537.533.1

# О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ, ДВИЖУЩИХСЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. I*)

*Б. И. Давыдов*

Вычисляется распределение электронов, движущихся в газе под действием постоянного электрического поля. Учитываются только упругие столкновения электронов с молекулами, причем предполагается, что скорости молекул распределены по Максвеллу. Найдено распределение скоростей по величине и по направлениию и формулы для средней энергии и подвижности электронов **).

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Распределение скоростей электронов, диффундирующих под действием электрического поля, вычислял Лоренц[1]. Его формулы, предназначавшиеся для металла, там как раз неприменимы вследствие вырождения электронного газа. Они, однако, применимы к электронам, движущимся в газе.

Лоренц решал основное кинетическое уравнение по методу возмущений. В качестве «нулевого» приближения он брал максвелловское распределение; электрическое же поле рассматривалось как возмущение. При этом учитывались только члены, линейные относительно напряженности поля. Это приводило к тому, что средняя энергия электронов оставалась равной $3/2\ kT$: изменение энергии в слабых токах является квадратичным эффектом.

Такой метод возмущений пригоден, очевидно, только при слабых полях. Впрочем, если считать, что длина свободного пути электронов не зависит от их скорости или, по крайней мере, что она не стремится к нулю вместе со скоростью, то число столкновений с молекулами газа в единицу времени с уменьшением скорости стремилось бы к нулю. В результате при достаточно малых скоростях действие поля было бы сильнее, чем взаимодействие с молекулами. Это приводит к тому, что в области малых скоростей разложение по степеням поля расходится, и уже второе приближение обращается в бесконечность.

В действительности, конечно, число столкновений с уменьшением скорости не стремится к нулю, так как при малой скорости электрона уже не электрон налетает на молекулу, а, наоборот, молекула налетает на электрон. Поэтому продолжительность свободного пути с уменьшением скорости стремится к некоторому большому, но конечному значению $\tau_{\max} \sim l/v_M$, где $l$ — средняя длина свободного пути электронов, а $v_M$ — средняя скорость молекул. Если это учесть, то метод возмущений должен сходиться, если энергия, приобретаемая почти покоящимся электроном в поле за время $\tau_{\max}$, гораздо меньше, чем $kT$. Это дает

$$eEl\sqrt{M/m} \ll kT,$$

где $m$ — масса электрона, $M$ — молекулы.

Такая область сходимости, однако, очень мала. Мы применим поэтому другой метод, который сводится в основном к разложению по степеням отношения $m/M$, причем мы всюду будем, конечно, ограничиваться низшими членами.

---

*) Воспроизводится по ЖЭТФ **6** (5), 463 (1936).

**) В сокращенном виде эта работа печатается в Сборнике трудов конференции по газовому разряду, Ленинград, 1936.

В дальнейшем выяснится, что во все формулы входит не $q^*$, а только

$$q = q^* (1 - P),$$

где

$$P = \frac{1}{2q^*} \int_{\alpha_0}^{\pi} q(\alpha) \cos\alpha \sin\alpha \, d\alpha$$

— отношение средней скорости электрона по оси $x$ после столкновения к скорости его до столкновения, $P = \frac{\overline{v'_x}}{v}$, где $v$ — скорость электрона (считая, что до столкновения электрон двигался в направлении $x$).

Имеем

$$q = \frac{1}{2} \int_{\alpha_0}^{\pi} q(\alpha) (1 - \cos\alpha) \sin\alpha \, d\alpha.$$

Этот интеграл сходится, даже если положить $\alpha_0 = 0$, если только силы взаимодействия достаточно быстро убывают с расстоянием, не медленнее, чем $1/r^3$, что в действительности и имеет место.

Таким образом, $q^*$ является лишь произвольной вспомогательной величиной, которая вводится для того, чтобы можно было все взаимодействия разбить на отдельные столкновения; в дальнейшем она выпадает и в окончательных формулах можно положить $\alpha_0 = 0$. Мы будем поэтому в дальнейшем эффективным сечением молекулы называть

$$q = \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} q(\alpha) (1 - \cos\alpha) \sin\alpha \, d\alpha \tag{2}$$

и соответственно этому длиной свободного пробега

$$l = \frac{1}{nq}. \tag{3}$$

Эффективное сечение зависит, конечно, от скорости $v$ и при этом для разных молекул различным образом. Эту зависимость трудно учесть в общем виде, и мы будем считать, что $q$ от $v$ не зависит.

