

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

535.0

## КОГЕРЕНТНЫЕ СВОЙСТВА ОПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ. III\*)

Э. Вольф, Л. Манделъ

## 5. НЕКОТОРЫЕ ЭФФЕКТЫ КОГЕРЕНТНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

## 5.1. Законы распространения

Как отмечалось в разделе 3, в вакууме взаимная функция когерентности удовлетворяет двум уравнениям. Для стационарного поля уравнения принимают форму \*\*)

$$(3,28): \nabla_j^2 \Gamma = c^{-2} (\partial^2 \Gamma / \partial \tau^2) \quad (j = 1, 2). \quad (5,1)$$

Эти уравнения, подчиненные соответствующим граничным и начальным условиям, можно решить с помощью стандартной техники. Паррент (1959 а, б) [см. также Беран и Паррент (1964), стр. 40] рассматривал распространение взаимной функции когерентности от конечной плоской области  $\sigma$  с помощью техники функций Грина. Если  $S_1$  и  $S_2$  — две произвольные точки области  $\sigma$ ,  $P_1$  и  $P_2$  — точки волнового поля,  $R_1 = S_1 P_1$ ,  $R_2 = S_2 P_2$ , а  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — углы, образуемые направлениями  $S_1 P_1$  и  $S_2 P_2$  с нормалью к источнику (см. рис. 6), то решение может быть записано в форме \*\*\*)

$$\Gamma(P_1, P_2, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{\sigma} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{R_1^2 R_2^2} \mathcal{D} \Gamma \left( S_1, S_2, \tau - \frac{R_1 - R_2}{c} \right) dS_1 dS_2, \quad (5,2)$$

где  $\mathcal{D}$  обозначает дифференциальный оператор

$$\mathcal{D} = 1 + \frac{R_1 - R_2}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{R_1 R_2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}. \quad (5,3)$$

В (5,2) под  $dS_1$  и  $dS_2$  подразумеваются элементы поверхности источника с центрами в точках  $S_1$  и  $S_2$ , а двойной интеграл обозначает двукратное интегрирование по  $\sigma$ , при котором  $dS_1$  и  $dS_2$  независимо пробегают  $\sigma$ . При выводе (5,2) было принято, что в полуирпостранстве, содержащем

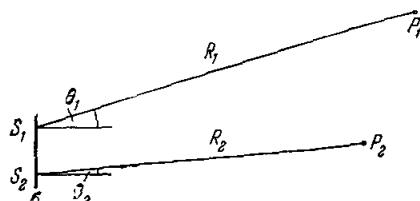


Рис. 6. Иллюстрация обозначений, относящихся к уравнению (5,2), которое описывает распространение функции взаимной когерентности  $\Gamma$  от конечной области плоскости  $\sigma$  в вакууме.

\*) Перевод первой части статьи (разделы 1—3) см. УФН 87 (3), 491 (1965); перевод второй части статьи (раздел 4) см. УФН 88 (2), 347 (1966). Перевод разделов 5—8 В. М. Финкельберга, редакция и примечания В. И. Козлова.

\*\*) Поскольку в разделе 5 мы будем иметь дело только с когерентностью второго порядка, мы можем, как и в разделе 3, использовать сокращенные обозначения  $\Gamma$  вместо  $\Gamma^{(1,1)}$  и  $\gamma$  вместо  $\gamma^{(1,1)}$ .

\*\*\*) Имеющаяся в формуле Паррента ошибка здесь исправлена.

точки  $P_1$  и  $P_2$ , поле на бесконечности удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда.

Если  $\sigma$  — протяженный тепловой источник, можно считать, что излучение различных элементов поверхности  $\sigma$  взаимно не когерентно. Если, кроме того, излучение является квазимохроматическим со средней частотой  $v_0$ , то \*)

$$\Gamma(S_1, S_2, \tau) \sim I(S_1) \delta(S_1 - S_2) \exp(-2i\pi v_0 \tau) \quad (|\tau| < 1/\Delta v) \quad (5,4)$$

(ср. (3,36)), где  $I(S)$  — (усредненная) интенсивность излучения на единицу площади источника в точке  $S$ . Если вдобавок  $R_1 \gg \lambda_0$ ,  $R_2 \gg \lambda_0$  ( $\lambda_0 = cv_0$ ), углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  достаточно малы и

$$|\tau_1 - (R_1 - R_2)/c| \ll 1/\Delta v,$$

то (5,2) сводится к

$$\Gamma(P_1, P_2, \tau) \sim \left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2 \exp(-2\pi i v_0 \tau) \int_{\sigma} \frac{I(S)}{R_1 R_2} \exp[-ik_0(R_1 - R_2)] dS. \quad (5,5)$$

Уравнение (5,5) по существу является математической формулировкой так называемой теоремы Ван-Циттерта — Цернике [Ван-Циттерт (1934), Цернике (1938)].

Сходные по форме соотношения часто встречаются в основанной на принципе Гюйгенса — Френеля элементарной теории дифракции, что делает эту формулу очень полезной при решении вопросов когерентности в инструментальной оптике.

Формулу Ван-Циттерта — Цернике (5,5) можно упростить, если, как это часто бывает, точки  $P_1$  и  $P_2$  расположены в плоскости, параллельной плоскости источника, и расстояние между этими точками значительно меньше расстояния между плоскостями. При этих условиях (5,5) сводится к

$$\begin{aligned} \Gamma(P_1, P_2, \tau) \sim & \left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2 \frac{\exp[i(\psi - 2\pi v_0 \tau)]}{R^2} \times \\ & \times \int_{\sigma} I(\xi, \eta) \exp[ik_0(p\xi + q\eta)] d\xi d\eta \quad (|\tau| \ll 1/\Delta v), \end{aligned} \quad (5,6)$$

где

$$p = (x_2 - x_1)/R, \quad q = (y_2 - y_1)/R, \quad (5,7a)$$

$$\psi = k_0 [(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)]/2R. \quad (5,7b)$$

Здесь  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  — координаты  $P_1$  и  $P_2$  соответственно, а  $(\xi, \eta)$  — координаты точки  $S$  источника в декартовых осях  $OX$ ,  $OY$  в плоскости источника. Уравнение (5,6) показывает, что с точностью до простого коэффициента пропорциональности функция взаимной когерентности оказывается в этом случае фурье-преобразованием распределения (усредненной) интенсивности излучения вдоль источника.

В частности, для квазимохроматического и пространственно-некогерентного однородного плоского круглого источника радиуса  $Q$  (5,6) и (3,14) дают следующее выражение для комплексной степени когерентности:

$$\gamma(P_1, P_2, \tau) = [2J_1(v)/v] \exp[i(\psi - 2\pi v_0 \tau)] \quad (|\tau| \ll 1/\Delta v), \quad (5,8)$$

\*) Представление некогерентного источника с помощью  $\delta$ -функции Дирака, конечно, является идеализацией, весьма приблизительно реализуемой в действительности, но для большинства практических целей оно удовлетворительно. Некоторые усовершенствования его рассматривались Бераном и Паррентом (1963).

где

$$v = (k_0 Q / R) [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}, \quad (5,9)$$

а  $J_1$  — функция Бесселя первого рода первого порядка. Поведение  $|\gamma|$  в этом случае показано на рис. 7, из которого видно, что при удалении точек  $P_1$  и  $P_2$  друг от друга  $|\gamma|$  уменьшается, начиная от единицы, и становится равным нулю (полная некогерентность второго порядка) при

$v = 3,83$ , т. е. при  $P_1 P_2 \equiv [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2} = 0,61 R \lambda_0 / Q$ . При дальнейшем увеличении расстояния между точками  $P_1$  и  $P_2$   $|\gamma|$  опять становится отличным от нуля, обращаясь вторично в нуль при  $v = 7,02$ , т. е. при  $P_1 P_2 = 1,12 R \lambda_0 / Q$ . В инструментальной оптике до известной степени произвольное неравенство  $|\gamma| > 0,88$  рассматривается как условие того, что свет является «почти когерентным». С помощью (5,8) легко найти, что это условие удовлетворяется, когда  $v < 1$ , т. е.  $P_1 P_2 < 0,16 R \lambda_0 / Q$ . Следовательно, можно сказать, что однородный круглый квазимонохроматический некогерентный источник радиуса  $Q$  почти когерентно освещает на параллельной ему плоскости круг диаметра  $0,16 R \lambda_0 / Q$ .

Мы получили теперь для оценки «площади когерентности» более точный способ, чем дающее только порядок величины соотношение (2,4). Например, в только что рассмотренном случае площадь когерентности  $\Delta A$ , определяемая условием  $|\gamma| > 0,88$ , равна  $\Delta A = \pi (0,16 R \lambda_0 / Q)^2 = 0,25 c^2 R^2 / v_0^2 S$ , где  $S = \pi Q^2$  — площадь источника. Этот результат следует сравнить с (2,4).

До сих пор мы рассматривали распределение когерентности (второго порядка) для света от плоского источника, распространяющегося в вакууме. В принципе по-прежнему возможно получить соответствующее решение двух волновых уравнений (5,1) и в том случае, когда поверхность источника искривлена, но при этом возникают практические трудности, связанные с необходимостью определения соответствующей функции Грина. Однако были найдены различные приближенные формулы, относящиеся к распространению света с искривленных поверхностей как в свободном пространстве, так и в материальной среде [Цернике (1938), Гопкинс (1951, 1953), Вольф (1954а, 1955), Дюмонте (1955, 1956б), Бори и Вольф (1964), стр. 516, 534]. Связь некоторых из этих формул с точным решением волновых уравнений для  $\Gamma$  в какой-то степени подобна связи между принципом Гюйгенса — Френеля и точным решением волнового уравнения для комплексного поля  $V$ .

## 5.2. Звездная интерферометрия

Прекрасной иллюстрацией некоторых концепций и результатов теории когерентности второго порядка являются два метода, предложенные много лет назад Майкельсоном. Один из этих методов касается определения углового диаметра звезд, другой — определения распределения энергии в спектральных линиях. Первоначально для объяснения принци-

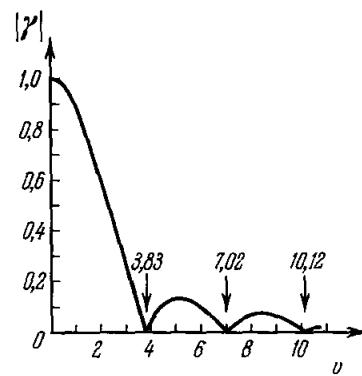


Рис. 7. Поведение  $|\gamma| (P_1, P_2, \tau)$  как функции расстояния  $P_1 P_2 = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$  для света от однородного квазимонохроматического некогерентного круглого источника радиуса  $Q$ .

$$v = k_0 Q [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2} / R, \quad |\tau| \ll 1 / \Delta v.$$

пов, лежащих в основе этих методов, использовались различные, но эквивалентные способы. Теория когерентности приводит к более глубокому пониманию использованных в этих методах физических принципов и, как мы увидим в разделе 6, к полезной модификации экспериментальной техники. В этом разделе мы рассмотрим метод Майкельсона для определения углового диаметра звезд. Его метод определения распределения энергии в спектральных линиях будет рассмотрен в п. 5.3.

Как хорошо известно, угловой диаметр, под которым звезды видны с поверхности земли, исключительно мал, так что ни один из существующих телескопов не может разрешить звезду. Эффективно свет звезды создает в фокальной плоскости телескопа дифракционную картину, соответствующую свету точечного источника, дифрагированному на апертуре телескопа.

Майкельсон (1890, 1920) [см. также Пис (1931)] показал, что информацию об угловом диаметре звезды (и в принципе также о распределении

интенсивности излучения по звезде) можно получить с помощью интерферометра, схематически изображенного на рис. 8. Свет звезды падает на внешние зеркала  $M_1$  и  $M_2$  интерферометра, отражается далее от двух внутренних зеркал  $M_3$  и  $M_4$  и, проходя через две фиксированные диафрагмы  $S_1$  и  $S_2$ , попадает на заднюю фокальную плоскость  $\mathcal{F}$  телескопа, к которому присоединен интерферометр. Внутренние зеркала  $M_3$  и  $M_4$  фиксированы, тогда как внешние зеркала  $M_1$  и  $M_2$  можно симметрично раздвигать в направлении, соединяющем  $S_1$  и  $S_2$ . Наблюдаемое в фокальной плоскости  $\mathcal{F}$  телескопа дифракционное изображение звезды, на которую направлен телескоп, пересечено интерференционными полосами, образованными двумя пучками света, проходящими через диафрагмы.

Рис. 8. Звездный интерферометр Майкельсона.

Видимость полос в фокальной плоскости  $\mathcal{F}$  зависит от расстояния между зеркалами  $M_1$  и  $M_2$ . С помощью элементарных доводов Майкельсон пришел к выводу, что, наблюдая изменение полос с удалением зеркал, можно получить информацию о распределении интенсивности вдоль звезды, по крайней мере в том случае, когда это распределение можно считать радиально-симметричным. В частности, он показал, что если рассматривать звезду как круглый и однородный диск, кривая видимости полос как функция расстояния  $d$  между зеркалами имеет нули для определенных значений  $d$  и наименьшее из таких  $d$  дается выражением  $d_0 = 0,61\lambda_0/\alpha$ , где  $\alpha$  — угловой радиус звезды. Таким образом, угловой радиус звезды можно определить, измеряя  $d_0$ . Этим способом были измерены угловые диаметры нескольких звезд вплоть до 0,02 дуговой секунды [Майкельсон и Пис (1921), Пис (1931)].

С точки зрения теории когерентности второго порядка смысл этого метода совершенно ясен. Свет, падающий на внешние зеркала  $M_1$  и  $M_2$ , в общем случае частично когерентен и, согласно упрощенной форме (5,6) теоремы Ван-Циттерта — Цернике с соответствующей нормировкой (формула (3,14)), комплексная степень когерентности дается (для  $|\tau| \ll 1/\Delta\nu$ ,  $\psi \ll 1$ ) выражением

$$\gamma(x_1, y_1; x_2, y_2; \tau) \sim \exp(-2\pi i v_0 \tau) \times \frac{\int \int I(u, v) \exp\{-ik_0[(x_1 - x_2)u + (y_1 - y_2)v]\} du dv}{\int \int I(u, v) du dv}. \quad (5,10)$$

Здесь  $I(u, v)$  представляет собой распределение (усредненной) интенсивности излучения по диску звезды как функция угловых координат

$$u = \xi/R, \quad v = \eta/R,$$

а  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  — координаты внешних зеркал  $M_1$  и  $M_2$ . Согласно (3,24) (с  $\mu = 1$  в рассматриваемом случае)  $|\gamma|$  представляет собой видимость интерференционных полос, которые получаются при интерференции света от двух зеркал  $M_1$  и  $M_2$ . Следовательно, видимость интерференционной картины в фокальной плоскости телескопа пропорциональна абсолютной величине фурье-преобразования распределения (усредненной) интенсивности излучения вдоль звезды. В частности, если звезда является круглым и однородным диском, то (5,10) сводится к (5,8) (с  $\psi \approx 0$ ) и наименьшее расстояние между зеркалами, для которого  $\gamma$  и, следовательно, видимость исчезают, равно  $v = 3,83$ , т. е.  $d_0 = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2} = 0,61\lambda_0/\alpha$ , в согласии с результатом Майкельсона.

### 5.3. И н т е р ф е р е н ц и о н н а я спектроскопия

Рассмотрим теперь кратко другой метод, также ведущий свое начало от Майкельсона, — упомянутый в начале раздела 5.2 метод определения распределения энергии в спектральных линиях. В этом методе пучок квазимохроматического света расщепляется в интерферометре Майкельсона (см. рис. 1) на два пучка, между которыми вводится разность хода  $c\tau$ , после чего они накладываются друг на друга. На месте суперпозиции образуются интерференционные полосы, видимость которых зависит от разности хода  $c\tau$ . Майкельсон показал, что из измеренной кривой видимости (т. е. кривой, представляющей видимость  $\gamma$  как функцию  $\tau$ ) можно получить информацию об энергетическом спектре света.

Физические основы этого метода можно опять-таки легко понять с точки зрения теории когерентности. Если предположить, что оба световых пучка имеют одинаковую интенсивность, то те же выкладки, что приводили к (3,24), позволяют получить видимость интерференционных полос в виде

$$\gamma(\tau) = |\gamma(\tau)|. \quad (5,11)$$

Здесь для краткости написано  $\gamma(\tau)$  вместо  $\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)$ , где  $\mathbf{r}$  обозначает положение (фиксированного) полупрозрачного зеркала  $M_1$ . Представим  $\gamma(\tau)$  как интеграл Фурье

$$\gamma(\tau) = \int_0^\infty w(v) \exp(-2\pi i v \tau) dv, \quad (5,12)$$

где, согласно (3,29) и (3,14),  $w(v)$  означает нормированную спектральную плотность света. (В интеграле Фурье (5,12) отсутствуют отрицательно-частотные компоненты, поскольку  $\gamma(\tau)$  является аналитическим сигналом.)

Полезно выразить  $\gamma(\tau)$  в форме

$$\gamma(\tau) = \tilde{\gamma}(\tau) \exp(-2\pi i v_0 \tau), \quad (5,13)$$

где  $v_0$  — средняя частота света. Тогда из (5,12) и (5,13) получим

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(\mu) \exp(-2\pi i \mu \tau) d\mu, \quad (5,14)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\mu) &= w(v_0 + \mu), \text{ если } \mu \geq v_0, \\ \tilde{w}(\mu) &= 0, \text{ если } \mu < -v_0. \end{aligned} \quad (5,15)$$

Из (5,11), (5,13) и (5,14) следует, что

$$\mathcal{V}(\tau) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(\mu) \exp(-2\pi i \mu \tau) d\mu \right|. \quad (5,16)$$

Предположим сперва, что спектр  $w(v)$  симметричен относительно средней частоты  $v_0$ . Тогда  $\tilde{w}$  будет четной функцией и, следовательно, интеграл в (5,16) окажется вещественным. Поэтому вместо (5,16) в этом случае можно написать

$$\mathcal{V}(\tau) = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(\mu) \exp(-2\pi i \mu \tau) d\mu \quad (5,17)$$

или, обращая интеграл Фурье и используя четность  $\tilde{w}$  как функцию  $\tau$  (что следует из (5,11), (3,14) и (3,12)), написать далее

$$\tilde{w}(\mu) \equiv w(v_0 + \mu) = \pm 2 \int_0^{\infty} \mathcal{V}(\tau) \cos(2\pi \mu \tau) d\tau. \quad (5,18)$$

Уравнение (5,18) показывает, что в предположении симметрии относительно средней частоты  $v_0$  энергетический спектр может быть вычислен из знания кривой видимости при условии, что неопределенность знака интеграла может быть устранена, что обычно можно сделать, аппелируя к физическому правдоподобию.

С другой стороны, если спектр не симметричен, фурье-преобразование «смещенной» спектральной плотности  $\tilde{w}(\mu)$  уже не является всюду вещественным, так что уравнение (5,16) не приводит более к (5,17). Теперь, чтобы определить спектр, согласно (5,11), (5,13) и (5,14), необходимо в дополнение к кривой видимости знать фазу  $\alpha(\tau)$  фурье-преобразования  $\gamma(\tau)$  функции  $\tilde{w}(\mu)$  или вместо этого фазу  $\phi(\tau)$  комплексной степени когерентности. Эти фазы связаны соотношением

$$\phi(\tau) = \alpha(\tau) - 2\pi v_0 \tau, \quad (5,19)$$

которое следует из (5,13). Согласно (3,25) фаза  $\phi(\tau)$  может быть определена из измерения положения максимумов интерференционной картины. К сожалению, такие позиционные измерения крайне трудно выполнимы, и фактически, кроме измерений Перарда (1928, 1935), никаких сообщений об этом в литературе не появлялось.

Вслед за рассмотрением этого вопроса Рэлеем (1892) считалось общепринятым, что измерения интенсивности и положения интерференционных полос служат двумя независимыми источниками информации, так что для получения данных, необходимых для определения несимметричного спектра, должны быть выполнены оба измерения. Однако недавно Вольф (1962) указал, что это не обязательно, поскольку аналитические свойства комплексной степени когерентности и физическое условие неотрицательности спектра накладывают жесткие ограничения на фазу  $\phi(\tau)$  функции  $\gamma(\tau)$  [см. также Маратэй (1963), Роман и Маратэй (1963)].

Чтобы выяснить природу ограничений, возникающих из аналитических свойств  $\gamma$ , заметим, что функция  $\gamma(\tau) = |\gamma(\tau)| \exp[i\phi(\tau)]$  аналитична и регулярна в нижней полуплоскости  $\Pi$  комплексной  $\tau$ -плоскости (это вытекает из того, что  $\gamma(\tau)$  — аналитический сигнал; ср. примечание к формуле (3,17)). Функция

$$\ln \gamma(\tau) = \ln |\gamma(\tau)| + i\phi(\tau) \quad (5,20)$$

очевидно, также аналитична в  $\Pi$ , но в нулях  $\gamma(\tau)$  она имеет логарифмические точки ветвления. Предположим сначала, что  $\gamma(\tau)$  вообще не имеет нулей в  $\Pi$ . В этом случае  $\ln \gamma(\tau)$  будет не только аналитичной, но и регулярной в  $\Pi$  функцией, и, следовательно, его вещественная и мнимая части, точно так же как и вещественная и мнимая части  $\gamma$ , будут связаны преобразованием Гильберта. Одним из этих двух соотношений является

$$\varphi(\tau) = \pi^{-1} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\gamma(\tau')|}{\tau' - \tau} d\tau'. \quad (5,21)$$

Следовательно, в этом случае  $|\gamma(\tau)|$  однозначно определяет фазу  $\varphi(\tau)$ . Если, однако,  $\gamma(\tau)$  имеет нули в  $\Pi$  в точках  $\tau = \tau_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), то соотношение (5,21) более неприменимо и вместо него имеет место следующее соотношение [ср. Толл (1956), стр. 1767]:

$$\varphi(\tau) = \pi^{-1} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\gamma(\tau')|}{\tau' - \tau} d\tau' + \sum_i \arg \frac{\tau - \tau_i}{\tau - \tau_i^*}, \quad (5,22)$$

где суммирование распространено на все нули  $\tau_i$  функции  $\gamma$  в нижней полуплоскости  $\Pi$ .

Соотношение (5,22) вместе с (5,11) показывает, что фаза  $\varphi(\tau)$  функции  $\gamma(\tau)$  и, следовательно, спектр могут быть найдены из знания функции видимости  $\mathcal{V}(\tau)$  и положения нулей  $\gamma$  в нижней полуплоскости  $\Pi$ . К сожалению, в настоящее время, по-видимому, ничего не известно ни о физическом значении нулей, ни об их положении в частных случаях. Однако положение нулей не может быть совсем произвольным, поскольку, как уже указывалось, имеется дополнительное ограничение, согласно которому фурье-преобразование  $\gamma(\tau)$  должно быть неотрицательным. Можно легко показать, что каждое из слагаемых  $\arg[(\tau - \tau_i)/(\tau - \tau_i^*)]$  в (5,22) неотрицательно, так что первый член правой части (5,22) представляет *нижнюю границу* фазы, которая может быть ассоциирована с данным  $|\gamma(\tau)|$ .

Кано и Вольфом (1962) было показано, что комплексная степень временной когерентности  $\gamma(\tau)$  излучения абсолютно черного тела вообще не имеет нулей в нижней полуплоскости  $\Pi$ , так что ее фаза и, следовательно, спектр могут быть определены из абсолютной величины  $|\gamma(\tau)|$ , несмотря на то, что спектр этого излучения несимметричен.

Метод Майкельсона, который, как мы только что видели, все еще содержит некоторые нерешенные проблемы, в какой-то степени заменяется другой интерферометрической техникой, так называемым методом *интерферограмм* [см., например, Фелджетт (1958а, б), Жакино (1958, 1960), Стронг и Ванассе (1959)]. Этот метод, который оказывается особенно полезным в инфракрасной области спектра, позволяет непосредственно определять вещественную часть  $\gamma^{(r)}$  вместо определения  $|\gamma|$ . Из знания  $\gamma^{(r)}$  как функции  $\tau$  можно в принципе однозначно определить спектр.

Недавно были также предложены два альтернативных экспериментальных подхода к нахождению фазы  $\varphi(\tau)$  из  $|\gamma(\tau)|$ . Один из них, предложенный Гамо (1963а, б), основан на измерении тройной корреляции интенсивностей и кратко описан в разделе 6.4. Другой, предложенный Метой (1965а), основан на двух отдельных сериях измерений  $|\gamma(\tau)|$  и  $|\gamma_j(\tau)|$ , где  $\gamma_j(\tau)$  относится к пучку после прохождения им специального линейного фильтра.

