

530.12:531.51

О КРИВИЗНЕ ПРОСТРАНСТВА *)

А. А. Фридман

§ 1

1. В своих известных работах, посвященных общим космологическим вопросам, Эйнштейн **) и Де-Ситтер ***) приходят к двум мыслимым типам вселенной; Эйнштейн получает так называемый цилиндрический мир, в котором пространство ****) обладает постоянной, не меняющейся с течением времени кривизной, причем радиус кривизны связывается с общей массой материи, расположенной в пространстве; Де-Ситтер получает шаровой мир, в котором уже не только пространство, но и весь мир обладает до известной степени характером мира постоянной кривизны ¹⁾. При этом и Эйнштейн, и Де-Ситтер предполагают определенный характер тензора материи, отвечающий гипотезе несвязанности материи и ее относительному покоя, иначе говоря, достаточной малости скоростей материи по сравнению с фундаментальной скоростью ²⁾, т. е. со скоростью света.

Настоящая заметка имеет своею целью, во-первых, получить цилиндрический и сферический миры как частные типы, вытекающие из некоторых общих положений, а затем указать возможность получения особого мира, кривизна пространства которого, постоянная относительно трех принятых за пространственные координат, меняется с течением времени, т. е. зависит от четвертой, принятой за временную координату: этот новый тип вселенной в остальных своих свойствах напоминает цилиндрический мир Эйнштейна.

2. Предположения, которые мы положим в основу наших соображений, распадаются на два класса. К первому классу относятся предположения, одинаковые с теми, которые делают Эйнштейн и Де-Ситтер и которые относятся к уравнениям, управляющим гравитационными потенциалами, и к характеру состояния и движения материи в пространстве. Ко второму классу относятся предположения об общем, так сказать, геометрическом характере нашего мира; из принятой нами гипотезы в виде частных случаев могут быть получены как цилиндрический мир Эйнштейна, так и шаровой мир Де-Ситтера.

Предположения первого класса следующие:

1) Гравитационные потенциалы удовлетворяют системе уравнений Эйнштейна с так называемым «космологическим» членом, который может быть, в частности, равен нулю:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \pm \lambda g_{ik} = -\kappa T_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \quad (\text{A})$$

*) Впервые опубликовано в Zs. Phys. 11, 377 (1922). Воспроизведется по Журн. Русск. физ.-хим. о-ва, часть физ. 56 (1), 59 (1924).

**) A. Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzber. Berl. Akad. (1917).

***) De Sitter, On Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences, Month. Not. Roy. Astron. Soc. (1916—1917).

****) Под пространством будем подразумевать пространство, описываемое многообразием трех измерений, относя термин «мир» к пространству, описываемому многообразием четырех измерений.

¹⁾ См. F. Klein, Ueber die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich-geschlossenen Welt, Götting. Nachr. (1918).

²⁾ См. этот термин у Eddington'a в книге «Espace, temps et gravitation», 2 partie, Paris, 1921, стр. 10 (см. перевод: «Пространство, время, тяготение», Одесса, 1923).

где g_{ik} — гравитационные потенциалы, T_{ik} — тензор материи, κ — некоторая постоянная, $R = g^{ik} R_{ik}$, а тензор R_{ik} определяется равенствами

$$R_{ik} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial g}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} ik \\ \sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} ik \\ \sigma \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} ia \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k\sigma \\ a \end{matrix} \right\}, \quad (\text{B})$$

причем x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) суть мировые координаты, а $\left\{ \begin{matrix} ik \\ \sigma \end{matrix} \right\}$ — символ Кристоффеля второго рода *).

2) Материя находится в несвязанном состоянии и обладает взаимно относительным покоя; говоря менее строго, относительные скорости материи ничтожны сравнительно со скоростью света. При таких предположениях тензор материи T_{ik} определится равенствами

$$T_{ik} = 0, \text{ если } i \text{ и } k \text{ одновременно не равны 4,}$$

$$T_{44} = c^2 \rho g_{44},$$

где ρ — плотность материи и c — фундаментальная скорость; при этом, конечно, мировые координаты разделены на две группы; x_1, x_2, x_3 названы пространственными, а x_4 — временной координатой.