При каждом столкновении электрона с молекулой направление его скорости меняется сильно, величина же ее незначительно. Целесообразно поэтому их разделить. Существенное изменение величины скорости получается только в результате очень многих столкновений; оно может быть поэтому описано дифференциальным выражением типа обобщенного уравнения диффузии [2], причем радиальная составляющая вектора тока в пространстве скоростей будет

$$s = -A_1 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 A_2 f). \tag{4}$$

Здесь $f$ — функция распределения, $A_1$ и $A_2$ выражаются через ср нее изменение величины скорости и средний квадрат ее изменения за малый промежуток времени $\Delta t$ по формулам

$$A_1 = \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}, \quad A_2 = \frac{\overline{\Delta v^2}}{2\Delta t}. \tag{5}$$

Направление скорости, напротив, при каждом отдельном столкновении меняется сильно, и его приходится оставить под интегралом. Для каждого электрона вероятность столкнуться с молекулой за время $dt$ будет $vnq^* dt$. Следовательно, убыль электронов, скорость которых лежит

При каждом отдельном столкновении электрона с молекулой его энергия или абсолютная величина скорости меняется незначительно, так что заметное изменение величины скорости складывается из очень большого числа слабых изменений. Это позволяет применить метод Фоккера—Планка, т. е. перейти от интеграла к дифференциальному выражению. Напротив, направление скорости при каждом столкновении меняется сильно, и здесь к дифференциальному выражению переходить нельзя.

Мы будем учитывать только передачу энергии молекулам газа при упругих столкновениях, пренебрегая неупругими столкновениями, сопровождающимися возбуждением или ионизацией молекул. Получающиеся формулы применимы, следовательно, только там, где средняя энергия электронов невелика, не намного больше, чем $kT$. Электрическое поле должно быть поэтому сравнительно слабо, тем слабее, чем ниже плотность газа. При большой плотности газа все же допустимы довольно сильные поля, и, например, к дуге при атмосферном давлении формулы, вероятно, применимы.

Взаимодействие между электронами также не учитывается. При сильной ионизации оно играет большую роль, и распределение скоростей благодаря этому будет ближе к максвелловскому. Однако можно думать, что средняя энергия электронов и их подвижность этим существенно не изменяются.

## 2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Во все расчеты по кинетической теории газов входит длина свободного пробега $l^*$ сталкивающихся частиц, которая обычно определяется как путь от столкновения до столкновения. Если, как это в действительности всегда имеет место, силы взаимодействия меняются с расстоянием между частицами непрерывно, эта длина становится в значительной мере произвольной, так как не известно, что следует здесь считать «столкновением».

Столкновения между электроном и молекулой должны рассчитываться по законам квантовой механики. При этом рассматривается свободный электрон, падающий на неподвижную молекулу и упруго отражающийся от нее (неупругого рассеяния мы не учитываем). Пусть эффективное сечение молекулы для отражения под углом $\alpha$ к направлению первоначального движения будет $q(\alpha)$, так что вероятность отражения под углом $\alpha$ будет

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot q(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2}\, q(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha.$$

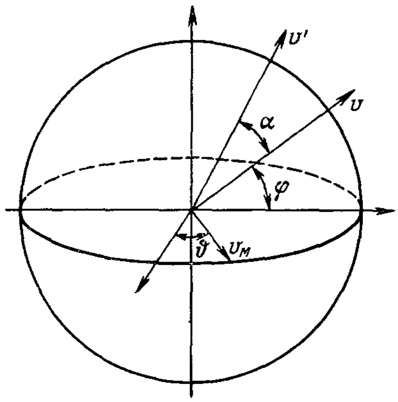
Вообще говоря, $\int_0^{\pi} q(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha$ расходится; мы выберем некоторое произвольное достаточно малое $\alpha_0$ и будем называть «столкновением» случай, когда электрон отклонился на угол больший, чем $\alpha_0$. Тогда «полным» эффективным сечением молекулы будет

$$q^* = \frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{\pi} q(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha. \tag{1}$$

Скорости молекул очень малы по сравнению со скоростью электрона, и (условная) длина свободного пути электрона, движущегося в газе плотности $n$, будет

$$l^* = \frac{1}{nq^*}.$$

в элементе телесного угла $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ под углом $\vartheta$ к оси $x$, будет $vnq^* f(\vartheta, \varphi)\, dt$. С другой стороны, в этот элемент в результате столкновений попадут электроны, двигавшиеся раньше в другом направлении; это дает




$$\frac{1}{4\pi} vn\, dt \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_{\alpha_0}^{\pi} f(\vartheta', \varphi')\, q(\alpha) \sin\alpha\, d\alpha.$$

