621.372.632

О РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЯХ ПРИ ДЕЛЕНИИ ЧАСТОТЫ *)

Л. И. Мандельштам (*Москва*), *Н. Д. Папалекси* (*Ленинград*)

Теоретически показано, что в регенерированном колебательном контуре при определенном выборе параметров могут быть возбуждены колебания, основной период которых в N раз больше периода возбуждающей силы (дробночастотные колебания). Приближенно определена зависимость амплитуды этих колебаний от амплитуды возбуждающей силы и расстройки (резонансная кривая второго рода), и при определенной характеристике лампы проанализирован ход этих кривых. Оказывается, что дробночастотные колебания возбуждаются только в том случае, если: 1) амплитуда вынуждающей силы удовлетворяет определенным неравенствам; 2) расстройка лежит внутри определенного (узкого) интервала частот, величина которого существенно зависит от амплитуды внешней электродвижущей силы. Указывается, что полученные результаты могут иметь практическое применение. Сообщается об экспериментах, результаты которых находятся в качественном согласии с теорией.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, поведение нелинейных колебательных систем под воздействием внешней периодической силы существенно отличается от поведения линейных систем. По этому поводу уже имеются многочисленные теоретические и экспериментальные исследования. Возникающие здесь вопросы чрезвычайно многочисленны. Сюда относятся, например, нелинейные консервативные системы (маятник с большими амплитудами), неконсервативные системы с нелинейным законом трения и т. д. В дальнейшем мы ограничимся особым классом неконсервативных систем, которые характеризуются тем, что имеется возможность перевести их без воздей-

*) Впервые опубликовано в Zs. Phys. 73, 223 (1931). Введение и § 3, 4 воспроизводятся по «Полн. собр. трудов» Л. И. Мандельштама, т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1947, стр. 7; перевод с нем. § 1, 2, 5—17 выполнен В. И. Жариковым.

ствия внешней силы, посредством непрерывного изменения параметров, в неустойчивое состояние и заставить совершать длительные (незатухающие) колебания. Как известно, этот класс систем приобрел выдающееся значение, особенно в области электрических колебаний. Сюда относятся, например, ламповые схемы с так называемой обратной связью.

В качестве простейших представителей этого класса можно назвать генератор с обратной связью или аудион. Поскольку речь идет о поставленном выше вопросе, до сих пор интерес главным образом концентрировался на поведении таких систем вблизи резонанса, т. е. при приблизительном равенстве периода действующей силы и собственного периода.

В случае, когда система уже самовозбуждена, были рассмотрены и бигармонические решения (так называемые Schwebungslösungen) *). Напротив, те периодические явления, которые возникают в случае, когда частота возбуждающей силы кратна собственной частоте системы, насколько нам известно, исследовались мало. Кога **) и другие показали, что в случае, когда на самовозбужденный ламповый генератор воздействуют внешней синусоидальной электродвижущей силой (э. д. с.), частота которой близка к кратному собственной частоты генератора, колебания последнего принудительно устанавливаются на соответствующем унтертоне частоты воздействия. Еще ранее, соответствующие опыты с так называемыми «релаксационными системами» были описаны Ван-дер-Полем и Ван-дер-Марком ***). В этих опытах, очевидно, речь идет о явлении, которое, как указывают сами авторы, может рассматриваться как обобщение известных явлений «захватывания».

Однако строгой теории этого явления, по-видимому, не существует. Ниже мы ставим себе задачей исследование вопроса о поведении подобных нелинейных колебательных систем под воздействием периодических сил, частота которых равна или почти равна кратному собственной частоты системы. В частности, мы рассмотрим случаи, когда система находится в устойчивом положении, т. е. несамовозбуждена ****). Возникающие при этом явления существенно отличаются от обычных резонансных явлений. Кривые, представляющие зависимость амплитуды возбужденных колебаний от «расстройки», которые можно назвать «резонансными кривыми второго рода», имеют весьма характерный вид, совершенно отличный от обычных резонансных кривых. Вид этих кривых позволяет предположить, что явление может быть полезным и в применении к радиотехнике.

Следует заметить, что о появлении колебаний с частотой, равной половине частоты возбуждающей силы, в несамовозбужденных автоколебательных системах упоминает и Грошковский *****).

В первой части этого сообщения будет развита теория явления для простого схематизированного случая. Во второй части мы сообщим о некоторых, относящихся сюда, опытах.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§ 1. Рассмотрим регенеративный приемник, на который действует синусоидальная электродвижущая сила (э. д. с.) частоты ω. Предположим, что затухание колебательного контура очень мало. Для упрощения

*) B. Van der Pol, Phil Mag. 3, 65 (1927); F. Ollendorf, Arch. Elektrotech. 16, 280 (1926).

**) J. Koga, Proc. Inst. Radio Eng. 15, 669 (1927).

***) B. Van der Pol and M. J. Van der Mark, Nature 121 (September 1927).

****) Об относящихся сюда опытах одним из нас (Н. Д. Папалекси) был сделан доклад на Всесоюзном съезде физиков в Одессе в августе 1930 г.

*****) J. Groszkowski, Proc. Inst. Radio Eng. 18, 1960 (1930).

вычислений предположим также, что можно не учитывать сеточных токов (постоянной составляющей и токов смещения). В этом случае для тока i (рис. 1) справедливо следующее дифференциальное уравнение:

$$CL\frac{d^2i}{dt^2}+CR\frac{di}{dt}+i=i_a+C\frac{dE}{dt}, \tag{1}$$

где

$$i_a=f_0(V_s) \tag{2}$$

— уравнение характеристики лампы. V_s означает управляющее напряжение, а $E=E_0\sin\omega t$ — внешнюю э. д. с.

Для дальнейших вычислений приведем уравнение (1) к более удобной форме. Если уравнение (1) разделить на $CL\frac{\omega^2}{r^2}=\frac{\omega^2}{r^2\omega_0^2}$ и ввести обозначения

$$\frac{\omega}{n}t=\tau, \qquad \frac{nR}{\omega L}=2\theta,$$

$$J=\frac{i}{I_0}, \qquad J_a=\frac{i_a}{I_0}, \qquad Q_0=\frac{nE_0}{\omega LI_0}, \tag{3}$$

где I_0 будет определено ниже, а n означает целое число, то в результате получим уравнение

$$\frac{d^2J}{d\tau^2}+2\theta\frac{dJ}{d\tau}+\frac{n^2\omega_0^2}{\omega^2}J=\frac{n^2\omega_0^2}{\omega^2}J_a+Q_0\cos n\tau. \tag{1_1}$$

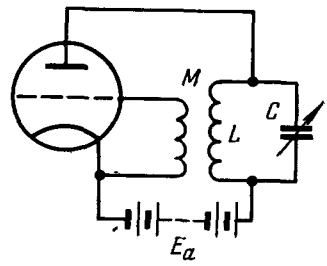

Рис. 1.

Для упрощения расчетов целесообразно также и напряжения, фигурирующие в уравнениях, например V_s, отнести к некоторому постоянному напряжению V_0, величина которого выбирается в соответствии с характеристикой лампы. I_0 целесообразно связать с V_0 соотношением

$$V_0=M_r\frac{\omega}{n}I_0,$$

где

$$M_r=M-DL.$$

M представляет собой коэффициент взаимоиндукции, L — коэффициент самоиндукции катушки колебательного контура и D — проницаемость лампы. В этом случае

$$\frac{V_s}{V}=\frac{(M-DL)\frac{di}{dt}}{V_0}=\frac{dJ}{d\tau}$$

и уравнение характеристики лампы принимает более удобный «безразмерный» вид

$$J_a=f_1\left(\frac{dJ}{d\tau}\right). \tag{2_1}$$

(1_1) можно переписать теперь в виде

$$\frac{d^2J}{d\tau^2}+2\theta\frac{dJ}{d\tau}+\frac{n^2\omega_0^2}{\omega^2}J=\frac{n^2\omega_0^2}{\omega^2}f_1\left(\frac{dJ}{d\tau}\right)+Q\cos n\tau. \tag{1_2}$$

Продифференцируем (1_2) по τ и положим

$$\frac{dJ}{d\tau}=x, \qquad \frac{n^2\omega_0^2}{\omega^2}f_1\left(\frac{dJ}{d\tau}\right)-2\theta\frac{dJ}{d\tau}=F(x) \tag{4}$$

и

$$\lambda_0=-nQ_0, \qquad \frac{\omega^2-n^2\omega_0^2}{n^2\omega_0^2}=\xi. \tag{4_1}$$

В результате получаем

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+x=F'(x)\frac{dx}{d\tau}+\frac{n^2\omega_0^2}{\omega^2}\xi x+\lambda_0\sin n\tau. \tag{5}$$

С одной стороны, во всех практически важных случаях величина $F'(x)\dot{x}$ для всех возможных значений x остается малой по сравнению с единицей; с другой стороны, специфические явления, которые мы желаем исследовать, проявляются лишь в непосредственной близости от «резонанса», т. е. при малых значениях «расстройки» ξ. С учетом обоих этих обстоятельств можно положить

$$F'(x)\dot{x}+\frac{n^2\omega_0^2}{\omega^2}\xi x=\mu f(x,\dot{x}), \tag{6}$$

где μ мало по сравнению с единицей ($\mu \ll 1$). Таким образом, подлежащее исследованию уравнение имеет вид

$$\ddot{x}+x=\mu f(x,\dot{x})+\lambda_0\sin n\tau. \tag{7}$$

Прежде всего необходимо установить, существуют ли периодические решения уравнения (7) с наименьшим периодом 2π, и если существуют, то при каких условиях. Далее возникает вопрос о приближенном нахождении этих решений и об исследовании их устойчивости. И, наконец, в заключение нужно будет выяснить физический смысл полученных решений.

