

О ВИБРАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА *)

А. А. Власов

1. Постановка задачи. 2. Исходные уравнения и их упрощение. 3. Решение линеаризованных уравнений. 4. Дисперсия продольных волн. 5. Дисперсия продольных волн в электронном газе с функцией распределения по Ферми. 6. Дисперсия поперечных волн. 7. Резюме и заключение.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Во многих проблемах приходится иметь дело с большой совокупностью заряженных частиц (положительных и отрицательных), могущих сравнительно свободно перемещаться между соседями. Таковыми системами являются совокупность электронов и ионов в разрядных трубках (плазма), ионосфера (слой Хевисайда), так называемые свободные электроны в металлах (электронный газ).

Современные теории таких совокупностей базируются на аналогии с обычным газом из нейтральных частиц, т. е. предполагают, что движение каждой заряженной частицы происходит в основном по инерции, за исключением коротких времен сближения (удара). Таково, например, классическое представление об электронном газе. При рассмотрении различных процессов в плазме, в теории распространения радиоволн в ионосфере (Л а р м о р, Ф ё р с т е р л и н г и Л а с с е н и др.) это представление является исходным. Последовательное проведение такого взгляда должно опираться на основное интегральное уравнение кинетической теории, в котором, нужно было думать, включены необходимые элементы, определяющие свойства исследуемого газа: 1) инерция, 2) силы взаимодействия между частицами, 3) внешние силы. Специализация рассматриваемой системы, с точки зрения кинетического уравнения, сводится только к фиксации закона взаимодействия между частицами, в рассматриваемом случае заряженных частиц — к кулоновскому. Такое рассмотрение впервые было проведено Ландау **).

Однако схема кинетического уравнения и связанное с ним наше представление о газе является определенной аппроксимацией проблемы многих тел, основанной на специальном учете взаимодействия. Производится учет только парного взаимодействия между частицами — взаимодействия посредством удара. Применимость такой аппроксимации является не всегда законной. Если силы таковы, что возможно ввести «сферу действия», т. е. пренебречь изменением функции распределения за счет далеких (по сравнению с радиусом «сферы действия») пролетов, и если для рассматриваемой совокупности частиц среднее расстояние между частицами велико в сравнении с радиусом «сферы действия», схема кинетического уравнения представляется достаточной. В противном случае недостаточно рассмотрение только парных взаимодействий. Каждая частица начинает взаимодействовать одновременно с совокупностью других, и проблема многих тел в этом случае уже не может быть сведена к обычной схеме кинетического уравнения.

В случае кулоновского взаимодействия мы имеем дело с силами, сравнительно медленно спадающими с расстоянием. Недостаточность учета только парного взаимодействия уже видна, например, из того, что изменение относительной плотности положительных и отрицательных частиц в каком-либо месте плазмы будет связано с появлением объемного заряда,

*) Воспроизводится по ЖЭТФ 8 (3), 291 (1938).

**) L. L a n d a u, Zs. Phys. Sowjetunion 10 (2) (1936).

который будет действовать на движение заряженных частиц, гораздо дальше расположенных, чем среднее расстояние между частицами. В этом случае учет только парного взаимодействия явно недостаточен. Существенную роль должны играть силы взаимодействия на дистанциях, больших среднего расстояния между частицами (которые мы в дальнейшем будем называть «далекими силами»), действие которых не может быть учтено обычной схемой кинетического уравнения. Это же обстоятельство выступает также, например, в том, что для кулоновского взаимодействия, строго говоря, невозможно ввести «сферу действия», так как рассеивание кулоновским центром приводит к расходящемуся выражению для полного поперечника рассеивания и именно за счет действия сил на далеких дистанциях. Физическая причина расходящихся интегралов заключается в том, что, хотя далекие пролеты мало изменяют траекторию, вероятность таких пролетов вследствие увеличения площади растет быстрее, так что в результате величина «сферы действия» получается бесконечной, в связи с чем и интегралы в кинетическом уравнении представляются расходящимися.

Обстоятельства, подобные приведенным, заставляют выдвинуть утверждение, что метод кинетического уравнения, учитывающий только парное взаимодействие — взаимодействие посредством удара, для системы заряженных частиц является аппроксимацией, строго говоря, неудовлетворительной, что в теории таких совокупностей существенную роль должны играть силы взаимодействия и на далеких дистанциях и что, следовательно, система заряженных частиц есть, по существу, не газ, а своеобразная система, стянутая далекими силами.

Учет «далеких сил» естественно приводит к таким свойствам, которых нет в обычной газовой среде, укладывающейся по своим свойствам в обычную схему кинетического уравнения. К числу их нужно отнести своеобразные вибрационные свойства электронной плазмы, на наличие которых было кратко указано еще Рэлеем*) в 1906 г. в специальной задаче — о поведении совокупности электронов в старой модели атома Томсона и независимо в 1929 г. Лэнгмюром и Тонксом**) для газовой плазмы аналогичным путем. Рассмотрение в основном ставило себе целью указать только на сам факт возможности существования вибраций и определения их частоты. Наличие вибраций получалось сразу из элементарных соображений следующим образом: пусть в однородной плазме ($N_{+}e_{+} = N_{-}e_{-}$) создана неоднородность электронной плотности; ставится вопрос, как она меняется со временем.

Считая ионы неподвижными (что возможно вследствие большой частоты вибрации) и полагая, что отступления от стационарного состояния (в котором для макроскопических значений скоростей, поля и плотности электронов имеем $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{E} = 0$, $\bar{\rho} = \rho_0 = mN$) малы, имеем следующую систему уравнений для первого приближения (уравнение непрерывности, уравнение движения, уравнение поля):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho}_1 + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 &= 0, \\ \rho_0 \dot{\mathbf{u}}_1 &= \rho_0 \frac{e}{m} \mathbf{E}_1, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}_1 &= 4\pi \rho_1 \frac{e}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A})$$

*) Rayleigh, Phil. Mag. 11, 117 (1906).

**) I. Langmuir and L. Tonks, Phys. Rev. 33, 195 (1929).

Исключая E_1 и u_1 , получаем осцилляторное уравнение для ρ_1

$$-\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 \rho_1 = 0, \quad \omega_0^2 = 4\pi N e^2 / m,$$

т. е. изменение плотности не релаксирует, как в обычном газе, а колеблется с определенной частотой, характерной для плазмы. Уже в этом рассмотрении сразу видно, что для наличия вибраций существенно введение «далеких сил», потому что посредством поля E связываются движения зарядов (система А) на макроскопически близких дистанциях, и следовательно, существенную роль играют взаимодействия на дистанциях, больших среднего расстояния между частицами. Для наличия вибраций является необходимым включение «далеких сил»; факт их наличия не может быть поэтому получен из обычной схемы кинетического уравнения.

Однако приведенное рассмотрение не может претендовать на полноту и, строго говоря, является только рациональным указанием в нужном направлении. Представляются не вполне ясными, например, те условия температур и плотностей электронного газа, при которых возможно осуществление вибраций, какова роль температуры электронного газа, не выступающая в приведенных уравнениях, какую роль играют взаимодействия на близких дистанциях, почему не выступает распространение таких вибраций и т. д. Имеется потребность в более детальном способе подхода.

Настоящая работа ставит себе целью путем установления рационального математического аппарата, включающего в себя «далекие силы» (а также и «близкие»), определить те свойства, которые ими обусловлены, и, именно, в основном выяснение, по возможности полнее, вибрационных свойств электронного газа как основного следствия, к которому приводит учет «далеких сил».

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ УПРОЩЕНИЕ

В этом параграфе мы хотим сформулировать исходные уравнения для газовой плазмы (совокупность электронов, ионов, нейтральных частиц), хотя применимость их будет иметь большую общность (см. § 5). Состояние газовой плазмы определяется заданием трех функций распределения: для электронов — $f_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)$, для ионов — $f_2(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)$ и для нейтральных частиц — $f_3(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)$. Изменения числа частиц каждого сорта, принадлежащих элементу фазового объема $dx dy dz d\xi d\eta d\zeta$, за счет трансляции частиц и за счет действия внешних сил учитываем обычным способом. Так как взаимодействие электронов и ионов с нейтральными частицами может быть описано путем введения «сферы действия», т. е. имеет характер «удара», то изменение функций распределения по этой причине мы также можем провести по обычной схеме кинетического уравнения. Наиболее существенным для плазмы является учет взаимодействия между заряженными частицами. Так как это взаимодействие, по предыдущему, строго говоря, нельзя описать посредством «удара» (не игнорируя «далеких сил»), разделим его рассмотрение на две части: во-первых, взаимодействия на близких дистанциях, меньших среднего расстояния между частицами, и, во-вторых, взаимодействия на «далеких» дистанциях, больших этого расстояния.

Взаимодействие на близких расстояниях может быть учтено искусственным приемом — путем обрыва кулоновского взаимодействия, например, на половине среднего расстояния между частицами; благодаря такому обрыву становится возможным сохранение представлений о взаимодействии посредством удара, т. е. эту часть взаимодействия возможно учесть

опять-таки по схеме кинетического уравнения. Для изучаемых вибрационных свойств плазмы определяющим являются далекие силы. Взаимодействие на далеких дистанциях будем учитывать макроскопически, т. е. следующим образом. В стационарном состоянии для плазмы полагаем плотность положительных зарядов N_+e_+ равной плотности отрицательных N_-e_- , а также для токов $\mathbf{j}_+ = e_+N_+\mathbf{u}_+ = 0$ и $\mathbf{j}_- = e_-N_-\mathbf{u}_- = 0$, так что макроскопические значения полей $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{H} = 0$. Всякое отступление от стационарного распределения, связанное с появлением зарядов и токов, а также посредством поля, влияет на ход изменения функций распределения. Таким образом, через посредство полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно связываются значения функций распределения, вообще говоря, на любых дистанциях. Для учета этой связи будем иметь, с одной стороны, максвеллову систему уравнений, где связь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ с функциями распределения будет осуществлена посредством зарядов и токов, с другой стороны, для учета обратного влияния появляющихся полей на функции распределения достаточно введение их в кинетическое уравнение для заряженных частиц.

