534.0

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ПУАНКАРЕ И ТЕОРИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ *)

А. А. Андронов

§ 1. В последние годы автоколебания вызывают все больший интерес в ряде отраслей естествознания. Эти колебания отображаются дифференциальными уравнениями, отличными от тех, которые исследуются в математической физике и классической механике. Системы, в которых происходят эти колебания, не консервативны, и колебания поддерживаются в них за счет непериодических источников.

*) Впервые опубликовано в Compt. Rend. (Paris) 18 (15), 559 (1929). Воспроизводится по «Собр. трудов», М., Изд-во АН СССР, 1956, стр. 41.

В качестве примеров укажем для случая уравнений в частных производных задачу (уже давно возникшую) о струне, возбуждаемой смычком, а также задачу о Цефеидах в трактовке Эддингтона [1]; для случая обыкновенных дифференциальных уравнений: в механике — маятник Фроуда [2], в физике — ламповый генератор (например, [3]), в химии — периодические реакции (например, [4]); аналогичные задачи возникают в биологии [5].

§ 2. Рассмотрим простейший случай автоколебаний, соответствующий в механике и физике системе с одной степенью свободы, в химии — реакции между двумя веществами, в биологии — двум соответствующим видам. Эти системы могут быть отображены двумя совокупными дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \tag{1}$$

Известно, что стационарные решения такой системы уравнений могут быть двоякого рода: это либо постоянные, либо периодические функции t. Потребуем, основываясь на исследовании наблюдаемых в действительности движений рассматриваемого типа, чтобы рассматриваемые периодические движения были устойчивы по отношению к достаточно малым изменениям: 1) начальных условий *), 2) правых частей уравнений (1) **).

Легко показать, что периодическим движениям, удовлетворяющим этим условиям, соответствуют на плоскости x, y изолированные замкнутые кривые, к которым изнутри и снаружи приближаются (при возрастании t) спирали, соответствующие соседним решениям. Отсюда следует, что *автоколебаниям, возникающим в системах, описываемых уравнениями типа (1), соответствуют математически устойчивые предельные циклы Пуанкаре* [8].

Ясно, таким образом, что период и амплитуда стационарных колебаний не зависят от начальных условий. Исследование дифференциальных уравнений, относящихся к реальным случаям, показывает, что они действительно обладают предельными циклами, определяющими стационарные движения.

§ 3. Общая теория [8, 9] интегральных кривых уравнений типа (1) позволяет во многих случаях качественно изучать эти уравнения и выводить заключения относительно существования, числа и устойчивости предельных циклов.

Количественное решение задачи, в котором x и y выражены как функции времени, может быть легко получено только в случае малых значений параметра [10].

Рассмотрим в качестве примера ***) частный случай уравнений (1)

$$\frac{dx}{dt} = y + \mu f(x, y; \mu), \qquad \frac{dy}{dt} = -x + \mu g(x, y; \mu), \tag{2}$$

где μ — действительный параметр, который может быть выбран достаточно малым. Когда $\mu = 0$, уравнения (2) имеют решение $x = R\cos t$, $y = -R\sin t$; интегральные кривые образуют на плоскости x, y семейство окружностей.

Пользуясь методами Пуанкаре, мы видим, что в случае достаточно малого $\mu \neq 0$ на плоскости x, y остаются, вообще говоря, только изолированные замкнутые кривые, близкие к окружностям, радиусы которых

---

*) См. Ляпунов [6].

**) См. Бибербах [7].

***) Этот случай представляет большой физический интерес; к нему приводятся автоколебания, близкие к синусоидальным, в системах с одной степенью свободы: ламповый генератор и т. п.

определяются уравнениями

$$\int_0^{2\pi} [f(R\cos\xi, \ -R\sin\xi; \ 0)\cos\xi - g(R\cos\xi, \ -R\sin\xi; \ 0)\sin\xi]\, d\xi = 0. \quad (3)$$

Эти замкнутые кривые соответствуют устойчивым стационарным движениям в том случае, когда выполняется соотношение

$$\int_0^{2\pi} [f_{x'}(R\cos\xi, \ -R\sin\xi; \ 0) + g_{y'}(R\cos\xi, \ -R\sin\xi; \ 0)]\, d\xi < 0. \quad (4)$$

Поправка к исходному периоду 2π и выражения для x и y получаются в виде рядов по степеням μ, сходящихся для достаточно малых значений μ.

§ 4. Таким образом, теория автоколебаний, где до сих пор пользовались почти исключительно нестрогими методами, получает — по крайней мере для простейшего случая — прочную математическую основу.

Электрические автоколебания наиболее доступны экспериментальному исследованию. Несомненно, ряд явлений, характерных для этих автоколебаний *), должен встретиться также в механических и химических автоколебательных системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. S. Eddington, The Internal Consitution of the Stars, London, Cambridge Univ. Press, 1926, стр. 200.
2. Lord Rayleigh, Theory of Sound, vol. 1, London, 1894, стр. 212.
3. B. Van der Pol, On «Relaxation-Oscillations», Philos. Mag., Ser. 7, 2 (11), 978 (1926).
4. R. K. Kremann, Die periodischen Erscheinungen in der Chemie, Stuttgart, Enke, 1913, стр. 124.
5. A. Lotka, Elements of Physical Biology, Baltimore, Williams-Wilkins, 1925, стр. 88.
6. A. Loapounow, Le problème général de la stabilité du mouvement. Traduit du russe, Ann. Fac. sci. univ. Toulouse, ser. 2, **9**, 209 (1907).
7. L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, 2, neubearb. Aufl., Berlin, Springer, 1926, стр. 68.
8. H. Poincaré. Oeuvres, t. 1, ch. 6. Théorie des cycles limites. Paris, 1928, стр. 53—65.
9. J. Bendixson, Courbes définies par des équations différentielles Acta Math. **24**, 1 (1901).
10. H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, T. 1. Paris, 1892, Cas où les temps n'entre pas explicitement dans les équations, стр. 89.
11. H. Barkhausen, Elektronen-Röhren. Bd 3. Empfänger, Leipzig, Hirzel, 1929, стр. 32.