§ 2. Общее рассмотрение. Для нахождения периодических решений будем следовать методу А. Пуанкаре, изложенному в его работе «Новые методы небесной механики» *).

Предположим, что функция $f(x,\dot{x})$ является аналитической. Мы пока не будем конкретизировать вид этой функции. Тем самым результаты данного раздела будут справедливы не только для системы, рассматриваемой сейчас, но и для других электрических систем. Нет необходимости напоминать, что и в механике решение различных проблем сводится подчас к решению одинаковых уравнений. Преобразуем сначала несколько уравнение (7), положив

$$z=x+\frac{\lambda_0}{1-n^2}\sin n\tau. \tag{8}$$

Пусть далее

$$\begin{aligned} u&=\dot{z}\cos\tau+z\sin\tau,\\ v&=\dot{z}\sin\tau-z\cos\tau. \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда для переменных u и v получаем

$$\dot{u}=\mu\psi(u,v,\tau)\cos\tau,\qquad \dot{v}=\mu\psi(u,v,\tau)\sin\tau, \tag{10}$$

где

$$\psi(u,v,\tau)=f\left(u\sin\tau-v\cos\tau-\frac{\lambda_0}{1-n^2}\sin n\tau,\ u\cos\tau+v\sin\tau-\frac{n\lambda_0}{1-n^2}\cos n\tau\right). \tag{11}$$

$\psi(u,v,\tau)$ является периодической функцией времени с периодом 2π.

Возьмем какое-нибудь решение (10) при $\mu=0$, например

$$u_0=a,\qquad v_0=b,$$

*) H. Poincaré, Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, tom 1, 1892, стр. 79. О применении к электрическим колебательным системам см.: А. А. Андронов и А. А. Витт, К математической теории захватывания, ЖТФ 12 (1930).

где a и b — некоторые определенные константы. Пусть далее u, v являются решением (10) при $\mu \neq 0$, удовлетворяющим условию

$$u_{\tau=0} = a + \alpha, \qquad v_{\tau=0} = b + \beta. \tag{12}$$

Согласно известной теореме *) это решение при достаточно малых μ, α и β можно представить в виде степенного ряда по μ, α и β. Имеем, следовательно,

$$u = a + \alpha + \mu C + \mu\alpha D_1(\tau) + \mu\beta E_1(\tau) + \mu^2 G_1(\tau) + \\ + \text{члены высших порядков, содержащие } \mu; \tag{13$_1$}$$

$$v = b + \beta + \mu D + \mu\alpha D_2(\tau) + \mu\beta E_2(\tau) + \mu^2 G_2(\tau) + \\ + \text{члены высших порядков, содержащие } \mu. \tag{13$_2$}$$

То, что все члены высших порядков, не выписанные в (13_1) и (13_2), содержат μ в качестве множителя, следует из того, что при $\mu = 0$ стоящие справа степенные ряды должны сводиться к $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, что́ непосредственно следует из (10) и (12). Если данные решения подставить в (10) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях μ, $\mu\alpha$ и $\mu\beta$, то получатся следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{d\tau} &= \psi(a, b, \tau)\cos\tau, \\ \frac{dD}{d\tau} &= \psi(a, b, \tau)\sin\tau, \end{aligned} \tag{14}$$

с начальными условиями

$$C = 0, \qquad D = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} C &= \int_0^\tau \psi(a, b, \tau)\cos\tau\, d\tau, \\ D &= \int_0^\tau \psi(a, b, \tau)\sin\tau\, d\tau. \end{aligned} \tag{15}$$

Аналогичным образом получаются соотношения

$$\left.\begin{aligned} D_1(\tau) &= \int_0^\tau \left[\frac{\partial\psi}{\partial u}\right]\cos\tau\, d\tau, \qquad & E_1(\tau) &= \int_0^\tau \left[\frac{\partial\psi}{\partial v}\right]\cos\tau\, d\tau, \\ D_2(\tau) &= \int_0^\tau \left[\frac{\partial\psi}{\partial u}\right]\sin\tau\, d\tau, \qquad & E_2(\tau) &= \int_0^\tau \left[\frac{\partial\psi}{\partial v}\right]\sin\tau\, d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Здесь символы $\left[\frac{\partial\psi}{\partial u}\right]$ и т. д. означают, что $\frac{\partial\psi}{\partial u}$ берется при $\mu = 0$, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

Функции u и v являются периодическими с периодом 2π, если выполняются условия

$$\begin{aligned} u(2\pi) - u(0) &= 0, \\ v(2\pi) - v(0) &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

так как $\psi(u, v, \tau)$ является периодической по τ с периодом 2π. Тем самым вопрос сводится к тому, можно ли при любом заданном достаточно малом μ

*) См., например: L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, 1926, стр. 39—41.

так определить α и β, чтобы выполнялись соотношения (17). Как видно из (13), это возможно только в том случае, если

$$C(2\pi) = D(2\pi) = 0. \tag{18}$$

Данное условие дает систему из двух, в общем случае трансцендентных, уравнений

$$\begin{aligned} C(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \psi(a, b, \tau) \cos\tau \, d\tau = 0, \\ D(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \psi(a, b, \tau) \sin\tau \, d\tau = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

из решения которой находим a и b. Если (19) имеет действительные решения, то возникает новый вопрос, можно ли подходящим выбором α и β удовлетворить уравнениям

$$\mu\alpha D_1(2\pi) + \mu\beta E_1(2\pi) + \mu^2 G_1(2\pi) + \ldots = 0,$$
$$\mu\alpha D_2(2\pi) + \mu\beta E_2(2\pi) + \mu^2 G_2(2\pi) + \ldots = 0.$$

В силу (12) $D_1(0) = D_2(0) = \ldots = 0$. Левые части написанных уравнений можно сократить на μ. α и β удовлетворяют уравнениям, получающимся при $\mu = 0$. Поэтому при $\mu \neq 0$ и достаточно малом уравнения наверняка имеют однозначное решение, если детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} D_1(2\pi) & E_1(2\pi) \\ D_2(2\pi) & E_2(2\pi) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{20}$$

Этот детерминант можно вычислить с помощью соотношений (16), в правых частях которых стоят известные функции времени; a и b определяются из (19).

§ 3. Переходя к исходным переменным, мы получим следующий результат. Уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) + \lambda_0 \sin n\tau \tag{7}$$

имеет для достаточно малых μ периодические решения с периодом 2π, если трансцендентные или алгебраические уравнения (19) допускают действительные решения и детерминант (20) отличен от нуля.

Решение может быть разложено в сходящийся по μ ряд *). Первый член этого разложения

$$x = a \sin\tau - b \cos\tau - \frac{\lambda_0}{1 - n^2} \sin n\tau. \tag{21}$$

Будем называть (21) «н у л е в ы м» приближением решения уравнения (7). Это приближение достаточно для большинства применений. Дальнейшие члены решения, имеющие порядок μ, μ^2 и т. д., могут быть определены методом последовательных приближений.

Предыдущее может быть коротко резюмировано следующим образом. Из дважды бесконечного семейства периодических решений линеаризированного уравнения (7), т. е. линейного уравнения, получаемого из (7) при $\mu = 0$, согласно условиям (19) выделяется решение для a и b. Предполагается, что для достаточно малых μ уравнение (7) имеет в общем случае периодическое решение, близкое к решению (21), т. е. отличающееся

*) Мы не будем здесь подробнее исследовать величину круга сходимости.

от него не более чем членами порядка μ. Поэтому обозначение (21) как нулевого приближения кажется нам естественным.

В противоположность случаю, рассмотренному Пуанкаре (loc. cit), нашу задачу следует рассматривать как «вырожденный случай». О возможности подобных случаев упоминает уже Пуанкаре *). Здесь имеют место соотношения, аналогичные случаю линейных проблем при наличии кратных собственных значений **).

Заметим еще следующее: если с самого начала предположить, что существует периодическое решение (7) с периодом 2π, то (19) и (21) получаются непосредственно, если в (7) положить равными нулю коэффициенты при соответствующих членах ряда Фурье. Нам кажется, однако, целесообразным доказать существование подобных решений и подробнее показать условия, при которых они могут появиться.

