530.145

Дж. Хединг. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М., Изд-во «Мир», 1965, 238 стр., ц. 74 к.

Метод ВКБ принадлежит к числу тех математических приемов, которые в настоящее время чрезвычайно широко используются в теоретической физике и, в частности, в радиофизике при исследовании самых разнообразных волновых процессов. Хотя этот метод известен физикам более 40 лет *), а математики развивали аналогичные идеи уже в начале прошлого века, до сих пор в мировой литературе не было монографии, посвященной систематическому изложению и обоснованию метода. Необходимость в такой монографии давно уже назрела, особенно если иметь в виду большое количество ошибок и спорных высказываний, накопившихся в последние десятилетия. Опубликованная в русском переводе книга Дж. Хединга «Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ)» является первой и, на наш взгляд, весьма удачной попыткой хотя бы частично восполнить этот пробел в физической и математической литературе.

Слово частично использовано здесь не случайно. Дело в том, что само понятие метода ВКБ до сих пор остается несколько неопределенным. Первоначально метод ВКБ был применен к решению одномерного уравнения Шредингера вида $w''(z)+k^2q(z,k)\,w(z)=0$ с большим параметром k. В области, где отсутствуют точки поворота $q=0$, решение этого уравнения в приближении ВКБ записывается следующим образом:

$$w(z)=q^{-1/4}\exp\left\{\pm ik\int\sqrt{q}\,dz\right\}[1+0(k^{-1})], \tag{1}$$

где явно выделен главный член асимптотического разложения по обратным степеням k, представляющий наибольший интерес в физических приложениях. Его определение в области, свободной от точек поворота, и было принято называть методом ВКБ. С этой точки зрения метод ВКБ является частью более общей математической задачи нахождения всех членов асимптотического ряда для $w(z)$.

Впоследствии, особенно благодаря работам Лангера, были получены ВКБ-решения в областях, содержащих точки поворота. Кроме того, в последнее время достигнут значительный прогресс также в отыскании ВКБ-решений систем дифференциальных уравнений и многомерных волновых задач. Во всех случаях явственно проявлялась (по крайней мере в физических исследованиях) тенденция отыскивать только главный член разложения, дающий равномерную асимптотику во всей области изменения аргументов, включая точки поворота и другие особенности поля. Такое определение метода ВКБ лучше всего соответствует, как нам кажется, современному состоянию исследований по этому вопросу.

Что касается метода фазовых интегралов, которому посвящена рецензируемая книга, то он преследует несколько иную цель — показать, как по известному в некоторой области комплексной плоскости z решению вида (1) продолжить его в более широкую область. Метод фазовых интегралов оставляет открытым вопрос о поведении волновой функции в окрестности точек поворота и полюсов функции q и, следовательно, составляет только часть метода ВКБ в его современном толковании. Впрочем, несмотря на различие между двумя указанными методами, которое должно быть подчеркнуто, включение в название русского перевода подзаголовка «Метод ВКБ», отсутствующего в английском оригинале, представляется нам вполне оправданным.

Небольшая по объему, но весьма содержательная монография Хединга предназначена в первую очередь для физиков-теоретиков, которых интересует не столько формальная математическая сторона вопроса, связанная с обоснованием метода, сколько сами методы решения уравнений математической физики. Книга состоит из шести глав. В вводной первой главе содержится наиболее полный из извест-

*) Метод ВКБ (иногда называемый также методом ВКБДж в честь его создателей Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна и Джеффриса) был разработан в 1923—1926 гг.

ных нам обзоров по истории метода ВКБ и смежных с ним вопросов. При внимательном изучении эта глава может предоставить богатую пищу для размышлений не только для специалистов по истории физики и математики, но и для тех, кто непосредственно имеет дело с исследованием волновых процессов.

