1967 г. Январь *Том 91, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

39.12.01

ГРУППЫ СИММЕТРИИ В ФИЗИКЕ *)

К. Мак Вой

I. ВВЕДЕНИЕ

Теория групп полезна в физике по трем главным причинам:

1. Она позволяет понять вырожденные по энергии собственные состояния системы («мультиплеты по массе») на основе свойств симметрии, которыми обладают взаимодействия частиц этой системы.

2. Она получает из этих свойств симметрии полный набор коммутирующих переменных, чьи собственные значения («хорошие квантовые числа») служат для однозначного обозначения мультиплетов (например, $J\pi = 3/2^-$, и т. п.).

3. Те же самые коммутирующие переменные выявляют законы сохранения, которым подчиняется система, и, таким образом, устанавливают правила отбора для переходов, схем распада и реакций.

Это — обычный подход, если группа симметрии включает в себя только преобразование геометрических координат: вращения, инверсии, трансляции и преобразования Лоренца. Действия над дискретными координатами, такими, как заряд, барионное число или странность, являются чем-то менее знакомым. Из-за всеобщего интереса к группам симметрии по этим дискретным координатам, а также в связи с современными достижениями в самой теории групп, следует кратко рассмотреть ту традиционную роль, которую играют группы симметрии. Это главным образом связано с тем, что с такой удобной точки зрения непосредственно видно, что в применении к элементарным частицам и резонансам группы изотопического спина и SU_3 определяют и классифицируют мультиплеты точно таким же образом, как и геометрические группы, использованные ранее, например, в атомной спектроскопии.

Более точно, мы придерживаемся той точки зрения, что теория групп Ли, использующая должным образом все наиболее мощные теоремы, является трудной и требует для своего изучения много времени **). Однако ключевые теоремы могут быть вполне поняты без детального знания математических тонкостей, содержащихся в их дока-

*) Kirk W. McVoy, Symmetry Groups in Physics, Rev. Mod. Phys. 37, № 1, 84 (1965). Перевод с английского В. М. Мальцева.

**) Кратким руководством к необходимой математической литературе может служить следующий список. Очень привлекательное, интересное для физиков введение в теорию групп представляет книга Г. Ю. Любарского «Теория групп и ее применения в физике» (М., Физматгиз, 1958). Рассмотрение групп Ли, приведенное в разделе IX, является особенно непосредственным, хотя и не очень обширным. Другой, более обширной монографией по данному вопросу может служить книга M. Hamermesh'a «Group Theory and its Applications to Physical Problems» (Addison — Wesley, Reading, Mass., 1962).

Для настоящего обсуждения необходимы как основа лишь краткие сведения из той или другой книги. Основной источник информации о физически значимых свойствах групп Ли содержится в неопубликованных лекциях «Теория групп и спектроскопия», прочитанных Г. Рака́ в 1951 г. в Принстоне.

Интересны и прекрасные лекции Л. Биденхарна [2], которые содержат обширные ссылки на математическую литературу. Р. Берендс, И. Дрейтлейн, С. Фронсдал, Р. Ли (Rev. Mod. Phys. 34, 1 (1962)) подробно рассмотрели группы Ли ранга 2. Обсуждение некоторых физически важных групп симметрии дано в лекциях А. Салама (Summer Institute for Theoretical Physics), изданных W. E. Brittin, B. W. Downs (Boulder, Colorado, 1959; Interscience Pub. Inc. New York, 1960). Наконец, прекрасный общий справочник по группам Ли представляет монография Л. Понтрягина «Непрерывные группы» (М., Гостехиздат, 1954).

зательстве, что открывает сразу же короткий, физический и прямой путь к полному пониманию групп симметрии и их мультиплетов. Такой путь, в частности, избегает понятия матричных представлений и вместо этого сосредоточивает внимание на мультиплетах физических состояний, которые дают основу для введения представлений. Наша цель состоит в описании этого пути в рамках одной статьи и, в частности, таким языком, который делает статью доступной для заинтересованных экспериментаторов без чтения обширной математической литературы.

Мы подчеркиваем, что данная статья не является учебником по практическим действиям при вычислении коэффициентов Клебша — Гордана или других характерных чисел для какой-либо конкретной группы, поскольку это уже изложено в хорошем обзоре *). Для удобства читателя во вводном материале первых глав приведены все необходимые стандартные определения. Существенные результаты содержатся в разделе IV, где инварианты Рака́ данной группы (l из них для группы Ли ранга l) определяются как полный набор коммутирующих переменных полной группы симметрии, чьи собственные значения являются хорошими квантовыми числами этой системы и однозначно приписываются мультиплетам. Прямое произведение групп и построение сложных частиц как произведений мультиплетов вновь коротко рассматриваются в гл. V и VI; обсуждению физических основ групп изотопического спина и SU_3 посвящена часть гл. IV.

II. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ГРУПП

А. Операторы группы симметрии

Сферическая симметрия, например, шара проверяется путем измерения его диаметра и затем повторением этого измерения после каждого последующего поворота шара на различные углы, чтобы убедиться, что он выглядит одинаково со всех сторон. Точно таким же способом исследуются свойства симметрии любой физической системы (которая представляется в обычном формализме ее гамильтонианом или лагранжианом), а именно: «вращением» соответствующих координат (которые могут быть угловыми координатами или зарядовыми координатами, или координатами странности и т. д.) и проверкой, остается ли еще гамильтониан тем же самым с новой точки зрения?

Инструментом, необходимым для выполнения этой процедуры, является набор «ротаторов», т. е. операторов, которые изменяют некоторые параметры или координаты системы на определенную величину. Полный набор таких операторов, воздействующих на данную координату, обычно образует математическую группу операторов, называемую группой симметрии. Группами симметрии, действующими, например, на геометрические координаты, являются группы сдвигов, вращений и отражений.

Хотя операторы действуют на координаты системы, эти координаты появляются в формализме квантовой механики как аргументы волновых функций, так что «ротаторы» наиболее удобно представлять себе как преобразование самих волновых функций.

Например, оператор сдвига имеет вид:

$$T(a)\psi(x)=\psi(x+a)=\sum\frac{a^n}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\psi(x)=\sum\frac{(ia)^n}{n!}\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)^n\psi(x)=\sum\frac{(iap_x)^n}{n!}\psi(x),$$

т. е. оператор сдвига на величину a может быть записан через сопряженную величину $p_x=-i\frac{d}{dx}$ как **)

$$T(a)=e^{iap_x}.$$

Совокупность $T(a)$ для всех значений a образует группу сдвигов на прямой.

Для того чтобы эти преобразования координат сохраняли нормировку и тем самым полную вероятность, они должны быть унитарными (в выше приведенном примере это означает, что a — действительная величина); поэтому в данной статье мы ограничиваемся рассмотрением операторов унитарной группы.

---

*) Детальное рассмотрение SU_3 дано С. Каспоровичем (ANL-6729, Argonne National Lab. Report, 1963). Приведенные им коэффициенты Клебша — Гордана обсуждаются в работе Дж. де Сварта (Rev. Mod. Phys. **35**, 916 (1963)) (см. перевод: УФН **84**, 651 (1964) — *Прим. ред.*).

**) Всякий раз, когда p есть производная по координате iq, два оператора являются канонически сопряженными (так как их коммутатор $[q, p]=i$) и соответствующий оператор сдвига (на положительную величину q) имеет вид $T(q)=\exp(iqp)$. Это, очевидно, справедливо для любой непрерывной координаты q, будь то расстояние, угол или более понятная лишь физикам такая величина, как угол в «зарядовом пространстве».

Б. Группы симметрии

Итак, группы, которые представляют интерес для исследования свойств симметрии, являются группами операций или преобразований. Говорят, что множество преобразований T_n образует математическую группу, если для операторов группы определено ассоциативное «умножение» ($T_m T_n$ означает, что сначала действуют оператором T_n, а затем T_m), и это множество обладает свойствами:

а) множество остается замкнутым при умножении, т. е., если T_m и T_n принадлежат некоторому множеству, то и $T_m T_n$ также принадлежит ему;

б) множество содержит единичный оператор 1;

в) каждый оператор T множества имеет обратный оператор T^{-1}, который принадлежит тому же множеству.

С физической точки зрения наиболее существенным свойством является, вероятно, замкнутость, так как она означает, что представлены все операторы данного типа, какие только имеются. Например, множество сдвигов $T(a)$ не образует группы для частицы, ограниченной на конечном отрезке прямой, поскольку хотя $T(a)$ и $T(b)$ могут быть «допустимыми» сдвигами, которые сохраняют частицу на отрезке, но $T(a)\cdot T(b)$ может вытолкнуть ее за границу отрезка и, таким образом, суммарный сдвиг окажется недопустимым. Чтобы сделать отрезок замкнутым, надо наложить периодические граничные условия на волновую функцию.

Конечная группа — это группа, содержащая конечное число элементов, например, группа поворотов куба на 90°, 180° и т. д., которая возвращает куб в его первоначальное положение. Группа отражений (четности), состоящая только из P ($=P^{-1}$) и $P^2=1$, представляет общий интерес как «естественный» предел по числу операторов. Конечные группы весьма широко используются для изучения таких систем, как кристаллы и простые молекулы типа NH_3, которые инвариантны при поворотах только на вполне определенные углы.

Чтобы исследовать инвариантность при произвольных или непрерывных преобразованиях координат, нам необходима непрерывная группа операторов типа $T(a)$, зависящая от одного или более параметров, значения которых могут изменяться в некотором континууме. Известным примером является группа вращений, которую мы будем часто использовать для иллюстрации общих результатов. Ее операторы, действующие на угловые координаты волновых функций $\psi(r)$, зависят от трех параметров $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)=\boldsymbol{\theta}$ и имеют вид

$$R(\boldsymbol{\theta})=e^{i\boldsymbol{\theta}\mathbf{J}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i\boldsymbol{\theta}\mathbf{J})^n}{n!}, \tag{1}$$

где $\mathbf{J}$ — три оператора углового момента в декартовой системе координат и θ_i — углы поворота вокруг трех осей. Так как углы θ_i заданы в непрерывной области, число операторов поворота бесконечно, т. е. бесконечно число различных функций тех же самых трех операторов $\mathbf{J}$. Из эрмитовости J_i следует унитарность операторов поворота, если $\boldsymbol{\theta}$ действительно. Заметим, кстати, что повороты вокруг одной оси, например,

$$R(0,\ 0,\ \theta_3)\equiv R(\theta_3)=e^{i\theta_3 J_3}, \tag{2}$$

сами образуют однопараметрическую подгруппу: $R(\theta_3)\,R(\theta_3')=R(\theta_3+\theta_3')$ является поворотом вокруг той же оси, а также $R(0)=1$ и $R(-\theta_3)=R(\theta_3)^{-1}$. В действительности она, как и любая другая однопараметрическая группа, является абелевой; это означает, что все ее члены коммутируют друг с другом (поскольку все они являются лишь различными функциями одного оператора J_3).

Трехмерная группа вращений есть множество операторов $R(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, которые зависят от трех параметров. Вообще говоря, непрерывная группа определяется как множество операторов $U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=U(\boldsymbol{\alpha})$, которые зависят от n непрерывных параметров; в физических приложениях этими параметрами служат $\boldsymbol{\theta}$,$\mathbf{r}$ или «углы ориентации в зарядовом пространстве» (группа изотопического спина, содержащая три параметра) или в «зарядовом пространстве и пространстве изотопического спина» (восьмипараметрическая группа SU_3).

В. Мультиплеты

Для физических приложений очень важным является понятие инвариантного подпространства всего гильбертова пространства состояний, на которые действуют операторы группы симметрии. Инвариантность относительно рассматриваемой группы означает, что каждое состояние в этом подпространстве при действии на него каким-либо оператором группы переходит в другой вектор этого подпространства; операторы группы просто преобразуют одни векторы инвариантного

подпространства в другие и не имеют матричных элементов, связывающих состояния внутри подпространства с состояниями вне его. Например, пространство, натянутое на ортогональные векторы (Y_{00}, Y_{11}, Y_{10}, $Y_{1,-1}$), является четырехмерным инвариантным подпространством группы вращений, так как каждое из J_k (которое может изменять m, но не l) преобразует любой вектор этого пространства в другой вектор этого пространства, и любая функция R (θ) останется той же самой вне зависимости от J_k.

Мультиплетом называют неприводимое инвариантное подпространство группы, т. е. подпространство, которое не содержит в себе двух меньших инвариантных подпространств. Так, выше рассмотренный пример является приводимым инвариантным пространством, которое содержит один триплет (Y_{11}, Y_{10}, $Y_{1,-1}$) и один синглет (Y_{00}). (Поскольку, например, $J_1 Y_{10} = aY_{11} + bY_{1,-1}$, то ясно, что триплет не может быть разложен дальше.) Это означает, что $\langle Y_{00} \mid R(\theta) \mid Y_{1m} \rangle = 0$ для каждого R (θ) из группы; операторы группы не имеют матричных элементов переходов между синглетными и триплетными состояниями. Их полная независимость определяется записью

$$(Y_{00}, Y_{11}, Y_{10}, Y_{1,-1}) = Y_{00} \oplus (Y_{11}, Y_{10}, Y_{1,-1}).$$

Из этого определения замечаем, что члены мультиплета должны иметь между собой сильное сходство. Это действительно так, и это сходство можно сделать явным с помощью следующего альтернативного построения мультиплета. Начиная с любого нормированного вектора ψ_0, целиком лежащего в мультиплете группы, строим все векторы $\psi_\alpha = U(\alpha)\psi_0$, которые могут быть получены из него действием всех унитарных операторов группы. Эта «единичная сфера» векторов преобразуется сама в себя посредством любого оператора $U(\beta)$ (вследствие замкнутости группы), но она не образует векторного пространства. Однако все линейные комбинации ψ_α действительно образуют векторное пространство, которое, очевидно, также инвариантно относительно этой группы. Это и есть как раз мультиплет группы, содержащий ψ_0*).

Одно из наиболее важных физических следствий этой близкой связи между состояниями мультиплета выявляется в том случае, когда гамильтониан H рассматриваемой системы коммутирует со всеми операторами $U(\alpha)$ группы симметрии **). В этом случае H не имеет матричных элементов между различными мультиплетами группы (это видно из уравнений (12) раздела IV). Таким образом, гамильтониан полностью «ограничивается» мультиплетом, и поэтому он должен иметь по крайней мере один собственный вектор в любом мультиплете. Если мы назовем этот собственный вектор ψ_0, то из условия $HU(\alpha) = U(\alpha)H$ непосредственно следует, что каждая функция ψ_α и, следовательно, каждый вектор мультиплета также будут собственным вектором H с тем же самым собственным значением энергии (лемма Шура). Иначе говоря, всякий раз, когда может быть найдена группа симметрии, которая коммутирует с гамильтонианом системы, гарантировано, что мультиплеты группы являются собственными состояниями системы, вырожденными по энергии. Это часто делает возможным изучение собственных векторов (например, угловой зависимости собственных векторов любой сферически-симметричной системы) и в том случае, когда волновое уравнение не может быть решено в явном виде.

Термин «мультиплет» заимствован из атомной спектроскопии, в которой при отсутствии спин-орбитальной связи инвариантные подпространства несколько расширенной группы вращений обозначаются с помощью L и S, например, ^3D. Включение «нарушающего симметрию» $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ взаимодействия расщепляет этот большой набор вырожденных состояний (мультиплет) на несколько меньших наборов, каждый из которых соответствует энергетическому уровню в тонкой структуре спектра и каждому из них приписывается определенный полный момент J (например, ^3D расщепляется на $J = 1, 2, 3$). Это и есть набор близко лежащих уровней, который образует «мультиплет» линий в спектре атома, например, такой как дублет натрия.

С теоретико-групповой точки зрения мультиплетом называют совокупность вырожденных состояний. Например, Y_{00} является синглетом относительно группы вращений, т. е. синглетом по угловому моменту или «спину», тогда как Λ-частица

---

*) Поскольку $U(\alpha)$ не имеет матричных элементов между ψ_0 и состояниями вне мультиплета $\mathfrak{M}$, пространство не может быть больше, чем $\mathfrak{M}$. Оно должно, следовательно, содержаться в $\mathfrak{M}$, но оно при этом не может быть меньше $\mathfrak{M}$, т. е., если оно существует, то $\mathfrak{M}$ было бы приводимым. Следовательно, оба пространства идентичны.