Таким образом, для исходной системы уравнений будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{v} f_1 + \frac{e_1}{m_1} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) \operatorname{grad}_{\mathbf{v}} f_1 = \\ = \left[\frac{\partial f_1}{\partial t} \right]_{11}^{\text{st}} + \left[\frac{\partial f_1}{\partial t} \right]_{12}^{\text{st}} + \left[\frac{\partial f_1}{\partial t} \right]_{13}^{\text{st}}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{v} f_2 + \frac{e_2}{m_2} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) \operatorname{grad}_{\mathbf{v}} f_2 = \\ = \left[\frac{\partial f_2}{\partial t} \right]_{21}^{\text{st}} + \left[\frac{\partial f_2}{\partial t} \right]_{22}^{\text{st}} + \left[\frac{\partial f_2}{\partial t} \right]_{23}^{\text{st}}, \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{v} f_3 = \left[\frac{\partial f_3}{\partial t} \right]_{31}^{\text{st}} + \left[\frac{\partial f_3}{\partial t} \right]_{32}^{\text{st}} + \left[\frac{\partial f_3}{\partial t} \right]_{33}^{\text{st}}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \rho = e_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 d\xi d\eta d\zeta + e_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_2 d\xi d\eta d\zeta, \\ \mathbf{j} = e_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} f_1 d\xi d\eta d\zeta + e_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} f_2 d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

Система уравнений (I) допускает постановку вопроса: если для $t = 0$ заданы $f_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, 0)$, $f_2(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, 0)$ и $f_3(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, 0)$ для всех значений переменных, а также заданы условия на границах, то каковы будут значения f_1, f_2, f_3 для любого t . Нужно думать, что приведенная система достаточно полно характеризует плазму и поэтому может являться основой рассмотрения различных процессов в ней. Она должна включать в себя интересующие нас вибрационные свойства.

Проанализируем роль членов $\left[\frac{\partial f_1}{\partial t} \right]_{11}^{\text{st}}$, $\left[\frac{\partial f_2}{\partial t} \right]_{12}^{\text{st}}$ и т. д., содержащих взаимодействия посредством удара. Так как для осуществления вибрационных свойств существенно наличие инертности, то представляется необходимым, чтобы концентрация заряженных частиц и нейтрального газа была таковой, чтобы частота пульсаций была больше частоты соударения заряженных частиц с нейтральным газом. Очевидно, это может быть

осуществлено и не принципиально. В дальнейшем мы будем предполагать, что частота пульсаций значительно больше частоты соударений, так что ударами электронов с нейтральным газом можем пренебречь. Принципиальным вопросом является взаимодействие посредством «удара» между заряженными частицами.

Величину этого взаимодействия можем оценить, если оборвем прицельное расстояние на некотором максимальном значении. Если ограничиться рассмотрением только близких пролетов и именно таких, которые связаны с поворотом на угол, больший $\pi/2$, то в этом случае легко проинтегрировать оценку роли членов $\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{11}^{\text{st}}$ и т. д. В этом случае зависимость прицельного расстояния b от угла поворота θ относительной скорости v мало отлична от той, которая имеет место для удара упругих шаров, вследствие чего члены $\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]^{\text{st}}$ в этих двух случаях приобретают аналогичный вид, откуда из сопоставления легко усмотреть, что играет роль «сферы действия» для кулоновского взаимодействия.

Для взаимодействия посредством удара между электронами имеем *)

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{11}^{\text{st}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\sigma} \int_0^{2\pi} (ff_1 - f'f'_1) v b db d\omega_1 d\varepsilon,$$

где b — прицельное расстояние, v — величина относительной скорости.

Интеграция ведется по всем скоростям ξ_1, η_1, ζ_1 и по всем значениям параметров столкновений b и ε . Выступающие переменные $\xi', \eta', \zeta', \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ суть функции $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \theta, \varepsilon$, которые вскрываются законами сохранения. Закон же взаимодействия между частицами определяет зависимость прицельного расстояния от угла поворота θ и угла ε . Следовательно, характер закона взаимодействия между частицами выступает в (1) только через посредство $b = b(\theta, \varepsilon)$. Для удара упругих шаров

$$b = \sigma \cos(\theta/2),$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{11}^{\text{st}} = \int (ff_1 - f'f'_1) v \sigma^2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) d\theta/2 d\varepsilon. \quad (1)$$

Для кулоновского взаимодействия

$$b = \frac{2e^2}{mv^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \quad (2)$$

Для углов рассеивания θ (θ — тупой угол), лежащих в интервале от $\pi/2$ до π , ходы $\cos(\theta/2)$ и $\operatorname{ctg}(\theta/2)$ и их первых производных сравнительно мало отличны. Для $\theta/2 = \pi/2$ выступающие члены $\cos(\theta/2) \sin(\theta/2)$ и, с другой стороны, $\operatorname{ctg}(\theta/2)/\sin^2(\theta/2)$ совпадают, для $\theta/2 = 80^\circ$ второй превышает первый в $\sim 1,08$, для 60° в $\sim 1,7$ и для 45° в ~ 3 раза. Поэтому формулы для этих двух случаев приобретают аналогичный вид, где только в случае кулоновского взаимодействия вместо постоянного поперечного сечения σ стоит переменная величина $2e^2/mv^2$. Если под v понимать постоянную среднюю скорость частиц (что для целей оценки порядка допустимо), интегралы будут фактически почти тождественными, если отождествить величины поперечников. Таким образом, формула

$$\sigma^2 = 4(e^2/mv^2)^2 \quad (3)$$

должна определять порядок «сферы действия» для больших углов отклонения, где под v нужно подразумевать среднюю скорость частиц.

*) См., например: L. B o l t z m a n n, Vorlesungen über Gastheorie, Bd. 1, 2. Abschnitt.

Для углов, меньших $\pi/2$, уже нет аналогии со случаем упругих шаров и оценка роли $\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{11}^{\text{st}}$ должна быть проведена иначе.

Учет только далеких пролетов ($0 < \theta < \pi/2$) в рамках обычной схемы кинетического уравнения был проведен Л. Ландау*). Для длины свободного пробега Ландау дается формула

$$l \cong \frac{(kT)^2}{e^4 L N}, \quad (4)$$

откуда для поперечного сечения σ имеем

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi l N} \cong \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^2}{kT} \right)^2 L,$$

или, так как $3kT/2 = mv^2/2$:

$$\sigma^2 = \frac{9}{\pi} \left(\frac{e^2}{mv^2} \right)^2 L, \quad (5)$$

отличающаяся от формулы (3) только логарифмическим членом $L = \ln b_2/b_1$, где b_1 и b_2 — минимальное и максимальное значения прицельного расстояния. Следовательно, учет только близких или только далеких пролетов приводит, отвлекаясь от логарифмического члена, к одинаковым выражениям для «сферы действия». За минимальное расстояние должно быть принято то, которое соответствует $\theta = \pi/2$, т. е.

$$b_1 = 2e^2/mv^2.$$

Максимальное значение b_2 должно лежать между b_1 и половиной среднего расстояния между частицами**). Полагая $b_2 = 1/2N^{1/3}$, для L имеем

$$L = \ln \frac{3kT}{4N^{1/3}e^2}.$$

Смотря по соотношению плотностей и температур, L может быть больше или меньше единицы, в соответствии с чем величина «сферы действия» в существенном может определяться как далекими ($b > b_1$) (5), так и близкими ($b < b_1$) (3) пролетами. Для обычных условий в плазме $L \sim 10$. Поэтому порядок величины сферы действия (учитывая как «близкие», так и «далекие» пролеты) можем оценивать из формулы

$$\sigma^2 = \alpha (e^2/mv^2)^2, \quad (6)$$

где $\alpha \sim 10$.

В условиях ионосферы $N \sim 10^6$ эл/см³, T полагаем $= 300^\circ \text{K}$, получим следующие значения для «сферы действия» σ , длины свободного пробега l и частоты соударений ν_{st} :

$$\begin{aligned} \sigma &\cong \sqrt{3\alpha} 10^{-6} \text{ см}, \\ l &= \frac{1}{\pi \sigma^2 N} \cong \frac{1}{3\pi \alpha} 10^6 \cong 10^4 \text{ см}, \\ \nu_{\text{st}} &= v/l \cong 10^3 \text{ сек}^{-1}. \end{aligned}$$

*) См. сноску на стр. 444. (Прим. ред.)

**) Фиксировать за b_2 дебаевское расстояние не вполне законно, так как оно может быть и больше среднего расстояния между частицами, а так как в этом случае в сфере действия одной частицы будет находиться несколько других частиц, то понятие «удара» уже теряет смысл, а с ним вместе и исходная обычная схема кинетического уравнения.

Для собственной же частоты ν_0 вибраций электронной плазмы с той же концентрацией имеем

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}} \cong 1,3 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}.$$

Следовательно, вследствие того, что $\nu_0 \gg \nu_{st}$, взаимодействием посредством удара между электронами можем вполне пренебречь.

Для электронной плазмы в разрядных трубках, полагая $N = 10^{10} \text{ эл/см}^3$, $T = 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$, имеем: $\sigma \cong \sqrt{27a} 10^{-8} \sim 10^{-7} \text{ см}$, $l \sim 10^3 \text{ см}$, $\nu_{st} \sim 10^4 \text{ сек}^{-1}$, $\nu_0 \sim 10^9 \text{ сек}^{-1}$. Для взаимодействия посредством «удара» между электронами и ионами выражение для поперечника σ имеет, как легко видеть, то же выражение (6), где только m будет служить эффективной массой этих частиц, и, следовательно, оценка σ , l , ν_{st} остается фактически неизменной и для этого случая.

Итак, вопрос о вибрационных свойствах допускает упрощение задачи — можно пренебречь всеми взаимодействиями посредством «удара».

Рассматриваемый круг вопросов, связанных с большими частотами, допускает еще одно упрощение в исходных уравнениях: вследствие большой массы ионов в сравнении с электронами можно их перемещением пренебречь, т. е. считать ионы фактически неподвижными. При всех этих условиях система исходных уравнений принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}_r \mathbf{v} f + \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) \text{grad}_v f &= 0, \\ \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi e \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f d\xi d\eta d\zeta - N \right), \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f d\xi d\eta d\zeta, \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

где f — функция распределения для электронов. Таким образом, в рассматриваемой проблеме приходим к системе уравнений, описывающей поведение только одного электронного газа.