Наконец, следует упомянуть, что проблема полного определения спектрального распределения энергии из знания абсолютной величины комплексной степени когерентности в точности аналогична проблемам,

возникающим в других областях физики и техники, например в квантовой теории распада [Халфин (1957, 1960, 1961)], в теории рассеяния, в особенности рентгеновских лучей [Голдбергер, Льюис и Уотсон (1963)], в дифракционной теории отражения [О'Нейл и Вальтер (1963), Вальтер (1963)], в теории линейных электрических фильтров [Ли (1932)] и в других областях.

#### 5.4. Время когерентности и ширина полосы

С помощью комплексной степени когерентности второго порядка можно несколько точнее определить время когерентности света, чем с помощью соотношения (2,1), определяющего порядок величины.

Рассмотрим снова простой интерференционный эксперимент, иллюстрируемый рис. 1, в котором пучок света делится в интерферометре Майкельсона на два пучка. Между этими пучками вводится временнное запаздывание  $\tau$ , после чего они интерфеcируют. Поскольку видимость интерференционных полос, наблюдаемых в плоскости  $\mathcal{B}$ , пропорциональна абсолютной величине степени когерентности  $|\gamma(r, r, \tau)|$  ( $r$  указывает положение полупрозрачного зеркала  $M_1$ ), очевидно, что можно определить время когерентности  $\Delta t$  через  $|\gamma(r, r, \tau)|$ . Одно из возможных определений дает формула [Вольф (1958)]

$$(\Delta_t)^2 = N^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |\gamma(r, r, \tau)|^2 d\tau, \quad (5.23)$$

где

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(r, r, \tau)|^2 d\tau = \int_0^{\infty} w^2(r, r, v) dv, \quad (5.24)$$

а  $w(r, v)$ , как и раньше, обозначает нормированную спектральную плотность света. Равенство двух интегралов в (5.24) следует из теоремы Парсеваля для преобразования Фурье [Снеддон (1951), стр. 25].

Если эффективная ширина частот света определяется уравнением

$$(\Delta_v)^2 = N^{-1} \int_0^{\infty} (v - \bar{v})^2 w^2(r, r, v) dv, \quad (5.25)$$

где

$$\bar{v} = N^{-1} \int_0^{\infty} v w^2(r, r, v) dv, \quad (5.26)$$

то с помощью выкладок, подобных использованным Вейлем и Паули [Вейль (1931), стр. 77, 393] при доказательстве соотношения неопределенности, можно показать, что всегда имеет место следующее неравенство [Вольф (1958), Борн и Вольф (1964), стр. 541, 542; см. также Габор (1946)]:

$$(\Delta_t)(\Delta_v) \geq 1/4\pi. \quad (5.27)$$

Для квазимонохроматического света, спектр которого приближенно описывается гауссовским распределением, это неравенство можно приблизенно заменить равенством. Однако ввиду того, что в интегралах по частоте (5.24) — (5.26) нижним пределом является нуль, а не минус бесконечность, знак равенства в (5.27) никогда не может быть достигнут \*)

\*) Так как  $\gamma(\tau)$  — аналитический сигнал, при вычислении  $(\Delta_t)$  допустимы только такие комплексные корреляционные функции, фурье-преобразование которых  $w(v)$  тождественно исчезает при  $v < 0$ .

[ср. Майер и Леонович (1934), Кэй и Силвермэн (1957, 1959), Харкевич (1960)].

Другую меру времени когерентности предложил Мандель (1959) (см. также ниже, уравнение (6,14)) исходя из рассмотрения единичной ячейки фазового пространства фотонов. Она также определяется через  $\gamma$  в виде

$$(\Delta_2 t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(r, r, \tau)|^2 d\tau. \quad (5,28)$$

Если ширину полосы частот определить как

$$(\Delta_2 v) = \left[ \int_0^{\infty} w^2(r, r, v) dv \right]^{-1}, \quad (5,29)$$

то ввиду (5,24) всегда будет выполняться соотношение

$$(\Delta_2 t)(\Delta_2 v) = 1. \quad (5,30)$$

Для простых типов спектральных кривых  $(\Delta_1 t) \sim (\Delta_2 t)$ ,  $(\Delta_1 v) \sim (\Delta_2 v)$  [ср. Мандель и Вольф (1962), Мета (1963)]. Если, однако, спектральная плотность имеет более сложную форму, как, например, в случае оптического мазера (спектральное распределение с многочисленными пиками), два ряда определений могут привести к результатам, совершенно различным по порядку величины [Мандель и Вольф (1962)]. Поэтому в отдельных случаях, применяя то или иное определение, необходимо проявлять осторожность. Интересно отметить, что подобная ситуация возникает в вопросе о мере неопределенности сигнала радара и соответствующей мере ширины полосы частот [ср. Вудворд (1953), гл. 7]. Определения, рассмотренные нами в этом разделе, соответствуют экспериментам, в которых пучок света расщепляется на два пучка в области, окружающей точку поля  $P(r)$ . В экспериментах, включающих расщепление пучка в двух или более далеко отстоящих точках (как, например, в случае интерференционного эксперимента Юнга), могут повадиться более общие определения [ср. Вольф (1958 г.), раздел 5, Борн и Вольф (1964), стр. 543—544]. Однако когда нормированная спектральная плотность излучения одинакова во всех точках поля, спектры имеют относительно простую форму и вдобавок свет обладает взаимной спектральной чистотой (см. следующий раздел), данные выше определения, по-видимому, адекватны для большинства практических целей.

### 5.5. Взаимная спектральная чистота

Мы уже упоминали при обсуждении уравнения (3,28), что в общем случае пространственная и временная когерентности не могут быть резко разделены. Эти два типа когерентности зависят, потому что функция взаимной когерентности  $\Gamma$  удовлетворяет двум волновым уравнениям (3,28), которые связывают изменение функции  $\Gamma$  по отношению к ее пространственным и времененным переменным. Тем не менее можно показать, что во многих практически интересных случаях комплексная степень когерентности второго порядка может быть выражена — по крайней мере в хорошем приближении — в виде произведения двух функций, одна из которых представляет пространственную когерентность, а другая — временную. Возможность такой факторизации изучалась Манделем (1961c), который показал, что она тесно связана с определенными спектральными свойствами света.

Для начала ограничимся линейно поляризованным светом. Тогда поле может быть представлено комплексной стохастической скалярной волновой функцией  $V(\mathbf{r}, t)$ . Предположим, что функции  $V_1 \equiv V(\mathbf{r}_1, t)$  и  $V_2 \equiv V(\mathbf{r}_2, t)$  представляют поле в двух точках  $P_1(\mathbf{r}_1)$  и  $P_2(\mathbf{r}_2)$  соответственно, и пусть  $w_1(v)$  и  $w_2(v)$  — соответствующие нормированные функции спектральной плотности, т. е. преобразования Фурье нормированных временных корреляций  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau)$  и  $\gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \tau)$ . Предположим далее, что свет от точек  $P_1$  и  $P_2$  накладывается в точке  $P_3(\mathbf{r}_3)$ , и пусть  $w_3(v)$  будет соответствующей нормированной спектральной плотностью света в этой точке. В общем случае  $w_3(v)$  не связана простым образом с  $w_1(v)$  и  $w_2(v)$ , даже если  $w_1(v)$  и  $w_2(v)$  совпадают.

Если  $w_2(v) \equiv w_1(v)$  и существует область таких смежных точек  $P_3$ , что  $w_3(v) \equiv w_1(v)$ , то говорят, что  $V_1(t)$  и  $V_2(t)$  являются *взаимно спектрально чистыми*. Мандель (1961c) показал, что в этом случае корреляция  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  может быть выражена как произведение двух сомножителей согласно следующей *редукционной формуле*, справедливой для всех  $\tau$ :

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_0) \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau - \tau_0). \quad (5.31)$$

Здесь  $\tau_0$  — постоянная, представляющая временное запаздывание  $([P_1 P_3] - [P_2 P_3])/v$ , где [...] обозначает оптическую разность хода в среде, в которой распространяется свет и которая предполагается недиспергирующей, а  $v$  — скорость света в среде. Первый сомножитель в правой части (5.31) представляет собой пространственную когерентность, второй — временную. Очевидно, справедливо также обращение только что упомянутого результата: если выполняется (5.31), свет в точках  $P_1$  и  $P_2$  взаимно спектрально чист.

С помощью закона распространения взаимной функции когерентности было показано также, что если редукционная формула имеет место для всех пар точек на воображаемой поверхности, пересекающей световой пучок, и если, сверх того, нормированная спектральная плотность постоянна на этой поверхности, то (5.31) выполняется также всюду для поля, распространяющегося от поверхности, при условии, что дисперсия среды и встречающиеся разности хода достаточно малы. В частности, если свет образуется пространственно некогерентным источником, то для любых точек источника  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  может быть приближенно выражена в форме \*)  $\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_1, \tau)$ , где  $f$  — некоторая функция  $\mathbf{r}_1$  и  $\tau$ . Следовательно, в источнике свет взаимно спектрально чист. Если, кроме того, нормированная спектральная плотность одинакова для всех элементов источника, то, согласно только что указанному результату, излучаемый источником свет также взаимно спектрально чист, конечно, при условии соответствующих ограничений на свойства дисперсии среды и встречающиеся разности хода.

Интересное поведение взаимно спектрально чистых пучков описывает закон спектральной модуляции [Мандель (1962a)], выраженный приведенным ниже уравнением (5.33). Предположим, что пучки накладываются в точке  $P$ , так что оптическая длина пути  $[P_1 P] = v\tau_1$ ,  $[P_2 P] = v\tau_2$ . В то время как для взаимно спектрально чистых пучков нормированная спектральная плотность остается неизменной, когда пространственное запаздывание  $v |(\tau_1 - \tau_2) - \tau_0|$  мало по сравнению с длиной когерентности (обозначим ее  $c\tau_c$ ), то в противоположном случае, когда  $v |(\tau_1 - \tau_2) - \tau_0|$  велико, пространственная плотность становится косинусоидально

\*) См. примечание к уравнению (5.4).

модулированной и амплитуда модуляции зависит от степени пространственной когерентности света. Точнее, для взаимно спектрально чистых пучков мы имеем:

1) Если  $|(\tau_1 - \tau_2) - \tau_0| \ll \tau_c$ , то

$$w(v) \equiv w_1(v) [= w_2(v)]. \quad (5,32)$$

2) Если  $|(\tau_1 - \tau_2) - \tau_0| \gg \tau_c$ , то

$$w(v) = w_1(v) \{1 + \sigma |\gamma(r_1, r_2, \tau_0)| \times \\ \times \cos [\arg \gamma(r_1, r_2, \tau_0) - 2\pi v_0 (\tau_1 - \tau_2 - \tau_0)]\}, \quad (5,33)$$

где

$$\sigma = 2 \left[ \left( \frac{\langle I_1 \rangle}{\langle I_2 \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{\langle I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1}. \quad (5,33a)$$

Интересно сравнить эти результаты с соответствующими соотношениями, относящимися к (усредненному по времени) распределению интенсивности, возникающему при суперпозиции двух пучков:

3) Если  $|(\tau_1 - \tau_2) - \tau_0| \ll \tau_c$ , то

$$\langle I \rangle = [\langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle] \{1 + \sigma |\gamma(r, r_2, \tau_0)| \times \\ \times \cos [\arg \gamma(r_1, r_2, \tau_0) - 2\pi v_0 (\tau_1 - \tau_2 - \tau_0)]\}. \quad (5,34)$$

4) Если  $|(\tau_1 - \tau_2) - \tau_0| \gg \tau_c$ , то

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle. \quad (5,35)$$

Уравнение (5,34) следует из закона интерференции (3,20), если использовать (3,26). Уравнение (5,35) следует из (3,17), если использовать то обстоятельство, что  $\gamma(r_1, r_2, \tau) \sim 0$  для  $\tau \gg \tau_c$ . Уравнение (5,34) показывает, что когда  $|\tau_1 - \tau_2 - \tau_0|$  мало по сравнению со временем когерентности, степень когерентности  $|\gamma(r_1, r_2, \tau_0)|$  может быть определена из измерения вариаций интенсивности в интерференционной картине. Когда  $|\tau_1 - \tau_2 - \tau_0|$  значительно превосходит время когерентности, определение степени когерентности этим методом становится, согласно (5,35), невозможным. Закон спектральной модуляции (5,33) показывает, однако, что в этом случае упомянутое определение в принципе возможно из анализа спектра комбинированного пучка в области суперпозиции при условии, что свет взаимно спектрально чист. Интересно, что модуляция спектра продолжает существовать для произвольно больших разностей хода  $v(\tau_1 - \tau_2)$ , тогда как на нижнее значение разности хода существует ограничение. Этот результат имеет отношение к исследованиям, ведущим свое начало от эксперимента, связанного с измерением скорости света и выполненного Алфордом и Голдом (1958) (ср. конец раздела 7.2).

До сих пор мы рассматривали только случай линейно поляризованного света, но концепция взаимной спектральной чистоты и соответствующие редукционные формулы, конечно, относятся также к свету в других состояниях поляризации. В общем случае вместо скалярной корреляционной функции (второго порядка)  $\gamma(r_1, r_2, \tau)$  следует рассмотреть корреляционный тензор второго порядка  $\gamma_{jk}(r_1, r_2, \tau)$ , где  $j$  и  $k$  — поляризационные индексы, и исследовать возможность выражения каждой компоненты тензора в виде произведения более простых членов. Об относящихся сюда вопросах известно довольно мало, но некоторые проблемы этого типа кратко рассматривались Манделем и Вольфом (1961b, раздел 3) и Манделем (1963c, стр. 1107).

### 5.6. Ч а с т и ч н а я п о л я р и з а ц и я

В последней части раздела 3.1 был определен тензор когерентности электромагнитного поля второго порядка, причем отмечалось, что этот тензор ведет к единой трактовке эффектов когерентности и поляризации. В настоящем разделе мы покажем, как степень поляризации квазимонохроматической плоской волны может быть выражена через инварианты вращения соответствующей матрицы когерентности, а также обсудим некоторые связанные с этим вопросы.

Рассмотрим стационарный и эргодический ансамбль квазимохроматических плоских волн со средней частотой  $\nu_0$  и эффективной шириной полосы частот  $\Delta\nu \ll \nu_0$ , распространяющихся в направлении положительной оси  $z$ . Представим себе типичную волну этого ансамбля, и пусть  $E_x(\mathbf{r}, t)$ ,  $E_y(\mathbf{r}, t)$  обозначают комплексные аналитические сигналы, ассоциированные с (вещественными) компонентами электрического вектора в двух взаимно ортогональных направлениях, перпендикулярных к оси  $z$ , причем  $x, y, z$  образуют правую тройку. В силу поперечности плоской волны ( $E_z = 0$ ) электрический тензор когерентности, отнесенный к осям  $x, y, z$ , будет иметь (самое большое) четыре неисчезающих компонента, а именно компоненты с индексами  $xx, xy, yx$  и  $yy$ . Рассмотрим соответствующую матрицу  $2 \times 2$ :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = [\langle E_j^*(\mathbf{r}_1, \tau) E_k(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle] \quad (j, k = x, y), \quad (5.36)$$

где в правой части (5.36) ввиду нашего предположения о стационарности и эргодичности можно брать как среднее по ансамблю, так и среднее по времени от типичного члена ансамбля.

Мы намерены рассмотреть только корреляции между комплексными компонентами поля в одной точке ( $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ ) и для малых величин  $|\tau|$  ( $|\tau| \ll 1/\Delta\nu$ ). При выполнении последнего условия оба сомножителя в правой части (5.36) зависят от  $\tau$  только через мультипликативный фактор  $\exp(-2\pi i \nu_0 \tau)$  (ср. (3.36)), так что \*)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) &= \mathcal{J}^*(\mathbf{r}) \exp(-2\pi i \nu_0 \tau), \\ |\tau| &\ll 1/\Delta\nu, \end{aligned} \quad (5.37)$$

где  $\mathcal{J}^*$  — матрица, комплексно сопряженная матрице

$$\mathcal{J} = [\langle E_j(\mathbf{r}, t) E_k^*(\mathbf{r}, t) \rangle] \quad (j, k = x, y). \quad (5.38)$$

$\mathcal{J}$  называется *матрицей когерентности* [Вольф (1954b, 1959), Паррент и Роман (1960)]. Поскольку рассматриваются плоские волны, матрица  $\mathcal{J} = [\mathcal{J}_{ik}]$  одинакова для всех точек, расположенных в одной плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны. Для дальнейшего полезно ввести вектор-столбец

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x(\mathbf{r}, t) \\ E_y(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

и его эрмитово сопряженную вектор-строку

$$\mathcal{E}^+(\mathbf{r}, t) = (E_x^*(\mathbf{r}, t), E_y^*(\mathbf{r}, t)). \quad (5.40)$$

---

\*) Мы пишем в правой части (5.37)  $\mathcal{J}^*$  вместо  $\mathcal{J}$  (тем, чтобы матрица когерентности  $\mathcal{J}$  имела обычную форму и была, таким образом, формально в большей степени аналогична матрице плотности). Однако аналогия между матрицей когерентности и матрицей плотности только частичная. Кроме того, след  $\mathcal{J}$  не равен единице.

Тогда матрица когерентности  $\mathcal{J}$  может быть записана в форме

$$\mathcal{J}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (5,41)$$

Эта матрица когерентности, очевидно, эрмитова:  $\mathcal{J}^+ = \mathcal{J}$ . Усредненная интенсивность в точке  $\mathbf{r}$  дается в соответствующих единицах выражением

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle E_x^*(\mathbf{r}, t) E_x(\mathbf{r}, t) \rangle + \langle E_y^*(\mathbf{r}, t) E_y(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \mathbf{E}^* \mathbf{E} \rangle = \text{Sp } \mathcal{J}. \quad (5,42)$$

Рассмотрим теперь, как изменяется матрица когерентности, когда свет проходит через некоторое простое (не дающее изображения) оптическое устройство вроде компенсатора или поляризатора. Вектор  $\mathbf{E}'$ , описываемый прошедшим полем, связан с вектором  $\mathbf{E}$ , описывающим падающее поле, соотношением

$$\mathbf{E}' = \mathcal{L} \mathbf{E}, \quad (5,43)$$

где  $\mathcal{L}$  — матрица  $2 \times 2$ , характеризующая оптическое устройство. Отсюда следует, что матрица когерентности  $\mathcal{J}'$  прошедшего поля имеет вид

$$\mathcal{J}' = \langle \mathbf{E}' \mathbf{E}'^+ \rangle = \langle \mathcal{L} \mathbf{E} \mathbf{E}^+ \mathcal{L}^+ \rangle = \mathcal{L} \langle \mathbf{E} \mathbf{E}^+ \rangle \mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \mathcal{J} \mathcal{L}^+. \quad (5,44)$$

Из (5,42) и (5,44) вытекает, что усредненная интенсивность света, выходящего из оптического устройства, описывается выражением

$$\langle I' \rangle = \text{Sp} (\mathcal{L} \mathcal{J} \mathcal{L}^+). \quad (5,45)$$

Форма матрицы  $\mathcal{L}$  для некоторых простых оптических устройств рассматривалась Паррентом и Романом (1960) [см. также Джонс (1941а, б, 1942, 1948), Хоу Хсен-ю, Рихартц и Юнь Кан-лянь (1947), Маратэй (1963), О'Нейл (1963), гл. IX]. Для компенсатора, который вводит малые запаздывания  $\varepsilon_1 \ll v_0/\Delta v$  и  $\varepsilon_2 \ll v_0/\Delta v$  для  $x$ - и  $y$ -компонент соответственно,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_c$ , где

$$\mathcal{L}_c = \begin{pmatrix} e^{i\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_2} \end{pmatrix}. \quad (5,46)$$

Для поляризатора, который пропускает лишь компоненту электрического поля, составляющую угол  $\theta$  с направлением  $x$  в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_p$ , где

$$\mathcal{L}_p = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5,47)$$

Формулы (5,43) — (5,45) применимы также к прохождению света через последовательность нескольких устройств, причем матрица  $\mathcal{L}$ , описывающая всю последовательность, равна произведению матриц  $\mathcal{L}$ , описывающих прохождение света через отдельные элементы устройства. Так, для прохождения света через компенсатор и последующий поляризатор

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_p \mathcal{L}_c = \begin{pmatrix} e^{i\varepsilon_1} \cos^2 \theta & e^{i\varepsilon_2} \cos \theta \sin \theta \\ e^{i\varepsilon_1} \sin \theta \cos \theta & e^{i\varepsilon_2} \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5,48)$$

Из (5,48) и (5,45) легко найти, что усредненная интенсивность прошедшей световой волны дается выражением

$$\langle J'(\delta, \theta, t) \rangle = \mathcal{J}_{xx} \cos^2 \theta + \mathcal{J}_{yy} \sin^2 \theta + (\mathcal{J}_{xy} e^{-i\delta} + \mathcal{J}_{yx} e^{i\delta}) \sin \theta \cos \theta, \quad (5,49)$$

где

$$\delta = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \quad (5,50)$$

а  $\mathcal{J}_{xx}$  и т. д. — элементы матрицы когерентности падающего света, определяемые формулой (5,38). Уравнение (5,49) показывает, что элементы

матрицы когерентности плоской квазимохроматической световой волны могут быть определены из измерений усредненной интенсивности  $\langle I'(\delta, \theta, t) \rangle$  для ряда значений параметров  $\delta$  и  $\theta$ , т. е. для ряда значений сдвига фазы и поляризационного угла, вводимых при прохождении волны через компенсатор и поляризатор [ср. Вольф (1959), уравнение (3,6), Борн и Вольф (1964), стр. 546]. Такое определение элементов матрицы когерентности аналогично определению взаимной функции когерентности  $\Gamma(r_1, r_2, \tau)$  из измерений интенсивности в интерференционном эксперименте Юнга (ср. раздел 3.1). Фактически, как мы сейчас покажем, между этими двумя ситуациями существует еще более близкая аналогия.

Если мы положим

$$\langle I^{(1)} \rangle = \mathcal{J}_{xx} \cos^2 \theta, \quad \langle I^{(2)} \rangle = \mathcal{J}_{yy} \sin^2 \theta \quad (5,51)$$

и

$$\gamma_{xy}(0) = |\gamma_{xy}(0)| \exp[i\beta_{xy}(0)] = \mathcal{J}_{xy}/(\mathcal{J}_{xx})^{1/2} (\mathcal{J}_{yy})^{1/2*}, \quad (5,52)$$

то (5,49) сводится к соотношению

$$\begin{aligned} \langle I'(\delta, \theta, t) \rangle &= \langle I^{(1)} \rangle + \langle I^{(2)} \rangle + \\ &+ 2 \langle I^{(1)} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle I^{(2)} \rangle^{\frac{1}{2}} |\gamma_{xy}(0)| \cos[\beta_{xy}(0) - \delta]. \end{aligned} \quad (5,53)$$

Эта формула очень похожа на уравнение (3,20), которое описывает интерференцию между двумя частично когерентными пучками. Коэффициент  $\gamma_{xy}(0)$  играет теперь роль комплексной степени когерентности второго порядка  $\gamma(r_1, r_2, 0)$  для скалярного поля. Как видно из (5,52) и (5,38),  $\gamma_{xx}(0)$  представляет корреляцию между компонентами комплексного электрического поля в точке  $r$ .

В природе чаще всего встречается полностью неполяризованный (или естественный) свет. Такой свет характеризуется тем, что усредненная интенсивность  $\langle I'(\delta, \theta, t) \rangle$  не зависит от  $\delta$  и  $\theta$ , т. е. не зависит от сдвига фаз, который может быть введен между  $x$ - и  $y$ -компонентами его электрического поля, и одинакова для всех его азимутальных компонент. Из (5,49) легко показать, что для выполнения этих свойств матрица когерентности должна иметь вид

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \langle I \rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5,54)$$

где  $\langle I \rangle = \mathcal{J}_{xx} + \mathcal{J}_{yy}$  — полная усредненная интенсивность поля. Таким образом, матрица когерентности неполяризованного света пропорциональна единичной матрице.

Согласно (5,54) недиагональные элементы матрицы когерентности неполяризованного света равны нулю. Следовательно, любые две взаимно ортогональные компоненты комплексного электрического поля неполяризованной волны, перпендикулярные к направлению распространения, полностью некоррелированы [ $\gamma_{xy}(0) = 0$ ]. Другой крайний случай, когда компоненты поля полностью коррелированы, по традиции описывается как полностью поляризованный свет [ср. Борн и Вольф (1964), стр. 549—550]. В этом случае  $|\gamma_{xy}(0)| = 1$ , и согласно (5,52) это условие предполагает, что  $\det \mathcal{J} = \mathcal{J}_{xx} \mathcal{J}_{yy} - \mathcal{J}_{xy} \mathcal{J}_{yx} = 0$ .