§ 4. Устойчивость решений. Если система уравнений (19) имеет несколько действительных, отличных от нуля решений, то существует несколько периодических решений. Мы назовем главными решениями те решения (7), которые соответствуют отличным от нуля решениям (19). Уравнениям (19) можно удовлетворить и значениями $a = 0$, $b = 0$. Тогда наше приближенное решение сводится к

$$x = -\frac{\lambda_0}{1-n^2}\sin n\tau. \tag{21$_1$}$$

Это решение, которое всегда существует, мы назовем «вынужденным решением» ***).

Однако существование периодических решений еще ни в коей мере не гарантирует их физическую реальность. Для того чтобы решение имело физический смысл, оно должно быть устойчивым. Мы будем употреблять здесь понятие устойчивости в смысле Ляпунова ****).

Для того чтобы решить, является ли определенное решение устойчивым или неустойчивым, поступают, как известно, следующим образом. Полагают

$$u_1 = u + \eta, \qquad v_1 = v + \zeta, \tag{22}$$

где u и v — подлежащие исследованию периодические решения, и образуют так называемые equations aux variations, т. е. подставляют выражения (22) в уравнения (10), разлагают по степеням η и ζ и ограничиваются первой степенью. При этом получается система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\tau} &= \mu\psi'_u \cos\tau\cdot\eta + \mu\psi'_v \cos\tau\cdot\zeta, \\ \frac{d\zeta}{d\tau} &= \mu\psi'_u \sin\tau\cdot\eta + \mu\psi'_v \sin\tau\cdot\zeta. \end{aligned} \tag{23}$$

Это линейные уравнения для η и ζ с периодическими коэффициентами, причем ψ'_u и ψ'_v, конечно, содержат u и v, которые явно не определены до тех пор, пока уравнения (10) не проинтегрированы.

---

*) H. Poincaré, loc. cit., стр. 84.

**) См., например: E. Schrödinger, Abhandlungen zur Wellenmechanik, 1927, стр. 449.

***) В нелинейных колебательных системах деление на вынужденные и собственные колебания не имеет смысла. Однако это обозначение «вынужденные» колебания не может привести здесь ни к каким недоразумениям.

****) А. Ляпунов, Харьков, 1892; см. также: H. Poincaré, loc. cit., стр. 162.

Далее, как известно, решением (23) является

$$\begin{aligned} \eta &= e^{h_1\tau}\chi_{11}(\tau) + e^{h_2\tau}\chi_{12}(\tau), \\ \zeta &= e^{h_1\tau}\chi_{21}(\tau) + e^{h_2\tau}\chi_{22}(\tau), \end{aligned} \tag{24}$$

где χ_{mk} — периодические функции с переходом 2π.

По Ляпунову решения u, v устойчивы, если действительные части h_1 и h_2 меньше нуля. Если положить

$$s_1 = e^{2\pi h_1}, \qquad s_2 = e^{2\pi h_2}, \tag{25}$$

то s_1 и s_2 удовлетворяют, как известно, характеристическому уравнению

$$s^2 + ps + q = 0, \tag{26}$$

где p и q могут быть найдены следующим образом.

Пусть η_1 и ζ_1, η_2 и ζ_2 — две системы решений уравнений (23), а именно пусть

$$\left.\begin{aligned} \eta_1(0) &= 1, \qquad \eta_2(0) = 0, \\ \zeta_1(0) &= 0, \qquad \zeta_2(0) = 1, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

тогда

$$p = -\{\eta_1(2\pi) + \zeta_2(2\pi)\}, \tag{28_1}$$

$$q = \begin{vmatrix} \eta_1(2\pi) & \zeta_1(2\pi) \\ \eta_2(2\pi) & \zeta_2(2\pi) \end{vmatrix}. \tag{28_2}$$

Очевидно, решение устойчиво, если $\operatorname{mod} s_1 < 1$ и $\operatorname{mod} s_2 < 1$. Так как в нашем случае $q > 0$ (вследствие (27)), то это имеет место, если

$$\left.\begin{aligned} &q < 1 \\ \text{и} \quad &1 + p + q > 0. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Элементы детерминанта (28_2) являются функциями μ и могут быть разложены по μ. Для $\mu = 0$ имеем

$$q = 1, \quad 1 + p + q = 0.$$

Таким образом, для решения вопроса об устойчивости при малом μ мы должны определить знак первых неисчезающих производных по μ от q и $1 + p + q$ при $\mu = 0$. Мы получаем

$$\left(\frac{\partial q}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} = \frac{\partial \eta_1(2\pi)}{\partial \mu} + \frac{\partial \zeta_2(2\pi)}{\partial \mu}, \tag{30_1}$$

$$\left(\frac{\partial(1+p+q)}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} = 0, \tag{30_2}$$

$$\left(\frac{\partial^2(1+p+q)}{\partial \mu^2}\right)_{\mu=0} = 2\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \eta_1(2\pi)}{\partial \mu} & \dfrac{\partial \zeta_1(2\pi)}{\partial \mu} \\ \dfrac{\partial \eta_2(2\pi)}{\partial \mu} & \dfrac{\partial \zeta_2(2\pi)}{\partial \mu} \end{vmatrix}. \tag{30_3}$$

Если теперь $\mu \geqslant 0$, что́ может быть принято без ограничения общности, условия устойчивости преобразуются в

$$\left(\frac{\partial \eta_1(2\pi)}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} + \left(\frac{\partial \zeta_2(2\pi)}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} < 0, \tag{31_1}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \eta_1(2\pi)}{\partial \mu} & \dfrac{\partial \zeta_1(2\pi)}{\partial \mu} \\ \dfrac{\partial \eta_2(2\pi)}{\partial \mu} & \dfrac{\partial \zeta_2(2\pi)}{\partial \mu} \end{vmatrix} > 0. \tag{31_2}$$

Однако вследствие условий (23) и (27) детерминант [условие (31_2)] идентичен уравнению (20). Таким образом, если характеристика лампы, а следовательно $\tau(x)$, задана, то тем самым как отыскание периодических решений, так и исследование их устойчивости сводятся к простым квадратурам от известных функций *).

§ 5. Специализация функции $F(x)$ и соответственно $f(x, \dot{x})$. Для того чтобы можно было количественно описать явление резонанса второго рода, необходимо задаться видом функции $f_0(V_s)$. При этом целесообразно выбрать по возможности наиболее простую функцию. В качестве $f_0(V_s)$ возьмем полином пятой степени

$$i_a = i_{a_0} + \alpha_0 V_s + \beta_0 V_s^2 + \gamma_0 V_s^3 + \varepsilon_0 V_s^5. \tag{32}$$

При подобной схематизации вряд ли можно ожидать хорошее количественное совпадение теории с экспериментом. Можно ожидать, однако, что эта функция воспроизведет по крайней мере качественный ход явления и его особенности. Мы взяли полином пятой степени, поскольку при этом за счет специального выбора коэффициентов можно описать два существенно различных случая. Как известно **), случай так называемого «мягкого» самовозбуждения колебаний (т. е. самовозбуждения в отсутствие внешней силы) качественно можно воспроизвести, если характеристику лампы представить в виде кубической параболы. Для объяснения «жесткого» самовозбуждения и связанного с ним явления «затягивания» необходимо учесть член с пятой степенью V_s ***). Чтобы не усложнять и без того трудоемкие вычисления, член, содержащий V_s в четвертой степени, положен равным нулю. Кроме того, в дальнейшем будем предполагать, что частота внешней периодической силы в два раза больше собственной частоты колебательного контура. В формулах, следовательно, нужно положить $n = 2$.

Если i_a в (32) привести к виду

$$J_a = f_1\left(\frac{dJ}{d\tau}\right) = f_1(x),$$

то получим

$$J_a = J_{a_0} + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \varepsilon x^5. \tag{33}$$

С учетом этого для $F'(x)$ находим

$$F'(x) = -2\theta + \frac{4\omega_0^2}{\omega^2}(\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 5\varepsilon x^4) \tag{34}$$

и соответственно

$$f(x, \dot{x}) = (\varkappa + 2x + \gamma_1 x^2 + \varepsilon_1 x^4)\dot{x} + \frac{\xi}{\beta}x. \tag{35}$$

Здесь были введены обозначения

$$\varkappa = \frac{\alpha - 2\theta(1+\xi)}{\beta} = \varkappa_0 - 2\theta\frac{\xi}{\beta}, \tag{36}$$

$$\gamma_1 = \frac{3\gamma}{\beta}, \quad \varepsilon_1 = \frac{5\varepsilon}{\beta}, \tag{36_1}$$

$$\xi = \frac{\omega^2 - 4\omega_0^2}{4\omega_0^2}. \tag{36_2}$$

---

*) Условие устойчивости (31) выводится еще проще из энергетического рассмотрения.

) B. Van der Pol, Radio Rev. 1, 701 (1920); см. также сноску *).