**) Если система обладает гамильтонианом, S-матрица будет его функцией, поэтому коммутация с гамильтонианом подразумевает коммутацию с S-матрицей, которая является весьма важным оператором. Если же нет H, то просто требуют коммутации с S-матрицей, а утверждения относительно связанных состояний и резонансов становятся утверждениями относительно полюсов S-матрицы. Ради простоты, мы будем формулировать все высказывания такого типа с помощью гамильтониана, а не S-матрицы.

является синглетом по изотопическому спину; (n, p), как и основные состояния ядер H^3 и He^3 — дублеты по I-спину, а (π^+, π^0, π^-) — изотопический триплет.

При этом существенно то, что каждая группа обладает определенным (и в некоторой степени различным) набором мультиплетов. Хотя они и определяются структурой группы, какая-либо общая процедура нахождения их для произвольной непрерывной группы отсутствует. В этом состоит одна из причин, почему мы будем ограничиваться специальным классом непрерывных групп, чьи мультиплеты могут быть идентифицированы непосредственным образом, причем каждый из них будет определяться набором «квантовых чисел».

Одним из представителей этого класса является группа вращений; ее мультиплеты обозначаются одним квантовым числом j, поскольку, как мы увидим далее, они состоят как раз из $(2j+1)$ вырожденных собственных состояний оператора J^2. Так, для $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \ldots$ мы получаем соответственно синглет, дублет, триплет, квартет и т. д. группы вращений. Другим представителем этого класса является группа SU_3; ее мультиплеты обозначаются двумя квантовыми числами. Оказывается, что она имеет один синглет, два триплета, два секстета, один октет и т. д. К этому же классу принадлежит и группа G_2, которая имеет один 7-плет, один 14-плет, один 27-плет и т. д. Эмпирически одним из способов, который мы имеем для распознавания присутствия таких групп в симметрии системы, является проявление в природе ее мультиплетов. В этом состоит одна из причин, почему они играют такую важную роль в исследовании неизвестных свойств симметрии; более подробно мы рассмотрим это в разделе VII.

Между прочим, увеличение размеров группы G путем добавления к ней операторов так, чтобы образовалась новая группа G', не может уменьшить размеры ее мультиплетов, так как любой мультиплет G' (пространство инвариантное относительно действия любого оператора G'), конечно, инвариантен относительно группы G (которая теперь входит как подгруппа в G') и, таким образом, должен содержать по крайней мере один мультиплет G. В действительности он будет содержать больше чем один мультиплет G, если добавленные операторы будут смешивать первоначальные мультиплеты, собирая их вместе по два и более, чтобы образовать «супермультиплет» расширенной группы. Например, (Y_{11}) — однократный мультиплет (в данном случае — собственное состояние) подгруппы вращений вокруг Z (см. уравнение (2)). Если мы увеличим группу до всей группы вращений, добавляя вращения вокруг других осей (т. е. функции от J_1 и J_2), то первоначальные мультиплеты (Y_{11}), (Y_{10}) и $(Y_{1,-1})$ (которые перемешиваются операторами J_1 и J_2) образуют один супермультиплет этой расширенной группы. Аналогично, при расширении изоспиновой группы до SU_3 путем добавления квантового числа странности, обменные операторы (требующие, таким образом, большей симметрии гамильтониана) обусловливают, например, объединение в одном «супероктете» синглета Λ, дублетов (n, p) и (Ξ^0, Ξ^-) и триплета $(\Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0)$.

Г. Группы Ли

Возвращаясь к самим группам, вспомним, что наш пример — группа вращений — содержит бесконечное число операторов, и существенная причина, благодаря которой с ней вообще можно работать, заключается в том, что эти операторы представляют собой просто бесконечное число функций (каждая из которых определяется числами $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$) всего трех основных операторов J_1, J_2, J_3. Эти основные операторы могут быть выведены из групповых операторов $R(\boldsymbol{\theta})$ путем дифференцирования *):

$$iJ_k = \frac{\partial R(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_k}\bigg|_{\boldsymbol{\theta}=0}; \tag{3}$$

для этого необходимо, чтобы $R(\boldsymbol{\theta})$ зависело аналитически от $\boldsymbol{\theta}$ «в окрестности единичного оператора» $(R(0) = 1)$.

Хотя группа вращений и не обладает структурой, достаточной для описания всех известных свойств симметрии физических систем, именно она содержит все существенные идеи. Пока простейшим обобщением, адекватность которого доказана, является класс групп, известный как группы Ли, по имени норвежского математика С. Ли.

Группы Ли — это непрерывные группы, содержащие операторы $U(\boldsymbol{\alpha}) = U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, которые зависят от n параметров или координат. Их отличительная характеристика состоит в том, что элементы групп аналитически зависят от всех n параметров. Если $U(\boldsymbol{\alpha})$ — оператор группы, то обычно

*) Говоря осторожно, все такие операторы должны быть исключены из матричного представления группы, но мы хотим вообще устранить представления. В этих сокращенных обозначениях это, кажется, можно сделать без смущения.

параметризация выбирается так, чтобы $U(0) = 1$. Тогда n основных операторов, называемых генераторами группы, точно так же, как в уравнении (3), определяются следующим образом *):

$$L_i = \frac{\partial U}{\partial \alpha_i}\bigg|_{\boldsymbol{\alpha}=0}. \tag{4}$$

Вскоре выяснится, является ли в этом случае $U(\boldsymbol{\alpha})$ действительной функцией генераторов. Но в любом случае из предположения аналитичности и уравнения (4) следует, что

$$U(\boldsymbol{\alpha}) \simeq 1 + \sum_i \alpha_i L_i$$

для всех малых α_i. Отсюда ясно, что генераторы должны быть линейно независимыми операторами ($\Sigma \alpha_i L_i = 0$ только если все $\alpha_i = 0$), если $\boldsymbol{\alpha} = 0$ — единственное значение $\boldsymbol{\alpha}$, которое приводит к единичному оператору. Так как допускают, что $U(\boldsymbol{\alpha})$ унитарно, то для того чтобы сделать генераторы эрмитовыми, обычно выбирают параметры чисто мнимыми ($i\boldsymbol{\alpha}$ вместо $\boldsymbol{\alpha}$).

Оказывается, что существенными являются коммутаторы генераторов таких групп; используя равенство

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_j \partial \alpha_i},$$

найдем, что они обязательно имеют вид

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ijk} L_k, \tag{5}$$

т. е. генераторы образуют множество, которое «замкнуто при коммутации». Известные правила коммутации для генераторов группы вращений (с циклическим порядком индексов i, j, k)

$$[J_i, J_j] = iJ_k \tag{6}$$

есть, конечно, лишь частный случай; вообще говоря, они более удобны в виде

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_3, \tag{7}$$

где $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$.

Числа C_{ijk} называются структурными константами группы Ли. Ясно, что эти константы не инвариантны при линейных преобразованиях генераторов (таких, как замена J_1 и J_2 на J_+ и J_-; ср. уравнения (6) и (7)), но замечательно то, что взятые вместе они содержат всю необходимую для нас информацию о группе.

(Возможно, мимоходом стоит указать, что соотношения коммутации (5) могут рассматриваться как прямое обобщение векторного произведения двух векторов, которое может быть записано в виде $L_i \times L_j = \Sigma C_{ijk} L_k$. Трехмерный случай, когда в качестве единичных ортогональных векторов берутся J_1, J_2 и J_3, дается уравнением (6) ($\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ и т. п.). Уравнение (5) относится к более общему случаю искривленных осей и более высокой размерности, но существенно то, что векторное произведение любых двух «базисных векторов» есть вектор в том же пространстве и, таким образом, является линейной комбинацией базисных векторов. Алгебра сумм и «векторных произведений» генераторов называется алгеброй Ли группы Ли; это одно из средств, используемых для доказательства некоторых теорем, которые будут приведены ниже. С этой точки зрения алгебра Ли ранга 2 (определение см. ниже) обладает замечательным свойством: векторное произведение двух векторов $[L_1, L_2]$ равно нулю даже в том случае, если эти векторы линейно независимы.)

Другими словами, исходя из группы Ли, можно определить генераторы и, вычисляя их коммутаторы, найти структурные константы. Но эта процедура почти обратима, т. е. если задан какой-либо набор операторов L_i, который замкнут при коммутации, как в уравнении (5), то эти операторы почти однозначно определяют группу Ли, имеющую генераторы L_i. В этом заключается содержание знаменитой теоремы Ли, которую мы формулируем следующим образом:

Теорема 1 **). *Если дан какой-либо набор n операторов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям* (5), *то существует группа Ли, генераторами которой*

*) Для того чтобы сделать генераторы группы вращения J_k эрмитовыми, их определяют следующим образом: $J_k = -i\partial R/\partial\theta_k$. Следует отметить, что сами по себе генераторы не являются элементами группы, например, J_k — эрмитов, тогда как $R(\theta)$ — унитарна.

**) Краткое доказательство дано в книге Любарского на стр. 162, 164 (см. сноску *) на стр. 121).

являются эти операторы. Мультиплеты группы однозначно определяются структурными константами как матричные элементы генераторов между всеми состояниями мультиплета *).

Другими словами, структурные константы определяют реальное содержание любой группы Ли. Если заданы только коммутаторы группы, мы можем непосредственно получить мультиплеты группы и все их свойства, используя лишь правила коммутации. Это то же самое, что делается, например, в обычной формулировке группы вращений.

Из приведенных выше коммутаторов углового момента (7) определяются одновременно существующие собственные состояния $|jm\rangle$ операторов J^2 и J_3, матричные элементы генераторов относительно этих состояний

$$\langle jm|J_\pm|j'm'\rangle=[(j'\mp m')(j'\pm m'+1)]^{1/2}\delta_{jj'}\delta_{m,m'\pm 1}, \tag{8}$$

отражающие тот факт, что оператор J^2 имеет собственное значение $j(j+1)$ для $j=0$, 1/2, 1 и т. д. с вырождением $(2j+1)$, значения коэффициентов Клебша — Гордана и все остальное.

Это дает внушительное количество информации, которое можно извлечь из трех генераторов, но в действительности данный перечень не исчерпывает возможностей генераторов, так как эрмитовы операторы **J**, конечно, представляют сами по себе важные физические величины, независимо от любой групповой структуры, построенной на их основе. И не только в этом особенность группы вращений. Очень полезное свойство всех групп симметрий, которыми интересуются в физике, заключается в том, что в каждом случае генераторы группы являются эрмитовыми величинами, непосредственно связанными с симметрией, описываемой группой; групповые операторы есть просто унитарные функции этих базисных преобразований в относительных координатах волновых функций. Так, группа сдвигов состоит из множества операторов $e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}}$ с генераторами **p**. Группа «временных сдвигов» e^{-itH} имеет один генератор $H=i\partial/\partial t$. Вместе эти четыре оператора образуют четырехмерную группу трансляций. Зарядовый оператор **T** порождает группу изотопического спина, а **T** вместе с пятью другими операторами, действующими на заряд и странность, дает группу SU_3, которая будет детально рассмотрена в разделе VII.

Наконец, мы определим одну из характеристик группы Ли, которая, как мы скоро увидим, имеет большое значение.

Определение. *Ранг группы Ли определяется как число взаимно коммутирующих генераторов, которыми обладает группа.*

В абелевой группе типа группы сдвигов, в которой все генераторы (p_1, p_2, p_3) коммутируют друг с другом, ранг равен как раз полному числу генераторов. Однако в данном случае коммутативность позволяет нам записать $e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}}=e^{ix_1p_1}e^{ix_2p_2}e^{ix_3p_3}$, и эта группа третьего ранга в действительности просто равна произведению трех групп первого ранга. Более интересная ситуация получается в случае группы вращений, в которой не коммутирует ни один генератор (ранг группы, по определению, равен 1), или SU_3, ранг которой равен 2 (коммутируют T_3 и S — странность).

Д. Полупростые группы Ли

К сожалению, не все группы Ли являются хорошими с точки зрения физика. Многие группы имеют такое неприятное свойство как отсутствие каких-либо конечномерных мультиплетов, или, если такие мультиплеты имеются, часто оказывается невозможным произвольное инвариантное пространство разложить на неперекрывающиеся мультиплеты. (Например, произведение двух дублетов образует четырехмерное пространство. В случае группы вращений оно разлагается на синглет и триплет, но произвольная группа может и не иметь синглета и (или) триплета.)

Другими словами, даже группы Ли являются слишком общими для наших целей, и нам необходимо дальнейшее ограничение, чтобы исключить такие неподдающиеся рассмотрению группы. Путь, который в настоящее время кажется наиболее приемлемым, состоит в ограничении так называемыми «полупростыми» группами Ли, поскольку

*) Это в том смысле, что операторы группы являются функциями генераторов. Коротко утверждение теоремы сводится к тому, что представления группы определены структурными константами единственным образом, поскольку генераторы определены свойствами операторов группы только в непосредственной окрестности единичного оператора (т. е., когда все α_i малы). Возможно, нет ничего удивительного в том, что структурные константы не определяют однозначно операторов группы для произвольного $\boldsymbol{\alpha}$.

К счастью, однако, представления определены единственным образом для всех $\boldsymbol{\alpha}$, и все они используются физиками.

свойства этого класса групп хорошо исследованы математически, и он настолько широк, что содержит все изученные до сих пор группы симметрии.

Предположим, что группа имеет подгруппу, которая является абелевой (все ее элементы коммутируют друг с другом) и чьи элементы A_i обладают свойством $BA_iB^{-1} = A_j$, где A_j — другой элемент подгруппы, если B — любой элемент полной группы. Если такая подгруппа (называемая инвариантной абелевой подгруппой) существует, то полная группа не будет полупростой; если же таких подгрупп нет, то эта полная группа называется полупростой. Так, группа всех трансляций и вращений, т. е. группа Ли с шестью генераторами (p_1, p_2, p_3, J_1, J_2, J_3), называемая трансляционно-вращательной группой, имеет группу трансляций как подгруппу, причем она является абелевой. К тому же простые соображения показывают, что RTR^{-1} (R — оператор вращения, T — оператор трансляций) есть чистая трансляция, следовательно, абелева подгруппа инвариантна, а трансляционно-вращательная группа не является полупростой. (Более жесткое ограничение состоит в требовании, чтобы *группа была* п р о с т о й; *это означает, что она вообще не обладает инвариантной* подгруппой — абелевой или какой-либо другой. Только теорема 4 требует простоты, так что другие теоремы мы будем формулировать на основе менее ограничивающей гипотезы полупростоты. Группы, которые мы будем использовать, такие, как SU_2 и SU_3, в действительности являются простыми.)

Что именно достигается рассмотрением только полупростых групп Ли, конечно, не очевидно для неискушенного читателя, но это ограничение действительно важное, и мы покажем его основные преимущества, приведя важные теоремы, которые возникают из требования полупростоты групп.

Т е о р е м а 2 *). *Число полупростых групп Ли данного ранга конечно.*

Это действительно так даже для группы самого низшего ранга. Имеется только одна группа ранга 1 — группа трехмерных вращений, которую мы уже рассматривали в качестве примера. Ее часто называют группой SU_2,— группа унимодулярных (детерминант $= +1$) унитарных 2×2 матриц (ее генераторы — матрицы Паули), так как эти две группы изоморфны. Имеются три полупростые группы ранга 2, одна из которых — группа SU_3.

Т е о р е м а 3. Т е о р е м а П е т е р а — В е й л я[1]. *Каждое конечномерное инвариантное пространство полупростой группы Ли можно полностью разложить на неперекрывающиеся мультиплеты.*

Эта теорема гарантирует существование разложений Клебша—Гордана. Результат перемножения двух мультиплетов группы образует пространство, которое инвариантно относительно группы, и теорема утверждает, что такое пространство есть просто сумма мультиплетов; например, произведение двух трехмерных мультиплетов группы SU_3 образует 9-мерное пространство, которое разлагается на секстет плюс триплет или на октет плюс синглет, в зависимости от того, являются ли два триплета идентичными или разными.

В связи с этим мы приведем также важную теорему, доказанную Картаном (см., например, работу Рака́, стр. 39).

Т е о р е м а 4. *Каждая простая группа ранга l имеет l «фундаментальных мультиплетов», которые обладают тем свойством, что каждый мультиплет группы может быть получен как произведение этих мультиплетов самих на себя.*

Детали перемножения мультиплетов приведены в разделе V. Здесь мы только заметим, что фундаментальным мультиплетом SU_2 является дублет, изоспиновая группа также относится к SU_2, а ядра, к которым впервые была применена изоспиновая группа, действительно строятся из изотопических дублетов. Фундаментальный мультиплет группы SU_3 составляют два триплета, и сущность наиболее современных приложений SU_3 к классификации элементарных частиц состоит в надежде, что все мультиплеты известных элементарных частиц могут быть построены из этих фундаментальных триплетов.

III. ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Сферическим гармоникам Y_{lm} приписываются два «квантовых числа», l и m, которые означают, что гармоники одновременно являются собственными векторами двух операторов J_3 (генератор группы SU_2) и J^2. J^2 не является генератором группы. Точнее, этот оператор оказывается функцией всех генераторов, каждый из которых коммутирует с ним (и, следовательно, со всеми элементами R (θ) группы вращений); поэтому он называется инвариантом группы **).

Важность оператора J^2 заключается в том, что его вырожденные собственные векторы совпадают с мультиплетами группы вращения. В этом смысле они могут рас-

*) Л. С. П о н т р я г и н, «Непрерывные группы», М., Гостехиздат, 1954.

**) Его обычное название — инвариант Казимира; для обозначения его (и других инвариантов) используют символ C.

сматриваться как «собственные мультиплеты» оператора J^2 и однозначно определяются собственным значением $j(j+1)$ ($j=0$ — синглет, $j=1/2$ — дублет и т. д.). Это важное свойство присуще не только группе вращений, но и служит характеристикой любой полупростой группы Ли.

В своих лекциях, прочитанных в Принстоне, Рака́ (см. выше) приводит следующую основную теорему:

Теорема 5. *Для каждой полупростой группы Ли ранга l существует набор из l «инвариантных операторов». Они являются функциями $C_\lambda(L_1, \ldots, L_n)$* (где $\lambda = 2, \ldots, l-1$) *генераторов, которые коммутируют с каждым оператором группы, а их собственные значения однозначно характеризуют мультиплеты группы.*

Чтобы сделать рассуждения более конкретными, вспомним, что для любого оператора, который коммутирует со всей группой (пусть для примера рассматривается гамильтониан), каждое состояние в мультиплете группы является собственным состоянием, и все состояния мультиплета имеют одно и то же собственное значение, т. е. оператор вырожден по каждому мультиплету. Это справедливо для всех l одновременно коммутирующих операторов C_λ, так что для каждого мультиплета имеется всего один набор собственных значений $(C_2, C_3, \ldots, C_{l-1})$. Важность теоремы Рака́ состоит в том, что она гарантирует единственность мультиплета, который будет иметь такой набор собственных значений; причем каждый мультиплет может быть однозначно определен с помощью этих собственных значений точно так же, как каждый мультиплет группы вращений (ранг 1) определен индексом j.

В разделе II,B было найдено, что мультиплет группы состоит из набора близко расположенных состояний, которые обладают тем свойством, что любой из них, ψ, может быть получен из любого другого ψ_0 с помощью соответствующей линейной комбинации операторов группы, $\psi = [\sum_\alpha a_\alpha U(\alpha)]\psi_0$. Теорема Рака́ дает другой способ рассмотрения этой связи: мультиплет есть набор одновременно существующих собственных состояний l инвариантных операторов C_λ группы, каждый из которых имеет т о т ж е с а м ы й набор собственных значений $(C_2, C_3, \ldots, C_{l+1})$.

Более важным является то, что этот набор собственных значений содержит в себе свойства симметрии всего мультиплета (относительно рассматриваемой группы симметрии) точно так же, как единственное собственное значение j характеризует свойства симметрии мультиплета группы вращений относительно поворотов в пространстве.

Как будет видно из теоремы 7, мы действительно гарантированы, что мультиплеты не могут иметь еще какие-либо свойства симметрии относительно данной группы. Следовательно, с этой точки зрения инвариантные операторы группы симметрии приобретают очень важное значение: они представляют в с е с у щ е с т в е н н ы е с в о й с т в а с и м м е т р и и г р у п п ы, и их собственные значения $(C_2, C_3, \ldots, C_{l+1})$ являются квантовыми числами, которые однозначно определяют и классифицируют мультиплеты группы в зависимости от этих свойств симметрии.

При этом группа вращений выделена в том смысле, что только она имеет ранг 1, так что ей достаточно одного инвариантного оператора. Для группы ранга 2, типа SU_3, один инвариант, соответствующий J^2 (т. е. инвариант Казимира), может иметь те же самые собственные значения на различных мультиплетах SU_3, поэтому необходимы дополнительные операторы, чтобы различать такие мультиплеты. Теорема Рака́ утверждает, что достаточно еще одного оператора. Например, триплет 3 часто обозначается как D^3 (0,1), октет — как D^8 (1,1) и один из 15-плетов, как D^{15} (2,1). Числа в круглых скобках относятся к собственным значениям двух инвариантных операторов группы; все три мультиплета имеют одинаковые собственные значения для второго оператора, но последовательно отличаются собственными значениями первого оператора.

Биденхарн[2] недавно указал, что по крайней мере для группы SU_n (унитарных, унимодулярных $n \times n$ матриц) инварианты могут быть представлены просто в виде однородных полиномов по степеням генераторов

$$C_\lambda = \sum_{ij} a^\lambda_{ij} \ldots L_i L_j \ldots (\lambda \text{ множителей}), \tag{9}$$

где коэффициенты $a^\lambda_{ij} \ldots$ описываются функциями от структурных констант группы. Простейший инвариант C_2 является функцией от генераторов типа $J^2 = 1/2\, J_+ J_- + 1/2 J_- J_+ + J_3^2$, C_3 — полином третьего порядка по степеням генераторов и т. д. Инвариантами группы SU_3 являются C_2 и C_3. Несмотря на эти ясные рецепты, следует отметить, что инварианты группы не единственны. Если C и C' — инварианты группы ранга λ, то, например, $\bar{C} = C + C'$ и $\bar{C}' = C - C'$ будет другой парой, которая в той же степени адекватна для обозначения мультиплетов, как и первая пара. Если операторы группы унитарны, мы можем воспользоваться этой свободой для утверждения следующей теоремы:

Теорема 6. *Инвариантные операторы унитарной полупростой группы Ли всегда можно выбрать эрмитовыми.*

Это легко доказать. Если C — инвариант, то $CU = UC$ для каждого U из группы. Сопряженное уравнение имеет вид $U^+C^+ = C^+U^+$; но для унитарного оператора $U^+ = U^{-1}$, так что C^+ коммутирует со всеми обратными элементами группы, что по групповым свойствам эквивалентно коммутации со всей группой. Следовательно, если C — инвариант, то C^+ — тоже инвариант, и мы вместо C можем использовать, например, оператор $(C + C^+)$, который является эрмитовым. Поскольку мы интересуемся только унитарными группами, будем считать, что все инварианты эрмитовы.

Несмотря на неоднозначность инвариантных операторов, любой набор l независимых *) инвариантов обладает важным свойством — полнотой,— которая понимается в следующем смысле:

Теорема 7. *Любой оператор, который коммутирует со всеми операторами полупростой группы Ли, обязательно является функцией инвариантных операторов группы* **).

Другими словами, инвариантные операторы образуют наиболее широкий набор операторов, коммутирующих с группой. Это — мощная и полезная теорема. Например, если оператор гамильтониана обладает некоторой симметрией, он коммутирует с соответствующей группой симметрии, и теорема 7 часто используется для того, чтобы показать, что в этом случае H является функцией инвариантов группы. Сферически-симметричный гамильтониан бесспиновой частицы в поле центральных сил коммутирует с группой вращения, и, таким образом, часть гамильтониана, которая действует на угловые координаты частицы (параметры группы вращения), должна быть функцией от L^2 — инварианта группы. В действительности этой функцией оказался сам квадрат оператора L^2. Еще важнее то, что инвариант группы изотопического спина есть T^2. Следовательно, можно сделать вывод, что зарядово-независимый гамильтониан нуклон-нуклонной системы (т. е. системы, которая коммутирует с группой изотопического спина) может зависеть от изоспиновых операторов только как функция от $T^2 = 1/4\,(\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2)^2 = 1/4\,(6 + 2\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2)$. Но поскольку квадрат $\boldsymbol{\tau}$-операторов равен единице, любая функция является линейной функцией, и единственной зарядово-независимой комбинацией оказывается скаляр $\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2$.

Мы закончим раздел перечнем инвариантных операторов для нескольких известных групп симметрии. При этом отметим, что простейшими инвариантными операторами абелевых групп являются сами генераторы, так как, по определению, все они коммутируют с группой и их ровно l.

Все «согласуется» с изложенным выше, за исключением последней группы, которая имеет ранг 3, но только два инварианта. Однако все это правильно, поскольку, как мы видели ранее, группа имеет абелеву подгруппу (трансляций), которая не относится к классу полупростых групп, а теорема Рака́ (5) справедлива только для полупростых групп.

---

*) Под независимостью мы понимаем, что никакие два различных мультиплета группы не имеют одинаковых собственных значений для всех l инвариантов; независимые инварианты достаточны для однозначного обозначения мультиплетов группы. Например, в группе SU_n, хотя C_2 и C_2^2 коммутируют с полной группой, они не являются независимыми инвариантами.

**) Значение этого следующее. Если два оператора, A и B, коммутируют, они имеют общий набор собственных векторов $|i\rangle$ и поэтому могут быть записаны через проекции этих векторов и соответствующих собственных значений a_i и b_i

$$A = \sum_i a_i\,|i\rangle\langle i|,$$

$$B = \sum_i b_i\,|i\rangle\langle i|.$$

Пусть вырождение по a_i (сколько раз оно появляется в сумме) равно α_i и вырождение по b_i равно β_i. Тогда, если $\beta_i \geqslant \alpha_i$ для каждого i, можно думать, что b_i является функцией a_i, т. е. $b_i = f(a_i)$, и в этом смысле B — функция от A, т. е. $B = f(A)$. Это оказывается следствием конкретного выбора a_i, определяющих набор α_i векторов, которые в свою очередь определяют величины b_i, поскольку неравенства $\beta_i \geqslant \alpha_i$ гарантируют то, что эти векторы α_i (и, вероятно, не только эти) все имеют те же самые собственные значения B; b_i определено a_i, поэтому $b_i = f(a_i)$. (Ясно, что обратное утверждение справедливо только при $\alpha_i = \beta_i$ для всех i.)

Мы уже знаем, что любой оператор B, который коммутирует со всей группой, является по крайней мере вырожденным на мультиплетах группы. Но инварианты — это операторы, которые точно вырождены на мультиплетах. Следовательно, конкретный выбор их собственных значений определяет мультиплет и тем самым определяет собственное значение оператора B на мультиплете, что означает, что B есть функция генераторов.

Группа	Генераторы	Ранг	Инварианты
Трансляций	$\mathbf{p}$	3	$\mathbf{p}$
Инверсий	P	1	P
Вращений	$\mathbf{J}$	1	J^2
Вращений и инверсий	$\mathbf{J}, P$ *)	2	J^2, P
Изотопического спина	$\mathbf{T}$	1	T^2
Трансляций и вращений **)	$\mathbf{J}, \mathbf{p}$	3	$\mathbf{p}^2, (\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})$

*) Вследствие того, что $\mathbf{J}$ — псевдовектор, $[P, \mathbf{J}] = 0$, поэтому две подгруппы коммутируют друг с другом и ранги их складываются.

**) Здесь $[\mathbf{p}, \mathbf{J}] \neq 0$. Среди них только 3 из P коммутируют друг с другом, поэтому ранг равен 3. То, что $\mathbf{p}^2$ и $\mathbf{pJ}$ инварианты, не очевидно, но это так (см., например, примечание на стр. 121 — работу Салама).

IV. ГРУППЫ СИММЕТРИИ И ФИЗИКА

Вооружившись изложенным в предыдущих главах аппаратом, обратимся к центральной проблеме в теории групп симметрии: что можно узнать о физической системе только из ее свойств симметрии? Самый полный ответ может быть дан для случая, когда соответствующая группа симметрии гамильтониана является унитарной полупростой группой Ли с n генераторами и l инвариантными операторами ($l < n$), причем все инвариантные операторы выбраны эрмитовыми. В этой счастливой ситуации (а она включает группы симметрии, которые пока и нашли применение в физике), этот аппарат дает четкий ответ:

1. Система будет иметь n сохраняющихся квантовых чисел, определяемых генераторами группы симметрии, l из которых коммутируют друг с другом. (Например, для случая, когда рассматриваемая симметрия — зарядовая независимость, а группа симметрии — группа изотопического спина: T_1, T_2, T_3).

2. Система будет также обладать l в некотором смысле более сохраняющимися квантовыми числами, называемыми инвариантными операторами группы симметрии, причем все они коммутируют друг с другом (и с генераторами). Эти l квантовых чисел однозначно определяют мультиплеты группы, а также их размерности. (Пример: T^2; размерность мультиплета $2T + 1$.)

3. Все члены мультиплета группы симметрии будут иметь одинаковую массу (собственное значение энергии). Для сферически-симметричной, сохраняющей четность системы они будут также иметь одинаковые спин и четность. (Пример: π^+, π^0, π^-.)

4. В действительности вырожденные по энергии собственные состояния системы являются мультиплетом полной группы симметрии; следовательно, l собственных значений инвариантных операторов группы образуют полный набор «хороших квантовых чисел» для обозначения собственных значений энергии системы (связанных состояний или резонансов). (Пример: собственные значения энергии (массы) зарядово-независимой системы можно характеризовать индексом T.)

5. Все реакции, которые вызывают переходы из одного мультиплета системы в другой, запрещены, т. е. рассеяние и другие реакции происходят только внутри данного мультиплета. Фазовые сдвиги одинаковы для всех состояний мультиплета, и, таким образом, могут обозначаться с помощью хороших квантовых чисел мультиплета. (Пример: мультиплеты $T = 1/2$ и $T = 3/2$ системы рассеиваются независимо; их фазовым сдвигам приписывается индекс T, и внутри мультиплета они не зависят от T_3.)

В оставшейся части раздела мы докажем, уточним и расширим эти утверждения. Способ, которым это будет сделано, заключается в таком построении доказательств теорем, чтобы отделить главное от второстепенного, поскольку это удобно отличает точное изложение фактов от аппарата, который используют при их доказательстве.

Чтобы избежать усложнения при использовании сейчас более чем одного свойства симметрии, мы допускаем в этой главе, что рассматриваемая система обладает только симметрией S_α (например, сферической симметрией), которая описывается единственной унитарной полупростой группой Ли (например, группой вращения). Прямое произведение двух и более групп симметрии обсуждается в разделе V.

Теорема А. *Утверждение, что система (или взаимодействие между двумя системами) обладает некоторой симметрией S_α, эквивалентно требованию, что ее гамильтониан коммутирует с каждым оператором соответствующей группы симметрии G_α. Оказывается, что это эквивалентно условию*

$$[H, L_k] = 0 \tag{10}$$

для каждого генератора L_k группы. Следовательно, существование симметрии S_α порождает (эрмитовы) генераторы группы G_α как сохраняющиеся (но в общем случае некоммутирующие) физические величины.

Говорят, что G_α является «группой симметрии гамильтониана» для такой системы.

Доказательство. Если над некоторой системой координат совершается унитарное преобразование U (такое, как вращение осей), то все волновые функции гильбертова пространства преобразуются в $\psi' = U\psi$, и гамильтониан заменяется на $H' = UHU^{-1}$. Если система инвариантна относительно такого преобразования, то ее гамильтониан не изменяется: $H' = H = UHU^{-1}$ или $HU = UH$.

Если $U(\alpha)$ $H = HU(\alpha)$ для всех α, то дифференцирование по α_k и использование уравнения (4) (определение генераторов) дает, что $L_kH = HL_k$. И обратно, если H коммутирует со всеми генераторами, то он коммутирует с любым групповым оператором U, который является функцией генераторов.

Обсуждение. Причина, по которой гамильтониан заслуживает специального рассмотрения, состоит, конечно, в том, что H является генератором однопараметрической группы «сдвигов по времени», операторы которой $v(\tau) = e^{-i\tau H}$. «Повернутый» оператор временнóго развития выражается как $v'(t) = U(\alpha)\, v(t)\, U^{-1}(\alpha)$, так что коммутация группы $\{U(\alpha)\}$ с H означает, что временнóе развитие системы одинаково во всех состояниях, которые различаются только «поворотом» $U(\alpha)$. Если гамильтонов формализм неприменим, то используется замечание во втором примечании на стр. 124.