3. Предположения второго класса сводятся к следующему:

1) По выделении из четырех мировых координат трех пространственных (x_1, x_2, x_3) мы будем иметь пространство постоянной кривизны, могущей, однако, меняться с течением четвертой, временной координаты x_4 . Интервал ds^{**}), определяемый равенством $ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k$, может быть написан при помощи соответствующего изменения пространственных координат в следующем виде:

$$ds^2 = R^2 (dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + 2g_{14} dx_1 dx_4 + 2g_{24} dx_2 dx_4 + g_{44} dx_4^2,$$

где R есть функция только от x_4 ; R является пропорциональным радиусу кривизны пространства; таким образом, радиус кривизны пространства может меняться с течением времени.

2) В выражении интервала g_{14}, g_{24}, g_{34} обращаются в нуль при соответствующем выборе временной координаты, иначе, кратко выражаясь, время ортогонально пространству. Это второе предположение не имеет, как мне кажется, в основе своей каких-либо физических или философских соображений и вводится исключительно в целях упрощения вычислений. Необходимо заметить, что миры Эйнштейна и Де-Ситтера являются частными случаями рассматриваемого предположения.

Предположения 1) и 2) дают нам возможность написать ds^2 в виде

$$ds^2 = R^2 (dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + M^2 dx_4^2, \quad (\text{D})$$

где R зависит только от x_4 , а M является, вообще говоря, функцией всех четырех мировых координат. Вселенная Эйнштейна является частным случаем, получаемым из формулы (D) заменой R^2 на $-R^2/c^2$ и M на 1, где R — постоянный (не зависящий и от x_4 !) радиус кривизны пространства. Вселенная Де-Ситтера получается, когда в формуле (D) заменим R^2 на $-R^2/c^2$, а M на $\cos x_4$:

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2} (dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + dx_4^2, \quad (\text{D}_1)$$

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2} (dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + \cos^2 x_4 dx_4^2 **). \quad (\text{D}_2)$$

*) Знак R_{ik} искалярной кривизны R изменен на обратный сравнительно с обычными обозначениями этой величины.

**) См., например: A. Eddington, Espace, temps et gravitation, 2 partie, Paris, 1921.

***) Придавая интервалу ds размер времени, мы обозначим его через $d\tau$; в этом случае постоянная κ будет иметь размерностью длину, деленную на массу, и в CGS-единицах будет равна $1,87 \cdot 10^{-27}$; см. M. La n c, Die Relativitätstheorie, Bd. 2, Braunschweig, 1921, стр. 185.

4. Необходимо сказать еще несколько слов о тех интервалах, в которых заключены мировые координаты; иначе говоря, необходимо условиться, какие точки многообразия четырех измерений мы будем считать за различные; не входя в более подробные пояснения, условимся пространственные координаты изменять в следующих интервалах: x_1 — в интервале $(0, \pi)$, x_2 — в интервале $(0, \pi)$ и x_3 — в интервале $(0, 2\pi)$; что же касается временной координаты, то вопрос об интервале изменения ее оставим открытым, вернувшись к нему в дальнейшем.

§ 2

1. Пользуясь уравнениями (A) и (C) в предположении, что гравитационные потенциалы определяются равенством (D), и полагая $i = 1, 2, 3, k = 4$ в уравнениях (A), найдем

$$R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_1} = R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_2} = R'(x_4) \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0,$$

каковые равенства дают два случая: 1) $R'(x_4) = 0$, R не зависит от x_4 и является постоянной — назовем этот случай стационарным миром и 2) $R'(x_4)$ не равно 0, M зависит только от x_4 — назовем этот случай нестационарным миром.

Обращаясь сначала к стационарному миру, выпишем уравнения (A) для $i, k = 1, 2, 3$ в предположении различных индексов; уравнения эти дадут нам такую систему формул:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_2} - \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial M}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_3} - \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial M}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M}{\partial x_2 \partial x_3} - \operatorname{ctg} x_2 \frac{\partial M}{\partial x_3} &= 0; \end{aligned}$$

интегрируя эти уравнения, найдем

$$M = A(x_3, x_4) \sin x_1 \sin x_2 + B(x_2, x_4) \sin x_1 + C(x_1, x_4), \quad (1)$$

где A, B, C — произвольные функции своих аргументов. Разрешая обычными приемами уравнения (A) относительно тензора R_{ih} , исключая из полученных и неиспользованных еще уравнений неизвестную плотность ρ *) и подставляя выражение (1) для M в эти уравнения, мы после довольно длинных, но совершенно элементарных вычислений найдем, что для M возможны следующие два выражения:

$$M = M_0 = \text{const}, \quad (2)$$

$$M = (A_0 x_4 + B_0) \cos x_1, \quad (3)$$

где M_0, A_0, B_0 — постоянные величины.