Роль положительных ионов выступает только в выражении для полной плотности зарядов, т. е. сводится только к компенсации части электронной плотности, соответствующей стационарному распределению. Полученная система уравнений нелинейна. Нелинейность входит за счет члена

$$e/m \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) \text{grad}_v f,$$

так как сами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ зависят от f . В настоящей работе мы ограничимся исследованием линеаризованной системы. В стационарном состоянии имеет место максвелловское распределение, что следует из (1) системы уравнений обычным путем. Полагаем, что отступления от стационарного состояния

$$\Phi_0(\xi, \eta, \zeta) = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)/2kT} \quad (7)$$

малы:

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) = \Phi_0(\xi, \eta, \zeta) + \varphi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t). \quad (8)$$

Подставляя (8) в систему (II) и опуская все квадратичные члены в Φ , получим исходную систему линеаризованных уравнений в виде*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{v} \Phi + \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \Phi_0 &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi d\xi d\eta d\zeta, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} \Phi d\xi d\eta d\zeta, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

3. РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ

Характерной особенностью первого приближения (линеаризованной системы (III)) является разбиение решений для полей, могущих существовать в плазме, на два независимых типа: на поля безвихревое и вихревое (на продольные и поперечные волны). Общее решение складывается аддитивно из решений для вихревого и безвихревого полей, взятых порознь. Для того чтобы показать это и найти уравнения, отдельно описывающие ту и другую части, представим входящие в систему (III) векторы, что всегда возможно, в виде суммы двух векторов — вихревого и безвихревого:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(l)} + \mathbf{E}^{(t)},$$

где

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(l)} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{E}^{(t)} = 0, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(t)},$$

так как по (III) $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$. Соответственно разбиваем и вектор макроскопической скорости:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(l)} + \mathbf{v}^{(t)};$$

так как $\mathbf{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} \Phi d\xi d\eta d\zeta$, то последнее разбиение будет возможно, если сама функция распределения представляется в виде двух частей:

$$\Phi = \Phi^{(l)} + \Phi^{(t)},$$

для которых

$$\mathbf{v}^{(l)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} \Phi^{(l)} d\xi d\eta d\zeta, \quad \mathbf{v}^{(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} \Phi^{(t)} d\xi d\eta d\zeta.$$

Для того чтобы получить уравнения, порознь описывающее ту и другую часть, рассматриваем два частных решения системы (III):

1. Пусть в плазме имеется только безвихревое поле, т. е. $\mathbf{E}^{(l)} \neq 0$, $\mathbf{E}^{(t)} = \mathbf{H}^{(t)} = 0$; кроме того, $\mathbf{v}^{(t)} = 0$, $\mathbf{v}^{(l)} \neq 0$, что возможно, если $\Phi^{(t)} = 0$, $\Phi^{(l)} \neq 0$.

2. Имеется наличие только вихревого поля $\mathbf{E}^{(l)} = 0$, $\mathbf{E}^{(t)} \neq 0$, $\mathbf{H}^{(t)} \neq 0$; $\mathbf{v}^{(l)} = 0$, $\mathbf{v}^{(t)} \neq 0$, т. е. $\Phi^{(l)} = 0$, $\Phi^{(t)} \neq 0$.

*) В пренебрежении лоренцовой силой нет необходимости: в решении линеаризованной системы уравнений (III) действие ее автоматически выпадает (см. § 3).

Для безвихревой части (продольные волны) получаем систему уравнений, если подставим в систему (III) условия, сформулированные в п. 1:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{v} \varphi^{(1)} + \frac{e}{m} \mathbf{E}^{(1)} \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \Phi_0 &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}^{(1)} &= 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(1)} d\xi d\eta d\zeta, \\ -\frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t} &= 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} \varphi^{(1)} d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III}^{(1)})$$

где также по условию $\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(1)} = 0$.

Для вихревой части, подставляя в систему (III) условия, сформулированные в п. 2, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{(t)}}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{v} \varphi^{(t)} + \frac{e}{m} \left(\mathbf{E}^{(t)} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}^{(t)}] \right) \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \Phi_0 &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(t)} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^{(t)}}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} \varphi^{(t)} d\xi d\eta d\zeta, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(t)} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^{(t)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}^{(t)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E}^{(t)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III}^{(t)})$$

Сумма решений системы (III⁽¹⁾) и (III^(t)) будет вследствие линейности уравнений также решением исходной системы (III). Кроме того, сумма решений отдельных уравнений может быть подобрана так, чтобы удовлетворить любым начальным условиям [совместимым с системой (III)] и заданным условиям на бесконечности, т. е., следовательно, быть общим решением системы (III). В самом деле, начальные условия для полей в плазме в общем случае для системы (III) можно разбить на вихревую и невихревую части, т. е. можно представить без ограничения аддитивно из начальных условий для (III⁽¹⁾) и (III^(t)); следовательно, решение отдельных систем достаточно и для удовлетворения любым начальным условиям, совместимым с исходной системой (III).

Итак, в рассматриваемом приближении возможные движения в электронном газе разбиваются на независимые друг от друга вихревые и безвихревые движения; свойства электронного газа должны в существенных чертах определяться особенностями этих двух типов независимых движений и быть включенными в систему уравнений (III⁽¹⁾) и (III^(t)).

Рассмотрим систему уравнений (III⁽¹⁾). Особенностью этой системы является то, что число уравнений больше, чем неизвестных. В самом деле, комбинируя (1) и (2) или (1) и (3) уравнения системы (III⁽¹⁾), будем иметь и в том и другом случае пару уравнений, достаточных для определения неизвестной функции распределения $\varphi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)$. Однако сравнение решений этих двух пар различных уравнений приводит к тождественным решениям. Мы найдем сначала точное решение первой пары, потом второй и докажем тождественность этих решений. В факте эквивалентности (2) и (3) уравнений выражается своеобразное обстоятельство — в рассматриваемой проблеме учет закона Кулона [уравнение (2)] эквивалентен учету продольного тока смещения [уравнение (3)].

Найдем решение первой пары уравнений. Они допускают разделение переменных (отщепляется зависимость от t). Полагая

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(1)}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) &= T(t) \varphi_0^{(1)}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta), \\ \mathbf{E}^{(1)}(x, y, z, t) &= T(t) \mathbf{E}_0^{(1)}(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и подставляя в испытываемые уравнения, получим

$$\frac{dT/dt}{T} = - \frac{\operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{v} \Phi_0^{(1)} + \frac{e}{m} \mathbf{E}_0^{(1)} \operatorname{grad}_{\mathbf{v}} \Phi_0}{\Phi_0^{(1)}} = \operatorname{const} = i\omega.$$

Пока ω — неопределенная постоянная.

Зависимость от времени сразу определяется:

$$T = T(0) e^{i\omega t}. \quad (10)$$

Для определения $\Phi_0^{(1)}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ имеем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} i\omega \Phi_0^{(1)} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{v} \Phi_0^{(1)} + \frac{e}{m} \mathbf{E}_0^{(1)} \operatorname{grad}_{\mathbf{v}} \Phi_0 &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}^{(1)} &= 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0^{(1)} d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Так как, по условию, $\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(1)} = 0$, то будем искать решение в виде разложения по плоским продольным волнам. Вследствие линейности уравнений каждая отдельная плоская волна должна быть решением.

Для отдельной плоской волны имеем

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0^{(1)}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) &= g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \\ \mathbf{E}_0^{(1)}(x, y, z) &= \mathbf{k}_I a_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $\mathbf{k}_I$ — единичный вектор в направлении распространения. Подставляя в (11), получим систему уравнений для определения амплитуд

$$\left. \begin{aligned} i[\omega - (k_x \xi + k_y \eta + k_z \zeta)] g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) &= \\ = -\frac{e}{m} \left(k_x \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} + k_y \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} + k_z \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta} \right) \frac{1}{|\mathbf{k}|} a_{\mathbf{k}}, \\ -i|\mathbf{k}| a_{\mathbf{k}} &= 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

или, представляя $\partial \Phi_0 / \partial \xi = \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon \cdot \partial \varepsilon / \partial \xi = \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon \cdot m \xi$, $\partial \Phi_0 / \partial \eta = \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon \cdot m \eta$, $\partial \Phi_0 / \partial \zeta = \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon \cdot m \zeta$, где $\varepsilon = m/2 \cdot (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$:

$$\left. \begin{aligned} i[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})] g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{e}{|\mathbf{k}|} (\mathbf{k}\mathbf{v}) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varepsilon} a_{\mathbf{k}}, \\ -i|\mathbf{k}| a_{\mathbf{k}} &= 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

откуда для определения $g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)$ имеем уравнение

$$g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{4\pi e^2}{|\mathbf{k}|^2} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v}) \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (15)$$

Формула (15) определяет закон дисперсии продольных волн, а также определяет вид функции распределения для любого t , т. е. дает полное решение задачи.

В самом деле, интегрируя справа и слева по скоростям, получаем

$$\frac{4\pi e^2}{|\mathbf{k}|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v}) \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} d\xi d\eta d\zeta = 1, \quad (IV)$$

т. е. закон дисперсии для рассматриваемых волн.

Так как интеграл в формуле (15) не зависит от скоростей, то, следовательно, зависимость $g_{\mathbf{k}}^{(1)}$ от скоростей представляется вскрытой:

$$g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) = c(\mathbf{k}) \frac{4\pi e^2}{|\mathbf{k}|^2} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v}) \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega}. \quad (16)$$

Постоянная $c(\mathbf{k})$ может зависеть только от $\mathbf{k}$.

Окончательно, суперпонируя парциальные волны, получим общее решение:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} c(\mathbf{k}) \frac{4\pi e^2}{|\mathbf{k}|^2} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v}) \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (V)$$

Вид $c(\mathbf{k})$ определяется начальным условием для функции распределения

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) d\mathbf{k} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} c(\mathbf{k}) \frac{4\pi e^2}{|\mathbf{k}|^2} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v}) \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} d\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Интегрируя по скоростям справа и слева и принимая во внимание (IV):

$$\rho(x, y, z, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(1)}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, 0) d\xi d\eta d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} c(\mathbf{k}) d\mathbf{k},$$

где $\rho(x, y, z, 0)$ — начальное значение изменения электронной плотности, откуда $c(\mathbf{k})$ определится как компонента разложения по Фурье

$$c(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y, z, 0) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (VI)$$

Таким образом, формулы (IV), (V), (VI) представляют решение задачи.