***) E. V. Appleton and B. Van der Pol, Phil. Mag. 43, 183 (1922); E. V. Appleton and W. M. H. Greaves, Phil. Mag. 45, 410 (1923)

причем

$$\alpha=\frac{\alpha_0 V_0}{I_0},\quad \beta=\frac{\beta_0 V_0^2}{I_0},\qquad \gamma=\frac{\gamma_0 V_0^3}{I_0},\quad \varepsilon=\frac{\varepsilon_0 V_0^5}{I_0}, \tag{36$_3$}$$

а μ имеет здесь значение

$$\mu=\frac{4\omega_0^2}{\omega^2}\beta=\frac{\beta}{1+\xi}. \tag{36$_4$}$$

Случай 1. $\varepsilon_1=0$ («мягкое» самовозбуждение)

§ 6. Рассмотрим сначала случай «мягкого» самовозбуждения. Предположим, что при $\lambda_0=0$ система находится в устойчивом положении равновесия, т. е. разберем случай несамовозбужденной системы. Мы можем здесь положить

$$\varepsilon_1=0,$$

и в то же время должно выполняться неравенство

$$\varkappa<0.$$

Чтобы с помощью (19) вычислить a и b в основном решении

$$x=a\sin\tau-b\cos\tau+\frac{\lambda_0}{3}\sin 2\tau, \tag{21$_2$}$$

нужно функцию $\psi(a, b, \tau)$ выразить явным образом через a и b. Функция $\psi(a, b, \tau)$ определяется теперь уравнениями (11) и (35). Если в (19) выполнить интегрирование, то после несложных вычислений получим для a и b следующие алгебраические уравнения:

$$a\left[\varkappa+\frac{\gamma_1}{4}\left(a^2+b^2+\frac{2\lambda_0^2}{9}\right)\right]=b\left(\frac{\lambda_0}{3}+\frac{\xi}{\beta}\right), \tag{37$_1$}$$

$$b\left[\varkappa+\frac{\gamma_1}{4}\left(a^2+b^2+\frac{2\lambda_0^2}{9}\right)\right]=a\left(\frac{\lambda_0}{3}-\frac{\xi}{\beta}\right), \tag{37$_2$}$$

откуда для квадрата амплитуды $X^2=a^2+b^2$ искомого колебания с периодом 2π получаем выражение

$$X^2=-\frac{2}{9}\lambda_0^2-\frac{4}{\gamma_1}\left[\varkappa\pm\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9}-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right], \tag{38}$$

а для фазы

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=\frac{\varkappa+\frac{\gamma_1}{2}\left(X^2+\frac{2\lambda_0^2}{9}\right)}{\frac{\lambda_0}{3}+\frac{\xi}{\beta}}. \tag{39}$$

Итак, искомое главное решение складывается из этого колебания $X\sin(\tau-\varphi)$ и «вынужденного» решения $\frac{\lambda_0}{3}\sin 2\tau$.

Чтобы установить, является ли это решение устойчивым, и если является, то при каких условиях, нужно обратиться к критериям устойчивости (31_1) и (31_2). Эти критерии дают следующие условия устойчивости главного решения:

$$\varkappa+\frac{\gamma_1}{2}\left(X^2+\frac{\lambda_0^2}{9}\right)<0, \tag{40$_1$}$$

$$\gamma_1\left[\varkappa+\frac{\gamma_1}{4}\left(X^2+\frac{2\lambda_0^2}{9}\right)\right]>0, \tag{40$_2$}$$

а для одного лишь вынужденного решения они дают

$$\varkappa+\frac{\gamma_1\lambda_0^2}{18}<0, \tag{41$_1$}$$

$$\left(\varkappa+\frac{\gamma_1\lambda_0^2}{18}\right)^2+\frac{\xi^2}{\beta^2}-\frac{\lambda_0^2}{9}>0. \tag{41$_2$}$$

С учетом (38) неравенства (40_1) и (40_2) можно привести к виду

$$\mp\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9}-\frac{\xi^2}{\beta^2}}+\frac{\gamma_1}{4}X^2<0, \tag{$40_1'$}$$

$$\gamma_1\left(\mp\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9}-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right)>0. \tag{$40_2'$}$$

Эти неравенства могут быть удовлетворены только тогда, когда одновременно $\gamma_1<0$ и корень берется с верхним знаком. Таким образом,

$$X^2=+\frac{4}{|\gamma_1|}\left[\varkappa+\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9}-\frac{\xi^2}{\beta^2}}+\frac{\gamma_1\lambda_0^2}{18}\right]. \tag{38_1}$$

§ 7. Мы можем теперь вывести следующие свойства X как функции λ_0 и ξ. Из (38_1) следует, что X будет действительным в том случае, если

$$\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9}-\frac{\xi^2}{\beta^2}}>-\varkappa-\frac{\gamma_1\lambda_0^2}{18}.$$

Если сравнить следующее отсюда неравенство

$$\frac{\lambda_0^2}{9}-\frac{\xi^2}{\beta^2}>\left(\varkappa+\frac{\gamma_1\lambda_0^2}{18}\right)^2$$

с условием (41_2) устойчивости вынужденного решения, то можно увидеть, что область устойчивости главного решения полностью совпадает с областью, где вынужденное решение неустойчиво. Поэтому в данном случае явление затягивания отсутствует.

Если колебания в системе рассматривать как функцию ξ при заданном λ_0, т. е. если характер колебаний при резонансе второго рода *) исследовать в зависимости от расстройки ξ, то получим следующее. При расстройке, большей по величине $\xi<\xi_1<0$, в контуре существует только вынужденное колебание с периодом π (или $2\pi/\omega$ относительно t). X, следовательно, равно нулю. При значении расстройки, равном

$$\xi_1=\frac{\lambda_0\theta\gamma_1\beta}{18}-\beta\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9}\left(1-\varkappa_0\gamma_1-\frac{\lambda_0^2\gamma_1^2}{36}\right)-\varkappa_0^2}, \tag{42_1}$$

возникают дробночастотные колебания **). При дальнейшем уменьшении $|\xi|$ амплитуда X плавно возрастает от нуля до максимального значения

$$X_{\max}^2=-\frac{2\lambda_0}{9}-\frac{4}{\gamma_1}\left(\varkappa_0+\frac{\lambda_0}{3}\right), \tag{43}$$

которое она принимает при

$$\xi_0=-\frac{2}{3}\beta\theta\lambda_0. \tag{44}$$

При дальнейшем изменении ξ амплитуда X падает постепенно до нуля, обращаясь в нуль при

$$\xi_2=\frac{\lambda_0\theta\gamma_1\beta}{18}+\beta\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9}\left(1-\varkappa_0\gamma_1-\frac{\lambda_0^2\gamma_1^2}{36}\right)-\varkappa_0^2}. \tag{42_2}$$

При этом кривая пересекает ось абсцисс в точке ξ_2 (а также в точке ξ_1) под углом, отличным от нуля. При дальнейшей расстройке $\xi>\xi_2$ мы имеем в контуре снова только вынужденные колебания. Таким образом, кривая резонанса второго рода имеет вид, изображенный на рис. 2.

*) Для простоты будем называть возникающие при резонансе второго рода колебания с кратным (в данном случае двойным) периодом резонансными колебаниями второго рода или также дробночастотными колебаниями.

**) Мы пренебрегаем здесь, как и в дальнейшем, θ^2 по сравнению с 1.

Разность $\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1$, т. е. величина интервала, в котором существует главное решение, равна

$$\Delta\xi = 2\beta\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9}\left(1 - \varkappa_0\gamma_1 - \frac{\lambda_0^2\gamma_1^2}{36}\right) - \varkappa_0^2} \tag{45}$$

и, следовательно, существенно зависит от амплитуды вынуждающей силы λ_0.

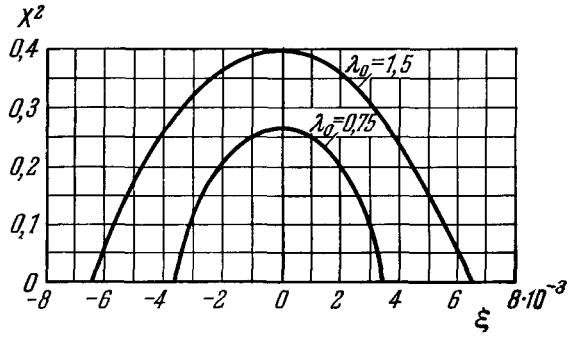

Рис. 2. Резонансные кривые второго рода (теоретические).

Мягкое самовозбуждение. Характеристика $i_a \cdot 10^3 = 0{,}95 + 3{,}35x + 2{,}25x^2 - 1{,}5x^3$; $I_0 = 142$ *ма*; $V_0 = 12$ *в*; $\theta = 1{,}3 \times 10^{-2}$; $\gamma = -2$, $\varkappa_0 = -0{,}02$, $\beta = 0{,}016$.