В случае, когда M равно постоянному, мы имеем для стационарного мира случай цилиндрического мира. В этом случае удобнее оперировать с гравитационными потенциалами, полученными из формулы (D); определяя плотность и величину λ , мы получим известный результат Эйнштейна

$$\lambda = \frac{c^2}{R^2}, \quad \rho = \frac{2}{\kappa R^2}, \quad M = \frac{4\pi^2}{\kappa} R_1,$$

где M — общая масса всего пространства.

*) Плотность ρ является у нас неизвестной функцией мировых координат x_1, x_2, x_3, x_4 .

В другом возможном случае, когда M определяется из формулы (3), мы с помощью рационального изменения x_4^*) приходим к шаровому миру Де-Ситтера, в котором $M = \cos x_4$; пользуясь формулой (D₂), найдем следующие соотношения Де-Ситтера:

$$\lambda = \frac{3c^2}{R^2}, \quad \rho = 0, \quad M = 0.$$

Таким образом, стационарный мир может быть или цилиндрическим миром Эйнштейна, или сферическим миром Де-Ситтера.

2. Обратимся теперь к изучению другого возможного мира — нестационарного. В этом случае M есть функция только x_4 ; соответственно изменения x_4 , мы можем без ограничения общности положить $M = 1$; имея в виду большие удобства наших обычных представлений, напишем ds^2 в форме, аналогичной (D₁) и (D₂):

$$ds^2 = -\frac{R^2(x_4)}{c^2} (dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + dx_4^2. \quad (D_3)$$

Нашей задачей явится определение R и ρ из уравнений (A). Очевидно, что уравнения (A), в которых значки различны, ничего не дадут; уравнения (A), в которых $i = k = 1, 2, 3$, дадут одно соотношение

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0, \quad (4)$$

а уравнение (A), в котором $i = k = 4$, даст равенство

$$\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \kappa c^2 \rho, \quad (5)$$

причем

$$R' = \frac{dR}{dx_4}, \quad R'' = \frac{d^2R}{dx_4^2}.$$

Так как R' не равно нулю, то интеграция уравнения (4) после замены в целях удобства записи x_4 на t даст нам следующее уравнение:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{A - R + \frac{\lambda}{3c^3} R^3}{R}, \quad (6)$$

где A — произвольная постоянная; из этого уравнения получится путем обращения некоторого эллиптического интеграла, т. е. путем решения относительно R , уравнение

$$t = \frac{1}{c} \int_a^R \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3}} dx + B, \quad (7)$$

где B и a — постоянные; при этом, конечно, должно помнить об обычных условиях изменения знака у квадратного корня.

Уравнение (5) дает нам возможность определить ρ :

$$\rho = \frac{3A}{\kappa R^3}; \quad (8)$$

через всю массу M пространства постоянная A выразится следующим равенством:

$$A = \frac{\kappa M}{6\pi^2}. \quad (9)$$

^{*}) Указанное изменение производится с помощью формулы

$$dx_4 = \sqrt{A_0 x^4 + B_0} dx_4.$$

принимая, что масса M — величина положительная, мы и для A получим положительное значение.

3. Изучение нестационарного мира основано на изучении уравнения (6) или (7); при этом, конечно, величина λ не определяется сама собой, и мы при изучении уравнений (6) и (7) будем предполагать, что λ может принимать любое значение. Определим те значения переменной x , при которых квадратный корень, входящий в формулу (7), может изменить

свой знак. Ограничивааясь случаем положительного радиуса кривизны, нам достаточно рассмотреть значения для x , при которых подкоренное количество обращается в нуль или бесконечность в интервале $(0, \infty)$ для x , т. е. для положительных x .