Например, группа вращений является группой симметрии гамильтониана для любой системы, не подверженной действию внешних сил, т. е. для системы, обладающей сферической симметрией. Физически вполне разумно, что это должно быть эквивалентно условию $[\mathbf{H}, \mathbf{J}] = 0$ (здесь $\mathbf{J}$ — генератор группы), так как инвариантность относительно поворота вокруг каждой из трех осей отдельно обеспечивает инвариантность относительно произвольного вращения.

В таком случае мы сразу же получаем для системы три закона сохранения: сохранение J_1, J_2 и J_3. Отсутствие коммутации операторов означает, что лишь один из них одновременно может быть приведен к диагональному виду (или l в общем случае для группы симметрии ранга l). Действующие одновременно законы сохранения, устанавливаемые генераторами G_α, определяют «линейные квантовые числа» системы (т. е. линейные по числу «частиц» в системе), такие, как J_3, T_3 (заряд) и S (странность); это станет более понятно после обсуждения прямого произведения групп.

Если G_α имеет два генератора и более, то система будет также обладать l нелинейными коммутирующими величинами (которые будут также нелинейными функциями генераторов). Существенно, что они являются наблюдаемыми величинами, которые «объясняют» степень вырождения в энергетическом спектре системы, и совершенно верно дают квантовые числа, необходимые для обозначения энергетических уровней и фазовых сдвигов с помощью свойств симметрии системы. Эти наблюдаемые величины есть l инвариантных операторов (C_2, C_3, . . ., C_{l+1}) группы симметрии (являющихся обобщениями инвариантного оператора J^2 группы вращений), одновременно вырожденные собственные состояния которых образуют мультиплеты. Их физические свойства резюмируются в следующей теореме.

Теорема Б. *Если система обладает симметрией S_α, ее гамильтониан коммутирует с каждым из l эрмитовых инвариантных операторов (C_2, C_3, . . ., C_{l+1}) группы симметрии G_α,*

$$[C_\lambda, H] = 0, \tag{11}$$

так что каждый оператор C_λ является сохраняющейся, физически наблюдаемой величиной. Так как $\{C_\lambda\}$ коммутируют друг с другом, это устанавливает для системы l законов сохранения, выполняющихся одновременно.

Таким образом, l одновременно существующих собственных значений (C_2, C_3, ..., C_{l+1}) инвариантных операторов оказываются «хорошими квантовыми числами» системы, сохраняющимися во всех процессах. Их большая полезность обусловлена также тем, что они однозначно определяют мультиплеты группы G_α. Один из важных выводов заключается в том, что все переходы от одного мультиплета группы G_α к другому абсолютно запрещены, если система обладает симметрией S_α.

Доказательство. Если G_α — группа симметрии гамильтониана, то все генераторы G_α коммутируют с H, так что любая их функция, в частности, C_λ, также будет коммутировать с гамильтонианом. Отсутствие переходов между мультиплетами следует из сохранения $\{C_\lambda\}$ (сохранения J^2 для случая группы вращений), так как по крайней мере одно C_λ должно было бы измениться в таких переходах. Более явно, если мультиплеты $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ различны, а C_λ и $C'_\lambda \neq C_\lambda$ — собственные значения оператора C_λ для этих мультиплетов; тогда

$$0 = \langle C'_\lambda \,|\, C_\lambda H - HC_\lambda \,|\, C_\lambda \rangle \quad (C_\lambda - C'_\lambda)\langle C'_\lambda \,|\, H \,|\, C_\lambda \rangle,$$

откуда

$$\langle C'_\lambda | H | C_\lambda \rangle = 0, \tag{12}$$

т. е. матричные элементы H (и S-матрица, которая является функцией от H) равны нулю между любыми состояниями из разных мультиплетов.

Обсуждение. Очевидно, что собственные значения (C_2, C_3, . . ., C_{l+1}) предназначены для того, чтобы играть ключевую роль. С математической точки зрения, как мы видели в разделе III, они полностью характеризуют существенные симметрии группы G_α, и, таким образом, классифицируют мультиплеты G_α по их симметриям. Важность собственных значений инвариантных операторов в физике теперь становится ясной из того факта, что они автоматически являются хорошими квантовыми числами любой системы, обладающей симметрией S_α, а также из их сохранения, которое объясняет отсутствие переходов между мультиплетами.

Теперь нам остается понять связь самих мультиплетов со связанными энергетическими состояниями системы и с состояниями рассеяния. Эта связь принимает несколько различный вид для состояний с положительной и отрицательной энергией, но оба являются частными случаями очень общего результата, известного как

Лемма Шура *). *Любой оператор, который коммутирует с каждым элементом группы G_α, имеет в качестве собственного вектора каждый вектор мультиплета G_α и является полностью вырожденным в каждом мультиплете.*

Обсуждение. Лемма была доказана в разделе II, B и описывает существенное свойство инвариантных операторов, которое уже использовалось неоднократно. Поскольку и гамильтониан, и S-матрица любой системы, обладающей симметрией S_α, коммутируют со всей группой G_α, мы можем сделать следующие выводы.

Теорема B. *Если система обладает симметрией S_α, то все ее состояния рассеяния, принадлежащие одному и тому же мультиплету группы G_α, имеют одинаковые фазовые сдвиги (или, в более общем случае, одинаковые матричные элементы для многоканального случая).*

Обсуждение. Равенство S-матричных элементов следует непосредственно из леммы Шура, а равенство сдвигов фаз — из того факта, что фазовые сдвиги в любом канале определяются просто как логарифм диагонального элемента S-матрицы в соответствующем канале.

Например, система, состоящая из нуклона (изотопический дублет) и сигма-частицы (изотриплет), имеет волновые функции, которые с помощью инвариантного оператора T^2 могут быть классифицированы по мультиплетам с $T = 1/2$ или $T = 3/2$. Если эти состояния являются состояниями рассеяния, то рассеяние в одном мультиплете будет происходить совершенно независимо от рассеяния в другом, причем между мультиплетами не будет никаких переходов. Индивидуальные состояния внутри самих мультиплетов обозначаются с помощью T_3 — генератора группы. Поскольку генератор тоже коммутирует с S-матрицей, он сохраняется (сохранение заряда), так что каждое T_3-состояние рассеяния не зависит одно от другого. Содержание настоящей теоремы заключается в том, что все четыре зарядовых состояния с $T = 3/2$ имеют одинаковые фазовые сдвиги. То же справедливо и для двух состояний с $T = 1/2$. Следовательно, фазовые сдвиги, так же как и состояния мультиплетов, могут обозначаться собственными значениями оператора T^2 (или l — собственными значениями (C_2, C_3, . . ., C_{l+1}), если ранг группы симметрии равен l). Для связанных состояний мы имеем:

Теорема Г. *Если система обладает симметрией S_α, то все ее связанные состояния (или резонансы), принадлежащие одному и тому же мультиплету группы G_α, имеют одинаковые собственные значения энергии или массы.*

И наоборот, набор вырожденных по энергии собственных состояний, соответствующих одному энергетическому уровню системы, является или одним мультиплетом, или («случайное вырождение») суммой мультиплетов группы G_α; он никогда не может быть частью мультиплета.

За исключением случайного вырождения имеется взаимно однозначное соответствие мультиплетов энергетическим уровням. Таким образом, набор собственных значений (C_2, C_3, . . ., C_{l+1}), который используется для обозначения мультиплетов, является точно тем же набором, который необходим для идентификации энергетических уровней системы; изменение любого из этих квантовых чисел обязательно меняет собственное значение энергии.

Доказательство. Вырождение гамильтониана по любому мультиплету группы симметрии гамильтониана было доказано в разделе II, B и является частным случаем леммы Шура. Если, например, ψ_E — собственное состояние с энергией E, то $U\psi_E$ — другое состояние с той же самой энергией (U — любой элемент группы симметрии C_α), так как $H\,(U\psi_E) = UH\psi_E = E(U\psi_E)$. Следовательно, векторное пространство V_E, образованное всеми собственными векторами ψ_E с одним и тем же собственным

*) В действительности лемма Шура значительно шире, но в данном случае нам нужна лишь эта ее часть.

значением энергии, преобразуется само в себя при любом U из G_α, т. е. оно является инвариантным подпространством G_α и, таким образом, не может быть частью мультиплета (который, по определению, не содержит меньших инвариантных подпространств). Действительно, согласно теореме Петера — Вейля (теорема 3) полупростота группы G_α гарантирует, что V_E или образует один мультиплет, или, в худшем случае, сумму мультиплетов.

Обсуждение. Эта важная теорема непосредственно объясняет наличие вырожденных энергетических уровней как следствие того, какими пространственными симметриями обладает система, а также дает квантовые числа, необходимые для классификации энергетических уровней по их симметриям. Например, любая связанная система, которая инвариантна относительно вращений и отражений, имеет энергетические уровни, обозначаемые через $(j\pi)$ (1^-, $5/2^+$ и т. п.) с $(2j+1)$-кратным вырождением.

Она объясняет также, почему «случайные» вырождения, такие, как два уровня с различным T и одинаковой массой, по существу, являются подозрительными. Это не связано с зарядовой независимостью, хотя случайно это могла бы быть и она. Вырождение также могло бы означать (особенно, если имеются более чем два T-уровня с одинаковыми массами), что существует группа, обладающая более высокой симметрией, чем зарядовая независимость. Такие более широкие группы симметрии обладают мультиплетами, состоящими из двух или более мультиплетов по изотопическому спину. Если в качестве вырожденных мультиплетов рассмотреть Λ, Σ, N и Ξ, то это будет означать, что для сильных взаимодействий существует более широкая группа симметрии, чем SU_2. Это должна быть группа, которая имеет октет и содержит SU_2 как подгруппу; одна из таких групп — группа SU_3.

V. НЕКОТОРЫЕ СИММЕТРИИ. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРУПП И ПОЛНАЯ ГРУППА СИММЕТРИИ

На протяжении раздела IV мы рассматривали существование только одного типа симметрии S_α, описываемого одной группой G_α. Вообще говоря, система может обладать одновременно несколькими различными симметриями, такими как вращательная симметрия, симметрия по отношению к инверсии, зарядовая независимость, сохранение барионов и т. п. Следовательно, возникает вопрос: какими симметриями может обладать система одновременно, и что такое группа, которая описывает все их одновременно (если такая группа вообще существует)?

Простейший подход состоит в том, чтобы, начав с наименьшей группы симметрии гамильтониана, ответить на вопрос, как она может быть расширена на бо́льшую группу, которая, конечно, потребует и большей симметрии системы. Так как рассматриваемые группы являются группами Ли, ответ прямой: группа Ли расширяется путем добавления большего числа генераторов (т. е. большего числа «координат», на которые может действовать группа).

Это добавление может быть сделано двумя различными способами: или все добавленные генераторы коммутируют с инвариантными операторами первоначальной группы или это не так. Если добавленные генераторы не коммутируют, то в общем случае будут отличны от нуля матричные элементы между различными мультиплетами первоначальной группы, т. е. первоначальные мультиплеты не будут инвариантны относительно операторов расширенной группы и, следовательно, два или более из них объединятся в мультиплеты новой группы, тем самым увеличивая вырождение энергетических уровней. Это как раз происходит в том случае, если группа изотопического спина расширяется до группы SU_3. T^2 не коммутирует с добавленными генераторами и, таким образом, не является инвариантным оператором группы SU_3; состояния с различными T могут появиться и на самом деле появляются в одном мультиплете SU_3.

Или же первоначальные инварианты могут коммутировать с добавленными генераторами. В этом случае они остаются инвариантами новой группы, так что их мультиплеты и связанные с ними энергетические уровни остаются различными. Наиболее важным примером такой ситуации оказывается случай, в котором добавленные операторы коммутируют не только с инвариантами группы, но и со всей первоначальной группой G_α. При этом действительно видно, что расширенный набор окажется группой только при условии, что сами добавленные операторы образуют группу G_β. Когда G_β — группа Ли, ее генераторы будут коммутировать с генераторами G_α, так что две группы определяют симметрии, которые совместимы друг с другом (например, вращения совместимы с инверсией, так как $[\mathbf{J}, P] = 0$, но они несовместимы со сдвигами, поскольку $[\mathbf{J}, \mathbf{P}] \neq 0$; собственные состояния с определенным импульсом, вообще говоря, не будут собственными состояниями с определенным угловым моментом).

В этом случае можно построить расширенную группу, которая обладает одновременно свойствами симметрии G_α и G_β. Такая группа называется прямым произведением групп $G_\alpha \otimes G_\beta$, и ее элементы состоят из всех возможных произведений

$U(\boldsymbol{\alpha})\,V(\boldsymbol{\beta})$ элементов этих групп *), причем она содержит G_α (в виде $U(\boldsymbol{\alpha})\,V(0)$, где $V(0)$ — единичный оператор для G_β) и G_β как подгруппы. Каждый элемент группы $G_\alpha \otimes G_\beta$ *определяется двойным набором параметров* $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, *и ее генераторами являются*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} U(\boldsymbol{\alpha})\,V(\boldsymbol{\beta})\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=0,\,\boldsymbol{\beta}=0}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_i} U(\boldsymbol{\alpha})\,V(0)\Big|_{\boldsymbol{\alpha}=0}$$

и аналогично для β_i, которые образуют точно такой же полный набор генераторов G_α и G_β, взятых вместе. Аналогично, поскольку оба набора коммутируют друг с другом, полный набор взаимно коммутирующих операторов для прямого произведения групп состоит из взятых вместе соответствующих наборов для групп G_α и G_β. Итак, мы приходим к важному выводу: ранг группы $G_\alpha \otimes G_\beta$ равен сумме рангов сомножителей. Теперь G_α имеет l_α инвариантов и G_β — l_β других инвариантов. Каждый набор коммутирует со всей группой; всего их имеется $(l_\alpha + l_\beta)$ и скоро станет понятно, что они однозначно классифицируют мультиплеты произведения групп, что приводит к заключению: инвариантные операторы группы G_α вместе с инвариантными операторами группы G_β дают полный набор инвариантов для $G_\alpha \otimes G_\beta$.

Волновые функции $\psi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, на которые действует $G_\alpha \otimes G_\beta$, могут быть разложены с помощью соответствующих функций $\psi(\boldsymbol{\alpha})$ и $\varphi(\boldsymbol{\beta})$ для групп G_α и G_β:

$$\psi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad \sum\sum a_{mn}\psi_m(\boldsymbol{\alpha})\,\varphi_n(\boldsymbol{\beta}).$$

Таким образом, группа прямого произведения действует в пространстве произведения волновых функций. Поэтому естественно ввести понятие произведения двух мультиплетов. Пусть дан m_1-кратный мультиплет $\mathfrak{M}_1(\boldsymbol{\alpha})$ группы G_α с ортогональным базисом $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{m_1})$ и m_2-кратный мультиплет $\mathfrak{M}_2(\boldsymbol{\beta})$ группы G_β (произведения мультиплетов одной и той же группы мы рассматриваем в следующем разделе) с ортогональным базисом $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m_2})$.

Образуем набор из $m_1 m_2$ векторов произведения $\psi_i\varphi_j$. Все они будут ортогональны друг другу, так что набор их всевозможных линейных комбинаций образует $m_1 m_2$-мерное векторное пространство, которое называется произведением $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$ двух мультиплетов. Так как $\mathfrak{M}_1$ инвариантно относительно G_α, а $\mathfrak{M}_2$ — относительно G_β, то $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$ инвариантно относительно группы $G_\alpha \otimes G_\beta$, т. е. является инвариантным подпространством группы прямого произведения. Отсюда следует, что прямое произведение мультиплетов есть мультиплет этой группы. Этот факт, так же как и другие вопросы, касающиеся структуры мультиплетов группы прямого произведения, устанавливается следующей теоремой.

Теорема 8[3]. *Произведение* $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$ *мультиплетов любых двух коммутирующих группы* G_α *и* G_β *является мультиплетом группы* $G_\alpha \otimes G_\beta$ *размерности* $m_1 m_2$. *Все мультиплеты группы прямого произведения могут быть построены этим способом и определяются при помощи всех взятых вместе инвариантов групп* G_α *и* G_β.