Если $X^2_{\max}$ рассматривать как функцию λ_0, то из (43) следует, что $X_{\max}$ будет действительным только в том случае, если

$$\left(\frac{\lambda_0}{3} - \frac{1}{|\gamma_1|}\right)^2 - \left(\frac{1}{\gamma_1^2} - 2\,\frac{\varkappa_0}{\gamma_1}\right) < 0, \tag{46}$$

т. е.

$$\frac{1}{\gamma_1^2} > 2\left|\frac{\varkappa_0}{\gamma_1}\right| \quad \text{или} \quad \frac{1}{|\gamma_1|} > 2\,|\varkappa_0| \tag{46$_1$}$$

и

$$\frac{1}{|\gamma_1|} + \sqrt{\frac{1}{\gamma_1^2} - 2\left|\frac{\varkappa_0}{\gamma_1}\right|} > \frac{\lambda_0}{3} > \frac{1}{|\gamma_1|} - \sqrt{\frac{1}{\gamma_1^2} - 2\left|\frac{\varkappa_0}{\gamma_1}\right|}. \tag{46$_2$}$$

Тем самым дробночастотные колебания возбуждаются только в том случае, если амплитуда возбуждающей силы не слишком мала и не слишком велика. Иными словами, для возникновения указанных колебаний существует как пороговое, так и максимальное значение возбуждающей амплитуды. Зависимость $X_{\max} = f(\lambda_0)$, так называемая «амплитудная характеристика», изображена на рис. 3 для случая, соответствующего рис. 2.

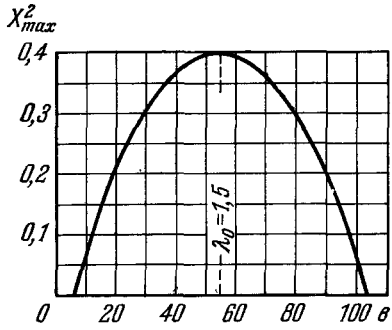

Рис. 3. Амплитудная характеристика (мягкий режим самовозбуждения).

Случай 2. $\varepsilon_1 \neq 0$ («жесткое» самовозбуждение)

§ 8. Сделаем дополнительное предположение, именно: пусть $\gamma_1 > 0$. Что же касается $\varkappa$, то, как и в случае $\varepsilon_1 = 0$, будем предполагать, что $\varkappa < 0$. Однако в отличие от случая 1 предположения $\varkappa < 0$ теперь уже недостаточно, чтобы быть уверенным, что в отсутствие внешней силы система не будет совершать колебания. Положение равновесия при $\varkappa < 0$ является, правда, устойчивым, однако тем не менее при задании

подходящих начальных условий система будет совершать незатухающие колебания (явление затягивания). Чтобы также и в данном случае получить в чистом виде явление резонанса второго рода, т. е. возникновение и дальнейшее существование колебаний с удвоенным (кратным) периодом только при действии внешней синусоидальной силы, с самого начала следует считать, как будет показано ниже, что

$$|\varkappa| > \frac{\gamma_1^2}{8|\varepsilon_1|}. \tag{47}$$

Для нахождения главного решения и условий устойчивости поступим так же, как и в случае 1. После проведения вычислений для определения a и b (и тем самым для $X^2 = a^2 + b^2$) получим следующие уравнения:

$$a\left\{\varkappa + \frac{\gamma_1}{4}\left[X^2 + \frac{2\lambda_0^2}{9}\right] + \frac{\varepsilon_1}{8}\left[X^4 + \frac{\lambda_0^4}{81} + \frac{\lambda_0^2}{9}(5X^2 + 4b^2)\right]\right\} = b\left(\frac{\lambda_0}{3} + \frac{\xi}{\beta}\right), \tag{48$_1$}$$

$$b\left\{\varkappa + \frac{\gamma_1}{4}\left[X^2 + \frac{2\lambda_0^2}{9}\right] + \frac{\varepsilon_1}{8}\left[X^4 + \frac{\lambda_0^4}{81} + \frac{\lambda_0^2}{9}(5X^2 + 4a^2)\right]\right\} = a\left(\frac{\lambda_0}{3} - \frac{\varepsilon}{\beta}\right). \tag{48$_2$}$$

Для облегчения анализа ограничимся рассмотрением практически наиболее интересного случая, когда амплитуда дробночастотных колебаний значительно больше амплитуды вынужденных колебаний $\left(X^2 \gg \frac{\lambda_0^2}{9}\right)$. При таком условии для a и b получаем уравнения

$$a\left(\varkappa + \frac{\gamma_1}{4}X^2 + \frac{\varepsilon_1}{8}X^4\right) = \left(\frac{\lambda_0}{3} + \frac{\xi}{\beta}\right)b, \tag{49$_1$}$$

$$b\left(\varkappa + \frac{\gamma_1}{4}X^2 + \frac{\varepsilon_1}{8}X^4\right) = \left(\frac{\lambda_0}{3} - \frac{\xi}{\beta}\right)a, \tag{49$_2$}$$

на основе которых находим уравнение для X^2

$$\frac{\varepsilon_1}{8}X^4 + \frac{\gamma_1}{4}X^2 + \varkappa \pm \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9} - \frac{\xi^2}{\beta^2}} = 0. \tag{50}$$

В качестве условий устойчивости главного решения получаем

$$\varkappa + \frac{\gamma_1}{2}X^2 + \frac{3}{8}\varepsilon_1 X^4 < 0, \tag{51$_1$}$$

$$(\varepsilon_1 X^2 + \gamma_1)(\varepsilon_1 X^4 + 2\gamma_1 X^2 + 8\varkappa) > 0. \tag{51$_2$}$$

Для вынужденного решения эти условия имеют вид

$$\varkappa + \frac{\gamma_1}{2}\frac{\lambda_0^2}{9} + \frac{3}{8}\varepsilon_1\frac{\lambda_0^4}{81} < 0, \tag{52$_1$}$$

$$\frac{\xi^2}{\beta^2} - \frac{\lambda_0^2}{9} + \left[\varkappa + \frac{\gamma_1}{2}\frac{\lambda_0^2}{9} + \frac{3}{8}\varepsilon_1\frac{\lambda_0^4}{81}\right] > 0. \tag{52$_2$}$$

С помощью уравнения (50) неравенства (51) можно привести к виду

$$(\varepsilon_1 X^2 + \gamma_1)\frac{X^2}{4} \pm \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9} - \frac{\xi^2}{\beta^2}} < 0, \tag{53$_1$}$$

$$(\varepsilon_1 X^2 + \gamma_1)\left(\mp\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9} - \frac{\xi^2}{\beta^2}}\right) > 0. \tag{53$_2$}$$

Данные неравенства могут совместно существовать лишь при условии, что

$$\varepsilon_1 X^2 + \gamma_1 < 0$$

и корень взят с верхним знаком.

Таким образом, для X получаем следующее устойчивое решение:

$$X^2 = -\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1} + \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} - \frac{8}{\varepsilon_1}\left(\varkappa + \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9} - \frac{\xi^2}{\beta^2}}\right)}. \tag{54}$$

Из (54) следует, что X^2 является действительным только в том случае, если

$$\frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} - \frac{8}{\varepsilon_1}\left(\varkappa + \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9} - \frac{\xi^2}{\beta^2}}\right) \geqslant 0. \tag{55}$$

Так как полученные соотношения справедливы и при $\lambda_0 = 0$ ($\xi = 0$), то из (55) следует, что мы имеем «чистый» случай резонанса второго рода, т. е. отсутствие колебаний при $\lambda_0 = 0$, если

$$\frac{8\varkappa}{\varepsilon_1} > \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2}.$$

Поскольку $\varkappa > 0$, то это возможно только при $\varepsilon_1 < 0$, а в таком случае следует справедливость уже приводившегося условия (47).