Одно из значений x , при котором квадратный корень в формуле (7) обращается в нуль, есть значение $x = 0$; другие значения x , при которых квадратный корень в формуле (7) может изменять свой знак, найдутся, изучая положительные корни уравнения

$$A - x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3 = 0;$$

обозначая $\lambda/3c^3$ через y , построим семейство кривых третьего порядка в плоскости (x, y) , определяемое уравнением

$$yx^3 - x + A = 0, \quad (10)$$

где A — параметр семейства, меняющийся в интервале $(0, \infty)$. Кривые нашего семейства (см. рисунок) пересекают ось x в точке $x = A$, $y = 0$ и имеют максимум в точке

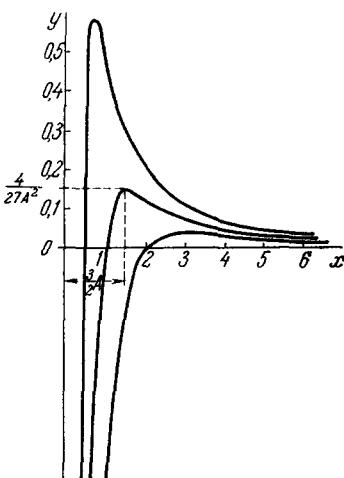
$$x = \frac{3A}{2}, \quad y = \frac{4}{27A^2}.$$

Рассмотрение рисунка показывает, что при отрицательных λ уравнение $A - x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3 = 0$ имеет один положительный корень x_0 , лежащий в интервале $(0, A)$; рассматривая x_0 как функцию λ и A :

$$x_0 = \Theta(\lambda, A),$$

найдем, что Θ — возрастающая функция от λ и возрастающая функция от A . Далее, если λ лежит в интервале $\left(0, \frac{4}{9} \frac{c^2}{A^2}\right)$, то уравнение наше будет иметь два положительных корня $x_0 = \Theta(\lambda, A)$ и $x'_0 = \vartheta(\lambda, A)$, причем x_0 лежит в интервале $\left(A, \frac{3A}{2}\right)$, а x'_0 — в интервале $\left(\frac{3A}{2}, \infty\right)$; $\Theta(\lambda, A)$ будет возрастающей функцией как от λ , так и от A ; $\vartheta(\lambda, A)$ будет убывающей функцией от λ и от A . Наконец, если λ больше $\frac{4}{9} \frac{c^2}{A^2}$, то наше уравнение вовсе не будет иметь положительных корней.

Приступая к исследованию формулы (7), сделаем одно замечание: в начальный момент, т. е. при $t = t_0$, пусть радиус кривизны будет равен R_0 ; в этот начальный момент квадратный корень, стоящий в формуле (7), будет иметь знак плюс или минус, смотря по тому, возрастает ли радиус кривизны с течением времени при $t = t_0$, или нет; изменения время t на $-t$, мы всегда можем приписать этому квадратному корню знак плюс, иначе говоря, без ограничения общности, можем время выбрать так, чтобы радиус



кривизны в рассматриваемый начальный момент $t = t_0$ возрастал с течением времени.

4. Рассмотрим случай, когда $\lambda > \frac{4c^2}{9A^2}$, когда, следовательно, уравнение $A - x + \frac{\lambda}{3c^3}x^3 = 0$ не имеет положительных корней. В этом случае уравнение (7) перепишется следующим образом:

$$t - t_0 = \frac{1}{c} \int_{R_0}^R \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3}x^3}} dx, \quad (11)$$

причем, согласно замечанию, сделанному в конце предыдущего пункта, квадратный корень будет всегда положителен. Отсюда следует, что R будет возрастающей функцией t ; на начальное значение радиуса кривизны R_0 никаких в этом случае ограничений не налагается.

Так как радиус кривизны не может быть меньше нуля, то, уменьшаясь от R_0 с уменьшением t , согласно формуле (11), радиус кривизны через некоторый промежуток времени t' дойдет до нуля. Пользуясь очевидной аналогией, будем называть промежуток времени, понадобившийся, чтобы радиус кривизны от нуля дошел до R_0 , временным, прошедшим от сотворения мира *); этот промежуток t' определяется равенством

$$t' = \frac{1}{c} \int_0^{R_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3}x^3}} dx. \quad (12)$$

Условимся в дальнейшем рассматриваемый мир называть монотонным миром первого рода.

Время, прошедшее от сотворения монотонного мира первого рода, рассматриваемое как функция R_0, A, λ , обладает следующими свойствами: 1) оно возрастает с увеличением R_0 ; 2) оно убывает с увеличением A , т. е. с увеличением массы материи пространства, и 3) оно убывает с увеличением λ .

Если $A > \frac{2}{3}R_0$, то при любых λ время, протекшее от сотворения мира, конечно; если $A < \frac{2}{3}R_0$, то всегда найдется такое характеристическое значение $\lambda = \lambda_1 = \frac{4c^2}{9A^2}$, что с приближением λ к этой величине время, прошедшее от сотворения мира, будет беспрепятственно возрастать.