Здесь $\alpha$ — угол между направлениями $(\vartheta, \varphi)$ и $(\vartheta', \varphi')$. Наконец, убыль частиц под действием электрического поля $E$ в направлении $x$ будет $\gamma \frac{\partial f}{\partial v_x}$, где $\gamma = \frac{eE}{m}$ — ускорение, сообщаемое полем.

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial v_x} = \cos\vartheta \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{v} \sin^2\vartheta \frac{\partial}{\partial(\cos\vartheta)}.$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 A_1 f + \frac{\partial}{\partial v}(v^2 A_2 f) \right\} + \gamma \left\{ \cos\vartheta \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{v} \sin^2\vartheta \frac{\partial f}{\partial(\cos\vartheta)} \right\} +$$
$$+ vn \left\{ q^* f - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_{\alpha_0}^{\pi} f(\vartheta', \varphi')\, q(\alpha) \sin\alpha\, d\alpha \right\} = 0. \quad (6)$$

Вычислим прежде всего $A_1$ и $A_2$. В результате столкновения с электроном скорость молекулы $v_M$ изменится незначительно, и при вычислении $\overline{\Delta v^2}$ этим изменением можно пренебречь. Выбирая углы так, как показано на рисунке, получим для изменения величины скорости

$$\Delta v = v_M \sin\vartheta\, [\cos\varphi - \cos(\varphi + \alpha)] =$$
$$= v_M \sin\vartheta\, [\cos^2\varphi\, (1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\varphi \sin^2\alpha + 2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\alpha\, (1 - \cos\alpha)]^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\overline{\Delta v^2} = \frac{nv\Delta t}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \Delta v^2 q(\alpha) \sin\alpha\, d\alpha \sin\vartheta\, d\vartheta$$
$$= \frac{1}{3} nv\overline{v_M^2}\Delta t \int_0^{\pi} q(\alpha)(1 - \cos\alpha) \sin\alpha\, d\alpha = \frac{2}{3} nvqv_M^2 \Delta t.$$

Но

$$\overline{v_M^2} = \frac{3kT}{M},$$

так что

$$\overline{\Delta v^2} = 2 \frac{vkT}{lM} \Delta t,$$

и

$$A_2 = \frac{vkT}{lM}. \quad (7)$$

Чтобы найти $\overline{\Delta v}$, нам нужно было бы учесть в $\Delta v$ члены более высокого порядка по $m/M$; проще, однако, найти $A_1$ косвенным путем, потребовав, чтобы при $\gamma=0$ для максвелловского распределения

$$f=\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

вектор тока $s$ исчезал,

$$v^2A_1f+(v^2A_2f)'=0.$$

Это дает

$$A_1=\frac{1}{lM}(mv^2-3kT). \qquad (8)$$

### 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ

Будем искать стационарное решение уравнения (6), положив $\frac{\partial f}{\partial t}=0$. Функции распределения будут тогда зависеть только от $v$ и $\vartheta$, и уравнение примет вид

$$-\frac{1}{lM}\left\{vkT\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+(3kT+mv^2)\frac{\partial f}{\partial v}+4mvf\right\}+$$
$$+\gamma\left\{\cos\vartheta\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{v}\sin^2\vartheta\frac{\partial f}{\partial(\cos\vartheta)}\right\}+$$
$$+vn\left\{q^*f-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi''\int_{\alpha_0}^{\pi}f(\vartheta')\,q(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\right\}=0. \qquad (9)$$

Разложим $f$ в ряд по полиномам Лежандра:

$$f(v,\ \vartheta)=\sum f_n(v)\,P_n(\cos\vartheta)=f_0(v)+f_1(v)\cos\vartheta+\ldots \qquad (10)$$