Вольф (1959) показал, что матрица когерентности  $\mathcal{J}$  любой квазимохроматической плоской волны может быть единственным образом разложена в сумму двух матриц когерентности  $\mathcal{J}^{(u)}$  и  $\mathcal{J}^{(p)}$ , первая из

\*) Аргумент нуль в  $\gamma_{xy}$ ,  $|\gamma_{xx}|$  и  $\beta_{xy}$  пишется здесь для того, чтобы подчеркнуть, что эти величины относятся к нулевому запаздыванию  $\tau$  между  $E_x$  и  $E_y$ .

которых представляет полностью неполяризованную волну, а вторая — полностью поляризованную \*). Так как усредненная интенсивность волны, согласно (5,42), равна следу ее матрицы когерентности, отношение

$$P = \text{Sp } \mathcal{J}^{(p)} / (\text{Sp } \mathcal{J}^{(p)} + \text{Sp } \mathcal{J}^{(u)}) \quad (5,55)$$

описывает степень поляризации волны. Явные вычисления [Вольф (1959), Борн и Вольф (1964), стр. 550—552] дают

$$P = \left\{ 1 - [4 \det \mathcal{J} / (\text{Sp } \mathcal{J})^2] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5,56)$$

Эта формула выражает степень поляризации волны через инварианты вращения ее матрицы когерентности.

Существует целый ряд эквивалентных альтернативных выражений для степени поляризации. Так, можно показать [см., например, Вольф (1959), Паррент и Роман (1960), Борн и Вольф (1964), стр. 552], что выражение  $P$  через собственные значения  $\langle I_1 \rangle$  и  $\langle I_2 \rangle$  ( $\langle I_2 \rangle < \langle I_1 \rangle$ ) матрицы когерентности имеет вид

$$P = (\langle I_1 \rangle - \langle I_2 \rangle) / (\langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle). \quad (5,57)$$

Поскольку полная усредненная интенсивность волны  $\langle I \rangle = \text{Sp } \mathcal{J} = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle$ , из (5,57) следует, что эти собственные значения могут быть выражены через степень поляризации следующим образом:

$$\langle I_1 \rangle = \frac{1}{2} (1 + P) \langle I \rangle, \quad \langle I_2 \rangle = \frac{1}{2} (1 - P) \langle I \rangle. \quad (5,58)$$

Этот результат был использован нами при выводе (4,41).

Следует заметить, что коэффициент корреляции зависит от специального выбора осей  $x, y$ , так что  $\gamma_{xy}(0)$ , вообще говоря, будет меняться при вращении осей  $x, y$  вокруг оси  $z$ . Однако можно показать [Вольф (1959), Борн и Вольф (1964), стр. 553], что максимум, который  $|\gamma_{xy}(0)|$  достигает при вращении осей, есть как раз степень поляризации  $P$  волны. Более того, специальный выбор осей, максимизирующий  $|\gamma_{xy}(0)|$ , обладает тем свойством, что интенсивности  $\langle I_x \rangle$  и  $\langle I_y \rangle$  оказываются равными.

Рассмотренное в этом разделе представление матрицы когерентности тесно связано с представлением через так называемые параметры Стокса [Стокс (1852)]. Связь между матрицей когерентности, матрицей плотности и параметрами Стокса обсуждалась во многих работах, в частности в следующих: Фальков и Мак-Доналд (1951), Фано (1954, 1957), Мак-Мастер (1954), Толхук (1956), Вольф (1954б, 1959), Паррент и Роман (1960), Тер-Хаар (1961), Маратэй (1963), О'Нейл (1963), Борн и Вольф (1964, раздел 10.8.3). Некоторые применения аппарата матриц когерентности были описаны Кускером и Рибарилем (1959), Ко (1961, 1962), Карчевским и Вольфом (1963, 1965а, б) и Джекобсоном (1964).

Рассматриваемая в этом разделе матрица когерентности достаточна для описания явлений поляризации плоских квазимохроматических волн при условии, что временные запаздывание, вводимое между компонентами электрического поля, достаточно мало ( $|\tau| \ll 1/\Delta\nu$ ). Для других волновых полей и при условии, что временные запаздывания велики или волна распространяется через более сложную (диспергирующую) среду, надо использовать более общую матрицу когерентности, именно матрицу, ассоциированную с зависящими от  $\tau$  тензорами когерентности, такими,

\*) При рассмотрении флуктуаций интенсивности оказывается более полезным несколько иное разбиение на две полностью поляризованные компоненты [Мандель (1963с)].

как тензор (3,38). Вместо этого можно использовать их преобразования Фурье по  $\tau$ . Матрицы когерентности этого последнего типа были впервые введены (для плоских волновых полей) Винером (1928, 1929, 1930) [см. также Баракат (1963) и Панчаратнам (1963а, б)].

### 5.7. Когерентные свойства излучения абсолютно черного тела

Основные статистические свойства излучения абсолютно черного тела в общих чертах были описаны в разделе 4.5. В настоящем разделе мы вычислим некоторые тензоры когерентности этого излучения.

Выражения для тензора корреляции второго порядка вещественного поля излучения абсолютно черного тела (по существу—вещественная часть тензора  $\mathcal{E}_{jk}$ , определенного равенством (3,38)) были получены Бурре (1960) с помощью аппарата, аналогичного тому, что применялся в теории изотропной турбулентности несжимаемой жидкости. Бурре использовал лишь концепции классической теории, однако квантовые свойства излучения были учтены тем, что спектр описывался формулой Планка. Главные результаты впоследствии были вновь получены Сарфаттом (1963) в рамках явного квантовомеханического расчета. Некоторые относящиеся сюда вопросы были коротко рассмотрены Хеммом и Харрисом (1963) \*).

Корреляционные функции ассоциированного комплексного поля изучались Кано и Вольфом (1962), Метой (1963) и Метой и Вольфом (1964а, б). В двух первых работах рассматривается временная когерентность, в двух других — как временная, так и пространственная когерентность. Эти последние работы содержат также детальное исследование поведения электрического, магнитного и смешанного тензоров корреляции второго порядка и общие выражения для электромагнитных тензоров корреляции произвольного порядка. Комплексные электрические тензоры корреляции произвольного порядка рассматривались также Глаубером (1963б, стр. 2787) [см. также Мандель (1963а)]. Некоторые из этих исследований основаны на классической волновой теории, другие — на квантовой теории поля, и, как можно было ожидать (с точки зрения обсуждения в разделе 4.5), оба подхода ведут к эквивалентным результатам. Мы опишем кратко вывод основных формул, основанный на квантово-теоретико-полевом подходе, и обсудим некоторые из их следствий.

Операторы электрического поля  $\hat{\mathbf{E}}$  и магнитного поля  $\hat{\mathbf{H}}$  в пространственно-временной точке  $x = r, ct$  поля излучения, заключенного в прямоугольный ящик со сторонами длиной  $L$ , могут быть разложены в ряд Фурье в виде [ср. (4,3)]

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{E}}(x) &= \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(x) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(x), \\ \hat{\mathbf{H}}(x) &= \hat{\mathbf{H}}^{(+)}(x) + \hat{\mathbf{H}}^{(-)}(x),\end{aligned}\quad (5,59)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(x) &= \{\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(x)\}^+ = i \left(\frac{\hbar c}{L^3}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{k}, s} k^2 \hat{a}_{\mathbf{k}, s} e_{\mathbf{k}, s} e^{i \mathbf{k} \cdot x}, \\ \hat{\mathbf{H}}^{(+)}(x) &= \{\hat{\mathbf{H}}^{(-)}(x)\}^+ = i \left(\frac{\hbar c}{L^3}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{k}, s} k^2 \hat{a}_{\mathbf{k}, s} \frac{\mathbf{k} e_{\mathbf{k}, s}}{k} e^{i \mathbf{k} \cdot x}.\end{aligned}\quad (5,60)$$

\*.) Характеристический функционал равновесной системы бозонов вычислен недавно Келлером [Э. Келлер, Phys. Rev. B 139, 18 (1965) 202]. (Прим. ред.)

Здесь  $kx = \mathbf{kr} - kct$  ( $k = |\mathbf{k}|$ ),  $\hat{a}_{ks}$  и  $\hat{a}_{ks}^\dagger$  — операторы уничтожения и рождения фотонов с импульсом  $\mathbf{k}$  и поляризацией  $s$  ( $s = 1, 2$ ), которые удовлетворяют коммутационным соотношениям (3,41), а  $\mathbf{e}_{\mathbf{k},s}$  — единичные векторы, удовлетворяющие соотношениям (3,42).

Тензоры корреляции второго порядка (3,37), выраженные через операторы (5,60), определяются формулами

$$\mathcal{E}_{ij}(x_1, x_2) = \text{Sp}\{\hat{Q}E_i^{(-)}(x_1)E_j^{(+)}(x_2)\}, \quad (5,61a)$$

$$\mathcal{A}_{ij}(x_1, x_2) = \text{Sp}\{\hat{Q}\hat{H}_i^{(-)}(x_1)\hat{H}_j^{(+)}(x_2)\}, \quad (5,61b)$$

$$\mathcal{G}_{ij}(x_1, x_2) = \text{Sp}\{\hat{Q}\hat{E}_i^{(-)}(x_1)\hat{H}_j^{(+)}(x_2)\}, \quad (5,61b)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ij}(x_1, x_2) = \text{Sp}\{\hat{Q}\hat{H}_i^{(-)}(x_1)\hat{E}_j^{(+)}(x_2)\}, \quad (5,61)$$

где  $\hat{Q}$  — матрица плотности поля.

Выразим теперь  $\hat{Q}$  в «диагональной форме» (4,9) и подставим в «функцию распределения в фазовом пространстве» выражение (4,31), соответствующее излучению абсолютно черного тела. Это дает

$$\hat{Q} = \int \prod_{\mathbf{k}, s} \frac{1}{\pi \langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle} \exp[-|v_{\mathbf{k}, s}|^2 / \langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle] |v_{\mathbf{k}, s}\rangle \langle v_{\mathbf{k}, s}| d^2 v_{\mathbf{k}, s}. \quad (5,62)$$

Как и раньше,  $v_{\mathbf{k}, s}$  являются собственными значениями операторов уничтожения  $a_{\mathbf{k}, s}$  (ср. (3,44)), а  $\langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle$  — математическое ожидание (4,32) оператора числа фотонов,

$$\langle n_{\mathbf{k}, s} \rangle = (e^{\alpha h} - 1)^{-1}, \quad \alpha = \hbar c/kT. \quad (5,63)$$

Из (5,61), (5,62), (5,60) и (3,44) после прямых вычислений [Мета и Вольф (1964b)] в предположении, что линейные размеры ящика  $L$  велики по сравнению со средней длиной волны излучения, получаем

$$\mathcal{E}_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = \mathcal{A}_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = \frac{\hbar c}{4\pi^2} \int \frac{k^2 \delta_{ij} - k_i k_j}{k(e^{\alpha h} - 1)} \exp\{i(\mathbf{kr} - kct)\} d^3 k, \quad (5,64)$$

$$\mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = -\tilde{\mathcal{G}}_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = \frac{\hbar c}{4\pi^2} \epsilon_{ijk} \int \frac{k_k}{e^{\alpha h} - 1} \exp\{i(\mathbf{kr} - kct)\} d^3 k. \quad (5,65)$$

Здесь  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ,  $\tau = t_2 - t_1$ , а  $\epsilon_{ijk}$  — полностью антисимметричный единичный тензор Леви-Чивиты, т. е.  $\epsilon_{ijk}$  равен  $+1$  или  $-1$  в зависимости от того, образуют ли индексы  $(i, j, k)$  четную или нечетную перестановку  $(x, y, z)$ , и  $\epsilon_{ijk} = 0$ , если два индекса равны. Мы видим, что аргументы  $(x_1, x_2)$  4-тензоров входят только в комбинациях  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  и  $t_2 - t_1$ , как можно было ожидать из изотропии и стационарности излучения; это указано явно тем, что вместо  $\mathcal{E}_{ij}(x_1, x_2)$  написано  $\mathcal{E}_{ij}(\mathbf{r}, \tau)$  и т. д.

Для дальнейшего рассмотрения полезно обычным образом нормировать  $\mathcal{E}_{ij}$  и другие тензоры. Поэтому положим

$$\gamma_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = (1/N) \mathcal{E}_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = (1/N) \mathcal{A}_{ij}(\mathbf{r}, \tau), \quad (5,66)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = (1/N) \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = -(1/N) \tilde{\mathcal{G}}_{ij}(\mathbf{r}, \tau), \quad (5,67)$$

где

$$N = [\mathcal{E}_{ii}(0, 0)]^{\frac{1}{2}} [\mathcal{E}_{ij}(0, 0)]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{E}_{ii}(0, 0) = \underset{\text{(нет суммирования)}}{\mathcal{A}_{ii}(0, 0)} = \frac{16}{45} [\pi^6 K^4 T^4 / (\hbar c)^3]. \quad (5,68)$$

Интегралы в (5,64) и (5,65) можно разложить в ряд, после чего для нормированных корреляционных функций [Мета и Вольф (1964a, b)]

получаются следующие выражения:

$$\gamma_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = \frac{90\alpha^4}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{\{(na + i\tau)^2 + r^2\}^2} + 2 \frac{r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{\{(na + i\tau)^2 + r^2\}^3} \right\}, \quad (5,69)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = i \frac{480\alpha^4}{\pi^4} r_h \epsilon_{ijk} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na + i\tau}{\{(na + i\tau)^2 + r^2\}^3}. \quad (5,70)$$

Из формул (5,69) и (5,70) можно без труда сделать некоторые выводы. Рассмотрим сперва нормированный тензор корреляции  $\gamma_{ij}$ . Если положить в (5,69)  $r = 0$ , получится следующее выражение для нормированного

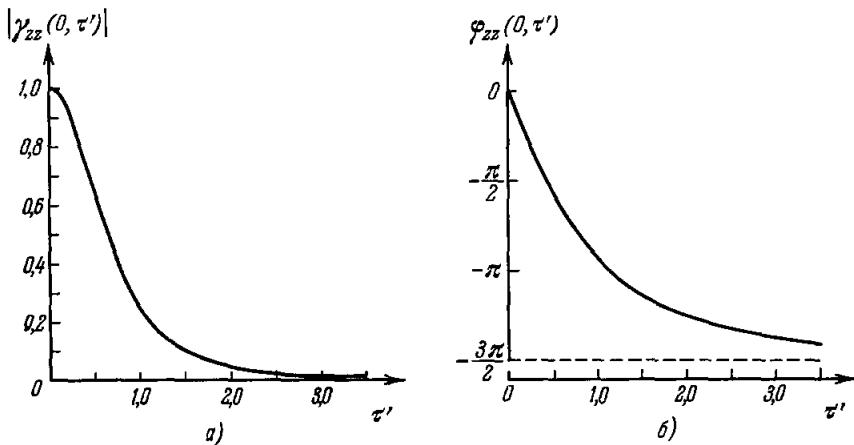


Рис. 9. Временная когерентность излучения абсолютно черного тела.  
а) Модуль  $|\gamma_{zz}(0, \tau)|$  и б) аргумент  $\varphi_{zz}(0, \tau)$  типичной диагональной компоненты тензора когерентности второго порядка:  $|\gamma_{zz}(0, -\tau)| = |\gamma_{zz}(0, \tau)|$ ,  $\varphi_{zz}(0, -\tau) = -\varphi_{zz}(0, \tau)$ ,  $\tau' = (KT/h)\tau$ . [По И. Каю и Э. Вольфу (1962). Имеющаяся в рисунке ошибка в разметке осей  $\tau'$  здесь исправлена.]

тензора, характеризующего временную когерентность электрического (а также магнитного) поля:

$$\gamma_{ij}(0, \tau) = (90/\pi^4) \zeta [4,1 + (i\tau/a)] \delta_{ij}, \quad (5,71)$$

где  $\zeta(s, a)$  — обобщенная  $\zeta$ -функция Римана [Уиттекер и Ватсон (1940), стр. 266]:

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}. \quad (5,72)$$

Мы видим, что тензор  $\gamma_{ij}(0, \tau)$  *диагонален*. Следовательно, любые две ортогональные компоненты комплексных полей  $E_i(\mathbf{r}, t)$ ,  $E_j^*(\mathbf{r}, t + \tau)$  (или  $H_i(\mathbf{r}, t)$ ,  $H_j^*(\mathbf{r}, t + \tau)$ ) ( $i \neq j$ ), рассматриваемые в одной и той же точке  $\mathbf{r}$  в моменты времени  $t$  и  $t + \tau$  соответственно, оказываются полностью некоррелированными, независимо от величины  $\tau$ . Все диагональные компоненты тензора равны друг другу. Кривая, изображающая поведение модуля диагонального элемента, показана на рис. 9. Следует заметить, что временная когерентность распространяется лишь на область  $\tau$  порядка  $5\alpha/c$ , т. е. на величину порядка среднего периода излучения  $1/\tilde{v} \sim 1,9\alpha/c$  [см. Мета (1963)].

Рассмотрим теперь пространственную когерентность поля, описываемую  $\gamma_{ij}(\mathbf{r}, 0)$ . Положив в (5,69)  $\tau = 0$ , мы получим

$$\gamma_{ij}(\mathbf{r}, 0) = \frac{90}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\delta_{ij}}{(n^2 + r^2/\alpha^2)} + \frac{2}{\alpha^2} \frac{r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{(n^2 + r^2/\alpha^2)^3} \right]. \quad (5,73)$$

Ряд, возникающий в (5,73), можно просуммировать и получить выражение

$$\gamma_{ij}(\mathbf{r}, 0) = (45/4r'^4)[A(r')\delta_{ij} + B(r')(r'_i r'_j/r'^2)], \quad (5,74)$$

где введены обозначения

$$A(r') = -r' \operatorname{cth} r' - r'^2 \operatorname{csch}^2 r' - 2r'^3 \operatorname{csch}^2 r' \operatorname{cth} r' + 4, \quad (5,75)$$

$$B(r') = 3r' \operatorname{cth} r' + 3r'^2 \operatorname{csch}^2 r' + 2r'^3 \operatorname{csch}^2 r' \operatorname{cth} r' - 8, \quad (5,75)$$

$$r' = (\pi/\alpha)r. \quad (5,76)$$

Равенство (5,74) справедливо для всех  $\mathbf{r}$ , но неудобно для вычисления  $\gamma_{ij}(\mathbf{r}, 0)$  при малых  $r'$ . Однако для малых  $r'$  непосредственно из (5,73) получаем

$$\gamma_{ij}(\mathbf{r}, 0) = \delta_{ij} \left[ 1 - \frac{8}{21} r'^2 + \frac{3}{35} r'^4 + \dots \right] + (r'_i r'_j/r'^2) \left[ -\frac{4}{21} r'^2 - \frac{2}{35} r'^4 + \dots \right]. \quad (5,77)$$

Как видно из (5,73), «пространственный» тензор когерентности  $\gamma_{ij}(\mathbf{r}, 0)$  веществен. Рис. 10 иллюстрирует продольную пространственную когерентность, т. е. изменение  $\gamma_{zz}(\mathbf{r}, 0)$  в зависимости от  $\mathbf{r}$ , когда  $\mathbf{r}$  направлено вдоль оси  $z$ , и поперечную пространственную когерентность, т. е. изменение  $\gamma_{zz}(\mathbf{r}, 0)$  в зависимости от  $\mathbf{r}$ , когда  $\mathbf{r}$  перпендикулярно к оси  $z$ . В силу симметрии поведение остальных диагональных компонент тензора  $\gamma_{ij}(\mathbf{r}, 0)$ , очевидно, совпадает с поведением  $\gamma_{zz}(\mathbf{r}, 0)$ . Рис. 11 иллюстрирует поведение как диагональных, так и недиагональных элементов  $\gamma_{ij}(\mathbf{r}, 0)$  в различных плоскостях.

Теперь рассмотрим нормированный «смешанный» корреляционный тензор  $\sigma_{ij}$ . Из (5,70) видно, что этот тензор полностью антисимметричен, так что его диагональные компоненты равны нулю. Кроме того,  $\sigma_{ij}(0, \tau) \equiv 0$ , так что между комплексным электрическим и магнитным полями в одной и той же точке отсутствует временная когерентность. Что касается пространственной когерентности, мы видим из (5,70), что типичная недиагональная компонента  $\sigma$  для  $\tau = 0$  имеет вид

$$\sigma_{xy}(\mathbf{r}, 0) = i \frac{180}{\alpha \pi^4} z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + r^2/\alpha^2)^3}. \quad (5,78)$$

Из (5,78) следует, что  $\sigma_{xy}(\mathbf{r}, 0) = 0$  для  $z = 0$ . Рисунки, показывающие поведение  $\sigma_{xy}(\mathbf{r}, 0)$ , приведены в работе Меты и Вольфа (1964а).

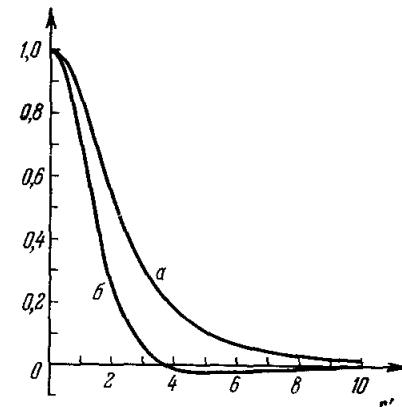


Рис. 10. а) Продольная пространственная когерентность излучения черного тела — изменение типичной диагональной компоненты  $\gamma_{zz}(\mathbf{r}', 0)$  в зависимости от  $\mathbf{r}'$ , когда  $\mathbf{r}'$  направлено вдоль оси  $z$ . б) Поперечная пространственная когерентность излучения черного тела — изменение  $\gamma_{zz}(\mathbf{r}', 0)$  в зависимости от  $\mathbf{r}'$ , когда  $\mathbf{r}'$  направлен перпендикулярно к оси  $z$ .  $\mathbf{r}' = (\pi/\alpha)\mathbf{r}$ ;  $\alpha = \hbar c/KT$ . [По Р. Бурре (1960), Дж. Сарфатту (1963) и К. Мете и Э. Вольфу (1964а)].

Как видно из рис. 10 и 11, пространственная когерентность распространяется лишь на область, имеющую линейные размеры порядка  $5\alpha/\pi \sim 1,6\alpha$ , т. е. порядка величины средней длины волны  $\bar{\lambda} \sim 1,9\alpha$  излучения [см. Мета (1963)].

Для полноты рассмотрим кратко также тензоры корреляции высших порядков для излучения абсолютно черного тела. Тензор корреляции

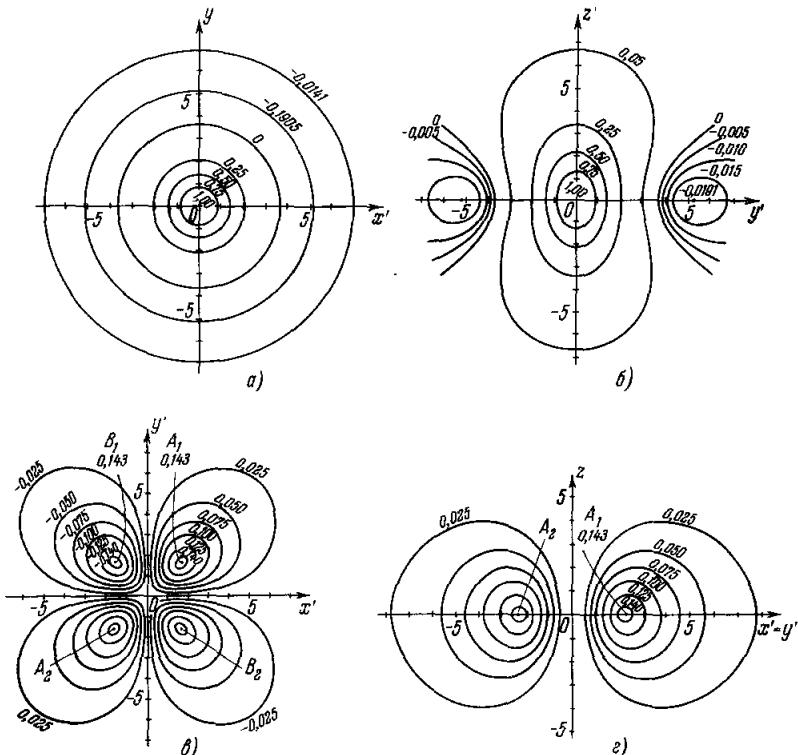


Рис. 11. Пространственная когерентность излучения абсолютно черного тела. Поведение типичной диагональной и недиагональной компонент нормированного комплексного электрического тензора когерентности второго порядка  $\gamma_{ij}$ . [По К. Мете и Э. Вольфу (1963а).]  
а) линии уровня  $\gamma_{zz}(r, 0)$  в плоскости  $x, y$ ; б) линии уровня  $\gamma_{zz}(r, 0)$  в плоскости  $y, z$ ;  
в) линии уровня  $\gamma_{xy}(r, 0)$  в плоскости  $x, y$ ; г) линии уровня  $\gamma_{xy}(r, 0)$  в плоскости  $x, y$ .