§ 9. Из (55), далее, следует

$$\frac{8}{|\varepsilon_1|}\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9} - \frac{\xi^2}{\beta^2}} \geqslant \frac{8\varkappa}{\varepsilon_1} - \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2},$$

откуда вследствие (47) имеем

$$\frac{\lambda_0^2}{9} - \frac{\xi^2}{\beta^2} \geqslant \frac{\varepsilon_1^2}{64}\left(\frac{8\varkappa}{\varepsilon_1} - \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2}\right)^2. \tag{55_1}$$

Неравенство (52_2) можно преобразовать к виду

$$\frac{\lambda_0^2}{9} - \frac{\xi^2}{\beta^2} \leqslant \frac{\varepsilon_1^2}{64}\left[\left(\frac{2\lambda_0^2}{9} + \frac{\gamma_1}{\varepsilon_1}\right)^2 - \frac{\lambda_0^2}{81} + \frac{8\varkappa}{\varepsilon_1} - \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2}\right]^2. \tag{$52_2'$}$$

Неравенство $\left(\frac{2\lambda_0^2}{9} + \frac{\gamma_1}{\varepsilon_1}\right)^2 - \frac{\lambda_0^4}{81} > 0$ справедливо, если $-\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1} > \frac{\lambda_0^2}{9}$, что́, как следует из (54), всегда выполняется в силу условия $X^2 \gg \frac{\lambda_0^2}{9}$. Если сравнить ($55_1$) с ($52_2'$) и граничные значения ξ для случаев (55_1) и (52_2) положить соответственно равными ξ_x и ξ_λ, то получим

$$\frac{\xi_x^2}{\beta^2} = \frac{\lambda_0^2}{9} - m_1^2$$

и

$$\frac{\xi_\lambda^2}{\beta^2} = \frac{\lambda_0^2}{9} - m_2^2,$$

где $m_2^2 > m_1^2$. Отсюда следует, что

$$\xi_x^2 > \xi_\lambda^2, \tag{56}$$

т. е. при заданном λ_0 существуют области (от ξ_x' до ξ_λ' и также от ξ_x'' до ξ_λ''), в которых как главное решение, так и вынужденное являются устойчивыми. Мы имеем, следовательно, здесь явление «затягивания» (гистерезис), и тем самым характер колебаний в системе при изменении ξ в данном случае существенно отличается от того, что мы имели в первом случае. Поскольку X^2 [уравнение (54)] представляет собой сумму двух положительных слагаемых, из которых одно равно $\left(-\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1}\right)$, а второе не может быть меньше нуля, то кривая резонанса второго рода должна представлять собой некоторый отрезок кривой, которая не может ни начинаться от нуля, ни кончаться нулем. Поэтому, если при постоянном λ_0 мы будем постепенно изменять величину расстройки ξ, начиная с отри-

цательных значений, то вначале мы будем иметь только одно вынужденное колебание того же периода, что и действующая э. д. с. Когда расстройка достигнет величины $\xi = \xi'_\lambda$, вынужденные колебания перестанут быть устойчивыми и возникнут сразу интенсивные колебания $\left(\text{так как } X^2 \gg \frac{\lambda_0^2}{9}\right)$ двойного периода. При дальнейшем увеличении ξ амплитуда сравнительно медленно нарастает, достигая некоторого пологого максимума

$$X^2_{\max} = -\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1} + \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} - \frac{8}{\varepsilon_1}\left(\varkappa_0 + \frac{\lambda_0}{3}\right)} \quad (57)$$

при $\xi_0 = -\frac{2}{3}\,\theta\beta\lambda_0$, и затем так же медленно падает. При $\xi = \xi''_x > 0$ дробночастотные колебания становятся неустойчивыми и резко срываются; в системе остаются опять одни вынужденные колебания.

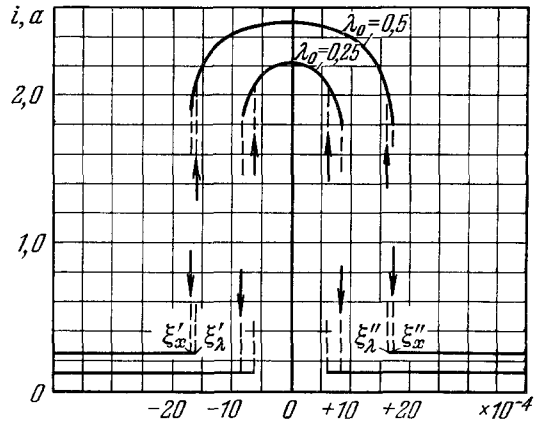

Рис. 4. Резонансная кривая второго рода (теоретическая).

«Жесткое» самовозбуждение. Характеристика $i_a \cdot 1500 = 26{,}4 + 40{,}65x + 15x^2 + 2x^3 - 1{,}2x^5$; $2\theta = 2\cdot 10^{-2}$, $\varkappa_0 = -0{,}06$.

Если мы будем теперь изменять расстройку ξ в обратном направлении, то дробночастотные колебания возникнут не при значении $\xi = \xi''_x$, а при $\xi = \xi''_\lambda$ (положительная граница устойчивости вынужденного решения) и снова сорвутся при $\xi = \xi'_x$. Резонансная кривая имеет, следовательно, вид, изображенный на рис. 4. Дробночастотные колебания «следуют» за возбуждением только в интервале от ξ'_λ до ξ''_λ. Для величины этого интервала $\Delta\xi = \xi''_1 - \xi'_\lambda$, который может иметь практическое значение, из уравнения

$$\frac{\xi_\lambda^2}{\beta^2} = \frac{\lambda_0^2}{9} - \left(\varkappa + \frac{\gamma_1}{2}\frac{\lambda_0^2}{9} + \frac{3}{8}\varepsilon_1\frac{\lambda_0^4}{81}\right)^2$$

легко найти приближенное выражение

$$\Delta\xi = 2\beta\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{9} - \left(\varkappa_0 + \frac{\gamma_1}{2}\frac{\lambda_0^2}{9} + \frac{3}{8}\varepsilon_1\frac{\lambda^4}{81}\right)^2}\,. \quad (58)$$

Как видно из формулы (57), $X^2_{\max}$ имеет вещественное значение только для

$$\frac{\lambda_0}{3} \geqslant |\varepsilon_1|\left(\frac{\varkappa_0}{\varepsilon_1} - \frac{\gamma_1^2}{8\varepsilon_1^2}\right). \quad (59)$$

Следовательно, при жестком режиме существует некоторое пороговое значение амплитуды действующей э. д. с. Ее верхнюю границу можно определить из нижней границы неравенства (52_2).

§ 10. Часть полученных результатов можно наглядно обобщить, если сравнить поведение одного и того же генератора при $\lambda_0 = 0$, но при различных параметрах. Тогда можно увидеть следующее. Если характеристика лампы такова, что при переходе через границу устойчивости ($\varkappa > 0$), что́ может быть достигнуто, например, уменьшением R или увеличением M, колебания возникают «мягко», то и кривая резонанса второго рода (при первоначальном значении $\varkappa$) плавно спадает до нуля. Если же

возникновение колебаний является «жестким», то кривая резонанса второго рода также имеет места срывов, причем они оказываются приблизительно при тех же значениях амплитуды, при которых происходит срыв самовозбуждающихся колебаний. При «жестком» режиме явление «затягивания» наблюдается как при самовозбуждении, так и при резонансе второго рода, в первом случае относительно изменения $\varkappa$, а во втором относительно расстройки ξ. Обе области затягивания одинаковы по величине. Как уже говорилось, вряд ли можно ожидать, что предположенная нами идеализированная характеристика лампы довольно точно отразит действительное положение вещей, однако тем не менее можно подозревать — и эксперимент это, по-видимому, подтверждает,— что приведенные соотношения между самовозбуждающейся системой без внешнего воздействия и несамовозбуждающейся системой при наличии такого воздействия в значительной степени останутся справедливыми и при более общем виде характеристики лампы.

§ 11. Случай $\varkappa > 0$. Прежде чем перейти к обсуждению экспериментов, упомянем еще следующее. Если в (5) взять $F'(0)$ больше нуля или соответственно $\varkappa > 0$, то получим случай внешнего воздействия на уже самовозбужденную систему. Этот случай, как уже говорилось, был рассмотрен Когой. Общие формулы (10), (48_1), (48_2) остаются справедливыми также и здесь. Подробному обсуждению этого случая будет посвящено одно из следующих сообщений. Заметим только, что при определенных условиях здесь наступает явление «тушения». Это явление заключается в том, что к области, в которой собственные колебания синхронизуются внешней э. д. с. *), примыкают более или менее протяженные области, в которых под действием внешней э. д. с., частота которой равна кратному собственной частоты, происходит полное или частичное подавление также собственных колебаний **).

§ 12. С экспериментальной точки зрения часто оказывается более целесообразным воздействовать внешней э. д. с. не на колебательный контур, а на сетку электронной лампы. В этом случае вместо дифференциального уравнения (1) следует записать уравнение

$$CL\frac{d^2i}{dt^2}+CK\frac{di}{dt}+i=f_0(V_s), \tag{60}$$

где теперь

$$V_s=M_r\frac{di}{dt}+E_0\sin\omega t. \tag{61}$$

Подстановкой

$$i_1=i+\frac{E_0}{M_r\omega}\cos\omega t \tag{62}$$

уравнение (60) можно привести к виду

$$CL\frac{d^2i_1}{dt^2}+CK\frac{di_1}{dt}+i_1=f_0\left(M_r\frac{di_1}{dt}\right)+\frac{E_0\cos(\omega t-\varphi_1)}{\omega M_r\sqrt{(\omega^2CL-1)^2+C^2R^2\omega^2}}\cdot \tag{63}$$

Вид этого уравнения совпадает с видом уравнения (1). Тем самым развитая выше теория полностью применима и в данном случае.

Заметим, что к тем же самым уравнениям приходят и в том случае, когда колебательный контур расположен в цепи сетки, как это обычно имеет место в генераторе с обратной связью.

§ 13. Связь с системами с периодически изменяющимися параметрами. В заключение сделаем еще сле-

*) J. Koga, loc. cit.