Нас сейчас интересуют только первые два члена этого разложения. Умножим уравнение (9) почленно на $P_\nu(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta$ и проинтегрируем; благодаря ортогональности полиномов Лежандра мы получим ряд уравнений для функций $f_n(v)$. Оставим первые два из этих уравнений для $\nu=0$ и 1, сразу сокращая на $2/(2\nu+1)$ норму функции $P_\nu$. Тогда первая фигурная скобка остается без изменений, только вместо $f$ будут стоять соответственно $f_0$ и $f_1$. Вторая скобка дает

$$\gamma\left\{\frac{\nu}{2\nu-1}\left(f'_{\nu-1}-\frac{\nu-1}{\nu}f_{\nu-1}\right)+\frac{\nu+1}{2\nu+3}\left(f'_{\nu+1}+\frac{\nu+2}{\nu}f_{\nu+1}\right)\right\}.$$

Это выражение легко получается, если воспользоваться известными формулами для полиномов Лежандра

$$\cos\vartheta\cdot P_n=\frac{n}{2n+1}P_{n-1}+\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}$$

и

$$(\cos^2\vartheta-1)P'_n=\frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1}-P_{n-1}).$$

Для $\nu=0$ и 1 получаем соответственно

$$\frac{1}{3}\gamma\left\{f'_1+\frac{2}{v}f_1\right\}\quad\text{и}\quad\gamma\left\{f'_0+\frac{2}{5}\left(f'_2+\frac{3}{v}f_2\right)\right\}.$$

Наконец, вычисляя интеграл, имеем

$$\cos\vartheta'=\cos\alpha\cos\vartheta-\sin\alpha\sin\vartheta\cos\varphi''.$$

Подставляя это в интеграл, получим

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_{\alpha_0}^{\pi} [f_0 + f_1(\cos\alpha\cos\vartheta - \sin\alpha\sin\vartheta\cos\varphi'')]\, q(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha,$$

и в результате третья фигурная скобка по умножении на $P_\nu \sin\vartheta$ и интегрировании по $\vartheta$ дает

$$\text{для}\quad \nu = 0:\qquad vn\{q^* f_0 - q^* f_0\} = 0,$$

$$\text{для}\quad \nu = 1:\qquad vn\left\{q^* f_1 - \frac{1}{2} f_1 \int_{\alpha_0}^{\pi} q(\alpha)\cos\alpha\sin\alpha\, d\alpha\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} vnf_1 \int_{\alpha_0}^{\pi} q(\alpha)(1 - \cos\alpha)\sin\alpha\, d\alpha = vnqf_1 = \frac{v}{l} f_1.$$

Здесь мы можем положить $\alpha_0 = 0$; $q^*$ выпадает, и остается только $q$.

Окончательно для $\nu = 0$ и $1$ получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{lM}\{vkTf_0'' + (3kT + mv^2)f_0' + 4mvf_0\} + \frac{\gamma}{3}\left(f_1' + \frac{2}{v}f_1\right) = 0, \\ &-\frac{1}{lM}\{vkTf_1'' + (3kT + mv^2)f_1' + 4mvf_1\} + \\ &\qquad\qquad + \frac{v}{l}f_1 + \gamma\left\{f_0' + \frac{2}{5}\left(f_2' + \frac{3}{v}f_2\right)\right\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Первое из этих уравнений может быть представлено в виде

$$\frac{1}{v^2}(v^2 s)' = 0,$$

где вектор тока

$$s = -\frac{1}{lM}(vkTf_0' + mv^2 f_0) + \frac{\gamma}{3} f_1.$$

$v^2 s$ не должно зависеть от $v$. Но $s$ должно быть везде конечным, следовательно $s = 0$. Отсюда получаем

$$f_1 = \frac{3}{\gamma lM}(vkTf_0' + mv^2 f_0). \tag{12}$$

Что касается второго из уравнений (11), то там входят величины совсем разных порядков: $vf_1/l$ — большая величина, $\gamma f_0'$ также должно быть сохранено, так как $f_0 \gg f_1$. Все же остальные величины более высокого порядка относительно $m/M$, и ими можно пренебречь. Выражая $f_1$ через $f_0$ по формуле (12), получим уравнение для $f_0$

$$\left(v^2 kT + \frac{1}{3}\gamma^2 l^2 M\right) f_0' + mv^3 f_0 = 0, \tag{13}$$

откуда, подставив значение $\gamma = \frac{eE}{m}$, получим

$$f_0 = \left\{\frac{mv^2}{2kT} + \frac{1}{6}\frac{M}{m}\left(\frac{eEl}{kT}\right)^2\right\}^{\frac{1}{6}\frac{M}{m}\left(\frac{eEl}{kT}\right)^2} e^{-mv^2/2kT}. \tag{14}$$