Эта теорема есть не что иное, как формальное утверждение очень знакомой ситуации. Например, сильные взаимодействия обладают свойством зарядовой независимости, т. е. они коммутируют с группой изотопического спина. Они, конечно, коммутируют и с группой вращений, а так как обе эти группы коммутируют друг с другом, мы можем сразу описывать оба свойства симметрии, потребовав, чтобы прямое произведение двух групп коммутировало с сильными взаимодействиями. Это значит (если мы пренебрегаем любыми другими симметриями), что физические состояния будут сгруппированы в вырожденные по массе мультиплеты этой (ранга 2) группы прямого произведения, которая определяется ее двумя инвариантами T^2 и J^2. Например, два ее 6-плета есть мультиплеты, определенные как $(T = 1,\ j = 1/2)$ и $(T = 1/2,\ j = 1)$, т. е. *произведение изотопического триплета на спиновый дублет* и наоборот. Примером первого из них служит Σ-гиперон (три зарядовых состояния и два спиновых), а второго — $K^*(885\ Мэв)$-мезон (два зарядовых состояния, три спиновых состояния). Отметим, что увеличение изоспиновой группы до группы (изоспин) $\times$ (вращение) не делает различные T-мультиплеты вырожденными из-за коммутативности двух групп. Когда или G_α, или G_β оказываются абелевой группой (т. е. все элементы одной из них коммутируют друг с другом подобно одномерной группе вращений), *мы получаем важный частный случай*, так как имеется *хорошо* известная теорема **), что все мультиплеты абелевой группы являются синглетами. Тогда, поскольку произведение синглета и, скажем, триплета снова дает триплет, мы приходим к выводу, что всякий раз, когда G_α оказывается абелевой группой

*) В действительности прямое произведение любых двух коммутирующих групп может быть образовано таким путем, независимо от того, являются ли они группами Ли или нет. Этот факт мы будем использовать ниже.

**) См., например, работу M. Hamermesh'a «Group Theory and its Applications to Physical Problems», Addison — Wesley, Reading, Mass., 1962.

и коммутирует с G_β, мультиплеты $G_\alpha \otimes G_\beta$ по размерам идентичны мультиплетам группы G_β. Вообще говоря, они не будут тождественными с мультиплетами G_β, так как в дополнение к инвариантным операторам G_β мультиплеты будут также классифицироваться при помощи инвариантного оператора группы G_α *). В данном случае расширение группы симметрии с G_β до $G_\beta \otimes G_\alpha$ не привело к увеличению размеров мультиплетов, а только добавило квантовое число для их обозначения.

Лучшим примером этого служит группа инверсии, так как она состоит только из P и I и, таким образом, является, конечно, абелевой. Если, например, сильные взаимодействия описывались бы только инвариантами вращения, то энергетические уровни ядер классифицировались бы только по j и были бы $(2j+1)$-кратно вырождены, но состояния не были бы собственными состояниями оператора четности (например, дейтрон имел бы состояние с $J=1$, состоящее из S-, P- и D-волны). Требование инвариантности относительно инверсии также добавляет четность вырожденных состояний для обозначения каждого энергетического уровня и, таким образом, порождает два уровня (противоположной четности) там, где ранее был один, но каждый из них еще остается $(2j+1)$-кратно вырожденным.

Точно таким же образом группа градиентных преобразований, соответствующая, например, сохранению барионов, является не только группой Ли, но и абелевой группой, так что добавление сохранения барионов к группе симметрии любой системы добавляет квантовые числа для каждого состояния и энергетического уровня, но не меняет размеров мультиплетов группы.

Резюмируя, можно сказать, что энергетические уровни и фазовые сдвиги любой системы обозначаются с помощью ее хороших квантовых чисел, которые являются собственными значениями инвариантных операторов всех коммутирующих групп симметрии системы. Наиболее кратко это формулируется в утверждении, что система инвариантна относительно ее полной группы симметрии, которая просто является прямым произведением всех этих отдельных групп. Ранг полной группы симметрии равен сумме рангов сомножителей, а ее инвариантные операторы как раз определяют все хорошие квантовые числа, которые обозначают энергетические уровни системы так же, как и соответствующие наборы вырожденных собственных состояний системы. Последние и образуют мультиплеты полной группы симметрии.

В настоящее время хорошо установлено, что полная группа симметрии сильных взаимодействий по крайней мере так же велика, как прямое произведение групп: (вращения) $\otimes$ (инверсия) $\otimes$ (градиентные преобразования барионов) $\otimes$ (сохранение странности) $\otimes$ (изотопический спин), которые коммутируют друг с другом и связаны соответственно с сохранением J^2, четности, барионного числа, странности и T^2.

VI. СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ: ПРОИЗВЕДЕНИЯ МУЛЬТИПЛЕТОВ

Обсуждение в разделе V одновременно двух различных групп симметрии, естественно, привело нас к тому, чтобы рассмотреть и произведения их мультиплетов $\mathfrak{M}_1(\boldsymbol{\alpha}) \otimes \mathfrak{M}_2(\boldsymbol{\beta})$.

В физике для построения «сложных» систем из «элементарных» объектов не менее важны и произведения мультиплетов той же самой группы. Простейший пример — атом водорода состоит из двух $S_{1/2}$-электронов, волновая функция которых в основном состоянии имеет вид $\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)\,\varphi(r_{12})$, т. е. сумма произведений состояний двух различных дублетов той же самой группы (вращений). Это состояние — синглет этой группы. Таким же образом можно видеть, что основное состояние дейтона, состоящее из нейтрона со спином 1/2 и протона со спином 1/2, будучи произведением двух ротационных дублетов, оказывается ротационным триплетом, и в то же время это состояние будет изоспиновым мультиплетом (синглетом в данном случае), построенным из изоспиновых дублетов. Подобное рассмотрение вследствие важности изоспиновой группы в понимании ядерных уровней может быть использовано для всех других ядер.

Чтобы пояснить мысль, мы снова в качестве примера обратимся к группе вращения и вспомним, что $e^{i\alpha J_3}$ является оператором, который изменяет азимутальный угол φ любой пространственной функции на величину α. В частности, такой функцией будет произведение $f(\varphi)\,g(\varphi)$ и

$$e^{i\alpha J_3} f(\varphi)\,g(\varphi) = f(\varphi+\alpha)\,g(\varphi+\alpha),$$

т. е. мы можем записать

$$e^{i\alpha J_3}[f(\varphi)\,g(\varphi)] = [e^{i\alpha J_3} f(\varphi)]\,[e^{i\alpha J_3} g(\varphi)].$$

---

*) Абелева группа имеет лишь один инвариантный оператор.

Очевидно, это справедливо также для поворотов вокруг произвольной оси, в частности,

$$e^{i\boldsymbol{\theta}\mathbf{J}}\,[Y_{l_1m_1}(\theta,\varphi)\,Y_{l_2m_2}(\theta,\varphi)] = [e^{i\boldsymbol{\theta}\mathbf{J}}Y_{l_1m_1}(\theta,\varphi)]\,[e^{i\boldsymbol{\theta}\mathbf{J}}Y_{l_2m_2}(\theta,\varphi)].$$

Однако каждая из этих функций — член мультиплета группы вращения; таким образом, оператор поворота, действуя на нее, должен давать другое состояние в том же мультиплете. Следовательно, если мы припишем ротационным мультиплетам индекс l и рассмотрим произведение $\mathfrak{M}_{l1}\otimes\mathfrak{M}_{l_2}$ двух мультиплетов группы вращения (как это было определено в предыдущей главе), то полученный результат говорит нам, что оператор поворота, действуя на любой элемент произведения, дает другой элемент произведения, т. е. $\mathfrak{M}_{l_1}\otimes\mathfrak{M}_{l_2}$ является инвариантным подпространством (размерности $(2l_1+1)\,(2l_2+1)$) группы вращения. Это произведение отличается от произведения мультиплетов двух различных и коммутирующих групп тем, что, вообще говоря, мы имеем не единственный мультиплет группы вращения, т. е. он содержит меньшие инвариантные пространства. Однако, так как группа вращения является полупростой группой Ли, теорема Петера — Вейля гарантирует, что произведение $\mathfrak{M}_{l_1}\otimes\mathfrak{M}_{l_2}$, которое является конечномерным инвариантным пространством этой группы, возможно разложить на неперекрывающиеся мультиплеты, например, как обычно, дублет $\otimes$ дублет $=$ синглет $\oplus$ триплет и т. д. Конечно, здесь мы имеем векторное сложение углового момента, и в общем случае имеет место теорема *):

$$\mathfrak{M}_{l_1}\otimes\mathfrak{M}_{l_2}=\mathfrak{M}_{|l_1-l_2|}\oplus\mathfrak{M}_{|l_1-l_2|+1}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{M}_{l_1+l_2}. \tag{13}$$

Она утверждает, что пространство размерности $(2l_1+1)\,(2l_2+1)$, содержащее все произведения $\mathfrak{M}_{l_1}$ и $\mathfrak{M}_{l_2}$, может быть представлено только теми мультиплетами, которые стоят справа. Точно такое же утверждение имеет место для мультиплетов любой полупростой группы Ли, но точная форма разложения должна быть разработана отдельно (из коммутационных соотношений генераторов) для каждой группы. Тот факт, что каждый мультиплет справа в уравнении (13) появляется только один раз, есть особенность группы вращения. В SU_3, например, $8\otimes 8 = 27\oplus 10\oplus\overline{10}\oplus 8\oplus\bar{8}\oplus 1$, где для простоты мультиплеты идентифицированы только по размерности, а не по инвариантам группы.

Более точно, символическое разложение (13) мультиплетов подразумевает также существование разложений Клебша — Гордана (конечно, как для полуцелых, так и для целых угловых моментов)

$$Y_{l_1m_1}(\theta,\varphi)\,Y_{l_2m_2}(\theta,\varphi)=\sum_{L=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2}\;\sum_{M=-L}^{L}C^{l_1l_2L}_{m_1m_2M}Y_{LM}(\theta,\varphi), \tag{14}$$

где коэффициенты разложения справа называются коэффициентами Клебша — Гордана. Они равны нулю, если $M\neq m_1+m_2$, поэтому суммирование производится только по L, причем из каждого мультиплета вносит вклад только один член. Кроме того, такие ряды должны существовать для каждой группы, поскольку коэффициенты Клебша — Гордана определены в основном структурными константами.

Обычно бо́льший интерес представляет произведение мультиплетов двух различных «представлений» т о й ж е группы, например, сложение спина и орбитального углового момента или сложение угловых моментов двух различных частиц.

Несколько обобщим изложенные ранее идеи. Рассмотрим для определенности два «представления» группы вращения, соответствующие двум бесспиновым частицам: набор операторов $e^{i\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{J}_1}$ и набор $e^{i\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{J}_2}$, где $\mathbf{J}_1$ — оператор углового момента, действующий на пространственные координаты частицы 1, $\mathbf{J}_2$ — то же для частицы 2; $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$ — соответствующие углы поворота этих координат. Если мы назовем первый набор группой вращения $\mathfrak{R}_3(1)$ и второй набор — группой вращения $\mathfrak{R}_3(2)$, тогда, в соответствии с прямым произведением $\mathfrak{M}_{l_1}(1)\otimes\mathfrak{M}_{l_2}(2)$, казалось бы, имеет смысл рассмотреть прямое произведение $\mathfrak{R}_3(1)\otimes\mathfrak{R}_3(2)$, состоящее из операторов $e^{i(\alpha_1\mathbf{J}_1+\alpha_2\mathbf{J}_2)}$ (так как $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$ коммутируют). Однако ясно, что это слишком большая группа для обычных физических приложений. Это 6-параметрическая группа Ли (и поэтому, конечно, не группа вращений), которая обладает весьма неприятным свойством — вращает координаты двух частиц н е з а в и с и м о, т. е. изменяет их на различные величины $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$.

Даже если гамильтониан системы содержит член взаимодействия V_{12}, который вызывает момент вращения, скажем, частицы 1 и, таким образом, препятствует

*) См. книги: Г. Ю. Л ю б а р с к и й, «Теория групп и ее применение в физике», М., Физматгиз, 1958; M. H a m e r m e s h, «Group Theory and its Applications to Physical Problems» (Addison — Wesley, 1962).

инвариантности гамильтониана только относительно вращений вокруг $\mathbf{r}_1$, даже в этом случае отсутствие внешнего момента вращения, действующего на систему двух частиц, приводит к тому, что ее гамильтониан должен быть инвариантным относительно совместного вращения двух частиц (т. е. взаимодействие должно быть центральным $V(|\mathbf{r}_{12}|)$).

Группа симметрии гамильтониана — это не группа $\mathfrak{R}_3(1) \otimes \mathfrak{R}_3(2)$ (исключая невзаимодействующие частицы), а лишь такая ее подгруппа, которая, будучи группой вращения, действует на координаты $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ совместно. Отсюда ясно, что это только такие операторы $e^{i\alpha(\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2)}$, для которых $\alpha_1 = \alpha_2$. Они образуют 3-параметрическую группу Ли с генераторами $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ и, кроме того, $\mathbf{J}_1$ и $\mathbf{J}_2$ каждый в отдельности удовлетворяют группе вращений или коммутационным соотношениям для углового момента — уравнение (7) и $[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] = 0$. Отсюда следует, что $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ также удовлетворяют уравнению (7), т. е. являются операторами углового момента (действующими на $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$) и поэтому образуют как раз требуемую группу одновременного вращения $\mathfrak{R}_3(1, 2)$. Простейшее описание «сложения» угловых моментов двух частиц на этом языке получается рассмотрением $\mathfrak{M}_{l_1}(1)$ как мультиплета группы $\mathfrak{R}_3(1, 2)$ (который удовлетворяет условию $e^{i\alpha\mathbf{J}_2} = 1$ для состояний, зависящих лишь от $\mathbf{r}_1$); аналогичное утверждение справедливо для $\mathfrak{M}_{l_2}(2)$. Тогда разложение прямого произведения может быть записано в виде прямой (векторной) суммы мультиплетов той же самой группы, как и в уравнении (13):

$$\mathfrak{M}_{l_1}(1) \otimes \mathfrak{M}_{l_2}(2) = \mathfrak{M}_{|l_1-l_2|}(1, 2) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_{l_1+l_2}(1, 2). \tag{15}$$

Мультиплеты $\mathfrak{M}_L(1,2)$ содержат члены, полученные из $\mathfrak{M}_{l_1}(1)$ и $\mathfrak{M}_{l_2}(2)$ путем обращения разложения Клебша — Гордана (14):

$$\mathfrak{Y}_{LM}^{l_1 l_2}(\hat{r}_1, \hat{r}_2) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} C_{m_1 m_2 M}^{l_1 l_2 L} Y_{l_1 m_1}(\hat{r}_1) Y_{l_2 m_2}(\hat{r}_2). \tag{16}$$

В этом способе состояния «сложной частицы» $\mathfrak{Y}_{LM}^{l_1 l_2}(1, 2)$ строятся из состояний «элементарных частиц» таким образом, что первые являются собственными состояниями инвариантов группы, с которых мы начинали, и поэтому образуют мультиплеты (состояния, вырожденные по массе) этой группы *). Большая сила этого метода следует из уверенности в том, что сложные состояния дают правильную угловую зависимость волновых функций сложной системы без детального рассмотрения взаимодействия между частицами, допуская лишь, что система инвариантна относительно вращения (например, центральная симметрия в случае бесспиновых частиц) и что (l_1, l_2) является единственной «конфигурацией», представленной в истинной функции. В самом неблагоприятном случае функция для смеси конфигураций будет иметь вид

$$\Psi_{LM}(1, 2) = \sum_{l_1} \sum_{l_2} a_{l_1 l_2} f_{l_1}(r_1) f_{l_2}(r_2) \mathfrak{Y}_{LM}^{l_1 l_2}(\hat{r}_1, \hat{r}_2). \tag{17}$$

В этом смысле основное состояние атома гелия является ротационным синглетом построенным из двух ротационных дублетов, т. е. синглетной частью прямого произведения $\mathfrak{M}_{1/2}(1) \otimes \mathfrak{M}_{1/2}(2) = \mathfrak{M}_0(1, 2) \oplus \mathfrak{M}_1(1, 2)$. Процесс, конечно, может быть продолжен, и тогда литий образуется из $\mathfrak{M}_{1/2} \otimes \mathfrak{M}_{1/2} \otimes \mathfrak{M}_{1/2}$ и так далее вдоль периодической системы. Точно тем же путем ядра строятся из Z протонов и N нейтронов, т. е. из $A = Z + N$ изотопических дублетов; так, основное состояние дейтона будет синглетной по изотопическому спину частью прямого произведения $\mathfrak{M}_{1/2} \otimes \mathfrak{M}_{1/2}$, а его (виртуальное) возбужденное спин-синглетное «состояние» будет триплетной частью того же произведения и т. д.