Перейдем теперь к решению другой пары уравнений той же системы (III⁽¹⁾) [уравнение (1) и (3)]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{v} \varphi^{(1)} + \frac{e}{m} \mathbf{E}^{(1)} \operatorname{grad}_{\mathbf{v}} \Phi_0 &= 0, \\ -\frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t} &= 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} \varphi^{(1)} d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Аналогично предыдущему и для этой пары отщепляется зависимость от времени; полагаем и здесь

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(1)}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) &= T(t) \varphi_0^{(1)}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta), \\ \mathbf{E}^{(1)}(x, y, z, t) &= T(t) \mathbf{E}_0^{(1)}(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Подставляя в (17), находим для $T(t)$

$$T(t) = T(0) e^{i\omega t}, \quad (19)$$

где ω должна быть определена последующими уравнениями.

Для определения $\varphi_0^{(1)}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ имеем систему

$$\left. \begin{aligned} i\omega\varphi_0^{(1)} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{v}\varphi_0^{(1)} + \frac{e}{m} \mathbf{E}_0^{(1)} \operatorname{grad}_{\mathbf{v}} \Phi_0 &= 0, \\ -i\omega\mathbf{E}_0^{(1)} &= 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}\varphi_0^{(1)}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Представим решение и здесь в виде суперпозиции продольных волн:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0^{(1)}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) &= g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \\ \mathbf{E}_0^{(1)}(x, y, z) &= \mathbf{k}_I a_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Для определения амплитуд подставляем в (20) систему

$$\left. \begin{aligned} i[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})] g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{e}{|\mathbf{k}|} (\mathbf{k}\mathbf{v}) a_{\mathbf{k}} \partial\Phi_0/\partial\varepsilon, \\ -i\omega\mathbf{k}_I a_{\mathbf{k}} &= 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Умножая второе уравнение этой системы на $\mathbf{k}$ скалярно и подставляя в первое уравнение, найдем

$$g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{4\pi e^2}{\omega |\mathbf{k}|^2} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v}) \partial\Phi_0/\partial\varepsilon}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{k}\mathbf{v}) g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (23)$$

Формула (23), аналогично (15), дает полное решение задачи. Для того чтобы получить формулу дисперсии, умножим (23) на $(\mathbf{k}\mathbf{v})$ справа и слева и проинтегрируем по всем значениям скоростей; получим закон дисперсии в форме

$$\frac{4\pi e^2}{\omega |\mathbf{k}|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \partial\Phi_0/\partial\varepsilon}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} d\xi d\eta d\zeta = 1. \quad (\text{IV}^{(a)})$$

Докажем тождественность дисперсионных формул (IV) и (IV^(a)), а также тождественность и решений, представленных (15) и (23). Выберем $\mathbf{k}$ направленным по оси x , тогда для тождественности (IV) и (IV^(a)) необходимо

$$\frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2 \partial\Phi_0/\partial\varepsilon}{k\xi - \omega} d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \partial\Phi_0/\partial\varepsilon}{k\xi - \omega} d\xi d\eta d\zeta,$$

или, умножая и деля на $(k\xi + \omega)$:

$$\frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2 (k\xi + \omega) \partial\Phi_0/\partial\varepsilon}{k^2 \xi^2 - \omega^2} d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi (k\xi + \omega) \partial\Phi_0/\partial\varepsilon}{k^2 \xi^2 - \omega^2} d\xi d\eta d\zeta.$$

От функции $\Phi_0(\xi, \eta, \zeta)$ требуется только четность в скоростях, интегралы от нечетных степеней пропадают, остаются справа и слева одинаковые члены, откуда и убеждаемся в тождественности дисперсионных формул (IV) и (IV^(a)). Как следствие, получаем тождественность

и решений. Для этого проинтегрируем (23) по ξ, η, ζ ; получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_k^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{k}\mathbf{v}) g_k^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \times \\ \times \left\{ \frac{4\pi e^2}{|\mathbf{k}|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v}) \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} d\xi d\eta d\zeta \right\},$$

что и дает тождественность (15) и (23), если учесть (IV^(a)) и (IV).

Перейдем теперь к решению уравнений для трансверсальных волн — система (III^(t)).

Аналогично случаю продольных волн, и здесь система уравнений (III^(t)) допускает разделение переменных — отщепляется зависимость от времени. Полагаем

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(t)}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) &= T(t) \varphi_0^{(t)}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta), \\ \mathbf{E}^{(t)}(x, y, z, t) &= T(t) \mathbf{E}_0^{(t)}(x, y, z), \\ \mathbf{H}^{(t)}(x, y, z, t) &= T(t) \mathbf{H}_0^{(t)}(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Подставляя в (III^(t)), для $T(t)$ находим

$$T(t) = T(0) e^{i\omega t},$$

где ω должна быть определена законом дисперсии для трансверсальных волн. Для определения $\varphi_0^{(t)}, \mathbf{E}_0^{(t)}, \mathbf{H}_0^{(t)}$ получим систему

$$\left. \begin{aligned} i\omega \varphi_0^{(t)} + \operatorname{div}_r \mathbf{v} \varphi_0^{(t)} + \frac{e}{m} \left(\mathbf{E}_0(t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) \operatorname{grad}_v \Phi_0 &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_0^{(t)} &= \frac{i\omega}{c} \mathbf{E}_0^{(t)} + \frac{4\pi e}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} \varphi_0^{(1)} d\xi d\eta d\zeta, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_0^{(t)} &= -\frac{i\omega}{c} \mathbf{H}_0^{(t)}, \operatorname{div} \mathbf{E}_0^{(t)} = 0, \operatorname{div} \mathbf{H}_0^{(t)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Ищем и здесь решение для $\mathbf{E}_0^{(t)}, \mathbf{H}_0^{(t)}, \varphi_0^{(t)}$ в виде плоской волны:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_0^{(t)}(x, y, z) &= \mathbf{e}_k b_k e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \\ \mathbf{H}_0^{(t)}(x, y, z) &= \mathbf{h}_k c_k e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \\ \varphi_0^{(t)}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) &= g_k^{(t)}(\xi, \eta, \zeta) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Вследствие

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_0^{(t)} = -i(\mathbf{k}\mathbf{e}_k) = 0, \operatorname{div} \mathbf{H}_0^{(t)} = -i(\mathbf{k}\mathbf{h}_k) = 0$$

волны трансверсальны: $\mathbf{e}_k \perp \mathbf{k}, \mathbf{h}_k \perp \mathbf{k}$.

Взаимная связь векторов $\mathbf{e}_k, \mathbf{h}_k, \mathbf{k}$ дается уравнением

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_0^{(t)} = -i\omega/c \cdot \mathbf{H}_0^{(t)},$$

которое также связывает амплитуды b_k и c_k . Имеем

$$[\mathbf{k}\mathbf{e}_k] b_k = \mathbf{h}_k c_k \omega/c, \quad (27)$$

откуда

$$\mathbf{h}_k = [\mathbf{k}\mathbf{e}_k] \frac{1}{|\mathbf{k}|} \quad (28)$$

и

$$b_k = \frac{\omega}{c|\mathbf{k}|} c_k. \quad (29)$$

Используем третье уравнение системы (25):

$$-i[\mathbf{k}\mathbf{h}_\mathbf{k}]c_\mathbf{k} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{e}_\mathbf{k}b_\mathbf{k} + \frac{4\pi e}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}g_\mathbf{k}^{(t)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (30)$$

Исключая из (29) посредством (27) амплитуду $c_\mathbf{k}$, выразим $b_\mathbf{k}$ через посредство $g_\mathbf{k}^{(t)}$; имеем

$$-\frac{c}{\omega}i[\mathbf{k}[\mathbf{k}\mathbf{e}_\mathbf{k}]]b_\mathbf{k} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{e}_\mathbf{k}b_\mathbf{k} + \frac{4\pi e}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}g_\mathbf{k}^{(t)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta,$$

но

$$\frac{1}{|\mathbf{k}|^2}[\mathbf{k}[\mathbf{k}\mathbf{e}_\mathbf{k}]] = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2}(\mathbf{k}\mathbf{e}_\mathbf{k}) - \mathbf{e}_\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{k})\frac{1}{|\mathbf{k}|^2} = -\mathbf{e}_\mathbf{k};$$

(30) приобретает вид

$$i\frac{c^2k^2 - \omega^2}{\omega c}\mathbf{e}_\mathbf{k}b_\mathbf{k} = \frac{4\pi e}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}g_\mathbf{k}^{(t)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \quad (31)$$

или, умножая справа и слева на $\mathbf{e}_\mathbf{k}$, имеем

$$b_\mathbf{k} = i4\pi e \frac{\omega}{\omega^2 - c^2k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{e}_\mathbf{k}\mathbf{v})g_\mathbf{k}^{(t)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (32)$$

Итак, амплитуды полей $\mathbf{E}_0^{(t)}$ и $\mathbf{H}_0^{(t)}$ посредством формул (27) и (32) выражаются через амплитуды функции распределения. Для ее определения используем первое уравнение системы (25). Подстановка (26) дает, используя

$$\text{grad}_\mathbf{v}\Phi_0 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial\epsilon} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\xi}\mathbf{i} + \frac{\partial\epsilon}{\partial\eta}\mathbf{j} + \frac{\partial\epsilon}{\partial\zeta}\mathbf{k} \right) = m\mathbf{v} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\epsilon},$$

$$i[\omega - (\mathbf{k}\mathbf{v})]g_\mathbf{k}^{(t)}(\xi, \eta, \zeta) = -e \left\{ (\mathbf{e}_\mathbf{k}\mathbf{v})b_\mathbf{k} + \frac{1}{c}([\mathbf{v}\mathbf{h}_\mathbf{k}]\mathbf{v})c_\mathbf{k} \right\} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\epsilon}.$$

Вследствие $[\mathbf{v}\mathbf{h}_\mathbf{k}]\mathbf{v} = 0$ действие лоренцовой силы: $e/c \cdot [\mathbf{v}\mathbf{H}]$ автоматически выпадает из вычислений. Выражая в правой части $b_\mathbf{k}$ через неизвестную амплитуду $g_\mathbf{k}^{(t)}$ посредством (32), получим

$$g_\mathbf{k}^{(t)}(\xi, \eta, \zeta) = 4\pi e^2 \frac{\omega}{\omega^2 - c^2k^2} \frac{(\mathbf{e}_\mathbf{k}\mathbf{v})\partial\Phi_0/\partial\epsilon}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{e}_\mathbf{k}\mathbf{v})g_\mathbf{k}^{(t)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (33)$$

[ср. с аналогичным выражением для продольных волн (23)].