По формуле (12) находим теперь

$$f_1 = \frac{mv^2}{2}\frac{eEl}{(kT)^2}\left\{\frac{mv^2}{2kT} + \frac{1}{6}\frac{M}{m}\left(\frac{eEl}{kT}\right)^2\right\}^{\frac{1}{6}\frac{M}{m}\left(\frac{eEl}{kT}\right)^2 - 1} e^{mv^2/2kT}. \tag{15}$$

Таким образом, мы нашли функцию распределения в виде

$$f(v, \vartheta) = f_0(v) + f_1(v)\cos\vartheta.$$

Тем же путем можно найти и дальнейшие $f_n$, так как получающиеся уравнения носят рекуррентный характер. Однако дальнейшие функции мало интересны; они очень малы по величине и к тому же благодаря ортогональности полиномов Лежандра они не отражаются ни на распределении по величине скорости, ни на силе тока.

Распределение по величине скорости дается функцией $f_0$, так как

$$\frac{1}{2}\sum_n f_n \int_0^\pi P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = f_0.$$

Следовательно, распределение будет $f_0(v)\, v^2\, dv$.

В случае слабых полей $\left(eEl\sqrt{\frac{M}{m}} \ll kT\right)$ в формулах (14) и (15) мы можем пренебречь вторым членом в фигурной скобке. Это дает

$$f_0 = v^{\frac{1}{3}\frac{M}{m}\left(\frac{eEl}{kT}\right)^2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \tag{16}$$

и

$$f_1 = \frac{eEl}{kT} f_0. \tag{17}$$

Если теперь пренебречь $E^2$, то $f_0$ дает максвелловское распределение и для $f_1$ получается формула Лоренца.

Найдем по функциям (16) и (17) среднюю энергию электронов и их подвижность. Имеем

$$\overline{v_x^2} = \frac{{}^1/_3 \int f_1 v^3\, dv}{\int f_0 v^2\, dv}, \quad \overline{v^2} = \frac{\int f_0 v^4\, dv}{\int f_0 v^2\, dv};$$

отсюда получается

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT + \frac{1}{6}\frac{M}{m}\frac{(eEl)^2}{kT} \tag{18}$$

и

$$u = \frac{v_x}{eE} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{l}{\sqrt{mkT}}. \tag{19}$$

Выражение для подвижности совпадает с формулой Лоренца.

В противоположном случае, при очень сильном поле, электроны приобретают энергии значительно бо́льшие, чем средняя тепловая энергия. Здесь мы можем поэтому пренебречь $kT$, т. е. положить $T = 0$. Формулы (14) и (15) дают тогда неопределенность. Эту неопределенность проще всего раскрыть, вернувшись к уравнению (13), что́ дает

$$\frac{\gamma^2}{3} f_0' \frac{mv^3}{l^2 M} f_0 = 0, \tag{20}$$

откуда, подставляя значение $\gamma$, находим

$$f_0 = \exp\left\{-\frac{3}{4}\frac{m}{M}\left(\frac{mv^2}{eEl}\right)^2\right\}. \tag{21}$$

Эта формула получена впервые Дройвестейном[3]. Для $f_1$ здесь получается

$$f_1 = 3\frac{m}{M}\left(\frac{mv^2}{eEl}\right)\exp\left\{-\frac{3}{4}\frac{m}{M}\left(\frac{mv^2}{eEl}\right)^2\right\}. \tag{22}$$

Для средней энергии электронов и их подвижности здесь получаются такие выражения:

$$\bar{\varepsilon} = 2\sqrt{\frac{2}{3}\frac{M}{m}}\,\Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right) eEl \tag{23}$$

и

$$u = \frac{4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\sqrt[4]{27mM}}\sqrt{\frac{l}{\pi eE}}\,. \tag{24}$$

Эти формулы относятся к случаю, когда

$$eEl\sqrt{\frac{M}{m}} \gg kT. \tag{25}$$

При таком условии, однако, электроны приобретают большие энергии и существенную роль начинают играть неупругие столкновения, которые здесь не учтены.

*Ленинград,*
ВНИТ

*Поступило в редакцию*
26 января 1936 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Лоренц, Теория электронов, Ленинград — Москва, 1934, стр. 349 и след.
2. Б. Давыдов, ДАН СССР **2**, 212 (1934).
3. M. J. Druyvesteyn, Physica **10**, 61 (1930); **1**, 1003 (1934).