Наконец, отметим важность теоремы Вигнера — Эккарта. Для группы вращения ее простейшая форма получается из разложения Клебша — Гордана:

$$Y_{LM} | jm\rangle = \sum_{j'} \sum_{m'} C_{mMm'}^{jLj'} \mathfrak{Y}_{j'm'}^{jL},$$

проекция которого на состояние $|j'm'\rangle$ принимает вид

$$\langle j'm' | Y_{LM} | jm\rangle = C_{mMm'}^{jLj'} \langle j'm' | \mathfrak{Y}_{j'm'}^{jL}\rangle. \tag{18}$$

---

*) Заметим, что функции $\mathfrak{Y}_{LM}^{l_1 l_2}$ содержат в качестве индексов инварианты l_1 и l_2 компонент и инвариант L результата. Это означает, что мультиплеты $\mathfrak{M}_L(1, 2)$ должны действительно обозначаться как $\mathfrak{M}_L^{l_1 l_2}(1, 2)$, так что в общем случае для данного L будет много $\mathfrak{M}_L(1, 2)$ с одинаковыми свойствами по отношению к вращению, но отличающихся другими свойствами. P-состояние, построенное из частиц в s- и p-состояниях, существенно отличается от P-состояния, построенного из частиц в d- и f-состояниях. На языке оболочечной модели эти два P-состояния принадлежат различным конфигурациям.

Но и $|j'm'\rangle$, и $\mathfrak{Y}^{jL}_{j'm'}$ оба являются базисными состояниями $(2j+1)$-мерного мультиплета группы вращений и оба обладают одинаковыми трансформационными свойствами относительно вращений. Записав $\langle j'm' | \mathfrak{Y}^{jL}_{j'm'} \rangle = \langle j'm' | 1 | \mathfrak{Y}^{jL}_{j'm'} \rangle$, мы получили диагональный матричный элемент оператора, который коммутирует со всей группой и по лемме Шура не зависит от m'. Он может зависеть только от j', L и j и в общем случае записывается в виде $(j' \| Y_L \| j)$, где $(j' \| Y_L \| j)$ называют *приведенным матричным элементом*.

Свойства функции Y_{LM} относительно вращения — единственные свойства, которые были необходимы для получения этого результата. Поэтому любой набор $(2L+1)$ «объектов» $\{T_{LM}\}$ (функций, операторов и т. д.), называемых *сферическими тензорами*, который преобразуется относительно вращений таким же образом, как Y_{LM}, должен удовлетворять уравнению

$$\langle j'm' | T_{LM} | jm \rangle = C^{jLj'}_{mMm'} (j' \| T_L \| j). \tag{19}$$

Это и есть теорема Вигнера — Эккарта для группы вращений. Ее важность заключается в том, что вся зависимость матричного элемента от квантового числа m дана коэффициентом Клебша — Гордана. Приведенный матричный элемент зависит от квантовых чисел инвариантного оператора j и j', которыми различаются мультиплеты, а также от любых других (не обусловленных вращением) квантовых чисел, которыми может обладать набор T_{LM}.

Аналогичный результат имеет место для любой группы, которая допускает разложение Клебша — Гордана с очевидными изменениями:

а) приведенный матричный элемент должен быть определен всеми инвариантными операторами группы и

б) может быть более одного приведенного матричного элемента, поскольку появление каждого мультиплета $\mathfrak{M}_L$ только один раз в разложении произведения мультиплетов на сумму (уравнение (13)) является специфическим для группы вращения. Примером, подтверждающим пункт б), может служить «массовая формула» для SU_3-октета, которая содержит два приведенных матричных элемента.

VII. НЕГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ СИММЕТРИИ: ИЗОСПИН, SU_3 И ВЫСШИЕ СИММЕТРИИ

Группы вращения, пространственных сдвигов, временных трансляций, отражений во времени, отражений в пространстве и группа Лоренца являются геометрическими группами симметрии. Недавно Вигнер [4] подробно описал различие между этими группами, действующими на геометрические координаты, и физически (но не математически) несколько иными «динамическими» группами, такими как группы *изотопического спина* и SU_3. Такие группы свойственны определенному классу взаимодействий и действуют на дискретные квантовые числа, такие, как заряд или странность, а не на непрерывные геометрически подобные координаты. Краткий обзор характерных особенностей негеометрических групп кажется необходимым, поскольку в настоящее время они занимают центральное место. Перейдем непосредственно к описанию их физической природы и значения, поскольку их математическая структура полностью рассмотрена в текущей литературе.

А. Группа изотопического спина: заряд и его операторы

J_3, J_+ и J_- — генераторы группы вращений. В духе всего предыдущего обсуждения можно рассматривать их как операторы, действующие на непрерывные координаты θ и φ. С другой стороны, однако, на них разумно смотреть как на операторы, действующие на дискретное квантовое число m — третью компоненту углового момента. Его определяет эрмитовый оператор J_3, а операторы J_+ и J_- «увеличивают» или «уменьшают» *это квантовое число. В такой интерпретации группа вращений* становится определенным набором унитарных операторов $e^{i\boldsymbol{\theta}\mathbf{J}}$, которые действуют на собственные состояния оператора J_3. С этой точки зрения физический смысл группы в действительности становится довольно неясным, и ее основная полезность, кажется, ограничивается определением мультиплетов и разложений их произведений, т. е. рядами Клебша — Гордана.

Однако именно поэтому мы хотим рассмотреть группу изотопического спина не как набор операторов $e^{i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{T}}$, выполняющих «вращение в зарядовом пространстве», а как группу, образуемую определенными, физически наблюдаемыми операциями над зарядами частиц, группу, которая служит прежде всего для того, чтобы определить свойства сложных заряженных систем и доказать необходимость коэффициентов Клебша — Гордана для их построения.

Структура группы может быть введена различными путями: например, полным постулированием ее или утверждением, что это есть простая группа Ли ранга единица (имеется только одна такая группа). Чтобы сделать разумные предположения о структуре группы, более приятным был бы подход, который определил бы столько ее мультиплетов, сколько их возможно наблюдать экспериментально, и использовал бы тот факт, что в определенном приближении мультиплеты являются характеристиками группы, которая определяет их. Конечно, любая подающая надежды группа должна быть подвергнута окончательной проверке, чтобы выяснить, может ли она дать правильные мультиплеты, но так как изоспиновая группа достаточно проста, мы чувствуем, что следует подчеркнуть в некотором смысле более прямой путь от экспериментальных данных по семействам заряженных частиц к группе, которая определяет структуру их мультиплетов.

Изоспиновая группа начинается с утверждения, что заряд существует как измеримая квантованная наблюдаемая величина, так что должен быть эрмитов оператор Q, который описывает его. Оператор Q имеет (нормированные) собственные состояния и собственные значения, которые мы записываем как

$$Q\,|\,m\rangle = m\,|\,m\rangle. \tag{20}$$

Далее из эксперимента следует, что он абсолютно сохраняется

$$[Q,\,H] = 0. \tag{21}$$

Соотношение (21) должно быть справедливо для любого допустимого гамильтониана.

Поскольку некоторые частицы имеют более чем одно зарядовое состояние (как это следует из процессов β-распада и реакций перезарядки), то имеется ясная и настоятельная потребность в формализме для операторов, которые увеличивают и уменьшают заряд (не менее чем на единицу для согласия с наблюдаемыми частицами). Если рассматриваемая частица обладает более высоким зарядовым состоянием, чем $|\,m\rangle$, то определим

$$Q_+\,|\,m\rangle - \lambda_m\,|\,m+1\rangle, \tag{22}$$

где λ_m — число, для которого

$$[Q, Q_+]\,|\,m\rangle = [(m+1)\,\lambda_m - \lambda_m m]\,|\,m+1\rangle = \lambda_m\,|\,m+1\rangle = Q_+\,|\,m\rangle. \tag{23}$$

Если $|\,m\rangle$ — наивысшее зарядовое состояние, мы определим $Q_+\,|\,m\rangle = 0$, так что уравнение (21) имеет смысл для всех состояний и является операторным тождеством. Проделав то же самое для оператора Q_-, получим в результате

$$[Q,\,Q_\pm] = \pm\,Q_\pm, \tag{24}$$

что представляет лишь определение операторов $Q_\pm$. Так как это как раз форма коммутационных соотношений между генераторами группы Ли, разумно предположить, что операторы Q могут образовать такую группу. Однако без дальнейших ограничений она не может быть очень полезной, поскольку уравнение (22) просто утверждает, что заряд может возрастать и уменьшаться без ограничения (группа трансляций на решетке), и мультиплеты группы могут быть бесконечномерные.

Отсутствующее звено в логическом обосновании—коммутатор $[Q_+,\,Q_-]$. Из уравнения (22) легко видеть, что $[[Q_+,\,Q_-],\,Q] = 0$, т. е. $[Q_+,\,Q_-]$ есть оператор с теми же собственными состояниями, как для Q; символически это может быть записано в виде

$$[Q_+,\,Q_-] = f\,(Q). \tag{25}$$

Чтобы определить вид функции от Q (подчиненной условию, что ее след равен нулю), требуется бо́льшая информация о природе заряженных систем.

Поскольку различные ограничения приводят к одному и тому же результату *), не ясно, необходима ли точная информация. Обычно используемая информация, которая является очевидной в приложениях ядерной физики и, кажется, вводится в употребление также и в расширенных группах, заключается в определении элементарных «зарядовых строительных блоков», из которых должны быть построены все сложные заряженные системы. В теории групп под этим термином понимают установление **фундаментального мультиплета** группы, из которого умножением могут быть получены все другие мультиплеты.

---

*) Доктор С. Эпштейн любезно указал, например, что разумным условием является требование того, чтобы операторы Q, Q_+, Q_- сложной системы выражались через операторы заряда их компонент линейным образом $Q = \Sigma Q\,(i)$ и $Q_\pm = \Sigma Q_\pm\,(i)$, поскольку для операторов углового момента сложной системы имеет место равенство $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$. Вместе с дополнительным требованием, чтобы операторы сложной системы удовлетворяли уравнениям (24) и (25), это определяет $f\,(Q)$ как линейную функцию.

В случае ядерной физики мы, к счастью, знаем, что все ядра построены из нейтронов и протонов, т. е. из зарядовых дублетов. Подобное же заключение о структуре любой «элементарной» частицы далеко не столь прозрачно. Нам известно, что существуют зарядовые мультиплеты (Σ^+, Σ^0, Σ^-, K^+, K^0, ρ^+, ρ^0, ρ^- и т. д.), которые эмпирически комбинируются друг с другом путем тех же самых коэффициентов Клебша — Гордана, которые описывают и ядерные зарядовые состояния. Это приводит к важному указанию на то, что в обоих случаях действует одна группа симметрии, и следовательно, ко многим попыткам понять применимость изоспиновой группы для построения заряженных мультиплетов элементарных частиц из зарядовых дублетов (например, в ее простейшем варианте π^{+0-}мезон является триплетной частью $N \otimes \bar{N}$ и т. д.).

Тогда возникает вопрос: является ли требование, что зарядовая группа обладает мультиплетом размерности два, тождественным определению коммутатора уравнения (23) и определяет ли оно группу единственным образом? Ответ положителен и следует непосредственно из известных свойств двухмерного представления группы (матриц оператора Q, относящихся к дублетным состояниям). Используя для базиса пространства два заряженных состояния, запишем Q в диагональной форме:

$$Q = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где m_1, m_2 — собственные значения зарядов этих состояний. Из уравнения (20)

$$Q_+ = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{27a}$$

и, аналогично,

$$Q_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda' & 0 \end{pmatrix}. \tag{27b}$$

Следовательно,

$$Q_+Q_- = \lambda\lambda'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\lambda\lambda'}{m_1 - m_2}(Q - m_2E), \quad Q_-Q_+ = \lambda\lambda'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\lambda\lambda'}{m_2 - m_1}(Q - m_1E). \tag{28}$$

Уравнение (22) однородно по $Q_\pm$ и поэтому не изменяется при перенормировке этих операторов. Наиболее просто взять $\lambda\lambda' = 1$, что дает

$$[Q_+, Q_-] = \frac{2}{m_1 - m_2}\left(Q - \frac{m_1 + m_2}{2}\cdot E\right),$$

но основное уравнение (20) справедливо только в том случае, если $(m_1 - m_2) = \pm 1$, и мы выбираем $+1$, так что

$$[Q_+, Q_-] = 2\left(Q - \frac{m_1 + m_2}{2}\cdot E\right), \tag{29}$$

что и требовалось доказать. Рассматривая Q, Q_+ и Q_- как непосредственно наблюдаемые операторы заряда, видим, что определение $Q_\pm$ и требование, чтобы все заряженные системы строились из зарядовых дублетов, заключено в уравнениях (22) и (27), которые показывают, что эти операторы замкнуты при коммутации. Это означает, что они (без помощи любых других операторов) автоматически порождают группу Ли («вращений в зарядовом пространстве»), группу изотопического спина, которая, конечно, имеет ранг 1. Небольшое изменение в определении приводит к генераторам со следом, равным нулю для любого мультиплета группы, и поэтому имеется только одна такая группа (SU_2, группа вращений). Изоспиновая группа должна быть изоморфна ей. Дублет является фундаментальным мультиплетом SU_2, поэтому мультиплеты, полученные из произведений зарядового дублета самого на себя, как раз и будут всеми мультиплетами SU_2: один синглет, один дублет, один триплет и т. д. *).

*) Кстати заметим, что требование к группе, чтобы последняя обладала, например, триплетом, не было бы эквивалентно утверждению, что имеется коммутатор, линейный по Q, аналогичный (27). Действительно, в 3-мерном представлении было бы правильным, чтобы оператор Q_+ имел вид

$$Q_+ = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $Q_- = Q_+^\dagger$, поэтому

$$[Q_+, Q_-] = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |b|^2 - |a|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |b|^2 \end{pmatrix}.$$

Легко установить, что этот коммутатор не может быть равен $C_1Q + C_2\cdot 1$, если не

Чтобы перейти к более обычным обозначениям, заметим, что для античастиц дублета в уравнении (29) следует изменить только $(m_1 + m_2) \to -(m_1 + m_2)$. Если ввести гиперзаряд $Y = S + B$, который равен для античастиц $\overline{Y} = -Y$, то уравнение (29) может быть записано для $Y = 1$ дублета в виде

$$[Q_+, Q_-] = 2\left[Q - (m_1 + m_2)\frac{Y}{2}\cdot E\right], \tag{30}$$

которое мы приводим к обычным обозначениям для изоспина, замечая, что уравнение (22) не изменяется, если добавить к Q постоянную величину:

$$T_\pm = Q_\pm, \quad T_3 = Q - (m_1 + m_2)\frac{Y}{2}. \tag{31}$$

Тогда

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm, \quad [T_+, T_-] = 2T_3. \tag{32}$$

Изоморфизм с группой вращения очевиден из сравнения с уравнением (7) (обычно дублет имеет заряды 1 и 0, так что $T_3 = Q - \frac{1}{2}Y$).

Этот изоморфизм отвечает на все дальнейшие вопросы о группе: T_3 единственным образом обозначает базисные состояния внутри мультиплета: $T^2 = \frac{1}{2}(T_+ T_- + T_- T_+) + T_3^2$ есть инвариантный оператор, который служит для обозначения самих мультиплетов; размерность мультиплетов $(2T + 1)$; коэффициенты Клебша — Гордана будут теми же самыми, как для группы вращения.

Сложные зарядовые состояния (ядра, «элементарные» частицы) строятся умножением дублета самого на себя с использованием тех же методов, которые были развиты в разделе VI для группы вращения. Это диктуется соотношениями $\mathbf{T} = \sum_i \mathbf{T}_i$; для операторов изотопического спина сложных частиц и $Y = \sum_i Y_i$ для гиперзарядов. Коммутационные соотношения (32) справедливы для T на любом мультиплете, но уравнение (26) как специальное свойство фундаментального представления (т. е. матриц Паули) не имеет места.