электрического поля произвольного порядка определяется выражением, аналогичным (4,4), с операторами  $\hat{E}^{(-)}$  и  $\hat{E}^{(+)}$  вместо  $\hat{A}^{(-)}$  и  $\hat{A}^{(+)}$  соответственно:

$$\mathcal{E}_{j_1, j_2, \dots, j_{N+M}}^{(N, M)}(x_1, x_2, \dots, x_{N+M}) = \text{Sp} \{ q \hat{E}_{j_1}^{(-)}(x_1) \dots \hat{E}_{j_N}^{(-)}(x_N) \times \\ \times \hat{E}_{j_{N+1}}^{(+)}(x_{N+1}) \dots \hat{E}_{j_{N+M}}^{(+)}(x_{N+M}) \}. \quad (5,79)$$

Здесь  $\hat{E}_{j_p}^{(-)}(x_p)$  и  $\hat{E}_{j_q}^{(+)}(x_q)$  — декартовы компоненты операторов  $\hat{E}^{(-)}(x_p)$  и  $\hat{E}^{(+)}(x_q)$  в пространственно-временных точках  $x_p$  и  $x_q$  соответственно. С помощью (4,9), (5,60) и (3,44) эти корреляционные тензоры можно выразить как средние по фазовому пространству от произведений компонент комплексных классических электрических полей (ср. (4,12)), а именно

$$\mathcal{E}_{j_1, \dots, j_{N+M}}^{(N, M)}(x_1, x_2, \dots, x_{N+M}) = \int \Phi(\{v_k, s\}) \times \\ \times E_{j_1}^*(x_1) \dots E_{j_N}^*(x_N) E_{j_{N+1}}(x_{N+1}) \dots E_{j_{N+M}}(x_{N+M}) d^2 \{v_k, s\}. \quad (5,80)$$

При вычислении интеграла (5,80) классическое поле  $\mathbf{E}$  должно рассматриваться как выраженное в форме (ср. (3,47))

$$\mathbf{E}(x) = i \left( \frac{\hbar c}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{k}, s} k^{\frac{1}{2}} v_{\mathbf{k}, s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, s} \exp(i k x). \quad (5,81)$$

Для излучения абсолютно черного тела распределение  $\Phi(\{v_{\mathbf{k}, s}\})$  в фазовом пространстве является в переменных  $v_{\mathbf{k}, s}$  многомерным гауссовским распределением (4,31). Следовательно, согласно (4,35), все электрические тензоры корреляции высших порядков могут быть выражены через тензор второго порядка следующим образом:

$$\mathcal{E}_{j_1, j_2, \dots, j_{2N}}^{(N, N)}(x_1, \dots, x_N; x_{N+1}, \dots, x_{2N}) = \sum_{\pi} \mathcal{E}_{j_1, j_{N+1}}^{(1, 1)}(x_1; x_{N+1}) \mathcal{E}_{j_2, j_{N+2}}^{(1, 1)}(x_2; x_{N+2}) \dots \mathcal{E}_{j_N, j_{2N}}^{(1, 1)}(x_N; x_{2N}), \quad (5,82a)$$

$$\mathcal{E}^{(N, M)} = 0 \quad \text{при } N \neq M. \quad (5,82b)$$

В правой части (5,82a) под  $\mathcal{E}_{j_1, j_{N+1}}^{(1, 1)}(x_1, x_{N+1})$  и т. д. подразумевается комплексный электрический корреляционный тензор второго порядка, который в предыдущем разделе 5.7 обозначался теми же символами, но с опущенными индексами (1,1). Символ  $\sum_{\pi}$  означает сумму по всем  $N!$  возможным перестановкам индексов  $1, \dots, N$ . Подобные выражения имеют место также для магнитных и смешанных тензоров корреляции произвольного порядка.

## 6. ЭФФЕКТЫ КОГЕРЕНТНОСТИ ЧЕТВЕРТОГО И БОЛЕЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Если корреляции второго порядка комплексных амплитуд имеют разность интенсивности (т. е.  $|V(\mathbf{r}, t)|^2$ ) и полезны при описании распределения интенсивности поля, то моменты четвертого и более высокого порядка необходимы для описания корреляций между флуктуациями интенсивности света в двух или более пространственно-временных точках. Впервые существование таких флуктуаций в некоторых оптических полях было экспериментально продемонстрировано Хэнбери Брауном и Твиссом (1956а), которые использовали безынерционные фотоэлектрические приемники для измерения корреляции между флуктуациями интенсивности. В последующие годы этот эффект был более тщательно исследован с помощью как корреляционной техники, так и техники совпадений фотоэлектрических отсчетов [Хэнбери Браун и Твисс (1957а, б), Твисс, Литтл и Хэнбери Браун (1957), Твисс и Литтл (1959), Ребка и Паунд (1957), Браннен, Фергюсон и Велау (1958), Харуит (1960), Яноши, Нэрей и Варга (1961)] и стал основой нового метода определения угловых диаметров звезд — корреляционной интерферометрии [Хэнбери Браун и Твисс (1956б, 1958а, б), Ратклифф (1956), стр. 233, Хэнбери Браун (1960, 1964), Гамо (1961, 1963б), Хэнбери Браун, Хазард, Дэвис и Аллен (1964); см. также Брейсуелл (1958)]. Впоследствии удалось показать, что корреляционные измерения содержат также информацию о спектральном распределении [Форрестер (1961а, б), Гамо (1961, 1963а, б), Джайвенс (1961б, 1962), Вольф (1962, 1965), Мандель (1962б, 1963б, 1965)] и состоянии поляризации света [Вольф (1960), Мандель и Вольф (1961б), Мандель (1963с)].

Теоретические рассмотрения эффектов корреляции интенсивностей проводились большей частью в классической или полуклассической форме [Перселл (1956), Хэнбери Браун и Твисс (1957а), Вольф (1957), Яноши

(1957, 1959), Мандель (1958, 1959), Кан (1958), Мандель и Вольф (1961б), Мандель, Сударшан и Вольф (1964), Вольф и Мета (1964)], часто в явном или неявном предположении, что поле излучения теплового источника может рассматриваться как гауссовский случайный процесс. Первая квантовомеханическая трактовка происхождения корреляций, принадлежащая Дикке (1954) [см. также схематическое описание метода, данное Дикке (1964)], была впоследствии значительно расширена [Сеницкий (1958, 1962а)]. В частности, Фано (1961) показал, что два независимых возбужденных атома (играющих роль некогерентного источника) приводят к корреляции возбуждения двух независимых атомов, расположенных один вблизи другого и соответствующих двум приемникам. В последнее время некоторые из этих эффектов рассматривались также с точки зрения ансамблей квантованных полей [Глаубер (1963а, б, 1964), Сударшан (1963б), Голдбергер и Уотсон (1964, 1965), Холидэй и Сэйдж (1964); ср. также Мандель (1965)].

Так как фотоэлектрические явления играют существенную роль во всех измерениях корреляции интенсивностей, мы начнем с рассмотрения процесса фотоэлектрической регистрации. Следуя методу Манделя, Сударшана и Вольфа (1964), мы покажем, что выход освещенного фотоприемника содержит информацию о флюктуациях поля излучения в том смысле, что мгновенная вероятность фотоэмиссии пропорциональна «мгновенной классической интенсивности»  $V^*(\mathbf{r}, t)V(\mathbf{r}, t)$  света на фотокатоде. Этот вывод справедлив до тех пор, пока интенсивность света не слишком велика и фотоэлектрическая эмиссия описывается первым порядком теории возмущений; он связан также с тем обстоятельством, что  $V(\mathbf{r}, t)$  является собственным значением оператора уничтожения фотона в точке  $\mathbf{r}, t$ . Затем мы рассмотрим форму флюктуаций и их корреляций. Детальный анализ процесса фотоэлектрической регистрации недавно был дан Келли и Клейнером (1964). Основные результаты этого анализа находятся в хорошем согласии с изложенными ниже результатами для неквантованного поля.

#### 6.1. Процесс фотоэлектрической регистрации

Рассмотрим плоскую волну квазимохроматического света, падающего нормально на фотоэлектрическую поверхность, содержащую много электронов в связанных состояниях  $|\psi_b\rangle$ . Под воздействием света некоторые электроны будут совершать переходы в континuum несвязанных состояний  $|\psi_h\rangle$  и становиться свободными, чтобы потом быть зарегистрированными фотоприемником с некоторой средней вероятностью  $\eta$ . Поскольку  $|\psi_h\rangle$  являются собственными состояниями невозмущенного гамильтонiana электрона  $\hat{H}_0$ , то

$$\hat{H}_0 |\psi_h\rangle = E_h |\psi_h\rangle. \quad (6.1)$$

Пусть влияние падающего света описывается гамильтонианом взаимодействия

$$\hat{H}_1(\mathbf{r}, t) = (e/mc) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{p}}, \quad (6.2)$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  — вещественный вектор-потенциал классического поля, которое мы будем предполагать имеющим форму квазимохроматической плоской волны, а  $\hat{\mathbf{p}}$  — импульс электрона. Используя обычные методы теории возмущений, зависящих от времени, можно показать [ср. Мандель, Сударшан и Вольф (1964)], что вероятность  $P(t) \Delta t$  регистрации foto-

электрона в течение интервала времени  $t, t + \Delta t$  дается формулой

$$P(t) \Delta t = (2\pi e^2 \eta / h^2 m^2 c^2) \sum_b \sum_{\text{pol}} W^*(t) W(t) \Delta t. \quad (6,3)$$

$\sum_b$  в этом выражении означает сумму по всем начальным связанным состояниям электрона, а  $\sum_{\text{pol}}$  — сумму по всем поляризациям конечного состояния. Комплексная скалярная функция  $W(t)$ , спектр Фурье которой содержит только положительные частоты, получается из вектора поля  $A(r, t)$  посредством линейного преобразования. В типичном случае, когда плотность состояний  $\varrho(\omega)$  и матричный элемент  $\langle \psi_\omega | \hat{p} | \psi_b \rangle$ , связывающий начальное состояние с энергией  $E_b$  с конечным состоянием с энергией  $E_b + \hbar\omega$ , в достаточно узкой полосе частот падающего света не зависят от  $\omega$ ,  $P(t) \Delta t$  сводится к

$$P(t) \Delta t = \alpha V^*(r, t) V(r, t) \Delta t. \quad (6,4)$$

Здесь  $V(r, t)$  — векторный «аналитический сигнал» (ср. (3,2)), который получается из  $A(r, t)$  отбрасыванием отрицательных частот в интегральном разложении Фурье и может быть отождествлен с комплексной амплитудой поля из уравнений (3,2) и (3,47). Постоянная  $\alpha$  представляет собой квантовую эффективность приемника и в случае одного электрона дается соотношением [Мандель, Сударшан и Вольф (1964)]

$$\alpha = \frac{2\pi e^2 \eta}{h^2 m^2 c^2} \varrho(\omega_0) \sum_b \sum_{\text{pol}} |\epsilon \langle \psi_{\omega_0} | \hat{p} | \psi_b \rangle|^2, \quad (6,5)$$

где  $\epsilon$  — комплексный единичный вектор (определенный с точностью до унитарного преобразования), удовлетворяющий соотношению  $V(r, t) = \epsilon V(r, t)$ , а  $\omega_0/2\pi$  — средняя частота света. Таким образом, мгновенная вероятность фоторегистрации, согласно (6,4), пропорциональна мгновенной классической интенсивности излучения  $I(r, t)$ . Этого результата можно было, конечно, ожидать, исходя из того, что  $V(r, t)$  — собственное значение оператора уничтожения  $\hat{A}^{(+)}(r, t)$  и что вероятность фотоэмиссии пропорциональна квадрату модуля матричного элемента  $\langle S_2 | \hat{A}^{(+)}(r, t) | S_1 \rangle$ , связывающего начальное  $|S_1\rangle$  и конечное  $|S_2\rangle$  состояния поля (ср. (4,5)). Полученный вывод вновь подчеркивает тесную связь между полуклассическим и квантовым описаниями поля в применении к фотоэлектрической регистрации. Подобные же выводы недавно были сделаны Джейнсом и Каммингсом (1963) из рассмотрения взаимодействия полей и атомных систем.

## 6.2. Расспределение вероятностей фотоэлектрических отсчетов

С помощью дифференциальной вероятности  $P(t)$  можно показать [ср. Мандель (1958, 1963), Коркоран и Пао (1962), Келли и Клейнер (1964)], что вероятность  $p(n; T, t)$  отсчета  $n$  фотоэлектронов в интервале времени от  $t$  до  $t + T$  дается средним по ансамблю от распределения Пуассона

$$P(n; T, t) = (1/n!) \langle [\alpha U(T, t)]^n \exp [-\alpha U(T, t)] \rangle, \quad (6,6)$$

где

$$U(T, t) = \int_t^{t+T} I(t') dt', \quad (6,7)$$

и усреднение следует производить по ансамблю  $U(T, t)$ . Окончательное выражение (см. также ниже, уравнение (6,12)) представляет собой для фотоэлектронов аналог квантовомеханического распределения (4,15) для числа фотонов квантованного поля. Если, как обычно, поле излучения является стационарным и эргодическим, вероятность  $p(n; T, t)$  не зависит от  $t$  и ее можно записать в виде  $p(n, T)$ . Операция усреднения по ансамблю  $U(T, t)$  приводит в общем случае к отклонению  $p(n, T)$  от распределения Пуассона. Рассмотрим, однако, специальный случай, когда интенсивность падающего света заметно не флуктуирует во времени. Как мы видели в разделе 4.6, выход оптического мазера, генерирующего на одной моде, приближается к этой ситуации. Тогда, согласно (6,6),  $p(n, T)$  остается распределением Пуассона с параметром  $\langle n \rangle = \alpha \langle I \rangle T$  и отсчеты подчиняются статистике классических частиц [Мандель (1964a), Мандель, Сударшан и Вольф (1964); см. также Мета и Вольф (1964)].

Рассмотрим теперь другой важный случай — падающее на приемник тепловое излучение, когда  $V(r, t)$  — гауссовский случайный процесс. Для света, взаимно спектрально чистого в отношении поляризации, мы показали в разделе 4.5, что соответствующее распределение вероятности  $p(I)$  интенсивности  $I$  зависит лишь от степени поляризации  $P$  и описывается формулой (4,41). Прежде всего предположим, что  $T$  много меньше времени когерентности света, так что  $U(T, t)$  сводится к  $I(t)T$ . Тогда распределение  $p(n, T)$  получается непосредственно из (6,6) и (4,41) [ср. Мандель (1963c), Хелстром (1964)]:

$$\begin{aligned} p(n, T \ll 1/\Delta\nu) &= \int_0^\infty p(I) \frac{(\alpha IT)^n}{n!} \exp(-\alpha IT) dI = \\ &= \frac{1}{P \langle n \rangle} \left\{ \left[ \frac{1}{1+2/(1+P)\langle n \rangle} \right]^{n+1} - \left[ \frac{1}{1+2/(1-P)\langle n \rangle} \right]^{n+1} \right\}, \end{aligned} \quad (6,8)$$

где  $\langle n \rangle = \alpha \langle I \rangle T$  — математическое ожидание числа отсчетов. Выражение (6,8) имеет форму распределения  $n$  бозонов по  $2/(1+P)$  ячейкам фазового пространства при условии  $1 \leq 2/(1+P) \leq 2$ . Поляризованный свет ( $P = 1$ ) соответствует одной ячейке с

$$p(n, T \ll 1/\Delta\nu) = 1/(1 + \langle n \rangle) [1 + (1/\langle n \rangle)]^n, \quad (6,9)$$

что является обычным распределением Бозе — Эйнштейна [ср. Фюрт (1928а), Морзе (1962), стр. 218]. Неполяризованный свет ( $P = 0$ ) соответствует распределению по двум ячейкам, при этом

$$p(n, T \ll 1/\Delta\nu) = (1+n)/(1+\langle n \rangle/2)^2 (1+2/\langle n \rangle)^n. \quad (6,10)$$

Таким образом, согласно (6,8), флуктуации числа фотоэлектрических отсчетов содержат информацию о состоянии поляризации поля излучения и их измерение позволяет определить степень поляризации  $P$  [ср. Вольф (1960)]. Поскольку мы показали в разделе 5.6, что собственные значения матрицы когерентности определяются через  $P$ , вся матрица может быть получена из  $p(n, T \ll 1/\Delta\nu)$ . Заметим, что хотя распределение  $p(n, T)$  относится к фотоэлектронам, оно допускает естественную интерпретацию в терминах флуктуаций числа фотонов квантованного поля, что подтверждается сравнением с уравнением (4,15) \*).

\*.) Сравнение (6,6) и (6,12) с (4,15) показывает только, что распределения фотоэлектронов и фотонов аналогичны по форме. Для того чтобы упомянутая в тексте интерпретация была возможной, необходимо, чтобы статистика фотонов «воспроизводилась» статистикой фотоэлектронов при условии, что квантовая эффектив-

С первого взгляда может показаться странным, что число ячеек фазового пространства одного фотона полностью определяется его состоянием поляризации без привлечения также и распределения импульса фотонов. Причина этого состоит в том, что мы выбрали для рассмотрения плоский пучок, распространяющийся, например, в направлении  $Oz$ , и ограничились интервалом времени счета  $T \ll 1/\Delta\nu$ , который перекрывает не более одной ячейки вдоль оси  $z$  фазового пространства [см. также Габор (1950)]. Исходя из (6,8), можно легко показать, что дисперсия  $\langle(\Delta n)^2\rangle$  числа зарегистрированных отсчетов равна

$$\langle(\Delta n)^2\rangle = \langle n \rangle \left[ 1 - \frac{1}{2} (1 + P^2) \langle n \rangle \right]. \quad (6,11)$$

Этот результат был получен также более непосредственно [Вольф (1960)]. Недавно удалось обобщить эту формулу на тот случай, когда доступный объем фазового пространства ограничен [Декомпс и Кацлер (1963), Кацлер (1964)].

Если  $T$  не мало по сравнению с  $1/\Delta\nu$ , то  $p(n; T, t)$  следует вычислять усреднением по ансамблю интегральных интенсивностей  $U$ , определенных уравнением (6,7). Таким образом, если  $U$  имеет распределение  $p(U)$ , то

$$p(n; T, t) = \int_0^\infty p(U) \frac{(aU)^n}{n!} \exp(-aU) dU. \quad (6,12)$$

Это выражение аналогично уравнению (4,15), описывающему флуктуации числа фотонов квантованного поля. Сходство (6,12) и (4,15б) подсказывает, что  $p(n, T)$  отражает свойства распределения оператора числа фотонов \*). Тот факт, что уравнение (6,12) может быть выведено из полуклассического рассмотрения, до некоторой степени ответствен за успех полуклассического метода в объяснении результатов измерений. Быть может, небезынтересно заметить, что уравнение (6,12) можно обратить, т. е., вообще говоря, распределение  $U$  возможно вывести, зная  $p(n, T)$  [Вольф и Мета (1964)] \*\*).

В общем случае неизвестно простое выражение для  $p(U)$  даже для теплового излучения света. Однако предельная форма  $p(U)$  при  $T \rightarrow \infty$  для поляризованного теплового излучения была дана Райсом (1945, раздел 3.9), и при подстановке ее в (6,12) мы получаем [ср. Мандель (1959), Хелстром (1964), Болжано (1964)] \*\*\*)

$$p(n, T \gg 1/\Delta\nu) = \frac{\Gamma(n+T/\tau_c)}{n! \Gamma(T/\tau_c) (1 - \langle n \rangle \tau_c/T)^{T/\tau_c} (1 + T/\langle n \rangle \tau_c)^n}, \quad (6,13)$$

что является приемлемым приближением при  $T \gg 1/\Delta\nu$ . Это распределение имеет форму, соответствующую  $n$  бозонам, распределенным по  $T/\tau_c$  равным ячейкам фазового пространства [ср. Мандель (1959)]. Временной

ность  $\eta < 1$ . Вероятность регистрации  $k$  фотоэлектронов при поглощении  $n$  фотонов ( $k \leq n$ )

$$p(k, n) = \frac{n!}{k! (n-k)!} \eta^k (1-\eta)^{n-k}.$$

Можно показать, однако [см. И. А. Steinberg, J. T. La Tourette, Appl. Optics 3 (1964), 901], что распределение Пуассона, лежащее в основе распределений (6,6) и (4,15), действительно воспроизводится при биномиальном преобразовании  $p(k/n)$ . (Прим. ред.)

\* См. примечание на стр. 642. (Ред.)

\*\* См. также G. J. Gough, Proc. Phys. Soc. 86 (1965), 39. (Прим. ред.)

\*\*\* Приближенное выражение для этого случая см.: T. P. McLean, E. R. Pike, Phys. Letts. 15 (1965), 318. (Прим. ред.)

параметр  $\tau_c$ , определяемый соотношением

$$\tau_c = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma^{(t, 1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)|^2 d\tau, \quad (6.14)$$

появляется здесь как естественная мера времени когерентности в том смысле, что  $T/\tau_c$  определяет статистические степени свободы излучения (см. также раздел 5.4). Если свет частично поляризован, соответствующее распределение отсчетов получается с помощью свертки выражений, подобных (6.13) [ср. также Мандель (1963d), Хелстром (1964)].

Применим результаты, заключенные в уравнениях (6.8) и (6.13), к излучению теплового источника. Хотя в общем случае мы не имеем явного выражения для  $p(U)$ , легко можно использовать (6.12), чтобы связать моменты и кумулянты распределений  $n$  и  $U$  для световых пучков любого рода. Если через  $M_n(x)$  и  $M_U(x)$  обозначить соответствующие производящие функции моментов, то из (6.12) и хорошо известных свойств распределения Пуассона нетрудно найти [ср. Кенни и Кипинг (1954), стр. 74]

$$M_n(x) = \langle \exp[aU(e^x - 1)] \rangle, \quad (6.15)$$

где  $\langle \dots \rangle$  обозначают среднее по ансамблю случайной переменной  $U$ . Из определения производящей функции моментов

$$M_n(x) = M_U(ae^x - a). \quad (6.16)$$

Разлагая это соотношение в ряд по степеням  $x$  и вычисляя коэффициенты разложения, мы получим соотношения между соответствующими моментами. С другой стороны, (6.16) позволяет нам написать подобное уравнение, содержащее производящие функции кумулянты  $K_n(x)$  и  $K_U(x)$  [Кендалл (1952), стр. 90]:

$$K_n(x) = K_U(ae^x - a). \quad (6.17)$$

Обозначив через  $k_n^{(i)}$  и  $k_U^{(i)}$  соответствующие кумулянты, мы получаем с помощью разложения в степенной ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!} k_n^{(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i (e^x - 1)^i}{i!} k_U^{(i)}.$$

Разлагая затем правую часть в степенной ряд по  $x$  и сравнивая коэффициенты при  $x^i$ , мы получаем следующие соотношения между кумулянтами \*) [Мандель (1959, 1963)], справедливые для излучения любого рода:

$$\left. \begin{aligned} k_n^{(1)} &= ak_U^{(1)}, \\ k_n^{(2)} &= ak_U^{(1)} + a^2 k_U^{(2)}, \\ k_n^{(3)} &= ak_U^{(1)} + 3a^2 k_U^{(2)} + a^3 k_U^{(3)}, \\ k_n^{(4)} &= ak_U^{(1)} + 7a^2 k_U^{(2)} + 6a^3 k_U^{(3)} + a^4 k_U^{(4)} \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

и т. д.

В некоторых случаях, таких, как поляризованное излучение теплового источника, когда  $I(\mathbf{r}, t)$  имеет экспоненциальное распределение, удается вычислить кумулянты  $k_U^{(i)}$  [Слепян (1958)], после чего  $k_n^{(i)}$  находятся непосредственно. Но, даже не зная явно кумулянты, можно получить из (6.18) один-два интересных вывода.