Закон дисперсии поперечных волн получим, умножив (33) на $(\mathbf{e}_\mathbf{k}\mathbf{v})$ и проинтегрировав по всем значениям скоростей ξ, η, ζ :

$$4\pi e^2 \frac{\omega}{\omega^2 - c^2k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathbf{e}_\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \partial\Phi_0/\partial\epsilon}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} d\xi d\eta d\zeta = 1 \quad (\text{VII})$$

[ср. с (IV), (IV^(a))].

Общее решение получим аналогично случаю продольных волн, именно: замечая, что интеграл в формуле (33) не зависит от скоростей,

$$g_\mathbf{k}^{(t)}(\xi, \eta, \zeta) = 4\pi e^2 \frac{\omega}{\omega^2 - c^2k^2} \frac{(\mathbf{e}_\mathbf{k}\mathbf{v})\partial\Phi_0/\partial\epsilon}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} c(\mathbf{k}), \quad (34)$$

для получения общего решения должны суперпонировать парциальные волны с найденными амплитудами (34):

$$\begin{aligned} \varphi^{(t)}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} g_{\mathbf{k}}^{(t)}(\xi, \eta, \zeta) d\mathbf{k} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} c(\mathbf{k}) 4\pi e^2 \frac{\omega}{\omega^2 - c^2 k^2} \frac{(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}\mathbf{v})}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} \frac{\partial \Phi_0 / \partial \varepsilon}{d\mathbf{k}}. \quad (\text{VIII}) \end{aligned}$$

Вид $c(\mathbf{k})$ определяется начальными условиями для функции распределения

$$\varphi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} c(\mathbf{k}) 4\pi e^2 \frac{\omega}{\omega^2 - c^2 k^2} \frac{(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}\mathbf{v})}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} \frac{\partial \Phi_0 / \partial \varepsilon}{d\mathbf{k}}, \quad (35)$$

тогда как в случае продольных волн $c(\mathbf{k})$ выражалось через начальное распределение электронной плотности $\rho(x, y, z, 0)$ [формула (VI)]; в рассматриваемом случае наличия только трансверсальных волн $\rho(x, y, z, 0) = 0$ $c(\mathbf{k})$ выражается уже через начальное распределение токов. В самом деле, умножив (35) на вектор скорости $\mathbf{v}$ и проинтегрировав по всем значениям скоростей, получим слева

$$\mathbf{j}(x, y, z, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} \varphi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, 0) d\xi d\eta d\zeta.$$

Справа представим умножаемый вектор скорости в виде компонент

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}_{\mathbf{k}}\mathbf{v}) \mathbf{e}_{\mathbf{k}} + (\mathbf{k}_{\mathbf{I}}\mathbf{v}) \mathbf{k}_{\mathbf{I}} + (\mathbf{h}_{\mathbf{k}}\mathbf{v}) \mathbf{h}_{\mathbf{k}}.$$

Выступят интегралы

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}\mathbf{v})^2 \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} d\xi d\eta d\zeta, \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}\mathbf{v}) (\mathbf{k}_{\mathbf{I}}\mathbf{v}) \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} d\xi d\eta d\zeta, \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}\mathbf{v}) (\mathbf{h}_{\mathbf{k}}\mathbf{v}) \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon}{(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \omega} d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

Первый интеграл совпадает с интегралом в дисперсионной формуле (VII) и ею определяется. Последние два точно равны нулю, для второго, например, выбрав $x \parallel \mathbf{k}$ и $y \parallel \mathbf{e}_{\mathbf{k}}$, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \eta \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon}{k\xi - \omega} d\xi d\eta d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi d\xi}{k\xi - \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon d\eta d\zeta = 0$$

вследствие четности $\partial \Phi_0 / \partial \varepsilon$ в скоростях. Аналогично и для третьего. Следовательно, окончательно имеем

$$\mathbf{j}(x, y, z, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} \varphi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, 0) d\xi d\eta d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}} c(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (\text{IX})$$

откуда $c(\mathbf{k})$ определяется как амплитуда в разложении Фурье

Формулы (VII), (VIII) и (IX) дают решение задачи для рассматриваемого случая (трансверсальных волн).

4. ДИСПЕРСИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН

Рассмотрим дисперсионное уравнение для продольных волн (IV). Без нарушения общности выберем систему координат с осью x , направленной по $\mathbf{k}$. Тогда дисперсионное уравнение будет иметь вид *)

$$\frac{4\pi e^2}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \partial \Phi_0 / \partial \varepsilon}{k\xi - \omega} d\xi d\eta d\zeta = 1. \quad (36)$$

Входящая в дисперсионное уравнение функция распределения $\Phi_0(\xi, \eta, \zeta)$ есть функция распределения для стационарного состояния. В этом параграфе мы рассмотрим электронный газ, характеризующийся в стационарном состоянии максвелловской функцией распределения

$$\Phi_0(\varepsilon) = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\varepsilon/kT}, \quad (37)$$

где $\varepsilon = m/2 \cdot (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$. Вводя (37) и (36) и проинтегрировав по η и ζ , получим

$$-\frac{4\pi e^2 N}{k} \sqrt{\frac{m}{2\pi (kT)^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi e^{-m\xi^2/2kT}}{k\xi - \omega} d\xi = 1. \quad (38)$$

Удобно ввести безразмерные величины.

За единицу частоты выберем собственную частоту электронного газа

$$\omega_0 = \sqrt{4\pi N e^2 / m},$$

за единицу волнового числа — обратную величину дебаевского расстояния D :

$$D = 1/\kappa, \quad \kappa = \sqrt{4\pi e N^2 / kT}.$$

Тогда единицей скорости будет

$$\omega_0 / \kappa = \sqrt{kT/m}.$$

В этих единицах $\omega^* = \omega / \omega_0$, $k^* = k / \kappa$, $\xi^* = \xi \kappa / \omega_0 = \xi \sqrt{m/kT} = x$. Введя все это в (38), получим дисперсионное уравнение в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{-x^2/2} dx}{x - \omega^* / k^*} = -\sqrt{2\pi} k^{*2}. \quad (39)$$

То, что в полученной формуле определяющие электронную плазму величины e , m , N , T не выступают явно, а только через посредство выбранных единиц измерения, указывает на то, что для рассматриваемой системы интервал времени, определяемый частотой ω_0 , и интервал пространства, определяемый дебаевским расстоянием, являются мерами естественными, присущими рассматриваемой системе.

На это указывает также и то обстоятельство, что дебаевская формула для статической поляризации автоматически включена в полученную дисперсионную формулу и является ее частным случаем. В самом деле, полагая в (39) $\omega = 0$, получаем $k^{*2} = -1$, т. е.

$$k = \pm i\kappa. \quad (40)$$

*) В воспроизводимой ниже статье «О колебаниях электронной плазмы» (стр. 527) Л. Д. Ландау показал, что при более строгом решении задачи методом преобразования Лапласа особенность в подынтегральном выражении (36) следует обходить в комплексной плоскости. При этом он обнаружил новый эффект специфического затухания волн вследствие их взаимодействия с резонансными электронами («затухание Ландау»). (Прим. ред.)

Следовательно, пространственная зависимость решений (4) в этом случае будет определяться членами $e^{\mp ikr}$, тождественными с дебаевскими.

Нас интересует, каким образом рассасывается неоднородность плотности, созданная в электронном газе; поэтому мы будем считать заданным в дисперсионном уравнении k .

Ограничимся рассмотрением физически наиболее интересного случая, когда макроскопическая неоднородность, созданная в электронной плазме, велика в сравнении с дебаевским расстоянием, т. е.

$$|k^*| = |k/\kappa| = 2\pi |D/\lambda| < 1.$$

В этом случае подынтегральное выражение представим в виде ряда по степеням k

$$\frac{x}{x - \omega^*/k^*} = -\frac{x}{\omega^*} k^* \left[1 + \frac{x}{\omega^*} k^* + \left(\frac{x}{\omega^*} \right)^2 k^{*2} + \left(\frac{x}{\omega^*} \right)^3 k^{*3} - \dots \right], \quad (41)$$

сходящегося и при том равномерно в интервале $|x| < \omega^*/k^*$. Подставляя (41) в (39) и ограничиваясь пока первым не исчезающим членом, имеем

$$-\left(\frac{k^*}{\omega^*} \right)^2 \int x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = -\sqrt{2\pi} k^{*2},$$

где интеграция может быть распространена только в интервале $|x| < \omega^*/k^*$; однако, так как $\omega^*/k^* > 1$, то без заметной ошибки пределы мы можем считать бесконечными; таким образом, имеем

$$-(k^*/\omega^*)^2 \sqrt{2\pi} = -\sqrt{2\pi} k^{*2},$$

или для ω^* получаем

$$\omega^{*2} = 1, \quad (42)$$

откуда, следовательно, для циклической частоты получаем постоянное значение

$$\omega = \pm \omega_0 = \pm \sqrt{4\pi e^2 N/m} \quad (43)$$

Итак, в рассматриваемом приближении закон дисперсии таков, что циклическая частота ω не зависит от волнового числа и равна постоянной ω_0 , характеризующей плазму. Это указывает на наличие аномально сильной дисперсии, именно таковой, что величина групповой скорости при таком законе дисперсии равна нулю, т. е. в этом приближении нет распространения; созданная макроскопическая неоднородность, не релаксируя, как в обычном газе, и не распространяясь, вибрирует с большой частотой.

Законом дисперсии определяется ход зависимости от времени решений, представленных в (V). Для изменения электронной плотности $\rho(x, y, z, t)$ имеем по (V)

$$\rho(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t - ikr} c(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (44)$$

где амплитуды $c(\mathbf{k})$ определяются начальным условием для ρ

$$\rho(x, y, z, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikr} c(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (45)$$

Воспользовавшись (43), имеем, следовательно, из (44) и (45)

$$\rho(x, y, z, t) = \rho(x, y, z, 0) e^{i\omega_0 t}, \quad (46)$$

что совпадает с формулой, полученной из элементарных соображений (см. § 1).

