределения не зависят от x_1, x_2, x_3 и t . Для первых моментов величин $W_\alpha(y)$ из локальной изотропности вытекает, что

$$\overline{W_\alpha(y)} = 0. \quad (4)$$

Переходим поэтому к изучению вторых моментов **)

$$B_{\alpha\beta}(y^{(1)}, y^{(2)}) = \overline{W_\alpha(y^{(1)}) W_\beta(y^{(2)})}. \quad (5)$$

Из локальной изотропности вытекает, что

$$B_{\alpha\beta}(y^{(1)}, y^{(2)}) = \frac{1}{2} [B_{\alpha\beta}(y^{(1)}, y^{(1)}) + B_{\alpha\beta}(y^{(2)}, y^{(2)}) - B_{\alpha\beta}(y^{(2)} - y^{(1)}, y^{(2)} - y^{(1)})]. \quad (6)$$

*) Приведем здесь лишь некоторые общие соображения в пользу высказанной гипотезы. При очень больших R турбулентный поток можно представлять себе следующим образом: на осредненный поток (характеризующийся математическими ожиданиями $\bar{U}_\alpha$) накладываются «пульсации первого порядка», состоящие в беспорядочном перемещении отдельных объемов жидкости с диаметрами порядка $l^{(1)} = l$ (где l — прандтлевский путь перемешивания) друг относительно друга; порядок скоростей этих относительных перемещений обозначим через $v^{(1)}$; пульсации первого порядка оказываются при очень большом R в свою очередь неустойчивыми и на них накладываются пульсации «второго порядка» с путем перемешивания $l^{(2)} < l^{(1)}$ и относительными скоростями $v^{(2)} < v^{(1)}$; такой процесс последовательного измельчения турбулентных пульсаций происходит до тех пор, пока для пульсаций какого-либо достаточно большого порядка n число Рейнольдса

$$R^{(n)} = \frac{l^{(n)} v^{(n)}}{\nu}$$

не окажется достаточно малым, чтобы влияние вязкости на пульсации n -порядка было уже ощутимо и предупреждало образование накладывающихся на них пульсаций $n + 1$ -го порядка.

С энергетической точки зрения процесс турбулентного перемешивания естественно представлять себе так: пульсации первого порядка поглощают энергию осредненного движения и передают ее последовательно пульсациям более высоких порядков, энергия же самых мелких пульсаций рассеивается в тепловую благодаря вязкости.

В силу хаотического механизма передачи движения от пульсаций низших порядков к пульсациям более высоких порядков естественно допустить, что в пределах малых по сравнению с $l^{(1)}$ областей пространства мелкие пульсации высших порядков подчинены приближенно пространственно-изотропному статистическому режиму. В пределах малых промежутков времени этот режим естественно считать приближенно стационарным даже в том случае, если поток в целом не стационарен.

Так как при очень больших R разности $W_\alpha(P) = U_\alpha(P) - \bar{U}_\alpha(P^{(0)})$ компонент скоростей в близких точках P и $P^{(0)}$ четырехмерного пространства (x_1, x_2, x_3, t) определяются почти исключительно пульсациями высших порядков, изложенная сейчас схема и приводит нас к гипотезе локальной изотропности в малых областях G в смысле определений § 1 и 2.

**) Все результаты § 3 вполне аналогичны полученным в ^{1, 2} и ⁴ для случая изотропной турбулентности в смысле Тэйлора.

Эта формула позволяет ограничиться вторыми моментами вида $B_{\alpha\beta}(y, y)$. Для них

$$B_{\alpha\beta}(y, y) = \bar{B}(r) \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta + \delta_{\alpha\beta} B_{nn}(r), \quad (7)$$

где

$$r^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad y_\alpha = r \cos \theta_\alpha, \quad \delta_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta, \quad \delta_{\alpha\beta} = 1 \text{ при } \alpha = \beta,$$

$$\bar{B}(r) = B_{dd}(r) - B_{nn}(r), \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{dd}(r) &= \overline{[w_1(r, 0, 0)]^2}, \\ B_{nn}(r) &= \overline{[w_2(r, 0, 0)]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При $r=0$ имеем

$$B_{dd}(0) = B_{nn}(0) - \frac{\partial}{\partial r} B_{dd}(0) = \frac{\partial}{\partial r} B_{nn}(0) = 0, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} B_{dd}(0) &= 2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y_1} \right)^2 = 2a^2, \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} B_{nn}(0) &= 2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial y_1} \right)^2 = 2a_n^2. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Формулы (6)–(11) были получены без использования предположения о несжимаемости жидкости. Из этого предположения вытекает уравнение

$$r \frac{\partial B_{dd}}{\partial r} = -2\bar{B}, \quad (12)$$

позволяющее выразить B_{nn} через B_{dd} . Из (12) и (11) вытекает, что

$$a_n^2 = 2a^2. \quad (13)$$

Легко, далее, вычислить, что (в предположении несжимаемости) среднее рассеяние энергии в единицу времени на единицу массы равно