) Как уже упоминалось (см. сноску **) на стр. 364), об этом докладывалось на Всесоюзном съезде физиков в Одессе в 1930 г.

дующее замечание. Рассматривавшиеся нами вопросы находятся в определенной связи с задачами, относящимися к системам с периодически меняющимися параметрами и приводящими к линейным дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами *). Действительно, в рассмотренных случаях при исследовании устойчивости «вынужденного» решения мы также приходили к подобным дифференциальным уравнениям, и потому возникает предположение, что основой этого в обоих случаях является изменение параметров, в первом случае за счет того, что параметры системы явным образом зависят от времени, в нашем случае за счет того, что время неявно входит в эти параметры вследствие их зависимости от тока или напряжения. В обоих случаях, следовательно, мы имеем дело с колебаниями, возбуждаемыми «за счет изменения параметров». Само собой разумеется, что с математической точки зрения сказанное выше не содержит ничего особенного, поскольку существенно различными данные случаи являются с физической точки зрения. Однако указанное понимание вопроса имеет определенное эвристическое значение; можно, например, рассматривать связь ширины областей возбуждения дробно частотных колебаний с известными областями неустойчивости соответствующих линейных дифференциальных уравнений и т. п.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

§ 14. «Мягкий» режим. В этой части описаны лишь некоторые опыты, поставленные по схемам рис. 5 и 6 с целью установить основные свойства резонанса второго рода. Соотношения между элементами схемы рис. 5 подбирались таким образом, чтобы при отсутствии внешнего воздействия иметь мягкий режим самовозбуждения колебаний. Контролем

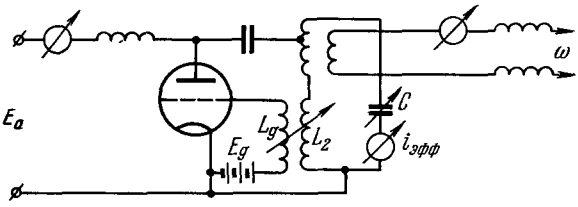

Рис. 5.

при этом служила возможность получения колебаний практически как угодно малой амплитуды при увеличении обратной связи до самовозбуждения. Если теперь уменьшить обратную связь до значения $\varkappa < 0$ и подвергнуть систему воздействию синусоидальной э. д. с. с периодом $2\pi/\omega$, то при плавном изменении емкости C мы получим кривую I рис. 7. До точки ξ' мы будем иметь в контуре очень слабые колебания с тем же периодом, что и внешняя э. д. с. За этой точкой при дальнейшем увеличении C интенсивность колебаний быстро возрастает, достигая в точке $\xi = \xi_0$ максимума, который во много раз больше интенсивности колебаний, возбуждаемых по обе стороны интервала $(\xi'' - \xi')$. Во всем интервале $(\xi'' - \xi')$ период возбуждаемых колебаний равен $4\pi/\omega$, т. е. в два раза больше периода возбуждающей силы. Справа от указанного интервала мы опять имеем только слабые вынужденные колебания с периодом $2\pi/\omega$. Характеристика лампы, использовавшейся во время опытов, представлена

*) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **15**, 229 (1883); **24**, 145 (1887); K. Heegher, Zs. Phys. **29**, 910 (1924); **33**, 85 (1925); А. Андронов и М. Леонтович, Журн. русск. физ.-хим. об-ва **59**, 430 (1927); B. Van der Pol und M. Strutt, Phil. Mag. **5**, 18 (1928).

на рис. 8 *). Данные схемы следующие:

$$L_1 = 200\,000\ см, \quad L_2 = 540\,000\ см, \quad L_g = 344\,000\ см, \quad \omega_0 = 5{,}23 \cdot 10^5.$$

Кривые, изображенные на рис. 7 и снятые при той же схеме, дают приближенную картину зависимости интенсивности возбуждаемых дробночастотных колебаний от величины воздействующей э. д. с. Три изображенные кривые соответствуют трем различным амплитудам воздействующей э. д. с. Кривая *II* соответствует большему значению э. д. с., чем кривая *I*, в то время как максимум кривой *I* значительно больше, чем у кривой *II*. Отсюда уже видно, что при значительной величине внешней э. д. с. дальнейшее ее увеличение вызывает ослабление эффекта. При величине э. д. с. $E_{эфф} = 140$ *в* и больше колебания двойного периода не возбуждаются совсем (кривая *III* рис. 7).

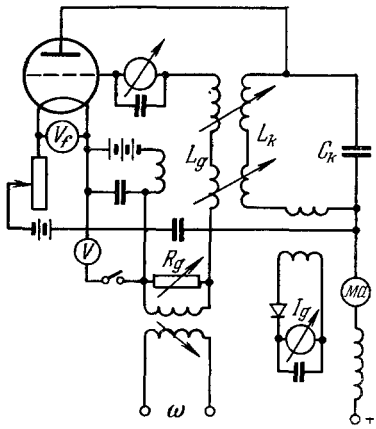

Рис. 6.

Для более точного исследования зависимости максимальной амплитуды дробночастотных колебаний от величины внешней э. д. с. (амплитудной характеристики) схема рис. 5 оказалась неподходящей (непостоянство характеристики лампы и т. п.). Поэтому амплитудная характеристика была снята в схеме, изображенной на рис. 6, где в отличие

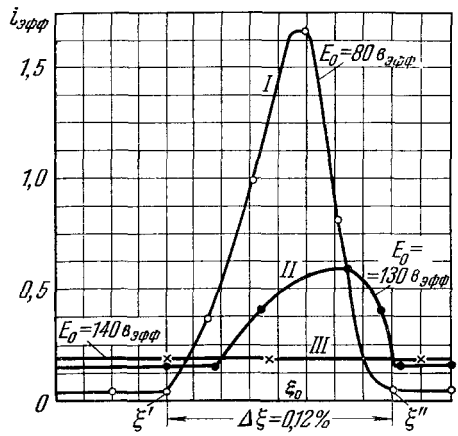

Рис. 7. Зависимость амплитуды от возбуждения E_0 (λ_0).

«Мягкий» режим. $E_a = 1300$ *в*, $E_g = -90$ *в*, $V_f = 8{,}33$ *в*; лампа М-28; $\omega = 1{,}047 \cdot 10^6$. — ○ — (кривая *I*) $E_{0\ эфф} = 80$ *в*; — ● — (*II*) $E_{0\ эфф} = 130$ *в*; — × — (*III*) $E_{0\ эфф} = 140$ *в*.

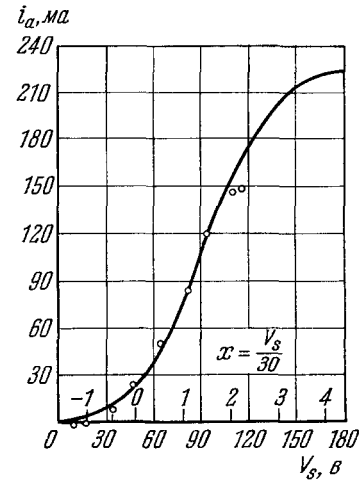

Рис. 8. Характеристика лампы М-28.

○ — теоретически вычисленная по уравнению $i_a = 26{,}4 + 40{,}65x + 15x^2 + 2x^3 - 1{,}2x^5$. Параметры лампы М-28: $D = 10\%$, $E_a = 1600$ *в*, $V_f = 10$ *в*.

от предыдущей схемы внешняя э. д. с. воздействует не на колебательный контур, а на цепь сетки. Кроме того, здесь измерялся не ток i в колеба-

*) Для сравнения на рис. 8, а также ниже на рис. 11, приведена полученная расчетным путем характеристика лампы, на основе которой были выполнены рис. 2, 3 и 5.

тельном контуре ($C_x = 2080\,см$, $L_x = 720\,000\,см$, $\theta = 1{,}3\cdot 10^{-2}$), а ток I_g в индуктивно с ним связанной детекторной цепи. Данные этой схемы были следующие:

$$L_g = 1{,}55\cdot 10^6\ см,\quad R_g \cong 100\ ом,\quad L_v = 2{,}4\cdot 10^6\ см\ (L_v \text{ параллельна } R_g).$$

На рис. 9 представлена одна из амплитудных характеристик, снятых в этой схеме. Легко видеть, что ход этой кривой, во всяком случае качественно, согласуется с теорией [см. формулу (43) и рис. 3]. Для сравнения приводится также и кривая резонанса второго рода, соответствующая некоторой средней величине внешней э. д. с. (рис. 10). Характеристика лампы, использованной в этой схеме, представлена на рис. 11.