Зарядовая независимость взаимодействий дублета кратко выражается как

$$[(T_i)_\pm, H] = 0, \tag{33}$$

что вместе с сохранением заряда означает $[T_i, H] = 0$; полная группа изоспина коммутирует с H и, таким образом, является группой симметрии гамильтониана. Более того, для системы, образованной из таких дублетов, это дает $[\mathbf{T}, \mathbf{H}] = 0$, откуда следует зарядовая независимость гамильтониана, и все теоремы раздела IV могут быть немедленно применены. В частности, из соотношения

$$[T_\pm, H] = 0 \tag{34}$$

довольно ясно, что масса таких систем, конечно, не зависит от их заряда (T_3, положения в мультиплете), хотя это не относится к зависимости от T.

Б. SU_3 и другие группы

1. Аналогия с оболочечной моделью. Изучение характера семейственных связей между «элементарными» частицами, которые помогли бы нам понять их таким же образом, как мы поняли серию Бальмера или магические числа ядер, продолжается уже в течение 10 лет. Методологически оно простирается от постулирования соотношений между константами связи (глобальная симметрия) до конкретных моделей составных частиц (например, модель Сакаты), ни одна из которых не оказалась очень успешной. Поскольку в настоящее время появляются всё новые частицы, можно надеяться, что семейства, если они существуют, не должны быть малыми. В последнее время пытаются использовать более скромное теоретико-групповое приближение, основанное на надежде, что частицы могут быть классифицированы по «разрушенным мультиплетам» некоторой группы симметрии, хотя в настоящее

выполнено равенство $|a|^2 = |b|^2$, а условие существования триплета не определяет отношение $|a/b|$. Говоря другими словами, для мультиплетов, бо́льших чем дублет, для которых Q_+ и Q_--операторы имеют больше одного недиагонального элемента, требование, чтобы их коммутационное соотношение имело вид (27), эквивалентно записи некоторого соотношения, вида (8), между недиагональными элементами. Это ясно также, если попытаться получить (8) из (27).

время остаются неизвестными происхождение такой группы и природа нарушающего симметрию взаимодействия.

Для классификации экспериментально известны массы, спины, четности, странности и изоспины большого числа уровней. Задача чисто спектроскопическая, и современное теоретико-групповое приближение опирается на замечательное сходство с классическим инструментом атомной и ядерной спектроскопии — с оболочечной моделью *). В действительности аналогия настолько близка, что простейший путь введения терминологии, необходимой для обсуждения элементарных частиц на основе SU_3, *лежит в кратком резюме точки зрения оболочечной модели на языке групп симметрии.*

Оболочечная модель является двухстадийной теорией атомных или ядерных энергетических уровней, первый шаг которой состоит в замене действительного многочастичного гамильтониана самосогласованным одночастичным приближением

$$H(1, 2, \ldots, N) \to H^0 = \sum_{i=1}^{N} (H^0(i)),$$

где $H^0(i)$ — среднее одночастичное воздействие на частицу i. Если задача с гамильтонианом H^0 решается и обеспечивает достаточно хорошее приближение к действительным собственным состояниям, то вторым шагом вносят взаимодействие между частицами $H' = H - H^0$ и обращаются, например, к теории возмущений в низшем порядке.

Предположим, для простоты, что спинами частиц можно пренебречь, а гамильтониан $H^0(i)$ сферически симметричен (как это имеет место вблизи замкнутой оболочки). Тогда его группа симметрии есть группа вращений $\mathbf{r}_i$, т. е. $R_3(i)$, так как при отсутствии связи между частицами **) группа симметрии гамильтониана H^0

$$S^0 = R_3(1) \otimes R_3(2) \otimes \ldots \otimes R_3(N)$$

является группой независимых вращений координат всех частиц. Это — экстремально большая группа (соответствующая высокой симметрии гамильтониана H^0), которая содержит как малую подгруппу группу симметрии $S' = R_3(1, 2, \ldots, N)$ правильного гамильтониана $H = H^0 + H' \cdot R_3(1, 2, \ldots, N)$ — группу одновременного вращения координат всех частиц, т. е. вращений всей системы в целом; ее инвариантным оператором является $\mathbf{L}^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{l}_i\right)^2$ с собственными значениями $L(L+1)$.

Большие мультиплеты группы S^0, называемые супермультиплетами, построены (теорема Д) из вырожденных собственных состояний гамильтониана H^0. Эти супермультиплеты являются, конечно, инвариантными относительно подгруппы S' и, по теореме Петера — Вейля, каждый должен состоять из набора мультиплетов S'. Но каждый мультиплет подгруппы S' с индексом L соответствует (по теореме Г) одному энергетическому уровню гамильтониана H, откуда следует известный результат: если супермультиплет группы S^0 содержит n мультиплетов подгруппы S', то включение взаимодействия H', нарушающего симметрию, будет расщеплять соответствующий энергетический уровень H^0 на n различных уровней гамильтониана H.

Как пример, выраженный более определенно на языке оболочечной модели, рассмотрим две частицы вне замкнутой оболочки и для простоты совершенно пренебрежем взаимодействием между этими частицами и «инертными» частицами замкнутой оболочки (так как во всяком случае расстояние между уровнями показывает, что они взаимодействуют слабо). Пренебрежение взаимодействием между внешними частицами хорошо описывает гамильтониан нулевого приближения $H^0 = H^0(1) + H^0(2)$ чьи собственные состояния являются, конечно, произведениями собственных состояний $H^0(1) + H^0(2)$. По теореме 8 его супермультиплеты есть $\mathfrak{M}_{l_1}(1) \otimes \mathfrak{M}_{l_2}(2)$, поскольку $S^0 = R_3(1) \otimes R_3(2)$. Они аналогичны «конфигурациям» оболочечной модели (обозначаемым через (l_1, l_2), инвариантные операторы группы S^0). Например, характерной конфигурацией будет (p, d); это $3 \times 5 = 15$-мерный набор состояний, который получается, если поместить одну частицу в p-состояние, другую — в d-состояние. В этом предельном случае они, конечно, вырождены с энергией $E^0 = E_p^0 + E_d^0$.

Взаимодействие $H = V_{12}$ между двумя частицами содержит как группу симметрии подгруппу $S' = R_3(1, 2)$ группы S^0, чьи мультиплеты отмечены квантовым

---

*) Это было остроумно изложено Дж. Липкином.

**) В действительности не является необходимым полное отсутствие связи; например, факторизуемое взаимодействие вида $V_{12} = V(r_1)\,W(r_2)$ также инвариантно относительно группы прямого произведения. Для группы вращений это не физическое требование, но оно может не быть таковым для групп «внутренней симметрии» (заряд, странность и т. д.).

числом L. Как и прежде, правило $(2L+1)$ сохраняет силу, поэтому 15-мерный супермультиплет группы S^0 распадается на три мультиплета подгруппы S', согласно соотношению $3 \otimes 5 = 3 \oplus 5 \oplus 7$ *). Не зная ничего относительно нарушающего симметрию взаимодействия H', за исключением того, что оно инвариантно относительно одновременного вращения $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, мы можем сделать вывод, что оно будет расщеплять (pd) конфигурацию на P, D и F состояния (более точно, на 1^-, 2^-, 3^- состояния, так как вся конфигурация нечетна).

Если свойства взаимодействия, нарушающего симметрию (т. е. его трансформационные свойства для полной группы S^0), известны в деталях, можно воспользоваться для S^0 обобщением теоремы Вигнера — Эккарта для того, чтобы найти зависимость этих энергий от их квантовых чисел L подгруппы S' (в первом порядке по V_{12})

$$E^0 + \Delta E_L\,(pd). \tag{35}$$

Зависимость $\Delta E_L\,(pd)$ от L в S^0 полностью дается коэффициентами Клебша — Гордана или Рака **), в то время как V_{12} входит множителем в приведенные матричные элементы. В специальном случае, когда V_{12} преобразуется как член мультиплета, входящего в группу S^0 один раз, будет только один такой множитель. Хотя он определяет абсолютную величину расщепления, в данном случае он представляет отношение расщеплений $(E_{1^-} - E_{2^-})/(E_{1^-} - E_{3^-})$, которое зависит лишь от (l_1, l_2)-конфигурации. Выражение (35) будет оправдано, если только H' мало́ по сравнению с ΔE, величиной энергетического разделения этой конфигурации и ближайшей к ней, с которой она может смешиваться, поскольку $H'/\Delta E$ служит мерой вклада от членов второго порядка по энергетическому сдвигу.

2. Вновь элементарные частицы. Вернемся к рассматриваемому случаю. В настоящий момент в области элементарных частиц весьма неприятным обстоятельством является изобилие энергетических уровней без ясного понимания их природы. Исследования, выполняемые в настоящее время, направлены на то, чтобы понять эти состояния таким же образом, как мы поняли рассмотренные выше 1^-, 2^- и 3^- состояния. «Структура», которая объединяет их, заключена в общем происхождении единственного супермультиплета расширенной группы, симметрия которой нарушена этим «возмущающим» воздействием, которое приводит состояния в их конечные наблюдаемые положения. Конечно, оболочечная модель имеет физически обоснованные положения, на которых она и построена; но до тех пор, пока не возникли сравниваемые с опытом физические подструктуры для объединения нашего представления о мире элементарных частиц, кажется, все что мы имеем на будущее, это лишь слепая вера в щедрость неясно угадываемых групп. Аналогично, оболочечная модель размещает воображаемые частицы в неизвестных оболочках.

Но что тогда будет большой группой S^0 и как указать ее супермультиплеты в нагромождении находящихся перед нами уровней? Поскольку спин, четность, барионное число, изоспин и странность эмпирически сохраняются в сильных взаимодействиях, прямое произведение их групп образует S'-группу симметрии, а их квантовые числа используются для обозначения наблюдаемых энергетических уровней в сильных взаимодействиях. Если мы предположим, как это обычно делается, что все операторы, которые добавлены в S' для расширения ее до S^0, коммутируют с J^2, π и B, тогда частицы каждого супермультиплета S^0, хотя они могут обладать различным изоспином и/или странностью, будут иметь по крайней мере те же самые J, π и B.

Если это так, то мы могли бы надеяться, что нарушающее симметрию взаимодействие H' будет малым по сравнению с расстоянием между уровнями H^0, так что можно было бы определить супермультиплеты, если бы спектр каждого хорошо разделенного «уровня» обладал «тонкой структурой». Тонкая структура содержала бы несколько уровней с теми же J, π и B, но с различными изоспином и/или странностью, и полное число уровней с тонкой структурой в такой группе было бы равно размерности одного из супермультиплетов группы S^0. Воспользовавшись как исходными данными несколькими такими супермультиплетами, может быть с некоторой уверенностью возможно угадать подлинную группу S^0.

К сожалению, H' оказывается большим и сдвиг уровней в некоторых случаях сравним с энергией покоя наблюденных частиц. Структура супермультиплета в наблюдаемом спектре не является такой простой или очевидной, как на это можно было надеяться и, вероятно, для того чтобы распознать структуру, необходимы более совершенные методы, если они вообще существуют. Используемый в настоящий момент метод просто угадан. Идея заключается в том, чтобы выбрать перспективную группу

---

*) Отыскание мультиплетов группы возмущений S' является известным процессом нахождения правильных волновых функций нулевого порядка в теории возмущений с учетом вырождения.

**) В этом контексте символ L служит для идентификации определенных состояний внутри супермультиплета. Он не является инвариантным оператором S^0 и поэтому не присутствует в приведенных матричных элементах.

с приемлемыми мультиплетами, и в то же время предполагается, что нарушающее симметрию взаимодействие H' преобразуется подобно отдельному мультиплету группы. Отсюда по формуле, аналогичной выражению (35), могут быть вычислены коэффициенты тонкоструктурного расщепления уровней, которые в этих предположениях называют «массовой формулой» *). Тогда эти коэффициенты расщеплений обеспечивают структуру спектра, в который должен переходить набор уровней, если уровни представляют собой супермультиплет предполагаемой группы (с допускаемым механизмом расщепления).

Использование этого метода для идентификации супермультиплетов позволило сгруппировать многие из известных в настоящее время уровней в мультиплеты единственной хорошо известной группы. Это группа SU_3, простая группа Ли ранга 2, рассматриваемая как группа симметрии по квантовым числам заряда и странности. Сейчас она рассматривается как лучший кандидат на S^0 **), и мы закончим наше обсуждение коротким резюме математических свойств группы SU_3 и ее физической интерпретации.

Чтобы взглянуть на проблему в перспективе, мы можем начать с вопроса: должны ли догадки относительно S^0 быть совершенно произвольными или имеются общие физические предпосылки, которые ограничивают набор возможностей? Естественный первый шаг состоит в том, чтобы исследовать, все ли операторы, добавленные для расширения S' до S^0, могут коммутировать с S'. Это может быть выяснено тотчас же, так как если бы они коммутировали, то, как мы видели в разделе V, добавленные операторы сами образовывали бы группу (назовем ее группой $\bar{S}$). В этом случае S^0 было бы $S'\otimes\bar{S}$, и ее мультиплеты определялись бы произведениями мультиплетов двух фактор-групп, так что все частицы данного супермультиплета обладали бы точно теми же квантовыми числами, что в S' ***). Это означало бы, например, что нуклон не мог бы находиться в одном и том же супермультиплете с Σ (значения T и S другие) или даже с каскадной частицей (другая S), а лишь с другими частицами, имеющими те же самые квантовые числа J, π, B, T и S. Существование супермультиплетов такой природы не является невозможным, но еще не получено подтверждения, что они должны быть предпочтительными.

Для того чтобы получить более обычный супермультиплет, S^0 должна содержать операторы, которые коммутируют не со всеми операторами S'. Это отсутствие коммутации перемешивает мультиплеты S' (уравнение (12)) и приводит к тому, что два или несколько из них, объединяясь, образуют супермультиплеты группы S^0. Обычно предполагают, что даже часть взаимодействия, нарушающего симметрию, сохраняет J, π и B, т. е. допускают, что группа симметрии взаимодействия S^0 содержит группы вращения, отражения и калибровочную инвариантность барионного заряда как прямые множители, так что ее супермультиплеты должны содержать частицы с теми же квантовыми числами J, π и B. Это предположение сужает возможность выбора операторов, которые должны быть добавлены для расширения S' до S^0; это — операторы, которые коммутируют с J, π и B, но не коммутируют с S и/или с изоспиновой группой. В этом смысле J, π и B являются «инертными». Они играют одинаковую роль в S' и S^0 группах, поэтому мы считаем их «внешними множителями» для обеих групп и в дальнейшем будем рассматривать только оставшиеся множители $\tilde{S}'$ (изоспин $\otimes$ странность) и их расширение на группу более высокой симметрии $\tilde{S}^0$.

Наконец, по физическим предположениям группа S^0 является унитарной и без потери общности может быть выбрана унимодулярной (все ее операторы имеют детерминанты $= +1$ для любого мультиплета), поскольку это соответствует просто выделению любой прямой абелевой фактор-группы (например, группы калибровочной инвариантности барионного заряда), если она вообще содержится. Если $\tilde{S}^0$ — группа Ли, то ее ранг должен быть по крайней мере равен 2, потому что он равен рангу $\tilde{S}'$.

*) Конечно, этот результат имеет смысл лишь в первом порядке теории возмущений и с точки зрения отмеченных выше больших сдвигов уровней может показаться подозрительным. Однако точность результата определена отношением сдвига данного уровня E_s к расстоянию до ближайшего супермультиплета, имеющего уровень с теми же самыми квантовыми числами, что и уровень E_s. Так как это расстояние (в общем случае большее, чем расстояние между соседними уровнями спектра H^0) до сих пор не известно, нет прямого доказательства того, что первый порядок теории возмущений неверен. Например, октет и декуплет (имеющие различные спины) могут переплетаться без заметного «искажения».

**) В настоящее время с не меньшим основанием в качестве кандидатов на S^0 рассматриваются и многие другие группы, например, SU_6, $\tilde{U}_{12}$, $SL(6, C)$ и др. (*Прим. ред.*)

***) Например, Σ-гиперон был рассмотрен таким образом в разделе V как 6-мерный мультиплет группы (спин) $\otimes$ (изоспин), в котором все шесть членов мультиплета имели те же самые J и T.

Это рассмотрение носит чересчур общий характер, и имеется много групп, которые могли бы удовлетворять этим требованиям. Сейчас кажется, что понимание того, почему наиболее удобно выбрать именно группу SU_3, практически отсутствует. Однако, изыскивая средства для возможного объяснения, мы наталкиваемся на утверждение, которое заставляет задуматься: группа SU_3 является наименьшей группой $\widetilde{S}^0$, которая, удовлетворяя указанным выше условиям, содержит известную $\widetilde{S}'$ и позволяет получить все сильно взаимодействующие частицы, которые строятся из триплетов.