Следует, правда, отметить одно существенное упущение в этом обзоре, которое, между прочим, характерно почти для всех работ, в которых излагается метод ВКБ. Еще до того, как был предложен этот метод, Дебай в 1911 г. осуществил переход от волновой к геометрической оптике в трехмерном случае [1]. Этот переход впоследствии был использован для получения трехмерных ВКБ-решений уравнения Шредингера (квазиклассическое приближение) и в настоящее время фигурирует в любом учебнике по квантовой механике. В одномерном случае дебаевская процедура прямо приводит к ВКБ-решениям вида (1), и удивительно, почему это обстоятельство ускользает из поля зрения авторов обзоров по методу ВКБ, в том числе и автора рецензируемой книги. Следует отметить, что в обзорной первой главе исследования по многомерным ВКБ-решениям вообще оставлены без внимания. Другим недостатком первой главы, который лишь частично исправлен при переводе, является неполное освещение работ советских авторов.

Во второй главе приведены основные сведения о методе ВКБ и различные способы записи ВКБ-решений (в том числе и мало распространенная у нас матричная форма). Помимо решений вида (1), в этой главе выведены ВКБ-решения, выраженные через функции Эйри и пригодные в точке поворота.

Третья глава посвящена изучению явления Стокса, которое лежит в основе метода фазовых интегралов. Этот метод в простой и в то же время достаточно строгой форме изложен в четвертой и пятой главах соответственно для случаев одной и двух точек поворота. Ясности изложения в немалой степени способствуют введенные автором во второй главе сокращенные обозначения для часто встречающихся выражений (так, ВКБ-решение $q^{-1/4}\exp\{ik\int\limits_a^z \sqrt{q}\,dz\}$ автор обозначает через (a, z)).

Если оценивать книгу Хединга с точки зрения поставленной автором в предисловии задачи показать, что метод фазовых интегралов «в действительности является весьма простым и что существует набор вполне четких правил, которые позволяют свободно оперировать этим методом», то следует признать эту задачу успешно выполненной. Читатель даже со сравнительно ограниченной математической подготовкой получил в свое распоряжение хорошее руководство, при помощи которого можно уверенно браться за решение весьма сложных задач, имеющих важное практическое значение. Примеры решения некоторых задач приведены в шестой главе. Заслуживает внимания и Приложение к книге, в котором автор кратко изложил основные сведения об уравнениях Эйри и Вебера, которые все чаще и чаще встречаются в физических приложениях.

Переводчику М. В. Федорюку и редактору перевода В. П. Маслову удалось сохранить характерные особенности оригинала — простоту изложения и живость стиля, хотя в ряде случаев переводчик отошел от терминологии, принятой в советской, физической и математической литературе (например, используемый Хедингом термин «comparison equation» переведен как «уравнение сравнения», между тем как в нашей литературе давно уже установился термин «эталонное уравнение», см. хотя бы [2]). В русский перевод книги включены два дополнения — М. Ф. Федорюка «Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка» и В. П. Маслова «Метод ВКБ в многомерном случае». Намерение переводчика и редактора перевода собрать в одной книге наряду с ВКБ-решениями одномерного волнового уравнения также и результаты, относящиеся к применению метода ВКБ для решения многомерных волновых задач и задач, описываемых уравнениями порядка выше второго, заслуживает всяческого одобрения. Однако следует подчеркнуть, что дополнения (особенно второе) резко отличаются по стилю и уровню изложения от основного текста книги и рассчитаны на значительно более узкий круг читателей, чем тот, кому предназначил свою книгу автор.

Монография Хединга, несомненно, окажется полезным пособием в работе для основных «потребителей» метода ВКБ — физиков-теоретиков и будет способствовать более корректному использованию метода ВКБ в физических исследованиях.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. P. D e b y e, примечание к статье A. Sommerfeld, I. Runge, Ann. der Phys., **35**, 277, 1911. См. также П. Дебай, Полярные молекулы, ГНТИ, М.— Л., 1931, стр. 183.
2. А. А. Д о р о д н и ц ы н, УМН 7, 3, 1952.

Ю. А. Кравцов