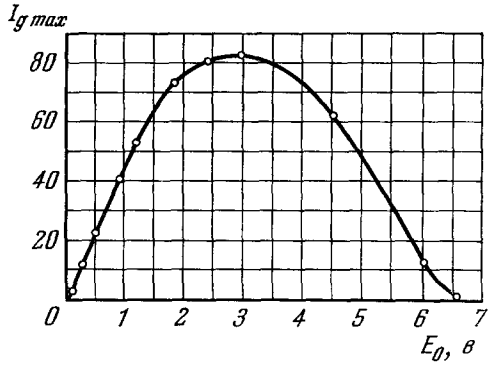

Рис. 9. Амплитудная характеристика (экспериментальная).
«Мягкий» режим. $\omega = 13{,}9\cdot 10^5$. $E_a = 285$ в, $E_g = -26{,}6$ в, $V_f = 3{,}6$ в.

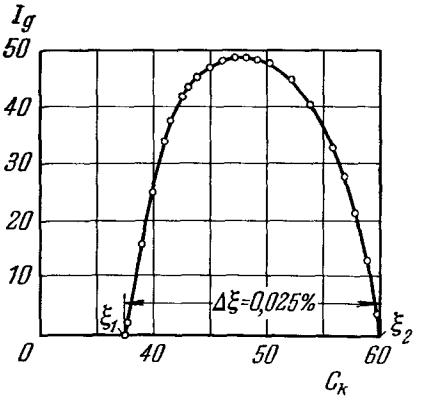

Рис. 10. Резонансная кривая второго рода (экспериментальная).
«Мягкий» режим. $\omega = 13{,}9\cdot 10^5$.

При соответствующем выборе условий можно добиться сравнительно малой величины порога. В наших опытах удалось получить значения E_0 от 0,02 до 0,03 *в*.

§ 15. «Ж е с т к и й» р е ж и м. Если подобрать элементы схемы рис. 5 таким образом, чтобы в отсутствие внешней силы имел место жесткий режим самовозбуждения, то мы в ней получим при внешнем периодическом воздействии и соответственном выборе величины $\varkappa$ кривые резонанса второго рода, изображенные на рис. 12, *а—в*. Легко видеть, что ход этих кривых $\left(\text{соответствующих специально рассмотренному выше случаю } X^2 \gg \frac{\lambda_0^2}{9}\right)$ существенно отличается от мягкого режима. Если в случае мягкого режима амплитуда дробночастотных колебаний, возникающих при достижении границы устойчивости вынужденного решения, изменяется от нуля до некоторого максимального значения и затем снова падает до нуля, то в данном случае, в полном согласии с теорией, дробночастотные колебания возникают с конечной амплитудой и после прохождения максимального значения резко обрываются. Кроме того, на краях кривой резонанса наблюдаются области затягивания.

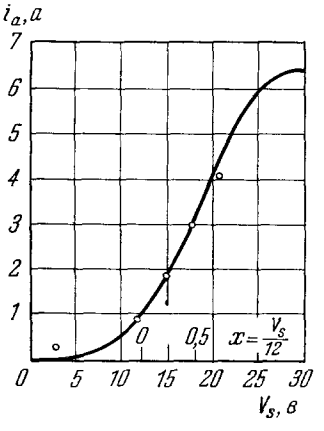

Рис. 11. Характеристика лампы П-7.
○ — теоретически вычисленная по уравнению $i_a = 0{,}95 + 3{,}35x + 2{,}25x^2 - 1{,}5x^3$. Параметры лампы П-7: $D = 10\%$, $E = 240$ в, $V_f = 3{,}75$ в.

Сравнение кривых *а*, *б*, *в* рис. 12 показывает, что амплитуда возбуждаемых дробночастотных колебаний очень мало зависит от амплитуды внешней силы. Эта малая зависимость от амплитуды внешней силы, хотя возможно и не всегда так ярко выраженная, как в данном случае, вообще характерна для жесткого возбуждения и также находится в согласии с вышеизложенной теорией [см. формулу (57) и рис. 4].

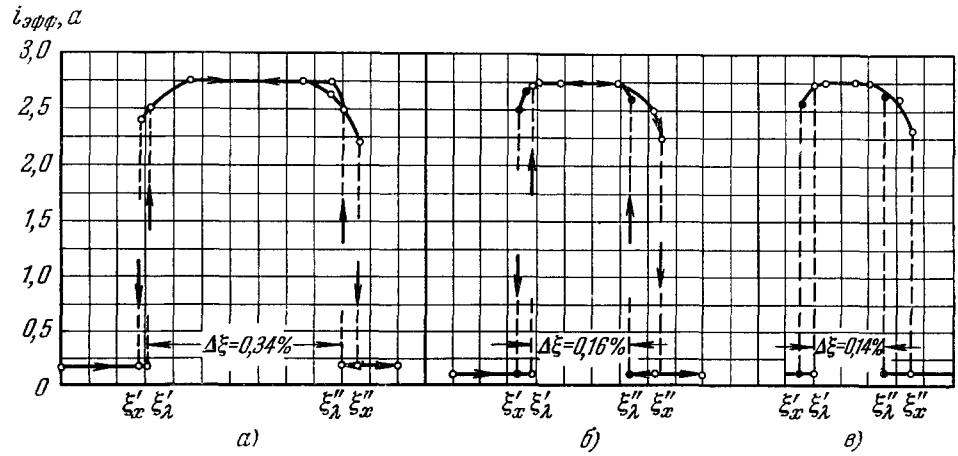

Рис. 12. Кривые резонанса второго рода при различных амплитудах воздействия. «Жесткий» режим. Лампа М-28: $E_a = 1660$ *в*, $E_g = -130$ *в*, $V_f = 8{,}34$ *в*, $\omega = 1{,}047 \cdot 10^6$. *а*) $E_{0\,эфф} = 163$ *в*; *б*) $E_{0\,эфф} = 101$ *в*; *в*) $E_{0\,эфф} = 79$ *в*.

Из кривых рис. 12, *а* — *в* можно также усмотреть, что величина интервала $\Delta\xi = \xi''_\lambda - \xi'_\lambda$, в котором дробночастотные колебания следуют за возбуждением, увеличивается с увеличением амплитуды внешней силы. Данное обстоятельство также находится в согласии с теоретическими результатами [см. уравнение (58) и рис. 4].

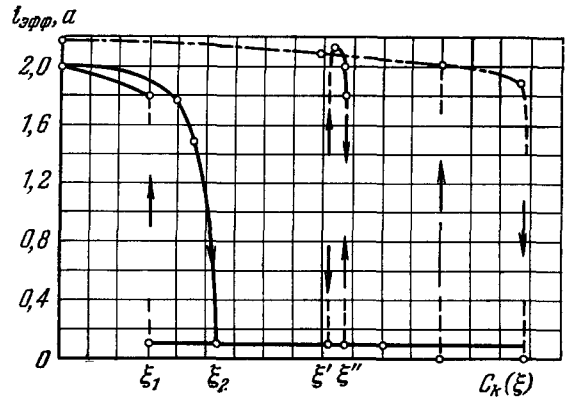

Рис. 13. Явление «тушения». $\omega = 1{,}047 \cdot 10^6$, $E_{0\,эфф} = 101$ *в*.

§ 16. Случай $\varkappa > 0$ (явление «тушения»). Если воздействовать на самовозбужденную систему ($\varkappa > 0$) (схема рис. 5) синусоидальной силой двойной частоты, то, как указывалось в § 11 теоретической части, мы наблюдаем по обе стороны «области синхронизации» полное «тушение» собственных автоколебаний системы. Примером может служить случай, изображенный на рис. 13. Здесь верхняя пунктирная кривая представляет собой зависимость амплитуды $i_{эфф}$ тока в колебательном контуре от расстройки $\xi(C)$ в отсутствие внешней э. д. с. ($\lambda_0 = 0$). Сплошная кривая дает ту же зависимость для случая воздействия на контур синусоидальной э. д. с. двойной частоты ($E_0 = 142$ *в*). В интервале от ξ' до ξ'' в системе имеются лишь дробночастотные колебания с частотой $\omega/2$, а слева от него

(до ξ_1 и ξ_2) одни только вынужденные колебания частоты ω (области тушения) и только за ξ_1 и ξ_2 появляются снова колебания частоты ω_0.

§ 17. Характер кривых резонанса второго рода позволяет предполагать, что описанные явления могут найти практическое применение, например, в тех случаях, когда необходимо осуществить частотную селекцию. Эксперименты, о которых будет доложено в другом сообщении, показали, что действительно на основе рассмотренных выше явлений можно создать схемы, хорошо справляющиеся с задачей селективного приема в радиотелеграфии.

Следует, однако, отметить, что при использовании явлений резонанса n-го рода наряду с рассмотренным нами стационарным режимом существенное значение имеют также и переходные процессы. Исследование относящихся сюда вопросов ведется в настоящее время.

Мы считаем своим приятным долгом выразить нашу искреннюю благодарность А. Андронову и А. Витту за ценное сотрудничество при разработке теории и И. Борушко и Е. Рубчинскому за существенную помощь при проведении экспериментов.

Ленинград,
Центральная радиолаборатория

Поступило 13 августа 1931 г.

ЭФФЕКТ ВАВИЛОВА—ЧЕРЕНКОВА