\*) В уравнении (10) работы Манделя (1959) имеется ошибка, которая здесь исправлена.

Так, поскольку  $k_n^{(2)}$  и  $k_U^{(2)}$  представляют собой дисперсии  $\langle (\Delta n)^2 \rangle$  и  $\langle (\Delta U)^2 \rangle$ , мы имеем из второго уравнения (6,18)

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle + a^2 \langle (\Delta U)^2 \rangle. \quad (6,19)$$

Это соотношение показывает, что флуктуации фотоэлектрических отсчетов всегда можно представить в виде суммы вкладов от флуктуаций классических частиц и флуктуаций классических волновых полей [ср. Мандель, Сударшан и Вольф (1964)]. Оно напоминает известную формулу Эйнштейна [Эйнштейн (1909а, б); см. также Боте (1927)], обобщенную позднее Фюртом (1928а, б), для флуктуаций энергии излучения абсолютно черного тела в тепловом равновесии. С другой стороны, соотношение (6,19) справедливо для стационарных световых пучков любого типа. В частности, когда  $\langle (\Delta U)^2 \rangle$  очень мало, как это может быть для лазерного пучка,  $\langle (\Delta n)^2 \rangle \approx \langle n \rangle$ .

Вообще, когда поле излучения очень слабо, первые члены в правой части уравнений (6,18) имеют тенденцию стать доминирующими. Следовательно, все кумулянты  $k_n^{(i)}$  стремятся к  $\alpha k_U^{(i)} = \alpha \langle U \rangle - \alpha \langle I \rangle T = \langle n \rangle$ , а это означает, что распределение становится пуассоновским \*). Таким образом, в очень слабых полях фотоэлектроны подчиняются статистике классических частиц. С другой стороны, в сильных полях доминирующим в (6,18) становится последний член, и  $k_n^{(i)} \rightarrow \alpha^i k_U^{(i)}$ . Тогда распределение  $n$  стремится к распределению  $\alpha U$ , которое пропорционально классической интегральной интенсивности.

Подчеркнем, что выражения, подобные (6,19), применимы к световым пучкам, но не к изолированному оптическому полю, как, например, полю, заключенному в ящик. Однако путем изменения интерпретации  $n$  и  $U$  уравнения (6,16) и (6,19) можно обобщить применительно к произвольному квантовому состоянию самого оптического поля безотносительно к приемнику.

Итак, пусть теперь  $\hat{n}$  будет оператором, соответствующим числу фотонов в объеме  $\delta V$  (линейные размеры которого предполагаются большими по сравнению с длиной волны) в данный момент времени  $t$  и с поляризацией  $j$ . Мы можем выразить этот оператор через операторы рождения и уничтожения  $\hat{A}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  и  $\hat{A}_j^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ , которые связаны линейно с использовавшимися раньше операторами

$$\hat{A}_j^{(-)}(\mathbf{r}, t) \text{ и } \hat{A}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t)$$

таким образом \*\*) [ср. Швебер (1962), стр. 172], что

$$\hat{n} = \int_{\delta V} \hat{A}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) \hat{A}_j^{(-)}(\mathbf{r}, t) d^3 r.$$

Тогда, если обозначить углковыми скобками квантовомеханическое ожидание,  $m$ -й момент  $\hat{n}$  выразится следующим образом:

$$\langle \hat{n}_m \rangle = \int_{\delta V} \dots \int \langle \hat{A}_j^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) \hat{A}_j^{(-)}(\mathbf{r}_1, t) \dots \times \\ \times \dots \hat{A}_j^{(+)}(\mathbf{r}_m, t) \hat{A}_j^{(-)}(\mathbf{r}_m, t) \rangle d^3 r_1 \dots d^3 r_m,$$

\*) Аналогичный вывод другим методом получен недавно в работе А. А. Курикша, (Радиотехника и электроника '10 (1965), 1600). (Прил. реф.)

\*\*)  $\hat{A}_j^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  определяется вместо уравнения (3,40) разложением

$$\hat{A}_j^{(-)}(\mathbf{r}, t) = (k c / L^3)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{k}, s} \hat{a}_{\mathbf{k}, s} (\varepsilon_{\mathbf{k}, s})_j \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - ckt)].$$

тогда как корреляция  $m$ -го порядка, как показано в разделе 4.2, описывается уравнением

$$\langle \hat{U}_m \rangle = \langle : \hat{n}_m : \rangle = \int_{\delta V} \dots \int \langle \hat{A}_j^{'+}(\mathbf{r}_1, t) \dots \times \\ \times \hat{A}_j^{'+}(\mathbf{r}_m, t) \hat{A}_j'(\mathbf{r}_1, t) \dots \hat{A}_j'(\mathbf{r}_m, t) \rangle d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_m,$$

где двоеточия обозначают нормальное упорядочение операторов.

Можно показать, что производящие функции для  $\langle \hat{n}_m \rangle$  и  $\langle \hat{U}_m \rangle$ , т. е.

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle \hat{n}_m \rangle x^m}{m!} \quad \text{и} \quad 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle \hat{U}_m \rangle x^m}{m!},$$

связаны соотношением [ср. Швингер (1961), Мандель (1964d), Чилметти (1964), Луселл (1964), стр. 116]

$$\langle \exp [\hat{n}x] \rangle = \langle : \exp [\hat{n}(e^x - 1)] : \rangle, \quad (6.20)$$

которое является квантовомеханически обобщенным аналогом (6.16). Мы можем теперь связать  $\hat{n}_m$  и  $\hat{U}_m$ , приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в разложении уравнения (6.20) в степенной ряд. Так, для математического ожидания среднеквадратичного уклонения  $\hat{n}$  находим [ср. Мандель (1964d)]

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle \hat{n}_2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = \langle \hat{n} \rangle + [\langle \hat{U}_2 \rangle - \langle U_1 \rangle^2], \quad (6.21)$$

где угловые скобки означают квантовомеханическое ожидание для произвольного состояния. Соотношение (6.21) является квантовомеханически обобщенным аналогом (6.19) [ср. несколько отличающийся результат Холидэя и Сэйджа (1964)]. Хотя формально они кажутся подобными, член, заключенный в квадратные скобки, имеет теперь характер корреляции и не обязательно положителен. В самом деле, очевидно, что для фоковских состояний поля, в которых  $\langle (\Delta n)^2 \rangle$  исчезает, этот член должен быть отрицательным.

### 6.3. Эффекты группировки при фотоэлектрической регистрации

Мы уже видели, что в общем случае распределение фотоэлектрических отсчетов отличается от пуассоновского и дисперсия числа регистрируемых отсчетов обычно превосходит дисперсию, отвечающую статистике Пуассона. Это указывает, что фотоэлектроны (или фотоны) не появляются случайным образом, а имеют определенные характерные свойства группировки.

Проблему определения корреляционных эффектов в эмиссии излучения впервые детально рассмотрел Дикке (1954), который показал, что корреляция возникает вследствие связи отдельных излучателей источника через поле излучения. Эта связь очень сильна в мазере, но в известной степени она присутствует во всех источниках и приводит как к пространственной, так и к временной корреляции испущенных фотонов. Корреляции и их изменение во времени детально рассматривались Сеницким (1958, 1961а, 1962а). Здесь мы хотим лишь заметить, что свойства группировки фотоэлектрических отсчетов содержатся в характере распределения  $p(n; T, t)$ , описываемого соотношением (6.6). Группировка вызывает корреляцию числа отсчетов, регистрируемых несколькими приемниками.

Считая поле стационарным, рассмотрим условную вероятность  $p_c(t | t + \tau) \Delta\tau$  того, что фотоэлектрический отсчет будет зарегистрирован в течение интервала времени от  $t + \tau$  до  $t + \tau + \Delta\tau$  при условии, что предыдущий отчет был зарегистрирован в момент  $t$ . Используя определение условной вероятности [ср. Кендал (1952), стр. 167] и равенство (6.4), находим, что

$$p_c(t | t + \tau) \Delta\tau = \langle P(t) P(t + \tau) \rangle \Delta t \Delta\tau / \langle P(t) \rangle \Delta t = \alpha \langle I(t) I(t + \tau) \rangle \Delta\tau / \langle I \rangle. \quad (6.22)$$

Для стационарного процесса вероятность, конечно, зависит только от  $\tau$ .

Из полученного выражения непосредственно видно, что в том случае, когда мгновенная интенсивность света  $I(t)$  постоянна,  $p_c(t | t + \tau) \Delta\tau$  сводится к  $\alpha I \Delta\tau$ , т. е. также является постоянным и не зависит от предыдущих отсчетов. Следовательно, отдельные отсчеты статистически независимы и, как показано в разделе 6.2, распределение отсчетов оказывается пуассоновским. Однако во всех других случаях  $p_c(t | t + \tau)$  зависит от  $\tau$ .

Рассмотрим фотоэлектрический приемник, освещенный параллельным пучком света от теплового источника, для которого  $V(\mathbf{r}, t)$  — гауссовский случайный процесс. Если  $V_1(\mathbf{r}, t)$  и  $V_2(\mathbf{r}, t)$  — взаимно ортогональные поляризационные компоненты  $V(\mathbf{r}, t)$ , лежащие в плоскости, нормальной к направлению распространения света, то с помощью теоремы моментов для комплексного гауссовского процесса можно показать [ср. Рид (1962), Мета (1965b), стр. 398; формула также следует немедленно из уравнения (A.7) работы Манделя и Вольфа (1961b)], что

$$\begin{aligned} \langle |V_1(\mathbf{r}, t)|^2 |V_2(\mathbf{r}, t + \tau)|^2 \rangle &= \langle I_1(\mathbf{r}, t) I_2(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \\ &= \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle [1 + |\gamma_{12}^{(1,1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)|^2], \end{aligned} \quad (6.23)$$

где  $\gamma_{12}^{(1,1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)$  — нормированная взаимная корреляционная функция для  $V_1(\mathbf{r}, t)$  и  $V_2(\mathbf{r}, t)$ . Если поляризационные компоненты поля подчиняются условию взаимной спектральной чистоты \*) (ср. раздел 5.5)

$$\gamma_{12}^{(1,1)}(\tau) = \gamma_{12}^{(1,1)}(0) \gamma_{11}^{(1,1)}(\tau) = \gamma_{12}^{(1,1)}(0) \gamma_{22}^{(1,1)}(\tau) \equiv \gamma_{12}^{(1,1)}(0) \gamma^{(1,1)}(\tau),$$

то (6.23) переходит в следующее соотношение \*):

$$\langle I_1(\mathbf{r}, t) I_2(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle [1 + |\gamma_{12}^{(1,1)}(0)|^2 |\gamma^{(1,1)}(\tau)|^2]. \quad (6.24)$$

Записывая  $I(\mathbf{r}, t)$  в виде

$$I(\mathbf{r}, t) = I_1(\mathbf{r}, t) + I_2(\mathbf{r}, t)$$

и используя (6.24), мы можем выразить автокорреляционную функцию полной интенсивности в форме [ср. Мандель и Вольф (1961b)]

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}, t) I(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle &= \sum_{i,j=1,2} \langle I_i(\mathbf{r}, t) I_j(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \\ &= (\langle I_1 \rangle^2 + \langle I_2 \rangle^2) [1 + |\gamma^{(1,1)}(\tau)|^2] + 2 \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle [1 + |\gamma_{12}^{(1,1)}(0)|^2 |\gamma^{(1,1)}(\tau)|^2]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

До сих пор оси ортогональных поляризационных компонент поля  $V_1(\mathbf{r}, t)$  и  $V_2(\mathbf{r}, t)$  были произвольны, и из свойств уравнения (6.25) ясно, что корреляции вообще не должны зависеть от выбора осей. Однако Вольф (1959) показал, что всегда можно выбрать оси так, чтобы выполнялось равенство

$$\langle I_1(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle I_2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} I(\mathbf{r}, t),$$

\*) Для краткости мы иногда будем опускать пространственные координаты  $\mathbf{r}$ .

и что при этих условиях  $|\gamma_{12}^{(1,1)}(0)|$  максимален и равен степени поляризации  $P$  [ср. также Паррент и Роман (1960), Борн и Вольф (1964), стр. 533]. При таком выборе (6,25) немедленно сводится к

$$\langle I(\mathbf{r}, t) I(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} (1 + P^2) |\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)|^2 \right], \quad (6,26)$$

а (6,22) принимает вид

$$p_c(t | t + \tau) d\tau = a \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle \left[ 1 + \frac{1}{2} (1 + P^2) |\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)|^2 \right] d\tau. \quad (6,27)$$

Так как  $|\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t)| \approx 1$  для  $\tau \ll \tau_c$  и  $\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) \approx 0$  для  $\tau \gg \tau_c$ , мы видим, что имеется повышенная вероятность того, что второй фотон

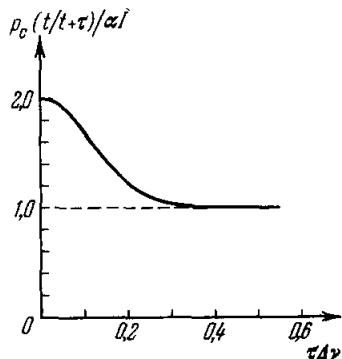


Рис. 12. Условная плотность вероятности  $p_c(t | t + \tau)$  для гауссовского спектрального профиля со среднеквадратичной шириной  $\Delta\nu$ . [По Л. Манделью (1963d).]

излучения в возбужденном газе. Этот процесс приводит к корреляции в испускании фотонов и к удвоенной вероятности последовательного

будет зарегистрирован в течение времени, меньшего чем  $\tau_c$ , после предыдущего. Это иллюстрирует хорошо известные свойства группировки пучка фотонов. Хотя, строго говоря,  $p_c(t | t + \tau)$  относится к флуктуационным свойствам фотоэлектронов, а не фотонов, мы все же интерпретируем испускание фотоэлектрона как отсчет фотона; в конце концов только в этом смысле фотон может быть практически зарегистрирован.

Рис. 12 показывает форму распределения  $p_c(t | t + \tau)$

для поляризованного теплового излучения, имеющего гауссовский спектральный профиль. Мы видим, что максимальный фактор группировки по сравнению со случаем независимых отсчетов равен 2. В чем заключается источник явлений группировки, ясно показал выполненный Дикке анализ процесса

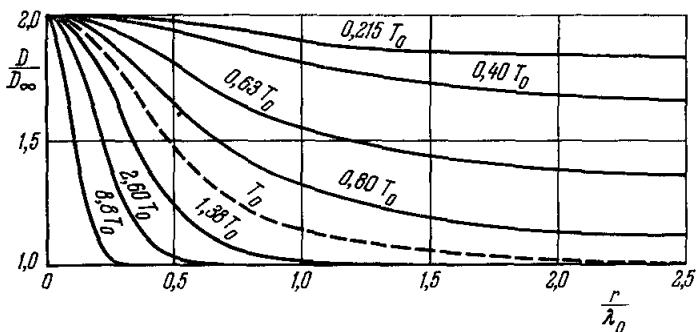


Рис. 13. Изменение плотности  $D(r)$  в газе Бозе — Эйнштейна в зависимости от расстояния  $r$  от данной молекулы для различных температур  $T$  в пределе слабого обменного взаимодействия Ван-дер-Ваальса.

$T_0$  — температура конденсации,  $\lambda_0$  — средняя длина волны де Броиля при температуре  $T_0$ . [По Ф. Лондону (1943).]

испускания двух фотонов с одинаковым импульсом  $\hbar k$ . Стоит заметить, что распределения показанной на рис. 12 формы, описывающие прост-

ранственную группировку фотонов, хорошо известны для фотонного газа в тепловом равновесии [Козари и Аулук (1957)] или вообще для всякой системы слабо взаимодействующих бозонов [Уленбек и Гроппер (1932), Лондон (1938, 1943)]. Это иллюстрирует рис. 13, который показывает среднюю плотность частиц  $D(r)$  на расстоянии  $r$  от фиксированной частицы [ср. также Ландау и Лифшиц (1958, стр. 373)].

Эффекты группировки, описываемые уравнением (6.27), ведут к повышению частоты появления «совпадающих» отсчетов, регистрируемых двумя фотоприемниками, освещаемыми двумя частично когерентными пучками теплового излучения. Рассмотрим два таких пучка поляризованного теплового излучения, имеющих мгновенные интенсивности  $I_1(t)$  и  $I_2(t)$ , которые падают на два фотоприемника. Импульсы с двух приемников подаются на схему совпадений с разрешающим временем  $T$ , которая срабатывает лишь в том случае, если оба импульса появляются в пределах интервала времени  $T/2$ . Ввиду соотношения (6.4) частота совпадения отсчетов  $R$  определяется уравнением

$$R = \alpha_1 \alpha_2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \langle I_1(t) I_2(t + \tau) \rangle dt,$$

С помощью выкладок, подобных тем, что были использованы при выводе уравнения (6.27), находим для  $R$  следующее выражение [ср. Персэлл (1956), Хэнбери Браун и Твисс (1957а, 1958а), Мандель (1963), Силлитто (1963)]:

$$R = R_1 R_2 T [1 + |\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|^2 \zeta(T)/T], \quad (6.28)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — скорости отсчетов двух отдельных приемников и введено обозначение

$$\zeta(T) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|^2 d\tau. \quad (6.29)$$

Первый член правой части (6.28) представляет собой частоту «случайных совпадений», вызванных независимыми событиями, тогда как второй характеризует свойства группировки фотонов. Заметим, что второй член мал при  $T \gg \tau_c$  (в этом случае  $\zeta(T) \approx \zeta(\infty) = \tau_c$  [ср. (6.14)]), тогда как при  $T \ll \tau_c$  оба члена сравнимы и  $|\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \approx 1$  (в этом случае  $\zeta(T) \approx T$ ). Поэтому эффект повышения частоты совпадений может быть обнаружен только с помощью схем, имеющих высокое временно разрешение, и световых пучков с крайне узкой полосой частот. Не случайно первые попытки зарегистрировать избыточные совпадения отсчетов с помощью частично когерентных световых пучков не удались из-за слишком малой величины  $\zeta(T)/T$  [Адам, Яноши и Варга (1955а, б), Браннен и Фергюсон (1956)], хотя первые из указанных авторов, по-видимому, больше интересовались расщепляющим действием на пучок полууси-ребренного зеркала, чем эффектами группировки [см. также Хэнбери Браун и Твисс (1956с), З. Бей и П. Фараго (1963)]. Практическая проблема измерения флуктуаций отсчетов рассматривалась Алкемаде (1959).

Об успешном экспериментальном обнаружении эффекта группирования в пучок с помощью устройства, показанного на рис. 14, первыми сообщили Твисс, Литтл и Хэнбери Браун (1957) [см. также Твисс и Литтл (1959)]. Используя свет от разряда в парах изотопа ртути  $Hg^{198}$  низкого давления, имеющий время когерентности около  $0,7 \cdot 10^{-9}$  сек, и схему совпадений с разрешающим временем  $T \sim 7 \cdot 10^{-9}$  сек, они могли реализовать фактор

$$|\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|^2 \zeta(T)/T \sim 0,04.$$

Впоследствии этот эксперимент был успешно выполнен также другими [Ребка и Паунд (1957), Браннен, Фергюсон и Велау (1958); см. также Яноши, Нэрэй и Варга (1961)].

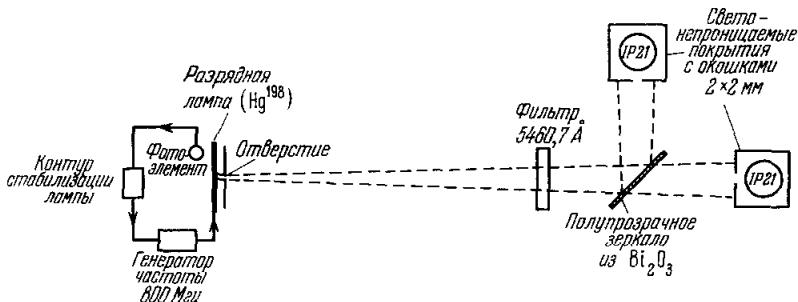


Рис. 14. Установка для наблюдения избытка совпадений отсчетов.  
[По Р. Твиссу и А. Литтлу (1959).]

Поскольку условная вероятность отсчета  $p_c(t|t+\tau)$  содержит информацию о степени поляризации и спектральном распределении света, непосредственные измерения распределения интервалов между отсчетами

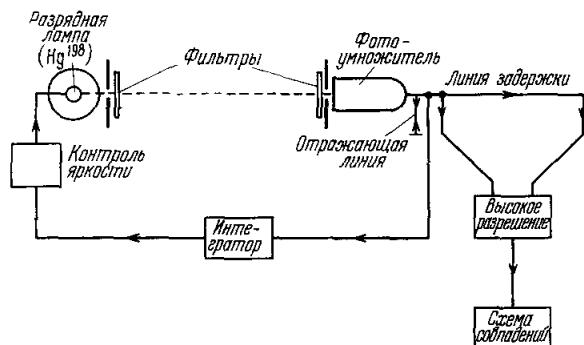


Рис. 15. Схема устройства для измерения распределения интервалов времени между фотонами.  
[По Л. Манделю (1963б).]

следует считать интересными. Причем именно тогда, когда спектр излучения становится слишком узким, чтобы его можно было без труда разрешить обычной спектроскопической техникой, требуемое для измерения  $|\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)|$  временно разрешение становится сравнительно умеренным. Вопрос о том, как найти спектр излучения, зная  $|\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)|$ , обсуждался нами в разделе (5,3), здесь же на рис. 15 мы приводим схему для прямого измерения  $p_c(t|t+\tau)$ , предложенную Манделем (1963б) [см. также Р. Силитто (1963)]. В этом устройстве схема совпадений сраба-

тыает лишь в том случае, если два появляющихся импульса разделены предварительно выбранным временем запаздывания  $\tau$ , которое можно менять, и  $p_c(t|t+\tau)$  можно затем определить на основе ряда измерений с различными  $\tau$ . Эксперимент такого рода недавно был также описан Мартинсеном и Шпиллером (1964), которые использовали искусственно вырожденный «псевдотепловой» световой пучок, образующийся при движении экрана из матового стекла перед газовым лазером.

#### 6.4. Корреляции интенсивности и корреляционная интерферометрия

Мы уже видели, что два частично когерентных световых пучка, падающих на два фотоприемника, в общем случае приводят к «совпадениям» отсчетов в дополнение к тому, что ожидается для случайных событий \*). Коррелированная эмиссия фотоэлектронов была впервые экспериментально продемонстрирована Хэнбери Брауном и Твиссом (1956а) в форме

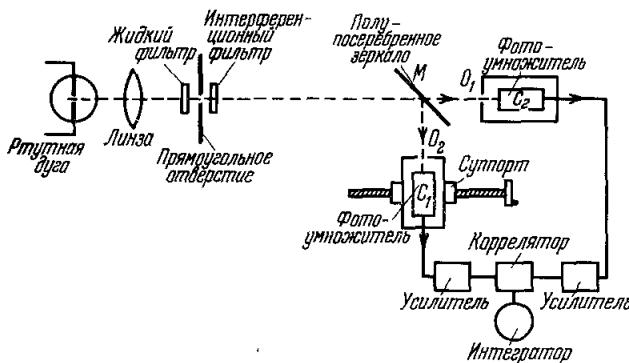


Рис. 16. Установка для наблюдения корреляции между флюктуациями интенсивности частично когерентных пучков света. [По Р. Хэнбери Браупу и Р. Твиссу (1956а).]

корреляции между двумя фототоками, рассматривавшимися как непрерывные сигналы. Использованное ими устройство показано на рис. 16. Свет от ртутной лампы расщеплялся на два пучка полупосеребренным зеркалом и падал на два фотоэлемента, с выхода которых сигналы подавались через узкополосные усилители на коррелятор. Недавно этот эксперимент был повторен Мартинсеном и Шпиллером (1964) с помощью их «псевдотеплового» источника.

Рассмотрим систему  $N$  приемников, освещенных пучками частично когерентного света. Пусть индексы  $i = 1, \dots, N$  отмечают  $N$  каналов. Если  $n_i$  — число отсчетов, регистрируемых  $i$ -м приемником в течение интервала времени от  $t$  до  $t+T$ , то, обобщая вывод уравнения (6,6), мы найдем, что

$$\langle n_1 n_2 \dots n_N \rangle = \left\langle \prod_{i=1}^N \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{n_i [a_i U_i(T, t)]^{n_i}}{n_i!} \exp [-a_i U_i(T, t)] \right\rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю. С помощью равенства (6,6) и свойств распределения Пуассона можно показать, что

\* ) Точнее, для статистически независимых событий. (Прим. ред.)