Именно этот факт сыграл определенную роль в объяснении первоначального введения группы SU_3 кандидатом на S^0 [5]. Ее окончательная роль в общей схеме классификации частиц пóнята не до конца, но в настоящее время эта группа наиболее активно эксплуатируется в моделях составных частиц, в которых наблюдаемые состояния конструируются из неких таинственных фундаментальных триплетов [6,7] тем же путем, как конструируются ядра из фундаментальных изоспиновых дублетов [8].

Аргумент в пользу утверждения, что триплеты подразумевают группу SU_3, может быть сформулирован следующим образом. $\widetilde{S}^0$ является группой унитарных операторов, которые всегда могут быть записаны в виде экспонент от эрмитовых операторов. Наиболее удобно обсуждать триплеты, используя эрмитовые операторы заряда и странности, точно так же как мы это делали прежде, обсуждая наличие дублетов в SU_2 для зарядовой группы с помощью эрмитовых операторов заряда. Требование, чтобы $\widetilde{S}^0$ обладала трехмерным представлением (триплет), является очень жестким ограничением, поскольку из всех эрмитовых 3×3 матриц только девять будут линейно независимыми, а все остальные могут быть выражены через них. (В действительности из-за условия $\det = +1$, которому должны удовлетворять операторы $\widetilde{S}^0$, используется только восемь матриц со следом, равным нулю.) Их коммутаторы, очевидно, антиэрмитовы и поэтому могут быть выражены через восемь матриц с чисто мнимыми «структурными постоянными». Это означает, что на триплете любой оператор $\widetilde{S}^0$ может быть представлен экспонентой от суммы этих восьми основных матриц, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям для генераторов группы Ли; каковы бы ни были при этом их свойства для других мультиплетов, группа $\widetilde{S}^0$ является 8-параметрической группой Ли операторов, действующих на это 3-мерное пространство. Все, что осталось сделать, это найти ее ранг и посмотреть, какая это группа Ли.

Чтобы выполнить такую программу, вспомним, что $\widetilde{S}^0$ должна содержать SU_2 (группу изоспина) как подгруппу, т. е. SU_2 — подгруппа $\widetilde{S}'$. Это значит, что триплет $\widetilde{S}^0$ должен быть изоспиновым триплетом или распадаться на сумму: либо изоспинового дублета и синглета, либо трех синглетов. Триплет исключается, так как он имеет $T = 1$ и не может быть использован для построения частиц с $T = \frac{1}{2}$. Аналогично, соотношение синглет $\otimes$ синглет = синглет устраняет возможность использования суммы трех синглетов, таким образом, $\widetilde{S}^0$ триплет должен строиться из изоспинового дублета и синглета *).

Ранг группы $\widetilde{S}^0$ равен по крайней мере двум, так как она содержит по меньшей мере два коммутирующих оператора, которые одновременно могут быть диагонализованы. Обычно выбирают два известных оператора, такие как T_3 и гиперзаряд $Y = S + B$ (которые предпочтительнее, чем T_3 и S); мы утверждаем, что имеем группу в трехмерном представлении, а проведенное выше рассмотрение однозначно фиксирует ее вид (с точностью до нормировки):

$$T_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Существующие одновременно собственные состояния двух операторов используются в качестве базиса для триплета, субматрица 2×2 в левом верхнем углу представляет дублет. Это немедленно дает T_3. Вид Y следует из $[T_3, Y] = 0$, что приводит к вырождению Y на изоспиновом дублете (лемма Шура), а значение (-2) необходимо для того, чтобы сделать след этой матрицы равным нулю. Но поскольку возможны только эти две действительные диагональные 3×3 матрицы со следом, равным нулю, то ранг $\widetilde{S}^0$ равен двум.

*) Это в том смысле, что в современных моделях все частицы (за исключением синглетов) строятся из изоспиновых дублетов.

Таким образом, мы имеем точный вид четырех из восьми матриц, а именно, T_1, T_2, T_3 и Y. Четыре другие линейно независимые матрицы могут быть записаны в любой удобной форме, и тогда все сводится к алгебре (см., например, сноску *) на стр. 122) для проверки того, что не менее чем восемь матриц (исключая четыре первоначальные) замкнуты относительно коммутации, и что структурные постоянные, следующие из коммутаторов, те же, что и для группы SU_3. Именно в этом смысле триплеты подразумевают SU_3 *).

Четыре добавленных генератора имеют относительно этого базиса недиагональные элементы и поэтому не определяют новых квантовых чисел, но являются операторами, которые увеличивают или уменьшают T_3 или Y. Установлено, что если они *выбраны так, чтобы быть точно операторами*, увеличивающими и/или уменьшающими (т. е. неэрмитовыми операторами, которые преобразуют собственное состояние T_3 в другое состояние, предпочтительнее в T_+ и T_-, чем в состояния T_1 и T_2, представляющие эрмитовы «смеси»), то они изменяют T_3 и Y одновременно. Это утверждение находится в согласии с соотношением $T_3 + \frac{1}{2} Y = Q$, которое требует, чтобы ΔT_3 было целочисленным, если изменяется только T_3 ($\Delta Y = 0$-переходы), или чтобы $\Delta T_3 = \pm \frac{1}{2} \Delta Y$, когда T_3 и Y изменяются вместе ($\Delta Q / \Delta Y = \pm 1$, $\Delta Q = 0$-переходы), но запрещает $\Delta Y = \pm 1$, если заряд измеряется в целочисленных значениях e.

Действительно, группа SU_3 имеет два неэквивалентных триплета (на физическом языке квантовых чисел — триплет и антитриплет). Сложные частицы могут быть построены из них в полной аналогии с «векторным сложением изотопического спина», описанным в разделе VI, путем умножения двух или более триплетов и разбиением произведения на другие мультиплеты SU_3 ($3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$, $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$ и т. д. **). Это требует, чтобы генераторы сложной частицы были суммой генераторов компонент $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$, $Y = Y_1 + Y_2$ и т. д., образуя восемь компонент «полного SU_3-спина». *Так же как и в случае группы вращения, это означает, что сложные генераторы* удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям, что и их компоненты и, таким образом, имеют ту же самую физическую интерпретацию; это также позволяет определить группу для этих расширенных мультиплетов. Можно было бы ожидать, что два триплета SU_3 являются ее фундаментальными мультиплетами и поэтому по

---

*) Все это, конечно, никак не доказывает физического существования триплетов. Соотношение между триплетами приведено просто как обстоятельство, заставляющее задуматься. При этом мы полностью понимаем, что существование этой группы в природе совсем не нуждается ни в какой ее связи с триплетами. Такова, кажется, позиция, принятая Гелл-Манном (см. [9]), хотя для «конкретной» иллюстрации он обратился к схеме кварков.

**) Группа SU_3, будучи полупростой группой Ли ранга 2, содержит два инвариантных оператора C_2 и C_3, которые а) могут быть использованы для обозначения ее мультиплетов и б) определяют ее основные законы сохранения. Биденхарн (Phys. Letts 3, 69 (1962)) привел их к канонической форме (однородные полиномы генераторов соответственно второго и третьего порядка). При обозначении мультиплета *они используются обычно вместо пары целых чисел* (λ_1, λ_2), *которые определяются* отношением мультиплета к фундаментальным мультиплетам группы (Р. Берендс и др., см. сноску на стр. 121). На этом языке фундаментальные триплеты обозначаются, например, через $D^3(1,0)$ и $D^3(0,1)$ и октет через $D^3(1,1)$. Биденхарн дал выражение собственных значений инвариантов с частным выбором нормировки через λ_1 и λ_2:

$$C_2 = (\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 - 3\lambda_1 + 3\lambda_2)/q,$$

$$C_3 = (\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 + \lambda_2 + 3)(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3)/162.$$

Размерность мультиплета, конечно, также определена инвариантами C_2 и C_3; выраженная через λ_1 и λ_2, она равна

$$N = \left[1 + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\right](1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2).$$

Мультиплеты меньшей размерности почти единственным образом обозначаются просто их размерностями, например, 1, 3 ($= D^3(1,0)$), $\bar{3}$ ($= D^3(0,1)$) и т. д. Для четырех 15-плетов приняты обозначения 15, $\overline{15}$, $15'$ и $\overline{15}'$.

Если использовать те же обозначения для разложений мультиплетов группы SU_3 по мультиплетам группы SU_2 (изоспиновой), тогда $3 \otimes 3 = 8 \oplus 1$ запишется, например, в виде $(2 \oplus 1) \otimes (2 \oplus 1) = 2 \otimes 2 \oplus 2 \otimes 1 + 1 \otimes 2 \oplus 1 \otimes 1 = (3 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 2) \oplus 1$.

теореме 4 мультиплеты, полученные из произведений этих триплетов, содержат все мультиплеты SU_3. Если попытаться согласовать наблюденные частицы с предположением, что $\widetilde{S}^0 - SU_3$, то, как ожидают, существовали бы все мультиплеты низкой размерности так же, как и в случае SU_2 *). Но, к сожалению, невозможно определить знак триплета среди сильно взаимодействующих частиц, будь то фермионы или бозоны. Триплеты, если они вообще существуют, дают мало сведений относительно существования физически наблюдаемых частиц. С другой стороны, это дает широкое поле для свободного полета фантазии и позволяет изучать различного рода предположения, например, относительно возможности осуществления двух (или более) типов триплетов (назовем их 1 и 2), различающихся некоторыми не SU_3 квантовыми числами. Если они существуют, возможно перейти к воображаемому пределу «независимых триплетов», в котором (1) и (2), хотя и связаны с другими частицами, но не связаны друг с другом, так что лагранжиан для системы был бы инвариантен даже для бо́льшей группы симметрии $\widetilde{S}^{00} = SU_3(1) \otimes SU_3(2)$, группы преобразований SU_3 независимо по (1) и (2). Тогда имелось бы два вида гиперсупермультиплетов $\widetilde{S}^{00}$. Первый строился бы только из одного типа триплета, обычно $3(1) \otimes \overline{3}(1) = 1(1) \oplus 8(1)$, которые являются как раз мультиплетами SU_3. Другой вид был бы, например, $3(1) \otimes 3(2) = 9(1, 2)$, который по теореме 8 оказывается неприводимым вследствие независимости $SU_3(1)$ и $SU_3(2)$. В предельном случае $\widetilde{S}^{00}$ симметрии он содержал бы девять вырожденных по массе частиц (с равными спинами и четностями). Включение взаимодействия между (1) и (2) обычно сводило бы группу симметрии к $\widetilde{S}^{00} = SU_3(1, 2)$ — группе одновременных преобразований SU_3 по (1) и (2), генерируемых «полным SU_3-спином», а гиперсуперпонетный уровень расщеплялся бы на два уровня $9 = 8 \oplus 1$. Наконец, сведéние группы симметрии к $SU_3(1, 2)$, обусловленное полным изотопическим спином $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$, дает наблюдаемые частицы $9 = (2 \oplus 3 \oplus 2 \oplus 1) \oplus 1$, из которых, по-видимому, восемь членов наиболее близки друг к другу.

Предположения в этом направлении недавно были сделаны Швингером [7] и Гелл-Манном [9]. В схеме Швингера (1) и (2) различаются барионным числом, и она так построена, что отсутствуют тройные взаимодействия (1) (бозон) с (2) (фермионом), инвариантные по отношению к $SU_3(1, 2)$. Следовательно, модель делает скачок прямо от $\widetilde{S}^{00}$ к SU_2 и предсказывается «девятый барион» с массой, не очень сильно отличающейся от масс других восьми частиц.

Модель Гелл-Манна различает (1) и (2) по четности. Генераторы $SU_3(1)$ и $SU_3(2)$, F_i^+ и F_i^- удовлетворяют соотношениям $[F_i^+, F_i^-] = 0$, но $PF_i^+ = F_i^- P$, поскольку ни та, ни другая группа не коммутирует с пространственным отражением. Следовательно, P не может быть факторизовано для группы $\widetilde{S}^0$, как это было предположено ранее. Поэтому Гелл-Манн рассматривает группу $\widetilde{S}^{00}$, которую мы можем записать $SU_3^+ \otimes SU_3^- \boxtimes P$, т. е. группу, полученную из $SU_3^+ \otimes SU_3^-$ путем умножения каждого ее элемента на P **). Так как четности у F_i^+ и F_i^- противоположны, это перемешивает такие пары мультиплетов $SU_3^+ \otimes SU_3^-$, как $3^+ \otimes \overline{3}^-$ и $\overline{3}^+ \otimes 3^-$ или $1^+ \otimes 8^-$ и $8^+ \otimes 1^-$, что означает, что эти пары объединяются и образуют гиперсупермультиплеты гелл-манновской группы $\widetilde{S}^{00}$. Такая процедура дает в два раза большее число гиперсупермультиплетов, чем схема Швингера. Например, в предельном случае гелл-манновской $\widetilde{S}^{00}$ симметрии имеется 18 вырожденных по массе с нулевым спином мезонов, принадлежащих к $(3^+ \otimes \overline{3}^- + \overline{3}^+ \otimes 3^-)$-представлению группы $\widetilde{S}^{00}$. Эта группа симметрии путем введения дополнительного взаимодействия может быть сведéна к $\widetilde{S}^0 = SU_3(+, -)$, группе одновременных SU_3 преобразований над левосторонними и правосторонними триплетами (кварками), которые генерируются их полным SU_3

*) До сих пор были «рассмотрены» только синглет, октет и декуплет. Модель кварков [6] объясняет это заданием барионного числа 1/3 для фундаментального триплета частиц или кварков. Простейшие объекты с барионным числом 1 получаются тогда из прямого произведения $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$ и простейшие мезоны из $3 \otimes \overline{3} = 1 \oplus 8$. Ограничение, которое допускает лишь 1/3 возможных представлений, реализующихся в природе, не является чем-то необычным для ротационных полос $J = 0, 2, 4, 6$ или $J = 1, 3, 5, 7$ ядерной и молекулярной физики, где конкретные симметрии устраняют половину возможных представлений.

**) Эта группа не есть группа Ли, потому что P не является таковой. То же самое утверждение справедливо, между прочим, для группы вращений — отражений, но поскольку эта группа равна прямому произведению двух коммутирующих сомножителей, ее мультиплеты характеризуются инвариантными операторами этих сомножителей, а определение ее как группы «ранга 2» является разумным распространением на нее терминологии групп Ли. Последнее не кажется разумным для класса групп, рассматриваемых Гелл-Манном.

спином, $F_i = F_i^+ + F_i^-$. Оператор F_i построен таким образом, что он все же коммутирует с пространственным отражением и, следовательно, расщепляет 18-плетный уровень на четыре части: скалярные синглет и октет и псевдоскалярные синглет и октет. Наконец, добавление взаимодействия, нарушающего SU_3-симметрию, расщепляет октеты дальше в соответствующие зарядовые мультиплеты.

Эра построения моделей все еще находится впереди.

Висконсинский университет
Физический факультет

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. F. Peter, H. Weyl, Math. Ann. **97**, 737 (1927).
2. L. C. Biedenharn, J. Math. Phys. 4, 436 (1963). Прекрасное детальное обсуждение общих свойств полупростых групп Ли, важных в физических приложениях, дано в лекциях: L. C. Biedenharn, Summer Institute for Theoretical Physics (ed. W. E. Brittin, B. W. Downs) (Boulder, Colorado, 1962), Interscience Publ., Inc., New York, 1963.
3. Смотри, например: Е. Вигнер, Теория групп и ее приложение к квантовомеханической теории атомных спектров (М., ИЛ, 1961, стр. 173-174).
4. E. P. Wigner, Phys. Today **17** (3), 34 (1964).
5. M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125**, 1067 (1962); S. Okubo, Prog. Theor. Phys. (Kyoto) **27**, 949 (1962); Y. Néeman, Nucl. Phys. **26**, 222 (1961); M. Ikeda, S. Ogawa and Y. Ohnuki, Prog. Theor. Phys. **22**, 715 (1959).
6. M. Gell-Mann, Phys. Letts. **8**, 214 (1964); G. Zweig; CERN, препринт.
7. J. Schwinger, Phys. Rev. Letts. **12**, 237 (1964).
8. Альтернативные аргументы для SU_3, связанные с CP-инвариантностью, были недавно предложены в работе A. Pais, Phys. Rev. Letts. **12**, 432 (1964).
9. M. Гелл-Манн, Physics **1**, 63 (1964).