Перейдем к следующему приближению — к учету двух первых исчезающих членов в разложении (41); имеем

$$-\left\{\left(\frac{k^*}{\omega^2}\right)^2 \int x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \left(\frac{k^*}{\omega^*}\right) \int x^4 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\right\} = -\sqrt{2\pi} k^{*2}.$$

Интегрирование и здесь без заметной ошибки можем распространить до бесконечных пределов. Получим

$$-\{(k^*/\omega^*)^2 \sqrt{2\pi} + (k^*/\omega^*)^4 \cdot 3 \sqrt{2\pi}\} = -\sqrt{2\pi} k^{*2}. \quad (47)$$

Следовательно, для определения ω как функции k имеем уравнение

$$1/\omega^{*2} + 3k^{*2}/\omega^{*4} = k^{*2},$$

или

$$\omega^{*4} - \omega^{*2} - 3k^{*2} = 0. \quad (48)$$

Так как исходная формула (47) верна только в случае $|k| < 1$ (во втором порядке), решение уравнения (48) необходимо представить в виде ряда по k и ограничиться первыми двумя исчезающими членами. Таким образом, имеем

$$\omega^{*2} = 1/2 \pm 1/2 (1 + 12k^{*2})^{1/2} \cong 1/2 \pm 1/2 (1 + 6k^{*2}).$$

Для корня с положительным знаком имеем

$$\omega^{*2} = 1 + 3k^{*2}, \quad (49)$$

т. е. дальнейшее уточнение формулы (42), или, переходя к обычным единицам,

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 3 \frac{kT}{m} k^2 = \omega_0^2 + 3 \frac{kT}{m} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2. \quad (50)$$

Корень же с отрицательным знаком не соответствует исходному предположению $(\omega^*/k^*) > 1$ и должен быть поэтому отброшен.

В случае, если задано волновое число действительным и по-прежнему бóльшим дебаевского, формула (49) указывает, что, в отличие от первого приближения, созданная макроскопическая неоднородность вибрирует, но с частотой, уже зависящей от величины макроскопической неоднородности λ .

Величина этой добавки в частоте определяется температурой и плотностью электронного газа *).

*) Следует иметь в виду, что, так как эта добавка, по условию, меньше вибрационной частоты, на ее учет столкновения влияют в большей мере. В случае, если частота соударений ω^{st} (см. § 2) больше этой добавки, влияние ее перекрывается соударениями. Наличие ее выступает в наиболее чистом виде, если

$$\Delta\omega/\omega^{st} = \pi \sqrt{3} D l / \lambda^2 \sim 10^6 T^{5/2} / N^{3/2} \lambda^2 \gg 1.$$

При этом условии, к которому, строго говоря, относится наш расчет второго приближения, можно полностью пренебречь столкновениями, что при достаточно высоких температурах всегда допустимо.

При, например: $N = 10^6$ эл/см³, $N = 10^8$ эл/см³, $N = 10^{10}$ эл/см³ } при $\lambda = 10^2$ см
 $T = 10^3$ °К, $T = 10^4$ °К, $T = 10^5$ °К } $\frac{\Delta\omega}{\omega^{st}} \sim 10,$

т. е. при этих условиях соударениями можно пренебречь уже вплоть до метровых волн (дебаевское расстояние для этих случаев от 1 мм до 0,1 мм).

В случае, если представляется заданной частота, дисперсионное уравнение (45) удобно переписать в виде

$$k^2 = (\omega^2 - \omega_0^2)/v^2, \quad v^2 = 3kT/m. \quad (X)$$

Соотношение (X) в достаточном приближении и является дисперсионным уравнением для продольных волн. Оно аналогично известному дисперсионному уравнению распространения поперечных электромагнитных волн в ионосфере (а также дисперсионному уравнению для волновой функции свободного движения в квантовой механике), отличаясь существенно тем, что роль скорости света c^2 играет тепловая скорость $v^2 = 3kT/m$.

Отметим некоторые следствия дисперсионного уравнения:

1. Если $\omega > \omega_0$, k будет действительным, т. е. в этом случае имеем распространение — наличие продольных волн. В случае же $\omega < \omega_0$ k — мнимо, нет распространения; пространственная зависимость решения в этом случае аналогична статической поляризации.

2. Для групповой скорости продольных волн имеем из (50)

$$v_{\text{гр}} = d\omega/dk = 3kT/m \cdot k/\omega;$$

следовательно, связь между фазовой и групповой скоростями будет

$$v_{\text{гр}} v_{\text{ф}} = v^2, \quad v^2 = 3kT/m. \quad (51)$$

Для значения самих величин $v_{\text{гр}}$ и $v_{\text{ф}}$, ограничиваясь первыми неисчезающими членами (рассматривая по-прежнему неоднородности, большие дебаевского: $|k/\kappa| = v/\omega_0 |k| < 1$), имеем из (50)

$$v_{\text{гр}} \cong \frac{v^2}{\omega_0} k = \frac{3kT}{\sqrt{4\pi e^2 m N}} k, \quad v_{\text{ф}} \cong \frac{\omega_0}{k} = \sqrt{4\pi e^2 N/m} \frac{1}{k}; \quad (52)$$

так как, по условию, $|k| v/\omega_0 < 1$, то групповая скорость всегда меньше, фазовая всегда больше тепловой скорости электронов.

Вследствие малой массы электронов скорости (52) все же сравнительно велики. Для ионосферы, например (см. § 2), для цуга с длиной волны 1 м $v_{\text{гр}} \sim 10^5$ см/сек в 1 см — в сто раз больше (дебаевское расстояние для ионосферы ~ 1 мм).

3. Законом дисперсии определяется изменение электронной плотности от времени и координат, что видно из общего решения для $\rho(x, y, z, t)$ (44).

Ограничиваясь и здесь рассмотрением того случая, когда размеры макроскопической неоднородности велики в сравнении с дебаевским расстоянием, мы можем вскрыть общий характер изменения электронной плотности со временем. Подставляя, таким образом, в формулу (44) выражение для $\omega(k)$

$$\omega(k) = \sqrt{\omega_0^2 + v^2 k^2} \cong \omega_0 + 1/2 v^2/\omega_0 k^2, \quad (53)$$

имеем

$$\rho(x, y, z, t) = e^{i\omega_0 t} \int e^{\frac{i}{2} \frac{v^2}{\omega_0} k^2 t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} c(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = e^{i\omega_0 t} f(x, y, z, t), \quad (54)$$

где $c(\mathbf{k})$ определяется начальным распределением плотности. Интеграл в (54) совпадает по виду с тем, который выступает в известной задаче о распылении волновых пакетов для свободного движения в волновой механике, что уже видно из того, что функция $f(x, y, z, t)$ является общим решением уравнения

$$\nabla^2 f = \frac{2i\omega_0}{v^2} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (55)$$

аналогичного волновому уравнению для свободного движения, где только вместо $m/\hbar$ стоит ω_0/v^2 . Поэтому мы можем не проводить вычислений, а использовать сразу известную формулу для быстроты распывания, для нашей задачи, заменив в ней $m/\hbar$ на ω_0/v^2 . Таким образом, будем иметь для эффективной ширины неоднородности в распределении электронов к моменту времени t

$$\delta_t^2 = \delta_0^2 + (v^2/\delta_0\omega_0)^2 t^2, \quad (56)$$

где δ_0 — линейные размеры неоднородности к начальному моменту времени.

Итак, следовательно, созданная неоднородность плотности в распределении электронов вибрирует с частотой ω_0 и дополнительно к этому распывается. Быстроту распывания можем охарактеризовать тем временем, в течение которого размеры увеличиваются вдвое; для этого времени τ будем иметь

$$\tau = 3\delta_0^2 \frac{\omega_0}{v^2} = \delta_0^2 \frac{\sqrt{4\pi e^2 m N}}{kT}; \quad (57)$$

так как, по условию, рассматриваются неоднородности, большие дебаевского, то автоматически время рассасывания τ больше периода пульсаций T , потому что последнее требование равносильно первому:

$$\frac{\tau}{T} = \frac{3}{2\pi} \frac{\omega_0^2}{v^2} \delta_0^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\delta_0}{D} \right)^2.$$

Таким образом, созданная неоднородность электронной плотности вибрирует и медленно (в сравнении с временем колебания) рассасывается.

5. ДИСПЕРСИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ЭЛЕКТРОННОМ ГАЗЕ С ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ФЕРМИ

В настоящем параграфе мы хотим показать, что наличие вибрационных свойств имеет место и для электронного газа, находящегося в состоянии, близком к вырождению, с характерными особенностями, в отличие от предыдущего случая максвелловского распределения.

При наличии выполнимости условий, при которых справедливы исходные уравнения (III), специализация того, что имеется ферми-газ, сводится только к специализации в исходных уравнениях функции распределения для стационарного состояния $\Phi_0(\xi, \eta, \zeta)$. Для рассматриваемого случая последняя должна быть взята по **Ф е р м и**.

Для определенности, будем рассматривать электронный газ в металлах и именно в тех (главным образом щелочных), где гипотеза свободных электронов является достаточной аппроксимацией. Условия, необходимые для осуществления вибраций [условия применимости уравнений (III), см. § 2], заключаются в условиях, сохраняющих проявление инерции у заряженных частиц за время их вибраций. Для этого является необходимым, чтобы частота соударений заряженных частиц с нейтральными частицами и между собой не превышала частоту вибраций. В противном случае неоднородность, созданная в электронной плазме, будет без вибраций аperiodически релаксировать.

Для электронов в металле частота соударений с кристаллической решеткой будет

$$\nu^{st} \cong v/l,$$

где l — длина свободного пробега, v — средняя скорость.

Оценку этой величины можем произвести из эмпирического значения электропроводности μ :

$$\mu = \frac{e^2 N}{m} \frac{l}{v}, \quad v^{\text{st}} \cong \frac{e^2 N}{m} \frac{1}{\mu},$$

для серебра, например, $\mu = 5 \cdot 10^{17}$, $N = 5,9 \cdot 10^{22}$, откуда $v^{\text{st}} = 2,9 \cdot 10^{13} \text{ сек}^{-1}$. Ожидая для вибрационной частоты то же значение, как и в классическом случае,

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}},$$

для серебра, например, будем иметь $v_0 \cong 2 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$.

Частота вибраций больше частоты соударений примерно в сто раз. Вследствие этого взаимодействием электронов с решеткой для рассматриваемой проблемы можно фактически пренебречь.