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} = \nu \left\{ 2 \left(\frac{dw_1}{dy_1} \right)^2 + \left(\frac{dw_2}{dy_2} \right)^2 + \left(\frac{dw_3}{dy_3} \right)^2 + \left(\frac{dw_2}{dy_1} + \frac{dw_1}{dy_2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{dw_3}{dy_2} + \frac{dw_2}{dy_3} \right)^2 + \left(\frac{dw_1}{dy_3} + \frac{dw_3}{dy_1} \right)^2 \right\} = 15\nu a^2. \end{aligned} \quad (14)$$

§ 4. Рассмотрим преобразование координат

$$y'_\alpha = \frac{y_\alpha}{\eta}, \quad s' = \frac{s}{\sigma}. \quad (15)$$

Скорости, кинематическая вязкость и среднее рассеяние энергии в новой системе координат выражаются следующими формулами:

$$W'_\alpha = W_\alpha \frac{\sigma}{\eta}, \quad v' = v \frac{\sigma}{\eta^2}, \quad \bar{\varepsilon}' = \bar{\varepsilon} \frac{\sigma^3}{\eta^2} \quad (16)$$

Примем теперь следующую гипотезу:

Первая гипотеза подобия. Распределения F_n для локально изотропной турбулентности однозначно определяются величинами ν и $\bar{\varepsilon}$.

Преобразование координат (15) при

$$\eta = \lambda = \sqrt{\frac{\nu}{a}} = \frac{\nu^{\frac{3}{4}}}{\frac{1}{\bar{\varepsilon}^{\frac{1}{4}}}}, \quad (17)$$

и

$$\sigma = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \quad (18)$$

приводит к величинам $\nu' = 1$, $\bar{\varepsilon}' = 1$. Поэтому в силу принятой гипотезы подобия соответствующая функция

$$B'_{dd}(r') = \beta_{dd}(r') \quad (19)$$

должна быть одинакова для всех случаев локально изотропной турбулентности. Формула

$$B_{dd}(r) = V \sqrt{\nu \varepsilon} \beta_{dd}\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad (20)$$

показывает в соединении с выведенными ранее, что вторые моменты $B_{\alpha\beta}(y^{(1)}, y^{(2)})$ в случае локально изотропной турбулентности однозначно выражаются через ν , $\bar{\varepsilon}$ и универсальную функцию β_{dd} .

§ 5. Чтобы определить поведение функции $\beta_{dd}(r')$ при больших r' , введем еще одну гипотезу:

Вторая гипотеза подобия*). Если абсолютные величины векторов $y^{(k)}$ и их разностей $y^{(k)} - y^{(k')}$ (где $k \neq k'$) велики по сравнению с λ , то законы распределения F_n однозначно определяются величиной $\bar{\varepsilon}$ и не зависят от ν .

Положим

$$y''_{\alpha} = \frac{y'_{\alpha}}{k^3}, \quad s'' = \frac{s'}{k^2}, \quad (21)$$

где y'_{α} и s' определены в соответствии с формулами (15), (17) и (18). Так как при любом k

$$\bar{\varepsilon}' = \bar{\varepsilon}'' = 1,$$

то при r' , большом по сравнению с $\lambda' = 1$, в силу принятой сейчас гипотезы

$$B''_{dd}(r'') \sim B'_{dd}(r'') = \beta_{dd}\left(\frac{r'}{k^3}\right).$$

С другой стороны, из формулы (22) вытекает, что

$$B''_{dd}(r'') = \frac{1}{k^2} B'_{dd}(r') = \frac{1}{k^2} \beta_{dd}(r').$$

Таким образом, при больших r'

$$\beta_{dd}\left(\frac{r'}{k^3}\right) \sim \frac{1}{k^2} \beta_{dd}(r'),$$

откуда

$$\beta_{dd}(r') \sim C (r')^{\frac{2}{3}}, \quad (22)$$

где C — абсолютная константа. В силу (17), (20) и (22) при r , больших

*) В терминах схематического представления о турбулентности, развитого в примечании *) на стр. 478, λ есть масштаб наиболее мелких пульсаций, энергия которых непосредственно рассеивается в тепловую благодаря вязкости. Смысл второй гипотезы подобия заключается в том, что механизм передачи энергии от более крупных пульсаций к более мелким для пульсаций промежуточных порядков, для которых $l^{(k)}$ больше, чем λ , не зависит от вязкости.

по сравнению с λ ,

$$B_{dd}(r) \propto C \varepsilon^{\frac{2}{3}} r^{\frac{2}{3}}. \quad (23)$$

Из (23) и (12) легко вывести, что при r , больших по сравнению с λ ,

$$B_{nn}(r) \propto \frac{4}{3} B_{dd}(r). \quad (24)$$

Заметим по поводу последней формулы, что при r , малых по сравнению с λ , в силу (13) имеет место соотношение

$$B_{nn}(r) \propto 2B_{dd}(r). \quad (25)$$

Поступило
28.XII 1940 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М и л л и о н щ и к о в, ДАН СССР **22**, 236 (1939).
2. T a y l o r, Proc. Roy. Soc. **A151**, 429 (1935).
3. Modern Developments in Fluid Dynamics, edited by S. Goldstein, Oxford, v. 1, 1938, § 95.
4. K a r m á n, J. Aeronaut. Sci. **4**, 131 (1937).