5. Положим далее, что λ заключено в интервале $(0, \frac{4c^2}{9A^2})$; тогда начальное значение радиуса кривизны R_0 может лежать в одном из трех интервалов: $(0, x_0)$, (x_0, x'_0) , (x'_0, ∞) . Если R_0 лежит в интервале (x_0, x'_0) , то квадратный корень в формуле (7) имеет мнимое значение и пространство с такой начальной кривизной не может существовать. Случай, когда R_0 лежит в интервале $(0, x_0)$, мы рассмотрим в следующем пункте, теперь же остановимся на третьем случае, когда $R_0 > x'_0$ или $R_0 > \vartheta(\lambda, A)$; в этом случае рассуждениями, аналогичными приведенным в предыдущем пункте, можно показать, что R будет возрастающей функцией времени, причем R может меняться, начиная с $x'_0 = \vartheta(\lambda, A)$; промежуток

*.) Время, прошедшее от сотворения мира, характеризует время, прошедшее от момента, когда пространство было точкой ($R = 0$), до нынешнего его состояния ($R = R_0$); это время может быть бесконечным.

времени, прошедший с момента, когда $R = x_0$, до момента, когда $R = R_0$, назовем временем, протекшим от сотворения мира, и обозначим через t' :

$$t' = \frac{1}{c} \int_{x_0}^{R_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3}} dx. \quad (13)$$

Условимся рассматриваемый мир называть монотонным миром второго рода.

6. Рассмотрим, наконец, случай, когда λ заключено в интервале $(-\infty, 0)$. В этом случае, если $R_0 > x_0 = \theta(\lambda, A)$, квадратный корень в формуле (7) становится мнимым и, следовательно, пространство с указанным радиусом кривизны не может существовать. Если $R_0 < x_0$, то рассматриваемый случай будет совершенно одинаков со случаем, опущенным при рассмотрении в предыдущем пункте; итак, положим, что λ лежит в интервале $(-\infty, \frac{4c^2}{9A^2})$, а $R_0 < x_0$; обычными рассуждениями *) можно в этом случае показать, что R будет периодической функцией от t с периодом t_n , который мы назовем периодом мира и который будет определен равенством

$$t_n = \frac{3}{c} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3} x^3}} dx, \quad (14)$$

причем радиус кривизны будет меняться от нуля до x_0 . Условимся такого рода мир называть периодическим. Период периодического мира возрастает с возрастанием λ , стремясь к бесконечности, когда λ стремится к $\lambda_1 = \frac{4c^2}{9A^2}$.

При малых λ период t_n определяется приблизительной формулой

$$t_n = \frac{\pi A}{c}. \quad (15)$$

На периодический мир можно смотреть с двух точек зрения: если считать два явления совпадающими, коль скоро совпадают пространственные координаты, а временные отличаются на целое число периодов, то радиус кривизны мира, увеличиваясь сначала от нуля до x_0 , будет затем уменьшаться до нуля; тогда время существования мира будет конечным.

С другой стороны, если изменять время от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. если считать два явления совпадающими, коль скоро совпадают не только их пространственные координаты, но и их временные координаты, мы придем к действительной периодичности кривизны пространства.

7. Данные, которыми мы располагаем, совершенно недостаточны для каких-либо численных подсчетов и для решения вопроса о том, каким миром является наша Вселенная; быть может, проблема причинности и проблема центробежной силы прольют свет на рассматриваемые здесь вопросы. Следует отметить, что в полученных нами формулах «космологическая» величина λ не определяется, являясь лишней константой задачи;

*) См., например: W. Weierstrass, Ueber eine Gattung der reell periodischer Funktionen, Monatsber. Königl. Akad. Wiss. (1866), а также Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen, Zs. Math. und Phys., Bd. 47 (1902); в нашем случае необходимо, конечно, внести некоторые видоизменения в рассуждения цитированных авторов; впрочем, периодичность в нашем случае устанавливается путем элементарного рассмотрения.

быть может, электродинамические соображения смогут определить эту величину. Полагая $\lambda = 0$ и считая M = массе $5 \cdot 10^{21}$ наших солнц, будем для периода мира иметь величину порядка 10 миллиардов лет. Эти цифры могут иметь, конечно, лишь иллюстративное значение.

Петроград,
29 мая 1922 г.