Наличие большой плотности электронного газа в металлах делает существенным для рассматриваемой проблемы вопрос о роли взаимодействия посредством «удара» между самими электронами. Для полного поперечника рассеивания имеем (см. § 2)

$$\sigma^2 = \alpha (e^2/mv^2)^2,$$

где v по порядку величины равна средней электронной скорости и $\alpha \sim 10$. Длина свободного пробега

$$l = (\pi \sigma^2 N)^{-1}.$$

Следовательно, для частоты соударений имеем

$$v_{\text{эл}}^{\text{st}} \cong v/l \cong \alpha \pi (e^2/m)^2 N/v^3. \quad (58)$$

При наличии полного вырождения

$$v^3 = \left(\frac{2\bar{\epsilon}_{\text{ср}}}{m} \right)^{3/2} = \left(\frac{3}{5} \right)^{3/2} \frac{h^3}{m^3} \cdot \frac{3N}{8\pi}, \quad (59)$$

где $\bar{\epsilon}_{\text{ср}}$ — средняя кинетическая энергия электронов в случае полного вырождения. Подставляя (59) в (58), получаем

$$v_{\text{эл}}^{\text{st}} \cong \left(\frac{5}{3} \right)^{3/2} \cdot \frac{8\pi^2 a}{3} \left(\frac{me^4}{h^3} \right) \sim 8 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1},$$

что не зависит от плотности. Это своеобразное обстоятельство обусловлено самим фактом наличия вырождения.

Тогда как $v_{\text{эл}}^{\text{st}}$ не зависит от плотности, вибрационная частота v_0 существенно ею определяется. Вследствие этого в принципе при достаточной плотности всегда могут быть осуществимы условия, при которых вибрационные свойства должны выступать в наиболее чистом виде.

Для серебра $v_0 \sim v_{\text{эл}}^{\text{st}}$. Значит, еще можно говорить о наличии вибрационных свойств и для электронного газа внутри металла.

Рассмотрим дисперсионное уравнение продольных волн в приложении к рассматриваемому случаю. Воспользуемся (IV) и (36), где еще не специализирован вид функции распределения $\Phi_0(\xi, \eta, \zeta)$; для рассматриваемого случая последняя должна быть взята по Ферми.

Удобно и здесь ввести безразмерные величины. За единицу частоты выберем и здесь собственную частоту электронной плазмы $\omega_0 = \sqrt{4\pi N e^2/m}$.

В случае классической статистики за единицу длины было принято дебаевское расстояние

$$D = \kappa^{-1}, \quad \text{где } \kappa = \sqrt{4\pi N e^2 / kT}.$$

В случае наличия вырождения роль κ должна играть величина

$$\sqrt{\frac{4\pi N e^2}{2/3\bar{\epsilon}}}, \quad (60)$$

т. е. роль kT играет $2/3$ максимальной энергии ферми-распределения $\bar{\epsilon}$. В самом деле, определим величину k для статического случая. Для этого достаточно положить в дисперсионном уравнении $\omega = 0$. Для случая полного вырождения $-\partial\Phi_0/\partial\epsilon$ имеет характер δ -функции, отличной от нуля только на границе распределения Ферми:

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial\epsilon} = -\frac{2m^3}{h^3} \delta(\epsilon - \bar{\epsilon}), \quad (61)$$

где $\bar{\epsilon}$ — максимальная энергия ферми-распределения. Подставляя (61) в (36), положив $\omega = 0$ и интегрируя:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi e^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\epsilon} d\xi d\eta d\zeta &= -\frac{4\pi e^2}{k^2} \left(\frac{2m^3}{h^3} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\epsilon - \bar{\epsilon}) \cdot \frac{4\pi}{m} \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}} d\epsilon = \\ &= -\frac{(4\pi)^2 e^2 (2m)^{3/2}}{k^2 h^3} \bar{\epsilon}^{1/2} = 1, \end{aligned} \quad (62)$$

или, воспользовавшись выражением для максимальной энергии

$$\bar{\epsilon}^{3/2} = \frac{h^3}{(2m)^{3/2}} \cdot \frac{3N}{8\pi}, \quad (63)$$

имеем

$$-\frac{3}{2} \frac{4\pi e^2 N}{k^2 \bar{\epsilon}} = 1,$$

откуда получаем

$$k^2 = k_0^2 = -\frac{4\pi e^2 N}{2/3\bar{\epsilon}},$$

т. е. формулу (60).

За единицу волнового числа поэтому примем величину (60). Единица скорости будет

$$\omega_0/k_0 = \sqrt{2/3\bar{\epsilon}/m}.$$

В этих единицах

$$\omega^* = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad k^* = \frac{k}{k_0}, \quad \epsilon^* = \frac{\epsilon}{2/3\bar{\epsilon}}.$$

Введя все это в (36), получим дисперсионное уравнение в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^* \partial\Phi_0/\partial\epsilon^*}{\xi^* - \omega^*/k^*} d\xi^* d\eta^* d\zeta^* = 2\pi \sqrt{3} k^{*2}, \quad (64)$$

где все входящие величины, в том числе и Φ_0 , безразмерны.

Нас интересует и здесь, каким образом рассасывается неоднородность плотности, созданная в электронном газе; поэтому будем считать заданным в дисперсионном уравнении k . Так как $|k_0|$ очень велико, для

серебра, например, $N = 5,9 \cdot 10^{22}$, $\epsilon = 8,5 \cdot 10^{-12}$ эрг, $|k_0|^2 = 3 \cdot 10^{16}$ см $^{-2}$, а соответственно λ_0 ($2\pi/\lambda_0 = k_0$) порядка 10^{-8} см, то физически интересным случаем является тот, когда макроскопическая неоднородность велика в сравнении с этим расстоянием. Считая поэтому

$$|k^*| = |k/k_0| = \lambda_0/\lambda \ll 1,$$

мы можем разложить подынтегральное выражение в (64) в ряд по степеням k^* :

$$\frac{\xi^*}{\xi^* - \omega^*/k^*} = -\frac{\xi^*}{\omega^*} k^* \left(1 + \frac{\xi^*}{\omega^*} k^* + \left(\frac{\xi^*}{\omega^*} \right)^2 k^{*2} + \dots \right). \quad (65)$$

Вследствие четности $\partial\Phi_0/\partial\epsilon^*$ по скоростям интегралы с нечетными степенями ξ^* исчезнут. Ограничиваясь первыми двумя не исчезающими членами, имеем

$$-\left\{ \left(\frac{k^*}{\omega^*} \right)^2 \int \xi^{*2} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\epsilon^*} d\xi^* d\eta^* d\zeta^* + \left(\frac{k^*}{\omega^*} \right)^4 \int \xi^{*4} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\epsilon^*} d\xi^* d\eta^* d\zeta^* \right\} = 2\pi \sqrt{3} k^{*2}. \quad (66)$$

Вследствие сферической симметрии $\partial\Phi_0/\partial\epsilon$ по скоростям полагаем

$$\xi^2 = 1/3 v^2 = \frac{2}{3} \frac{\epsilon}{m},$$

или

$$\xi^{*2} = 1/3 \epsilon^*.$$

В безразмерных единицах также

$$d\xi^* d\eta^* d\zeta^* = 4\pi v^{*2} dv^* = 2\pi \sqrt{\epsilon^*} d\epsilon^*.$$

Подставляя в (66), получим

$$-\left\{ \left(\frac{k^*}{\omega^*} \right)^2 \int \epsilon^{*3/2} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\epsilon^*} d\epsilon^* + \frac{1}{3} \left(\frac{k^*}{\omega^*} \right)^4 \int \epsilon^{*5/2} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\epsilon^*} d\epsilon^* \right\} = 3 \sqrt{3} k^{*2}. \quad (67)$$

Выступающие интегралы совпадают с известными интегралами в статистике Ферми. Для случая полного вырождения

$$\left. \begin{aligned} - \int \epsilon^{*3/2} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\epsilon^*} d\epsilon^* &= \int \epsilon^{*3/2} \delta(\epsilon^* - 3) d\epsilon^* = 3 \sqrt{3}, \\ - \int \epsilon^{*5/2} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\epsilon^*} d\epsilon^* &= \int \epsilon^{*5/2} \delta(\epsilon^* - 3) d\epsilon^* = 3^2 \sqrt{3}. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Ограничиваясь первым членом разложения, имеем

$$\omega^{*2} = 1, \quad (69)$$

или, в обычных единицах,

$$\omega^2 = \omega_0^2 = 4\pi e^2 N/m. \quad (70)$$

Получаем тот же результат, как и в классическом случае.

Следовательно, вибрационные свойства имеют место и в вырожденном газе. Частота собственных вибраций та же, что и в случае максвелловского распределения.

Учитывая два первых члена, имеем

$$(k^*/\omega^*)^2 + (k^*/\omega^*)^4 = k^{*2}.$$

Идя прежним путем (см. § 4), получим

$$\omega^{*2} = 1 + k^{*2}, \quad (71)$$

или, переходя к обычным единицам,

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{k_0^2} k^2 = \omega_0^2 + \frac{2}{3} \frac{\bar{\varepsilon}}{m} k^2, \quad (72)$$

или

$$k^2 = (\omega^2 - \omega_0^2)/v^2, \quad (73)$$

т. е. получаем, что закон дисперсии и в статистике Ферми тот же, как и в максвелловском случае; разница — в скорости v , роль тепловой скорости $\sqrt{3kT/m}$ играют здесь две трети предельной скорости ферми-распределения (не зависящей от T).

Изменение частоты, выступающее во втором приближении,

$$\Delta\omega \cong \frac{1}{3} \frac{\bar{\varepsilon}}{m\omega_0} k^2$$

следует учитывать только при условии, если оно не будет полностью перекрываться соударениями электронов. Принципиальным является соударение электронов между собой. Для учета по крайней мере необходимо, чтобы $\Delta\omega$ было сравнимо с $\omega_{эл}^{st}$ (59); так как последняя не зависит от частоты, а $\Delta\omega$ ею определяется, то в принципе при достаточной плотности требуемое условие может выполняться. Однако для электронного газа внутри металла частота соударений между электронами сравнима уже с ω_0 , а следовательно, превышает всегда малое изменение $\Delta\omega$, если ограничиться по-прежнему неоднородностями, большими в сравнении с расстоянием (60), которое играет роль дебаевского. Следовательно, для электронного газа внутри металла можно утверждать только о наличии вибраций и фактически уже нельзя говорить об их распространении.