это соотношение сводится [ср. Мандель, Сударшан и Вольф (1964)] к

$$\begin{aligned} \langle n_1 n_2 \dots n_N \rangle &= a_1 a_2 \dots a_N \int_t^{t+T} \dots \int_t^{t+T} \langle I_1(\mathbf{r}_1, t_1) I_2(\mathbf{r}_2, t_2) \dots \times \\ &\quad \times \dots I_N(\mathbf{r}_N, t_N) \rangle dt_1 dt_2 \dots dt_N = a_1 a_2 \dots a_N \int_t^{t+T} \dots \int_{j_1}^{t+T} \sum_{j_2} \dots \\ &\quad \dots \sum_{j_N} \Gamma_{j_1, j_2, \dots, j_N}^{(N, N)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \\ &\quad t_1, t_2, \dots, t_N, t_1, t_2, \dots, t_N) dt_1 dt_2 \dots dt_N, \end{aligned} \quad (6.30)$$

где  $a_1, a_2$  и т. д. — константы, представляющие фотоэффективность  $N$  фотоэлектрических приемников. Таким образом,  $N$ -я корреляция отсчетов полностью определяется корреляционной функцией поля порядка  $2N$ . Этот результат мы можем также выразить в другой форме. Пусть

$$U_i(T, t) = \int_t^{t+T} I_i(t') dt' \quad (6.31)$$

обозначает проинтегрированную классическую интенсивность излучения на  $i$ -м детекторе. Тогда мы можем записать (6.30) в форме [ср. Мандель, Сударшан и Вольф (1964)]

$$\langle n_1 n_2 \dots n_N \rangle = a_1 a_2 \dots a_N \langle U_1(T, t) U_2(T, t) \dots U_N(T, t) \rangle, \quad (6.32)$$

или, вводя отклонения  $\Delta n_i = n_i - \langle n_i \rangle$ ,  $\Delta U_i = U_i - \langle U_i \rangle$  и выполняя многомерное степенное разложение, можно написать

$$\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \dots \Delta n_N \rangle = a_1 a_2 \dots a_N \langle \Delta U_1 \Delta U_2 \dots \Delta U_N \rangle. \quad (6.33)$$

Таким образом, корреляции фотоэлектрических отсчетов можно описывать так, будто их источником являются корреляции проинтегрированных классических интенсивностей. Несколько иная точка зрения на эти корреляционные эффекты, связанная с подходом Фано (1961), была недавно развита Голдбергером и Уотсоном (1964а, б).

Предшествующие соотношения являются совершенно общими и справедливы для пучков света от любого источника. Однако для стационарных пучков теплового излучения, для которых  $V(\mathbf{r}, t)$  является гауссовским (комплексным) случайным процессом, хорошо известно [ср. Рид (1962), Мета (1965б), стр. 398], что  $\Gamma^{(N, N)}$  в общем случае выражается через произведения корреляционных функций второго порядка. В частности, если имеется как раз два приемника и выполняются следующие сильные условия взаимной спектральной чистоты:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{j_1 j_2}^{(1, 1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) &= [I_{j_1}(\mathbf{r}_1) I_{j_2}(\mathbf{r}_2)]^{\frac{1}{2}} \gamma_{j_1 j_2}^{(1, 1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) \times \\ &\quad \times \gamma_{j_1 j_1}^{(1, 1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) \gamma_{j_2 j_1}^{(1, 1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, t_1 - t_2), \\ \gamma_{j_1 j_2}^{(1, 1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0) &= \gamma_{j_1 j_2}^{(1, 1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0), \\ \gamma_{j_1 j_1}^{(1, 1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) &= \gamma_{j_2 j_2}^{(1, 1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) \equiv \gamma^{(1, 1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0), \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

можно использовать простое обобщение соотношений (6.26) и (6.30), чтобы получить

$$\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle = \frac{1}{2} (1 + P^2) \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle |\gamma^{(1, 1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)|^2 \xi(T)/T. \quad (6.35)$$

Время

$$\xi(T) = T^{-1} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} |\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1 - t_2)|^2 dt_1 dt_2 \quad (6,36)$$

подчиняется неравенствам [ср. Мандель (1958, 1959)]

$$\xi(T) \leq T, \quad \xi(T) \leq \xi(\infty), \quad (6,37)$$

а время  $\xi(\infty)$ , которое, как можно показать, совпадает с выражением (6,14) для  $\tau_c$ , можно интерпретировать как время когерентности света. Соотношение (6,35) является уравнением, описывающим эффект Хэнбери Брауна — Твисса для теплового излучения. Практически корреляции обычно изменяются, как изображено на рис. 16, путем подачи токов от двух фотоэлектрических приемников через узкополосные усилители на электронный коррелятор. Тогда  $n_1$  и  $n_2$  пропорциональны сигналам  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$  в двух каналах коррелятора, а  $T$  играет роль «разрешающего времени» или обратной ширины полосы [ср. Хэнбери Браун и Твисс (1957а), Мандель (1963)]. Если  $T$  много больше времени когерентности света, легко показать, что имеет место следующая несколько более общая корреляция между  $S_1(t + \tau)$  и  $S_2(t)$ :

$$\langle \Delta S_1(t + \tau) \Delta S_2(t) \rangle = -\frac{1}{2} (1 - P^2) \langle S_1 \rangle \langle S_2 \rangle |\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|^2. \quad (6,38)$$

Вскоре после успешного экспериментального доказательства существования эффекта корреляции интенсивностей Хэнбери Браун и Твисс (1956а, 1958а, б) достигли успеха в применении корреляционной техники к определению углового диаметра звезды Сириус. На рис. 17 показан их аппарат, названный звездным интерферометром интенсивности. Он имеет определенное сходство со звездным интерферометром Майкельсона (см. рис. 8), но основан на корреляционном принципе. Свет звезды фокусируется двумя большими рефлекторами на двух одинаковых фотоумножителях, и корреляция выходных токов исследуется для различного удаления детекторов с тем, чтобы получить  $|\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)|$ . Это в свою очередь позволяет получить информацию о распределении интенсивности источника [ср. уравнение (5,10)]. Недавно большой звездный интерферометр такого типа был сооружен в Наррабри, Австралия [Хэнбери Браун (1964)]. Он может работать с базой до 600 футов, примерно в 30 раз длиннее, чем у Майкельсона и его сотрудников в первоначальном варианте их интерферометра. С помощью наррабрийского инструмента диаметры звезд определенного типа (ярче величины +2,5 и спектрального типа более раннего, чем F0) могут быть определены вплоть до угловых диаметров около 0,0005 сек. Недавно было сообщено о предварительных измерениях диаметра α Лиры [Хэнбери Браун, Хазард, Дэвис и Аллен (1964)].

Важная черта описанной техники состоит в том, что измерения основаны на фотоэлектрическом сигнале  $S(t)$ , который зависит от медленно меняющейся мгновенной интенсивности  $I(\mathbf{r}, t)$  вместо быстро меняющейся комплексной волновой амплитуды  $V(\mathbf{r}, t)$ . По этой причине небольшие изменения оптической разности хода, вызванные атмосферными

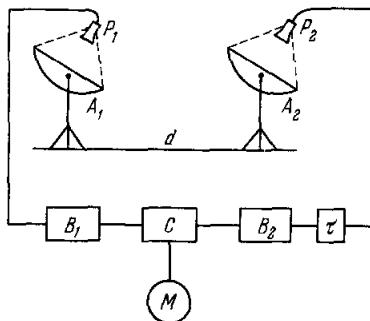


Рис. 17. Схема звездного интерферометра интенсивности.

$A_1, A_2$  — зеркала;  $B_1, B_2$  — усилители;  $C$  — перемножающее устройство;  $M$  — интеграторы;  $P_1, P_2$  — фотодетекторы;  $\tau$  — линия задержки. [По Р. Хэнбери Брауну и Р. Твиссу (1958а).]

флуктуациями или механическим смещением детектора, не влияют на измерения, тогда как для звездного интерферометра Майкельсона они могут оказаться недопустимыми. С другой стороны, как видно из уравнений (6,35) и (6,38), мы не можем непосредственно получить фазу  $\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ .

Возможность найти фазу  $\gamma^{(1,1)}$  с помощью аналитических свойств  $\gamma^{(1,1)}$  уже рассматривалась в разделе 5,3 в рамках математического подхода. Альтернативный подход, в котором два когерентных световых пучка с известным спектральным распределением от независимого источника накладываются на два первоначальных пучка для получения корреляции, был недавно предложен Гамо (1961) \*). Хотя корреляция фотоэлектрических отсчетов в этом случае может дать информацию о фазе  $\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ , этот метод сопряжен с экспериментальными трудностями того же типа, что и при работе с интерферометром Майкельсона.

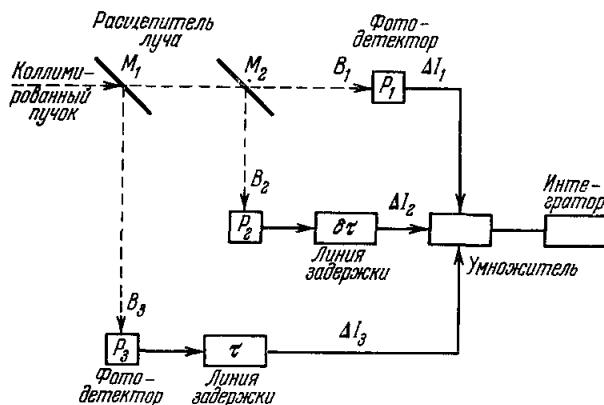


Рис. 18. Устройство для определения фазы  $\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)$  в предложенном эксперименте по тройной корреляции. [По Г. Гамо (1963а).]

Недавно Гамо (1963а, б) предложил для определения фазы  $\gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau)$  метод трехточечной корреляции интенсивностей. Устройство, предложенное им для измерений по этому методу, показано на рис. 18. Стационарный коллимированный пучок поляризованного теплового излучения с помощью полупосеребренных зеркал расщепляется на три пучка. Пучки падают на три фотоприемника так, что оптический путь одинаков для всех трех пучков, и фотоэлектрические сигналы подаются на тройной коррелятор с запаздываниями  $\tau$  и  $\delta\tau$ , как показано на рисунке. Если разрешающее время коррелятора достаточно мало, то тройная корреляция флуктуаций фототока будет пропорциональна выражению

$$\begin{aligned} C &= \langle \Delta I_1(t + \tau) \Delta I_2(t + \tau - \delta\tau) \Delta I_3(t) \rangle = \\ &= \Gamma^{(3,3)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3; t + \tau, t + \tau - \delta\tau, t; t + \tau, t + \tau - \delta\tau, t) - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle \langle I_3 \rangle - \\ &\quad - \langle I_1 \rangle | \Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3; t + \tau - \delta\tau, t; t + \tau - \delta\tau, t) |^2 - \\ &\quad - \langle I_2 \rangle | \Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1; t, t + \tau; t, t + \tau) |^2 - \\ &\quad - \langle I_3 \rangle | \Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t + \tau, t + \tau - \delta\tau; t + \tau, t + \tau - \delta\tau) |^2, \quad (6,39) \end{aligned}$$

\*) Эту технику, которую Гамо называет *методом когерентного фона*, не следует путать с другой техникой, также известной под этим названием благодаря Цернике (1948). В методе Гамо два «фоновых пучка», будучи когерентны друг другу, некогерентны по отношению к основным пучкам, на которые они накладываются. В методе Цернике фоновый и основной пучки когерентны между собой. Метод когерентного фона Цернике используется в его технике фазового контраста при наблюдении в микроскоп и в технике Габора построения изображения с помощью восстановления волновых фронтов [ср. Борн и Вольф (1964), раздел 8.6, с) и раздел 8.10].

где индексы 1, 2, 3 относятся к трем каналам. С помощью редукционных формул для моментов комплексного гауссовского случайного процесса, примененных к  $\Gamma^{(3,3)}$  и  $\Gamma^{(2,2)}$  [Рид (1962), Мета (1965b), стр. 398], в пределе очень малых  $\delta\tau$  это сводится к

$$C = 2 \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle \langle I_3 \rangle | \gamma^{(1,1)}(\tau) |^2 \cos [Q(\tau) \delta\tau], \quad (6.40)$$

где

$$\pm Q(\tau) \delta\tau = \varphi(\tau) - \varphi(\tau - \delta\tau) - \varphi(\delta\tau), \quad (6.41)$$

а  $\varphi(\tau)$  обозначает фазу нормированной автокорреляционной функции  $\gamma^{(1,1)}(\tau)$ . Для малых  $\delta\tau$   $\varphi(\delta\tau) = 2\pi\nu_0\delta\tau$  [ср. уравнение (3.26)], где  $\nu_0$  — средняя частота света, так что (6.41) переходит в

$$\pm Q(\tau) \delta\tau \approx [d\varphi(\tau)/d\tau] - 2\pi\nu_0. \quad (6.42)$$

Поскольку  $Q(\tau)$  можно получить экспериментально, измеряя  $C$ , отсюда, следовательно, можно вывести и  $\varphi(\tau)$ . Заметим, однако, что неопределенность в знаке  $Q(\tau)$  все еще оставляет некоторую неопределенность в  $\varphi(\tau)$ , которую можно устраниć лишь с помощью дополнительных измерений.

Этот метод интересен тем, что он представляет один из очень немногих применений корреляционных функций поля шестого порядка.

## 7. НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ЭФФЕКТЫ СУПЕРПОЗИЦИИ

Все интерференционные эффекты, рассмотренные в разделах 3 и 5, можно описать через усредненные интенсивности излучения в различных точках пространства-времени и через корреляции второго порядка. Однако остается ряд неустановившихся явлений, связанных с суперпозицией световых пучков, которые можно наблюдать даже с совершенно независимыми пучками и которые не поддаются простому описанию этим способом. Хотя к ним применяется термин «интерференция», мы увидим, что в общем случае эти явления включают корреляции комбинированного поля четвертого порядка.

Световые биения, получающиеся с квазимохроматическими пучками со слегка отличающимися значениями средних частот, являются, по-видимому, наилучшим известным примером эффектов, которые мы хотим здесь рассмотреть. Мы опишем их в первую очередь. Эти эффекты надо отличать от световых биений, наблюдавшихся Бросселом и Биттером (1952), Доддом и др. (1959) [см. также Коулгров и др. (1959), Франкен (1961), Додд и Сериес (1961), Барра (1959a, b, c, 1961), Коэн-Таннуджи (1961a, b)] в условиях индуцированной когерентности, когда, например, два первоначально независимых состояния атома оказываются связанными благодаря осциллирующему магнитному полю \*).

### 7.1. Световые биения независимых пучков

Биения, возникающие при наложении некогерентных пучков, впервые наблюдали Форрестер, Гудмундсен и Джонсон (1955), которые использовали две спектральные компоненты дублета Зеемана. Их установка показана на рис. 19. Фотоэлектрический приемник был выполнен в форме резонатора, настроенного на разностную зеемановскую частоту, а удовлетворительное отношение сигнал/шум им удалось получить только

\*.) Когерентность атомных состояний может быть вызвана также общим процессом возбуждения — см. по этому поводу: Е. Б. Александров, Оптика и спектроскопия 17 (1964), 957. (Прим. ред.)

благодаря резкому ограничению ширины полосы частот приемника. Достаточно удивительно, что эксперимент вообще удался, так как он проводился с невырожденным излучением. Среднее число фотонов, приходящих на площадь когерентности за время, в течение которого ожидалось существование биений (время когерентности), было много меньше единицы.

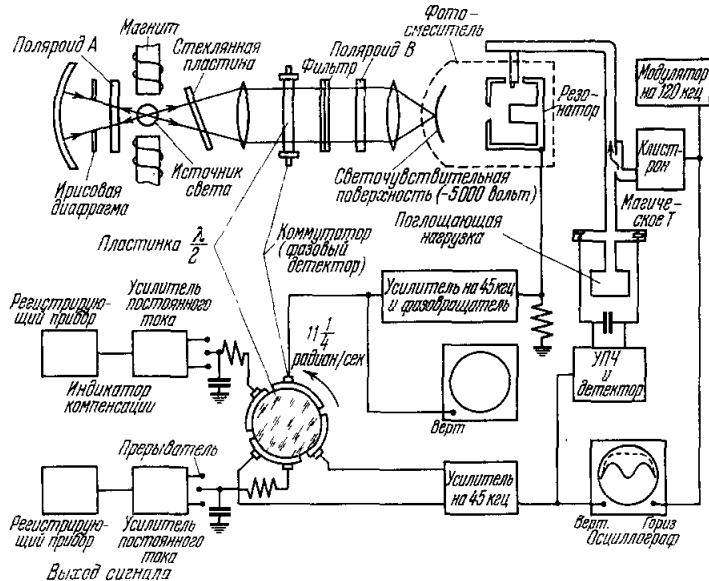


Рис. 19. Устройство для наблюдения биений, возникающих при суперпозиции некогерентных пучков. [По А. Т. Форрестеру, Р. Гудмундссуну и П. Джонсону (1955).]

С развитием лазеров, дающих световые пучки, для которых параметр вырождения  $\delta$  легко может быть сделан больше  $10^{12}$  [ср. Мандель (1961а)], стало значительно легче выполнять такие эксперименты со световыми

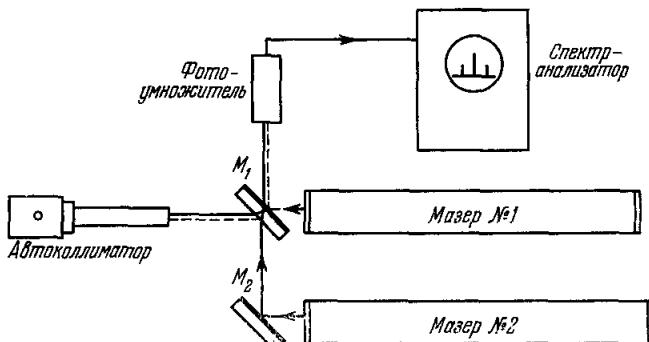


Рис. 20. Установка для наблюдения биений между пучками двух оптических мазеров ( $\text{He : Ne}$ ). [По А. Джавану, Э. Баллику и В. Бонду (1962).]  
 $M_1$  — полупосеребренное зеркало;  $M_2$  — посеребренное зеркало.

биениями. На рис. 20 и 21 показана аппаратура, использованная Джаваном, Балликом и Бондом (1962) и Липсеттом и Манделем (1963, 1964а) для определения времени когерентности соответственно гелий-неонового и рубинового лазеров с помощью суперпозиции пучков от двух независимых источников. Несколько других экспериментаторов [Херриот (1962),

Мак-Мартри и Сигман (1962) использовали иную технику, основанную на биениях между двумя или более модами одного лазера, хотя статистическая независимость пучков в этом случае несколько сомнительна [ср. Паананен, Танг и Штатц (1963), Лэмб (1964), Хакен и Зауэрман (1963)]. Другие эксперименты рассматривались Форрестером (1961а, б), Мак-Мартри (1963), Липсеттом и Манделем (1963, 1964а, б).

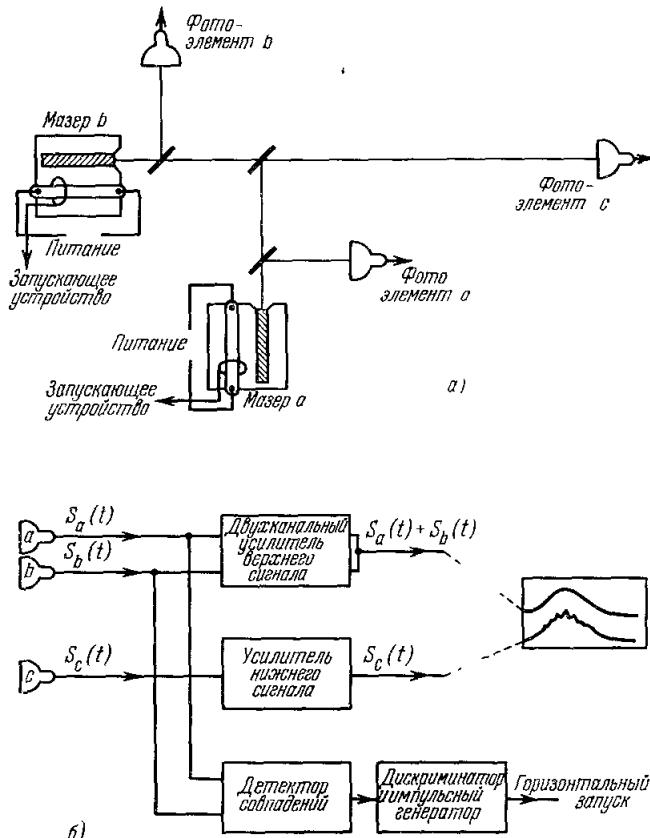


Рис. 21. Аппаратура для наблюдения биений между пучками двух оптических (рубидиевых) мазеров.

а) Общее устройство системы; б) блок-схема системы обнаружения биений. [По М. Липсетту и Л. Манделю (1963).]

Эффекты суперпозиции легко описываются с помощью классических понятий, изложенных в разделе 3.1. Если эксперимент осуществляется по схеме рис. 3, то мгновенная интенсивность излучения в точке наложения  $P(\mathbf{r})$  двух поляризованных лучей дается уравнением (3.7). Однако в этом случае мы не можем ожидать, что среднее по ансамблю, описываемое уравнением (3.8), будет соответствовать экспериментальной ситуации, в которой измеряется поведение мгновенной интенсивности. В действительности среднее по ансамблю от последнего «ключевого» члена в (3.7) для некогерентных пучков исчезает. Если  $I_1(t)$  и  $\varphi_1(t)$  и т. д. обозначают мгновенную интенсивность и фазу поля  $K_1 V(\mathbf{r}_1, t)$  и т. д., то можно написать

$$K_1 V(\mathbf{r}_1, t) = [I_1(t)]^{\frac{1}{2}} \exp [2\pi i v_1 t + i\varphi_1(t)], \quad (7.1)$$

$$K_2 V(\mathbf{r}_2, t) = [I_2(t)]^{\frac{1}{2}} \exp [2\pi i v_2 t + i\varphi_2(t)],$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — средние частоты двух квазимохроматических пучков. С помощью (7,1) уравнение (3,7) принимает вид

$$I(r, t) = I_1(t - t_1) + I_2(t - t_2) + 2 [I_1(t - t_1) I_2(t - t_2)]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \cos [2\pi(v_2 - v_1)t + 2\pi(v_1 t_1 - v_2 t_2) + \varphi_2(t - t_2) - \varphi_1(t - t_1)]. \quad (7,2)$$

Реакция  $S(t)$  фотоэлектрического приемника в плоскости приема может быть выражена в форме (ср. раздел 6.1)

$$S(t) = \alpha \int_{\sigma} I(r, t) dr, \quad (7,3)$$

где  $\alpha$  — квантовая эффективность приемника, а интеграл берется по поверхности  $\sigma$  фотокатода. Вычисляя этот интеграл с помощью (7,2), мы примем, что «источники»  $P_1$  и  $P_2$  находятся на большом расстоянии от  $P$ , так что волновые фронты около приемника практически можно считать плоскими, и что линии пересечения всех трех плоскостей (два волновых фронта и поверхность фотокатода) параллельны. Пусть  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — углы наклона между двумя волновыми фронтами и приемником, который мы для простоты будем считать прямоугольником размера  $a \times b$ . Тогда мы можем упростить (7,3), записав

$$S(t) = ab \int_0^a I(x, t) dx, \quad (7,4)$$

где  $x$  — координата, определяющая положение в плоскости фотокатода вдоль линии, нормальной к пересечению волновых фронтов. Очевидно,

$$\begin{aligned} t_1 &= \tau_1 + (x/c) \sin \theta_1, \\ t_2 &= \tau_2 + (x/c) \sin \theta_2, \end{aligned} \quad (7,5)$$

где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — постоянные.  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$  и  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  — медленно меняющиеся функции  $t$  [ср. Борн и Вольф (1964), стр. 496]. Поэтому, если  $(a/c) \sin \theta_1$  и  $(a/c) \sin \theta_2$  много меньше времени когерентности пучков, то  $I_1(t - t_1)$  и  $\varphi_1(t - t_1)$  и т. д. остаются в интеграле (7,4) постоянными. Тогда мы получаем [ср. Липсетт и Мандель (1963)]

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) + 2 [S_1(t) S_2(t)]^{\frac{1}{2}} (\sin \psi / \psi) \times \\ \times \cos [2\pi(v_2 - v_1)t + 2\pi(v_1 \tau_1 - v_2 \tau_2) + \psi + \varphi_2(t - \tau_2) + \varphi_1(t - \tau_1)], \quad (7,6)$$

где

$$\psi = (\pi a/c)(v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2), \quad (7,7)$$

а фотоэлектрические сигналы  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$  относятся к отдельным пучкам света. Мы видим, что для интервалов времени, коротких по сравнению со временем когерентности, фотоэлектрический сигнал оказывается синусоидально модулированным с разностной частотой  $v_2 - v_1$  и относительной амплитудой модуляции

$$\mathcal{A} = \frac{2}{[S_1(t)/S_2(t)]^{\frac{1}{2}} + [S_2(t)/S_1(t)]^{\frac{1}{2}}} \frac{\sin \psi}{\psi}. \quad (7,8)$$

Чтобы обеспечить заметную модуляцию, очевидно, необходимо сделать  $\psi$  достаточно малым. Для малых углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  и почти равных частот  $v_1$  и  $v_2$  это означает, что

$$(\pi a v/c)(\theta_1 - \theta_2) \ll 1,$$

т. е. что два волновых фронта должны быть совмещены на отрезке  $a$  с точностью до долей длины волны. Это значит, что для совмещения двух лазерных пучков нужен автоколлиматор. Сигнал биений будет оставаться неизменным, пока  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$ ,  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  остаются постоянными; при отсутствии других эффектов продолжительность «устойчивого» сигнала биений является мерой времени когерентности. Более того, амплитуда спектральных блужданий сигнала биений является мерой ширины спектра световых пучков.

Еще раз подчеркнем, что уравнения (7,2) и (7,6) относятся к мгновенным величинам или к отдельным членам ансамблей полей и фотоэлектрических сигналов. Поскольку фазовые углы  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  равномерно распределены от 0 до  $2\pi$ , среднее по ансамблю от  $S(t)$  не обнаруживает синусоидальной зависимости от  $t$  и не указывает на наличие биений. Описание этих явлений с помощью усреднений по ансамблю не является таким непосредственным, оно будет дано ниже для квантованного поля. Однако именно возможность избежать операции усреднения и составляет одну из привлекательных сторон классического описания.

## 7.2. Интерференционные полосы, образуемые независимыми пучками

Интерференционные полосы можно представлять себе как «биения» в пространстве и описывать их теми же математическими соотношениями, такими, как уравнение (7,2), которые использовались в предыдущем разделе. Однако экспериментально эти явления сильно отличаются. Существенно, что интерференционный аналог эксперимента Форрестера, Гудмундсена и Джонсона (1955) никогда не проводился с невырожденным тепловым излучением, хотя эта возможность обсуждалась [Мандель (1960, 1961b, 1962b), Нейгебауэр (1962)]. Развитие лазеров сделало этот эксперимент осуществимым, и, используя лазерные пучки, Меджар и Мандель (1963, 1964) достигли успеха в регистрации интерференционных полос в видимой области спектра \*). Схема их установки показана на рис. 22. Нетрудно видеть, почему для этого эксперимента так важна большая величина параметра вырождения  $\delta$ . Дело в том, что число фотонов, определяющих интерференционную картину в плоскости приема в течение времени меньшего, чем время когерентности, имеет  $\delta$  верхним пределом. Если  $\delta \ll 1$ , вообще трудно говорить об интерференционных полосах.

Как и в предыдущем разделе, мгновенная интенсивность света в каждой точке воспринимающей плоскости выражается уравнением (7,2), где  $t_1$  и  $t_2$  определяются соотношениями (7,5). Приемником теперь служит фотоэлектрический приемник изображения типа фотографической пластиинки или телевизионной трубки, который разрешает полосы в пространстве, но интегрирует по времени. Если время экспозиции равно  $T$ , то эффективный сигнал, регистрируемый в точке с координатой  $x$ , равен

$$S(x, t, T) = a \int_t^{t+T} I(x, t') dt'. \quad (7,9)$$

Практически  $T$  обычно бывает мало по сравнению со временем когерентности  $\tau_c$ . С помощью (7,2) и (7,5) и с теми же ограничениями на величину и наклон приемника, как и выше, (7,9) принимает вид [ср. Меджар

\*) Аналогичный эксперимент недавно был осуществлен Мартинсеном и Шиплером (1964), которые использовали вырожденный «псевдотепловой» источник, состоящий из газового лазера и движущегося экрана из матового стекла.

и Мандель (1963), (1964)]

$$\begin{aligned} S(x, t, T) = & S_1(t, T) + S_2(t, T) + 2 [S_1(t, T) S_2(t, T)]^{1/2} \times \\ & \times [\sin \pi (v_2 - v_1) T / \pi (v_2 - v_1) T] \times \\ & \times \cos \left[ 2\pi (v_2 - v_1) \left( t + \frac{1}{2} T \right) + 2\pi (x/c) (v_1 \sin \theta_1 - v_2 \sin \theta_2) + \right. \\ & \left. + 2\pi (v_1 \tau_1 - v_2 \tau_2) + \varphi_2(t - \tau_2) - \varphi_1(t - \tau_1) \right]. \quad (7.10) \end{aligned}$$

Таким образом,  $S(x, t, T)$  оказывается косинусоидальной функцией  $x$ , и регистрируемый сигнал обнаруживает пространственную модуляцию в плоскости суперпозиции, которую мы интерпретируем как интерференционные полосы. Для малых  $\theta_1$  и  $\theta_2$  и почти равных  $v_1$  и  $v_2$  расстояние

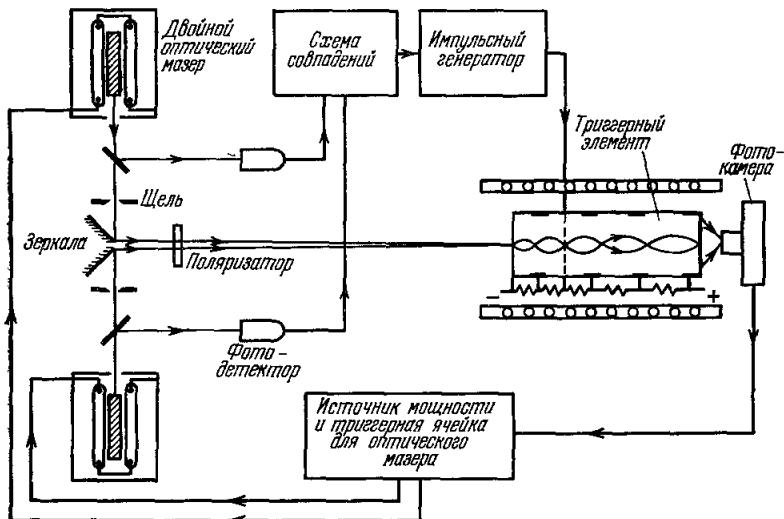


Рис. 22. Схема аппаратуры для регистрации неустановившихся интерференционных полос. [По Дж. Меджару и Л. Манделю (1963).]

между полосами в воспринимающей плоскости будет равно  $c/v_1 (\theta_1 - \theta_2)$ , в точности как для когерентных пучков. Видимость полос (уравнение (3.22)) равна

$$\mathcal{V} = \frac{2}{[S_1(t, T)/S_2(t, T)]^{1/2} + [S_2(t, T)/S_1(t, T)]^{1/2}} \frac{\sin \pi (v_2 - v_1) T}{\pi (v_2 - v_1) T} \quad (7.11)$$

и достигает максимально возможного значения, равного 2, когда  $S_1(t, T) = S_2(t, T)$  и время экспозиции  $T \ll 1/|v_2 - v_1|$ . Однако, если источники независимы и нет строгого контроля за средними частотами  $v_1$  и  $v_2$  двух световых пучков, может случиться, что видимость никогда не приблизится к своей максимальной величине даже при  $T \ll \tau_c$ . Из-за того, что фазовые углы  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  распределены равномерно от 0 до  $2\pi$ , положение интерференционных максимумов и минимумов нельзя предсказать заранее. Эта особенность резко отличает рассматриваемые явления от обычной интерференции. Простота изложенного описания снова обусловлена возможностью избежать операции усреднения по ансамблю, которая исключила бы модуляционный член из уравнения (7.10).

Существует другой суперпозиционный эффект, уже упомянутый в разделе 5.5, весьма отдаленно связанный с предыдущим, который иногда смешивают с ним. Этот эффект был обнаружен в ходе эксперимента, поста-

вленного сперва для определения скорости света [Алфорд и Голд (1958)], и был назван эффектом Алфорда и Голда [ср. Джайенс (1961а, 1962), Мандель (1962а), Пауль (1963)]. Эффект наблюдается с когерентными (во втором порядке) или частично когерентными пучками света, если оптическая разность хода в плоскости суперпозиции намного превосходит длину когерентности. При этих условиях интерференционные полосы обычно не наблюдаются, и это легко может привести к ошибочному выводу, будто лучи не имеют когерентности второго порядка (ср. раздел 5.5).

Однако хотя среднее значение результирующей интенсивности света по ансамблю постоянно вдоль воспринимающей плоскости (ср. уравнение (5,35)), спектральная плотность обнаруживает синусоидальную модуляцию, описываемую уравнением (5,33). Фаза этой модуляции зависит от разности хода  $i$ , следовательно, от положения  $x$  в воспринимающей плоскости. Если приемник является фотоэлементом, реагирующим на интенсивность света в непосредственной окрестности  $x$ , биения между различными спектральными компонентами могут проявиться в фототоке. Отсюда следует, что выходной сигнал точно настроенного фильтра (полоса пропускания которого  $\delta v$  значительно меньше отношения  $c$  к оптической разности хода), следующего за фотоприемником, будет синусоидально изменяться в зависимости от  $x$ . Наблюдатель, измеряющий этот сигнал, может заключить, что приемник регистрирует интерференционные полосы в воспринимающей плоскости, хотя среднее значение интенсивности света по ансамблю постоянно вдоль этой плоскости.

### 7.3. Квантовая теория неустановившихся эффектов суперпозиции

Мы уже показали в разделе 3.2, что описание обычных интерференционных эффектов может легко быть дано в рамках квантовой теории поля и что это описание весьма близко следует классической трактовке. Можно было бы думать поэтому, что эффекты неустановившейся суперпозиции, рассмотренные в двух последних разделах, также могут быть описаны квантовомеханически, и это описание можно провести параллельно классическому. Однако здесь мы встречаемся с той основной особенностью, что квантовая механика всегда имеет дело с математическими ожиданиями наблюдаемых, тогда как в простом рассмотрении, приводящем к уравнениям (7,6) и (7,10), вычисление математических ожиданий умышленно исключалось.

Казалось бы, можно обойти все трудности, рассматривая только чисто «когерентные» состояния  $|\{v_{k,s}\}\rangle$  поля излучения, которые являются собственными состояниями оператора уничтожения  $\hat{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  (ср. уравнение (3,46)), соответствующими требуемому собственному значению  $V(\mathbf{r}, t)$  в классическом описании. Такой подход уже был использован [Шауль, Бруннер и Рихтер (1963), Пауль (1964), Мандель (1964b)]. Однако эти состояния не описывают полей, встречающихся на практике, и легко показать, что существуют другие квантовые состояния поля, для которых этот подход не дает указаний на интерференционные эффекты. Недавно некоторые стороны этого вопроса были рассмотрены Рихтером, Бруннером и Паулем (1964).

Рассмотрим два поля излучения в чистых состояниях типа  $|\{v'_{k,s}\}\rangle$  и  $|\{v''_{k,s}\}\rangle$ , соответствующих классическим комплексным амплитудам

$$\begin{aligned} V'(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}, s} (hc/kL^3)^{1/2} v'_{\mathbf{k}, s} \epsilon_{\mathbf{k}, s} \exp[i(\mathbf{kr} - ckt)], \\ V''(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}, s} (hc/kL^3)^{1/2} v''_{\mathbf{k}, s} \epsilon_{\mathbf{k}, s} \exp[i(\mathbf{kr} - ckt)]. \end{aligned} \quad (7,12)$$

Если мы примем, что поля не содержат общих  $k, s$ -мод, то состояние комбинированного поля будет описываться с помощью

$$|\{v'_{k,s}\}\rangle |\{v''_{k,s}\}\rangle.$$

Тогда математическое ожидание общей интенсивности в точке пространства-времени  $r, t$  комбинированного поля будет даваться уравнениями (3,50) и (3,52) с диагональной «матрицей плотности»  $\Phi(\{v'_{k,s}\}, \{v''_{k,s}\})$ . Эти уравнения сводятся к следующему:

$$\langle I(r, t) \rangle = [V'^*(r, t) + V''*(r, t)] [V'(r, t) + V''(r, t)], \quad (7.13)$$

и дальнейшие преобразования оказываются такими же, как в разделах 7.1 и 7.2. Мы снова получаем почти периодическую зависимость  $\langle I(r, t) \rangle$  от  $t$  (биения) и  $r$  (полосы).

Однако сильно отличающиеся состояния квантованного поля приводят к сильно различающимся результатам. Рассмотрим два собственных состояния оператора энергии поля  $|\{n'_{k,s}\}\rangle$  и  $|\{n''_{k,s}\}\rangle$ , соответствующих числам  $\{n'_{k,s}\}$  и  $\{n''_{k,s}\}$  фотонов в состояниях с импульсом и спином  $k, s$  и т. д. Если сделать упрощающее предположение, что оба поля не имеют общих  $k, s$ -мод, состояния комбинированного поля описываются произведением  $|\{n'_{k,s}\}\rangle |\{n''_{k,s}\}\rangle$ . Математическое ожидание интенсивности опять можно получить из уравнения (3,52) с помощью явного выражения матрицы плотности  $\Phi(\{v'_{k,s}\}, \{v''_{k,s}\})$  [Сударшан (1963а, б); см. также Дополнение к настоящей статье]. Легче, однако, исходить прямо из определения

$$\langle I(r, t) \rangle = \langle \{n''_{k,s}\} | \langle \{n'_{k,s}\} | \hat{A}^{(-)}(r, t) \hat{A}^{(+)}(r, t) |\{n'_{k,s}\}\rangle |\{n''_{k,s}\}\rangle \quad (7.14)$$

и из разложения (3,40) вместе со следующими соотношениями [ср. Мессия (1961), стр. 346]:

$$\hat{a}_{k_1, s_1} |\{n'_{k,s}\}\rangle |\{n''_{k,s}\}\rangle = (n'_{k_1, s_1})^{\frac{1}{2}} |n'_{k_1, s_1} - 1\rangle \prod_{k, s \neq k_1, s_1} |\{n'_{k,s}\}\rangle |\{n''_{k,s}\}\rangle,$$

если  $k_1, s_1$  — мода  $|\{n'_{k,s}\}\rangle$ ;

$$= (n''_{k_1, s_1})^{\frac{1}{2}} |n''_{k_1, s_1} - 1\rangle \prod_{k, s \neq k_1, s_1} |\{n'_{k,s}\}\rangle |\{n''_{k,s}\}\rangle, \quad (7.15)$$

если  $k_1, s_1$  — мода  $|\{n''_{k,s}\}\rangle$ ;

$$= 0$$

в остальных случаях.

Так как состояния  $|n'_{k,s}\rangle$  и  $|n'_{k,s} - 1\rangle$  и т. д. ортогональны, (7.14) сводится к выражению

$$\langle I(r, t) \rangle = \sum_{k, s} (hc/kL^3) (n'_{k,s} + n''_{k,s}), \quad (7.16)$$

которое не зависит от  $r$  и  $t$ . Следовательно, уравнение (7.16) не дает указаний на неустановившуюся интерференцию или световые биения при суперпозиции двух световых пучков. Однако этот вывод означает не отсутствие эффектов, а только то, что математическое ожидание интенсивности света не является подходящей величиной для их описания, как мы указывали выше. Тем не менее операция усреднения здесь неизбежна.

Так как обнаружение пространственных интерференционных полос или световых биений во времени с необходимостью включает измерение интенсивности в двух или более точках пространства-времени, естественно рассмотреть корреляции интенсивностей [ср. Мандель (1964b)]. Рассмотрим две пространственно-временные точки  $\mathbf{r}_1, t_1$  и  $\mathbf{r}_2, t_2$ . Если  $I(\mathbf{r}_1, t_1)$  и  $I(\mathbf{r}_2, t_2)$  — полные интенсивности комбинированного поля в этих точках, просуммированные по всем поляризациям, то среднее по ансамблю

$$\langle I(\mathbf{r}_1, t_1) I(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \text{Sp} [\hat{Q} \hat{\mathbf{A}}^{(\rightarrow)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{A}}^{(\rightarrow)}(\mathbf{r}_2, t_2) : \hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)], \quad (7.17)$$

где двоеточие обозначает скалярное произведение между первым и третьим и вторым и четвертым операторами соответственно. Если мы опять, как в разделах 3.2 и 4.3, используем универсальное «диагональное» представление оператора плотности [Сударшан (1963a, b); см. также Дополнение к настоящей статье] вместе с предположением о неперекрывающихся модах и выразим статистическую независимость двух накладываемых световых пучков в форме

$$\Phi(\{v'_{k,s}\}, \{v''_{k,s}\}) = \Phi'(\{v'_{k,s}\}) \Phi''(\{v''_{k,s}\}), \quad (7.18)$$

мы получим с помощью тех же выкладок, что и раньше,

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}_1, t_1) I(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle &= \langle [V'^*(\mathbf{r}_1, t_1) + V''*(\mathbf{r}_1, t_1)] \times \\ &\quad \times [V'^*(\mathbf{r}_2, t_2) + V''*(\mathbf{r}_2, t_2)] : [V'(\mathbf{r}_1, t_1) + V''(\mathbf{r}_1, t_1)] \times \\ &\quad \times [V'(\mathbf{r}_2, t_2) + V''(\mathbf{r}_2, t_2)] \rangle. \end{aligned} \quad (7.19)$$

В этом соотношении  $V'(\mathbf{r}_1, t_1)$  и  $V''(\mathbf{r}_1, t_1)$  и т. д. являются комплексными амплитудами классического поля в точках  $\mathbf{r}_1, t_1$  и т. д., обусловленными отдельными пучками, и они статистически независимы. Из 16 членов, образующихся при раскрытии скобок в (7.19), десять исчезают, если мы сделаем обычное предположение, что фазы  $V(\mathbf{r}_1, t_1)$  и т. д. равномерно распределены от 0 до  $2\pi$ . Остающиеся члены заметно упрощаются, если

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \ll 1/\Delta k \text{ и } |t_2 - t_1| \ll 1/c\Delta k,$$

где  $c\Delta k$  — полная полоса частот, занимаемая обоими пучками, которые предполагаются квазимонохроматическими. Если, кроме того, каждый пучок поляризован и все фурье-компоненты одного и того же пучка имеют одинаковые векторы поляризации  $\boldsymbol{\epsilon}'$  или  $\boldsymbol{\epsilon}''$  [ср. Мессия (1962), стр. 1032], то можно показать [ср. Мандель (1964b)], что

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}_1, t_1) I(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle &= \langle I'^2(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle + \langle I''^2(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle + 2 \langle I'(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \langle I''(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \times \\ &\quad \times \{1 + |\boldsymbol{\epsilon}'^* \boldsymbol{\epsilon}''|^2 \cos[(\mathbf{k}'_0 - \mathbf{k}''_0)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - c(k'_0 - k''_0)(t_2 - t_1)]\}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Здесь  $\mathbf{k}'_0$  и  $\mathbf{k}''_0$  — средние волновые векторы двух пучков. Таким образом, в ограниченной области пространства-времени корреляция интенсивности обнаруживает синусоидальную зависимость от пространственных и временных координат, которую можно интерпретировать как интерференционные полосы или как световые биения. Периодичность здесь оказывается такой же, как в разделах 7.1 и 7.2. Заметим, однако, что положение модуляционных максимумов и минимумов в пространстве-времени не определяется соотношением (7.20). На самом деле для статистически независимых световых пучков они распределены случайно, как мы уже видели выше. Поскольку (7.20) описывает корреляцию интенсивности в двух точках пространства-времени, предыдущая теория формально в некоторой степени подобна теории эффекта Хэнбери Брауна —

Твисса в частично когерентных полях (ср. разделы 6.3 и 6.4). Однако экспериментально эти эффекты, несомненно, различаются. Иногда рассмотрение экспериментальных эффектов и теории неустановившейся интерференции отклоняют на основании замечания Дирака (1960, стр. 9), что «...всякий фотон интерферирует только сам с собой; интерференция между различными фотонами никогда не имеет места». Хотя это утверждение, казалось бы, противоречит эффектам, которые мы рассматривали, тем не менее их можно совместить, придав процитированному утверждению должный смысл. Мы можем рассматривать обнаружение (локализацию в пространстве-времени) фотона как измерение, которое переводит фотон в состояние суперпозиции, в котором он находится частично в каждом из пучков. И интерферируют скорее две компоненты состояния одного фотона, чем два разных фотона. Впрочем, концепция фотона не оказывается полезной в понимании этого эксперимента.

### 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что общепринятая теория когерентности способна описать очень широкий класс оптических явлений, простирающийся от интерференционных полос до высокочастотных фотоэлектрических корреляций. Кроме того, мы видели, что в большинстве рассмотренных до сих пор случаев те свойства когерентности квантованного поля, которые проявляются в экспериментах с фотоэлектрическими приемниками, могут быть описаны в рамках полуклассической теории. В этой теории поле описывается классически, а фотоэлектрическое взаимодействие — квантовомеханически. Результаты такого подхода оказываются совпадающими с результатами квантовой теории поля для процессов первого порядка до тех пор, пока можно пренебречь влиянием измерительных устройств на поле. Следовательно, полуклассическая теория, по-видимому, адекватна для описания большинства макроскопических эффектов [в связи с этим см. также работы Джейнса и Каммингса (1963) и Сеницкого (1965)]. Эти замечания не означают, что не существует случаев, для которых полуклассическая теория неадекватна, но означают лишь, что такие случаи в оптической области являются исключением.

Детальное описание флюктуационных свойств, заключенное в корреляциях поля высших порядков, как мы указывали, до сих пор имело очень мало экспериментальных подтверждений. Это область, в которой дальнейшие исследования, несомненно, очень желательны и, вероятно, будут очень плодотворными.

### ДОПОЛНЕНИЕ

В этом Дополнении мы кратко рассмотрим возможность представления любого оператора плотности  $\hat{Q}$  в символической «диагональной» форме (4.9) Сударшана \*) (1963а, б). Сначала рассмотрим систему только с одной степенью свободы, и пусть  $Q(n, m)$  будет ее матрицей плотности в представлении Фока, т. е.

$$\hat{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} Q(n, m) |n\rangle \langle m|, \quad (D1)$$

где  $|n\rangle$  — собственное состояние оператора числа частиц  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ ,  $\hat{a}$  — оператор уничтожения и  $\hat{a}^\dagger$  — оператор рождения ( $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ ).

Пусть  $|v\rangle$  и  $\langle v|$  будут правым и левым собственными состояниями операторов уничтожения и рождения соответственно:

$$\hat{a}|v\rangle = v|v\rangle, \quad \langle v|\hat{a}^\dagger = v^* \langle v| \quad (D2)$$

\*) Возможность такого представления в некоторых случаях была отмечена Глаубером (1963с, раздел 7).

$\langle v | v \rangle = 1$ ). Эти собственные состояния могут быть выражены через базисные векторы фоковского представления в форме [Клаудер (1960)]

$$|v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}|v|^2\right) [v^n/(n!)^{\frac{1}{2}}] |n\rangle, \quad (\text{Д3})$$

$$\langle v | = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}|v|^2\right) [v^{*n}/(n!)^{\frac{1}{2}}] \langle n |. \quad (\text{Д4})$$

Рассмотрим далее оператор

$$\int \int \Phi(v) |v\rangle \langle v | d^2v, \quad (\text{Д5})$$

где \*)

$$\Phi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varrho(n, m)(n!m!)^{\frac{1}{2}}}{(n+m)! \pi r} \times \exp\{r^2 + i(m-n)\theta\} \{[-(\partial/\partial r)]^{n+m} \delta(r)\}, \quad (\text{Д6})$$

$v=r \exp(i\theta)$  и интегрирование в (Д5) распространяется на всю комплексную плоскость  $v$ . Подставляя (Д3) и (Д4) в (Д5), получим окончательно

$$\begin{aligned} \int \int \Phi(v) |v\rangle \langle v | d^2v &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varrho(n, m)(n!m!)^{\frac{1}{2}}}{(n+m)! \pi r} \exp[r^2 + i(m-n)\theta] \times \\ &\times \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial r} \right)^{n+m} \delta(r) \right] \exp(-r^2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^{k+l} \exp[i(k-l)\theta]}{(k!)^{\frac{1}{2}} (l!)^{\frac{1}{2}}} r dr d\theta |k\rangle \langle l | = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varrho(n, m)(n!m!)^{\frac{1}{2}}}{(n+m)!} \delta_{n-m, l-k} \frac{(k+l)!}{(k!)^{\frac{1}{2}} (l!)^{\frac{1}{2}}} \delta_{n+m, k+l} |k\rangle \langle l | = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varrho(n, m) |n\rangle \langle m | = \hat{\varrho}. \quad (\text{Д7}) \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл (Д5) правильно представляет оператор плотности  $\hat{\varrho}$  в «диагональной форме».