Если не ограничиваться случаем полного вырождения, то в общем случае выступающие в (67) интегралы выражаются через число частиц (первый интеграл) и энергию (второй интеграл) в единице объема в виде

$$\begin{aligned} - \int \varepsilon^{*3/2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varepsilon^*} d\varepsilon^* &= \frac{1}{(1/3\varepsilon^*)^{3/2}} \cdot \frac{3}{2} \text{const} \cdot N, \\ - \int \varepsilon^{*5/2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varepsilon^*} d\varepsilon^* &= \frac{1}{(1/3\varepsilon^*)^{5/2}} \cdot \frac{5}{2} \text{const} \cdot E, \\ \text{const} &= \frac{h^3}{4\pi (2m)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Подстановка в (67) дает

$$\left(\frac{k^*}{\omega^*}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} \text{const} \cdot N \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} + \left(\frac{k^*}{\omega^*}\right)^4 \cdot 5 \text{const} \cdot E \frac{1}{\varepsilon^{5/2}} = k^{*2},$$

откуда, аналогично предыдущему, ω^* определяется уравнением

$$\omega^{*2} = \frac{3}{2} \text{const} \cdot N \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} + 5 \text{const} \cdot E \frac{1}{\varepsilon^{5/2}} k^{*2},$$

или, в обычных единицах,

$$\omega^2 = \frac{3}{2} \text{const} \cdot N \frac{\omega_0^2}{\varepsilon^{3/2}} + 2 \frac{\text{const} \cdot E}{m} \frac{1}{3/5 \varepsilon^{3/2}} k^2.$$

Воспользовавшись для упрощения

$$\bar{\varepsilon}^{3/2} = 3/2 \text{const} \cdot N \text{ и } E_0 = 3/5 \bar{\varepsilon} N,$$

где E_0 — энергия единицы объема в случае полного вырождения, получим

$$\omega^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m} + \frac{2}{3} \frac{\bar{e}}{m} \frac{E}{E_0} k^2. \quad (74)$$

Следовательно, для критической частоты имеем прежнюю зависимость. Для скорости v , фигурирующей в дисперсионном уравнении (73), имеем

$$v^2 = \frac{2}{3} \frac{\bar{e}}{m} \frac{E}{E_0}.$$

Формулой (74) определяется дисперсионное уравнение для продольных волн в статистике Ферми — в общем случае любого состояния ферми-газа. В этом смысле оно является общим. В случае полного вырождения полученные формулы переходят в прежние. При наличии малого отступления от вырожденного состояния

$$E = E_0 + \gamma T^2, \quad \gamma = \frac{3\pi^2 k^2}{5} \frac{N}{\bar{e}^2}.$$

Для скорости v имеем

$$v^2 = \frac{2}{3} \frac{\bar{e}}{m} (1 + \alpha T^2), \quad \alpha = \frac{\gamma}{E_0} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 k^2}{\bar{e}^2}.$$

6. ДИСПЕРСИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

В заключение в этом параграфе рассмотрим дисперсионное уравнение (VII) для поперечных волн. В обычной элементарной теории, не опирающейся на схему кинетического уравнения с включением далеких сил, не представляется вполне ясным характер тех упрощений, которые кладутся в основу вывода. Поэтому в рамках проводимого рассмотрения желательно проанализировать и дисперсионное уравнение (VII).

Рассмотрение дисперсии не приводит к результату, отличному от известного. В хорошем приближении дисперсионное уравнение для поперечных волн сводится к известной ларморовской формуле для ионосферы. Температурное влияние электронного газа на ход дисперсии выступает только во втором порядке отношения (v/c) , где v — тепловая скорость электронов.

Рассмотрим линейно поляризованную волну: $\mathbf{e}_k \parallel y, \mathbf{k} \parallel x$. Дисперсионное уравнение (VII) принимает вид

$$I(\omega, k) = 4\pi e^2 \frac{\omega}{\omega^2 - c^2 k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta^2 \partial \Phi_0 / \partial \epsilon}{k\xi - \omega} d\xi d\eta d\xi = 1. \quad (75)$$

Для максвелловского распределения

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \epsilon} = -\frac{1}{kT} \Phi_0 = -\frac{1}{kT} N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{2kT}}.$$

Для интеграла в $I(\omega, k)$ отсюда имеем

$$-\frac{1}{kT} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-m\xi^2/2kT}}{k\xi - \omega} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^2 e^{-m\eta^2/2kT} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m\xi^2/2kT} d\xi;$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta^2 e^{-m\eta^2/2kT} d\eta = \left(\frac{kT}{m} \right)^{3/2} \sqrt{2\pi}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m\xi^2/2kT} d\xi = \left(\frac{kT}{m} \right)^{1/2} \sqrt{2\pi},$$

получаем

$$I(\omega, k) = \frac{4\pi e^2 N/m}{\omega^2 - c^2 |k|^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{kT}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-m\xi^2/2kT} d\xi}{1 - \xi k/\omega} = 1. \quad (76)$$

Введем и здесь безразмерные величины. За единицу частоты примем и здесь собственную частоту электронной плазмы. Единицей волнового числа будет величина

$$k_0 = \sqrt{4\pi N e^2 / m c^2},$$

что будет видно из сопоставления полученных формул с прежними для случая продольных волн (49). В этих единицах

$$\omega^* = \omega/\omega_0, \quad k^* = k/k_0.$$

Введя в дисперсионное уравнение (76), получим

$$\omega^{*2} = k^{*2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} dx}{1 - \frac{k^*}{\omega^*} \frac{v}{c} x}, \quad (77)$$

где v — тепловая скорость электронов, $v = \sqrt{kT/m}$.

Полагая $(v/c) \ll 1$, подынтегральное выражение представим в виде ряда, аналогичного случаю продольных волн:

$$\frac{1}{1 - \frac{k^*}{\omega^*} \frac{v}{c} x} = 1 + \left(\frac{k^*}{\omega^*} \frac{v}{c} x \right) + \left(\frac{k^*}{\omega^*} \frac{v}{c} x \right)^2 + \dots \quad (78)$$

В случае продольных волн правомерность аналогичного разложения ограничивается заданием $|k^*| < 1$. В рассматриваемом же случае вследствие выступающего множителя v/c применимость разложения более широка. Требуется только

$$\frac{k^*}{\omega^*} \frac{v}{c} \ll 1, \quad (79)$$

или, в обычных единицах,

$$\omega/k \gg v. \quad (80)$$

В окончательной же формуле (83)

$$(\omega/k)^2 = c^2 + (\omega_0/k)^2.$$

Подставляя (78) в (77) и ограничиваясь первыми двумя членами, имеем

$$\omega^{*2} = k^{*2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \left(\frac{k^*}{\omega^*} \frac{v}{c} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx. \quad (81)$$

Интеграцию можно производить здесь только вплоть до $|x| < \omega^*/k^* \times c/v$, но для вычисления без заметной ошибки вследствие (79) распространим пределы интегрирования до бесконечности.

При этих условиях, если также ограничимся первым членом разложения, получим

$$\omega^{*2} = 1 + k^{*2}, \quad (82)$$

или, переходя к обычным единицам:

$$k^2 = (\omega^2 - \omega_0^2)/c^2, \quad (83)$$

т. е. ларморовскую формулу.

Второй член разложения порядка $(v/c)^2$ и при наличии потребности должен быть учтен релятивистским расчетом.

7. РЕЗЮМЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Учет «далеких сил» приводит к возможности распространения в электронной плазме продольных волн (связанных с изменением электронной плотности) с большой дисперсией.

2. Выяснены условия для температур и плотностей, при которых возможно их выступление.

3. Определен закон дисперсии продольных волн для электронного газа с максвелловским распределением. Закон дисперсии приводит к тому, что если соотношение температур и плотностей таково, что макроскопическая неоднородность гораздо больше дебаевского расстояния, то в первом приближении этих отношений созданная макроскопическая неоднородность, не меняя формы, вибрирует с частотой ω_0 . Во втором приближении выступает дополнительное рассасывание, ход которого определяется температурой и плотностью.

Закон дисперсии таков, что для частот, меньших вибрационной частоты ω_0 , продольные волны не распространяются; для больших частот распространение имеет место. Скорость распространения определяется температурой и плотностью электронного газа.

4. Найдено решение линеаризованных уравнений для функции распределения электронов как в случае продольных волн, так и в случае поперечных.

5. В первом приближении (ограничиваясь линеаризованными уравнениями) наличие продольных волн не связано с излучением (продольные и поперечные волны в этом приближении суперпозируются).

6. Определяются условия осуществления вибрационных свойств для вырожденного ферми-газа. Находится закон дисперсии продольных волн и для этого случая.

7. В § 6 вскрывается дисперсионная зависимость для поперечных волн.

В заключение следует отметить, что так как ход дисперсии продольных волн очень значителен и включает в себя основные характеристики электронной плазмы, то возможность экспериментального обнаружения продольных волн, по-видимому, представляет определенный интерес с точки зрения возможного метода анализа свойств плазмы. Учет затухания продольных волн включал бы также в рассмотрение и процессы взаимодействия посредством «удара» между заряженными частицами и между заряженными частицами и нейтральным газом.

В рассмотрении мы ограничились анализом линеаризованных уравнений. В этом случае наличие продольных волн не связано с поперечными, и наоборот. Вследствие того, что исходные уравнения нелинейны, уже в следующем приближении должно выступить их взаимодействие. Наличие одних должно вызывать другие. Это обстоятельство указывает на границу приложимости современной теории распространения радиоволн в ионосфере, не предполагающей наличия продольных волн. Такое рассмотрение возможно только в рамках линеаризованных уравнений. В этом обстоятельстве, по-видимому, нужно также видеть природу нелинейных эффектов, которые имеют место в практике радиотелеграфии, появляющихся, по-видимому, как результат взаимодействия поперечных волн с продольными, которые должны возникать под влиянием поперечных, а также и поперечных между собой. Решение этой задачи должно заключаться в дальнейшем приближении исходной нелинейной системы (II). Это замечание относится также и к оптике металлов (главным образом щелочных) в ультрафиолете, где выступает инерция электронов и где теория строится по такому же типу, как и для ионосферы.

Москва, НИИФ — МГУ,
Теоретический отдел

Поступило в редакцию
1 октября 1937 г.