Следует заметить, что функция распределения в фазовом пространстве, определяемая выражением (Д6), не является обычной функцией; ее следует рассматривать как обобщенную (символическую) функцию [ср. Фридманн (1956), гл. 3; Лайтхилл (1959)].

Мета и Сударшан (1965) недавно рассматривали вопрос о том, в каком смысле следует понимать (Д6). Они показали, что если двойной ряд в (Д6) оборвать, оставив в каждом из рядов по  $N$  членов, получающуюся функцию  $\Phi_N(v)$  можно рассматривать как линейный функционал над пробной функцией  $\langle v | \hat{O} | v \rangle$ , соответствующей любому оператору  $\hat{O}$ , для которого существует  $\langle \hat{O} \rangle$ , и что

$$\langle \hat{O} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \Phi_N(v) \langle v | \hat{O} | v \rangle d^2v. \quad (\text{Д8})$$

\*)  $\delta$ -функция радиального аргумента  $r$  здесь предполагается нормированной таким образом, что

$$\int_0^{\infty} \delta(r) dr = \frac{1}{2}.$$

Сударшан (1963а, б) установил также, что это рассмотрение может быть обобщено на любое конечное число степеней свободы. Базис фоковского представления тогда нумеруется последовательностью  $\{n_{k,s}\}$  неотрицательных целых чисел, а матрица плотности — двумя такими последовательностями

$$Q(\{n_{k,s}\}, \{m_{k,s}\}).$$

Вместо (Д1) теперь имеем

$$\hat{Q} = \sum_{\{n_{k,s}\}} \sum_{\{m_{k,s}\}} Q(\{n_{k,s}\}, \{m_{k,s}\}) |\{n_{k,s}\}\rangle \langle \{m_{k,s}\}|, \quad (\text{Д9})$$

а вместо состояния  $|v\rangle$  — состояние  $|v_{k,s}\rangle$ , нумеруемое последовательностью комплексных чисел  $\{v_{k,s}\}$ . «Диагональное представление»  $\hat{Q}$  также существует и дается формулой

$$\hat{Q} = \int \Phi(\{v_{k,s}\}) |v_{k,s}\rangle \langle v_{k,s}| d^2 \{v_{k,s}\}, \quad (\text{Д10})$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\{v_{k,s}\}) = & \sum_{\{n_{k,s}\}} \sum_{\{m_{k,s}\}} Q(\{n_{k,s}\}, \{m_{k,s}\}) \times \\ & \times \prod_{k,s} \frac{(n_{k,s}! m_{k,s}!)^{1/2}}{(n_{k,s} + m_{k,s})! \pi r_{k,s}} \exp \{r_{k,s}^2 + i(n_{k,s} - m_{k,s})\theta_{k,s}\} \times \\ & \times \{(-\partial/\partial r_{k,s})^{n_{k,s}+m_{k,s}} \delta(r_{k,s})\} \end{aligned} \quad (\text{Д11})$$

и

$$v_{k,s} = r_{k,s} \exp(i\theta_{k,s}).$$

Те же замечания, что и выше, относятся к функционалу  $\Phi(\{v_{k,s}\})$ .

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Адам А., Яноши Л. и Варга П., 1955а, Acta Phys. Acad. Sci. Hung. 4, 301 (на русском языке); 315 (English abstract).  
—, 1955б, Ann. Phys. 16, 408.  
Алкемаде К. Т. Дж., 1959, Physica 25, 1145.  
Алфорд В. П. и Голд А., 1958, Amer. J. Phys. 26, 481.  
Армстронг Дж. А. и Смит А. В., 1964, Appl. Phys. Letts. 4, 196.  
—, 1965, Phys. Rev. Letts. 14, 68.  
Ахарая Р. и Сударшан Е. К. Дж., 1960, J. Math. Phys. 1, 532.  
Ахиезер А. И. и Берестецкий В. Б., 1953, Квантовая электродинамика, М., Гостехиздат.
- Барракат Р., 1963, J. Opt. Soc. Amer. 53, 347.  
Барра Дж. П., 1959а, J. phys. et radium 20, 541.  
—, 1959б, J. phys. et radium 20, 633.  
—, 1959с, J. phys. et radium 20, 657.  
—, 1961, Proc. Roy. Soc. (London) A263, 371.  
— и Коэн-Таннуджи К., 1961а, Compt. rend. (Paris) 252, 93.  
— и Коэн-Таннуджи К., 1961б, Compt. rend. (Paris) 252, 255.  
Бартлетт М. Л., 1945, Proc. Cambridge Phil. Soc. 41, 71.  
Бейкер Дж. А., 1958, Phys. Rev. 109, 2198.  
Бейли Р. Л. и Сандерс Дж. Г., 1964, Phys. Letts. 10, 295.  
Белл В. Е. и Блум А. Л., 1961а, Phys. Rev. Letts. 6, 280.  
— и Блум А. Л., 1961б, Phys. Rev. Letts. 6, 623.  
Беллисио Дж. А., Фрид К. и Хаус Г. А., 1964, Appl. Phys. Letts. 4, 5.  
Беран М. и Паррент Дж. Б., 1962, J. Opt. Soc. Amer. 52, 98.  
— и Паррент Дж. Б., 1963, Nuovo Cimento 27, 1049.  
— и Паррент Дж. Б., 1964, Theory of Partial Coherence, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

- Б е р е к М., 1926а, Zs. Phys. **36**, 675.  
 —, 1926б, Zs. Phys. **36**, 824.  
 —, 1926с, Zs. Phys. **37**, 387.  
 —, 1927, Zs. Phys. **40**, 420.
- Б л а н - Й а п ь е А., 1956, *Proceedings of the International Congress of Mathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, vol. 3, стр. 399.
- и Д ю м о н т е П., 1955, Rev. Opt. **34**, 1.
- Б л о х Ф., 1932, Zs. Phys. **74**, 295.
- Б л о м б е р г е н Н., 1963, *Proceedings of the Symposium on Optical Masers*, John Wiley & Sons, New York, стр. 13.
- , 1964, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 1501.
- Б о л в и н П. Т., А л к е м а д е К. Т. Дж., Б о ш л о о Дж. А., 1963, Phys. Letts. **4**, 59.
- Б о л ж а н о Л. П., мл., 1964, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 187.
- Б о р н М. и В о л ь ф Э., 1964, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford; The Macmillan Company, New York, 2nd ed.
- Б о т е В., 1927, Zs. Phys. **41**, 345.
- Б р а н н е н Е. и Ф е р г у с о н Г. И. С., 1956, Nature **178**, 481.
- , Ф е р г у с о н Г. И. С. и В е л а у В., 1958, Canad. J. Phys. **36**, 871.
- Б р ей с у э л л Р. Н., 1958, Proc. IRE **46**, 97.
- Б р ау н Х э н б е р и Р., 1960, National Physical Laboratory, *Symposium on Interferometry*, Her Majesty's Stationery Office, London, стр. 355.
- , 1964, Sky and Telescope **28**, 64.
- , Х а з а р д К., Д э в и с Дж. и А л л е н Л. Р., 1964, Nature **201**, 1111.
- , и Т в и с с Р. К., 1956а, Nature **177**, 27.
- , 1956б, Nature **178**, 1046.
- , 1956с, Nature **178**, 1447.
- , 1957а, Proc. Roy. Soc. (London) A**242**, 300.
- , 1957б, Proc. Roy. Soc. (London) A**243**, 291.
- , 1958а, Proc. Roy. Soc. (London) A**248**, 199.
- , 1958б, Proc. Roy. Soc. (London) A**248**, 222.
- Б р о с с е л л Дж., 1961, *Advances in Quantum Electronics*, edited by J. R. Singer, Columbia University Press, New York, стр. 95.
- и Б иттер Ф., 1952, Phys. Rev **86**, 308.
- и К а с т л е р А., 1949, Compt. rend. (Paris) **229**, 1243.
- Б рю не Г., 1964, Phys. Letts. **10**, 172.
- Б урре Р. К., 1960, Nuovo Cimento **18**, 347.
- Б эй З. и Ф а р а г о П. С., 1963, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **A66**, 111.
- В а г н е р У. Дж., Х е л л в а р т Р. У., 1964, Phys. Rev. **133A**, 915.
- В альте р А., 1963, Opt. Acta **10**, 41.
- В а н г М. К. и У л е н б е к Дж. Э., 1945, Rev. Mod. Phys. **17**, 323.
- В а н - Ц и т т е р т П. Г., 1934, Physica **1**, 201.  
 —, 1939, Physica **6**, 1129.
- В е б е р Дж., 1957, Phys. Rev. **108**, 537.  
 —, 1959, Rev. Mod. Phys. **31**, 681.
- В ейль Г., 1931, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover Publications, New York, 1950.
- В ерде Э., 1865, Ann. Scientif. l'Ecole Normale Supérieure **2**, 291.  
 —, 1869, *Lecons d'Optique physique*, L'Imprimerie Imperiale, Paris, vol. 1, стр. 406.
- В и г н е р Е., 1932, Phys. Rev. **40**, 749.
- В и н е р Н., 1928, J. Math. Phys. **7**, 109.  
 —, 1929, J. Franklin Inst. **207**, 525.  
 —, 1930, Acta. Math. (Stockholm) **55**, 118.
- В ольф Э., 1954а, Proc. Roy. Soc. (London) A**225**, 96.  
 —, 1954б, Nuovo Cimento **12**, 884.  
 —, 1955, Proc. Roy. Soc. (London) **230**, 246.  
 —, 1956, *Proceedings of a Symposium on Astronomical Optics and Related Subjects*, edited by Z. Kopal, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, стр. 177.  
 —, 1957, Phil. Mag. **2**, 351.  
 —, 1958, Proc. Phys. Soc. (London) **71**, 257.  
 —, 1959, Nuovo Cimento **13**, 1165.  
 —, 1960, Proc. Phys. Soc. (London) **76**, 424.  
 —, 1962, Proc. Phys. Soc. (London) **80**, 1269.

- В ольф Э., 1963, *Proceedings of the Symposium on Optical Masers*, John Wiley & Sons, New York, стр. 29.
- , 1964, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 13.
- и Мета К. Л., 1964, Phys. Rev. Letts. 13, 705.
- , 1965, J. Appl. Phys. Japan (будет опубликовано).
- В удворд П. М., 1955, *Теория вероятностей и теория информации с применением в радиолокации*, М., Изд-во «Сов. радио».
- Габор Д., 1946, J. Inst. Elec. Engrs. 93, 429.
- , 1950, Phil. Mag. 41, 1161.
- , 1956a, *Proceedings of a Symposium on Astronomical Optics and Related Subjects*, edited by Z. Kopal, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, стр. 17.
- , 1956b, *Information Theory*, Third London Symposium, edited by C. Cherry, Butterworths Scientific Publications, London, стр. 26.
- , 1961, *Progress in Optics*, edited by E. Wolf, North-Holland Publishing Company, Amsterdam; John Wiley & Sons, New York, vol. 1, стр. 109.
- Гамо Г., 1956, J. Appl. Phys. Japan 25, 431.
- , 1957a, J. Opt. Soc. Amer. 47, 976.
- , 1957b, J. Appl. Phys. Japan 26, 414.
- , 1958a, J. Opt. Soc. Amer. 48, 136.
- , 1958b, J. Appl. Phys. Japan 27, 577.
- , 1960, IRE Intern. Conv. Rec. 4, 189.
- , 1961, *Advances in Quantum Electronics*, edited by J. R. Singer, Columbia University Press, New York, стр. 252.
- , 1963a, J. Appl. Phys. 34, 875.
- , 1963b, *Electromagnetic Theory and Antennas*, edited by E. C. Jordan, The Macmillan Company, New York, part 2, стр. 801.
- , 1964a, *Progress in Optics*, edited by E. Wolf, North-Holland Publishing Company, Amsterdam; John Wiley & Sons, New York, т. 3, стр. 187.
- , 1964b, J. Phys. Soc. Japan 19, 1955.
- Глубер Р. Дж., 1963a, Phys. Rev. Letts. 10, 84.
- , 1963b, Phys. Rev. 130, 2529.
- , 1963c, Phys. Rev. 131, 2766.
- , 1964, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 111.
- Гольдберг М. Л., Льюис Г. В. и Уотсон К. М., 1963, Phys. Rev. 132, 2764.
- и Уотсон К. М., 1964, Phys. Rev. 134, B919.
- и Уотсон К. М., 1965, Phys. Rev. 137, B1396.
- Голдман С., 1957, *Теория информации*, М., ИЛ.
- Голей М. Дж., 1961, Proc. IRE. 49, 958.
- Гопкинс Г. Г., 1951, Proc. Roy. Soc. (London) A208, 263.
- , 1953, Proc. Roy. Soc. (London) A217, 408.
- , 1957, J. Opt. Soc. Amer. 47, 508.
- Гордон Дж. П., 1962, Proc. IRE 50, 1898.
- , Луссель В. Г. и Уокер Л. Р., 1963, Phys. Rev. 129, 481.
- , Уокер Л. Р. и Луссель В. Г., 1963, Phys. Rev. 130, 806.
- Гробнер В. и Хофрейтер Н., 1950, *Integraltafel*, Springer-Verlag, Vienna, 2 Teil.
- Гурвиц Г., 1945, J. Opt. Soc. Amer. 35, 525.
- Давениорт В. Б. и Рут В. Л., 1960, *Введение в теорию случайных сигналов и шумов*, М., ИЛ.
- Декомпс Б. и Кастилер А., 1963, Compt. rend. (Paris) 256, 1087.
- Деланг Г. и Бауис Дж., 1963, Phys. Letts. 7, 29.
- Джаван А., Баллик Э. А. и Бонд В. Л., 1962, J. Opt. Soc. Amer. 52, 96.
- Джайванс М. П., 1961a, J. Opt. Soc. Amer. 51, 1030.
- , 1961b, J. Opt. Soc. Amer. 51, 1032.
- , 1962, J. Opt. Soc. Amer. 52, 225.
- Джейнс Э. Т. и Каммингс Ф. У., 1963, Proc. IEEE 51, 89.
- Джекобсон А. Д., 1964, Tech. Report No. 32, Antenna Laboratory, California Institute of Technology (не опубликовано).
- Джерми К., 1963, Ann. Physik 10, 141.
- Джонс Р. К., 1941a, J. Opt. Soc. Amer. 31, 488.
- , 1941b, J. Opt. Soc. Amer. 31, 500.
- , 1942, J. Opt. Soc. Amer. 32, 486.
- , 1948, J. Opt. Soc. Amer. 38, 671.

- Джонс Р. К., 1953, J. Opt. Soc. Amer. **43**, 138.
- Джордан Т. Ф., 1964, Phys. Letts. **11**, 289.
- Джордан Т. Ф. и Чилметти Ф., 1964, Phys. Rev. Letts. **12**, 607.
- Дикке Р. Г., 1954, Phys. Rev. **93**, 99.
- , 1964, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 35.
- Дираик П. А. М., 1960, *Принципы квантовой механики*, М., Физматгиз.
- Додд Дж. Н., Фокс В. Н., Сериес Дж. В. и Тэйлор М. Дж., 1959, Proc. Phys. Soc. (London) **74**, 789.
- и Сериес Дж. В., 1961, Proc. Roy. Soc. (London) **A263**, 353.
- , Сериес Дж. В. и Тэйлор М. Дж., 1963, Proc. Roy. Soc. (London) **A273**, 41.
- Дюкунг Дж. и Бломберген Н., 1964, Phys. Rev. **133**, A1493.
- Дюмонте П., 1955, Publ. Sci. Univ. Alger., Ser. B, **1**, 33.
- , 1956a, Publ. Sci. Univ. Alger., Ser. B, **2**, 151.
- , 1956b, Publ. Sci. Univ. Alger., Ser. B, **2**, 203.
- Жакин П., 1958, J. phys. et radium **19**, 223.
- , 1960, Rept. Progr. Phys. **23**, 267.
- Зоммерфельд А., 1963, *Оптика*, М., ИЛ.
- Ишигуру К. и Тако Т., 1961, Opt. Acta **8**, 25.
- Каан Т., 1952, Nuovo Cimento Suppl. **9**, 304.
- Капн Ф. Д., 1958, Opt. Acta **5**, 93.
- Кано И., 1964a, Ann. Phys. (N. Y.) **30**, 127.
- , 1964b, J. Phys. Soc. Japan **19**, 1555.
- , 1965, поступило в J. Math. Phys.
- и Вольф Э., 1962, Proc. Phys. Soc. (London) **80**, 1273.
- Карчевский Б., 1963a, Phys. Letts. **5**, 191.
- , 1963b, Nuovo Cimento **30**, 906.
- и Вольф Э., 1963, *Electromagnetic Theory and Antennas*, edited by E. C. Jordan, The Macmillan Company, New York, т. 2, стр. 797.
- и Вольф Э., J. Opt. Soc. Amer. (будет опубликовано).
- и Вольф Э., 1965b, J. Opt. Soc. Amer. (будет опубликовано).
- Кастлер А., 1955, Nuovo Cimento Suppl. **2**, 761.
- , 1957, J. Opt. Soc. Amer. **47**, 460.
- , 1963, J. Opt. Soc. Amer. **53**, 902.
- , 1964, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 3.
- Келли И. Л. и Клейнер В. Г., 1964, Phys. Rev. **136**, A316.
- Кендалл М. Дж., 1952, *The Advanced Theory of Statistics*, C. Griffin, London, 5th ed., т. 1.
- Кенини Дж. Ф. и Киппинг Е. С., 1954, *Mathematics of Statistics*, D. Van Nostrand, New York, 3rd ed.
- Клаудер Дж. Р., 1960, Ann. Phys. **11**, 123.
- , Мак-Кенини Дж. и Керрип Д. Дж., 1965, J. Math. Phys. **6**, 733.
- Клейн М. Дж., 1962, Arch. Hist. Exact Sci. **1**, 459.
- Ко Г. К., 1961, Proc. Natl. Electron. Conf. **17**, 500.
- , 1962, Proc. IRE **50**, 1950.
- Козаридис С. и Аулук Ф. К., 1957, Current Sci. **26**, 169.
- Коркоран У. и Пало И., 1962, J. Opt. Soc. Am. **52**, 1341.
- Коулгроп Ф. Д., Франкен П. А., Льюис Р. Р., Сэндс Р. Г., 1959, Phys. Rev. Letts. **3**, 420.
- Коэн-Таниуджи К., 1961a, Compt. rend. (Paris) **252**, 394.
- , 1961b, *Advances in Quantum Electronics*, edited by J. B. Singer, Columbia University Press, New York, стр. 114.
- и Кастлер А., 1965, *Progress in Optics*, edited by E. Wolf, North-Holland Publishing Company, Amsterdam; John Wiley & Sons, New York (будет опубликовано), vol. 5, стр. 1.
- Кэй И. и Сильвермэн Р., 1957, Information and Control **1**, 64.
- и Сильвермэн Р., 1959, Information and Control **2**, 396.
- Кускер И. и Рибариц М., 1959, Opt. Acta **6**, 42.
- Лайтхилл М. Дж., 1959, *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Лакман К. и Гросмуллер Дж. Т., 1928a, Physica (Gravenhage) **8**, 193.

- Лакман и Гросмюллер Дж. Т., 1928b, *Physica* (Gravenhage) 8, 199.  
 — и Гросмюллер Дж. Т., 1928c, *Physica* (Gravenhage) 8, 305.  
 Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., 1964, *Статистическая физика*, М., Изд-во «Наука».
- Лауз М., 1906, *Ann. Phys.* 20, 365.  
 —, 1907, *Ann. Phys.* 23, 1 and 795.  
 —, 1909, *Ann. Phys.* 30, 225.  
 —, 1910, *Ann. Phys.* 31, 547.  
 —, 1915a, *Ann. Phys.* 48, 668.  
 —, 1915b, *Ann. Phys.* 47, 853.  
 —, 1915c, *Encycl. Math. Wiss.* 5, Heft 3, 360, стр. 360—487.
- Ли И. В., 1932, *J. Math. & Phys.* (MIT) 11, 83 (1931—1932).
- Линфут Э. Г., 1955, *J. Opt. Soc. Amer.* 45, 808.
- Лиссетт М. С. и Мандель Л., 1963, *Nature* 199, 553.  
 — и Мандель Л., 1964a, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 1271.  
 — и Мандель Л., 1964b, *Appl. Opt.* 3, 643.
- Лондон Ф., 1938, *Phys. Rev.* 54, 947.  
 —, 1943, *J. Chem. Phys.* 11, 203.
- Луселл В. Г., 1964, *Radiation and Noise in Quantum Electronics*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- , Ярив А. и Сигмэн А. Г., 1961, *Phys. Rev.* 124, 1646.
- Лэмб В. Е. мл., 1964, *Phys. Rev.* 134, A1429.
- Майер А. Г. и Леонтьевич Е. А., 1934, *ДАН СССР* 4, 353.  
 Майкельсон А. А., 1890, *Phil. Mag.* 30, 1.  
 —, 1891a, *Phil. Mag.* 31, 256.  
 —, 1891b, *Phil. Mag.* 31, 338.  
 —, 1891c, *Nature* 45, 160.  
 —, 1892, *Phil. Mag.* 34, 280.  
 —, 1920, *Astrophys. J.* 51, 257.  
 — и Пис Ф. Дж., 1921, *Astrophys. J.* 53, 249.
- Мандель Л., 1958, *Proc. Phys. Soc. (London)* 72, 1037.  
 —, 1959, *Proc. Phys. Soc. (London)* 74, 233.  
 —, 1960, *J. Opt. Soc. Amer.* 50, 1131.  
 —, 1961a, *J. Opt. Soc. Amer.* 51, 797.  
 —, 1961b, *Coherence Properties of Electromagnetic Radiation*, Report on Conference University of Rochester, Technical note No. 5 (не опубликовано), стр. 58 (Cont. AF 49 (638)—602; AFOSR-583).  
 —, 1961c, *J. Opt. Soc. Amer.* 51, 1342.  
 —, 1962a, *J. Opt. Soc. Amer.* 52, 1335.  
 —, 1962b, *J. Opt. Soc. Amer.* 52, 1407.  
 —, 1963a, *Phys. Letts.* 7, 117.  
 —, 1963b, *Electromagnetic Theory and Antennas*, edited by E. C. Jordan, The Macmillan Company, New York, part. 2, стр. 811.  
 —, 1963c, *Proc. Phys. Soc. (London)* 81, 1104.  
 —, 1963d, *Progress in Optics*, edited by E. Wolf, North-Holland Publishing Company, Amsterdam; John Wiley & Sons, New York, т. 2, стр. 181.  
 —, 1964a, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 101.  
 —, 1964b, *Phys. Rev.* 134, A10.  
 —, 1964c, *Phys. Letts.* 10, 166.  
 —, 1964d, *Phys. Rev.* 136, B1221.  
 —, 1965, *Phys. Rev.* 138, B753.  
 — Сударшан Э. К. Дж. и Вольф Э., 1964, *Proc. Phys. Soc. (London)* 84, 435.  
 — и Вольф Э., 1961a, *J. Opt. Soc. Amer.* 51, 815.  
 — и Вольф Э., 1961b, *Phys. Rev.* 124, 1696.  
 — и Вольф Э., 1962, *Proc. Phys. Soc. (London)* 80, 894.  
 — и Вольф Э., 1963a, *Phys. Rev. Letts.* 10, 276.  
 — и Вольф Э., 1963b, *J. Opt. Soc. Amer.* 53, 1315.
- Мак-Кумбер Д. Е., 1963, *Phys. Rev.* 130, 675.  
 Мак-Мартри В. Дж., 1963, *Appl. Opt.* 2, 767.  
 — и Сигман А. Е., 1962, *Appl. Opt.* 1, 51.  
 Мак-Мастер В. Г., 1954, *Amer. J. Phys.* 22, 351.  
 Маратай А. С., On the Theory of Partial Polarization and Phase Retrieval, Dissertation, Boston University, 1963 (не опубликовано).  
 Мартенсен В. и Шпиллер Е., 1964, *Amer. J. Phys.* 32, 919.

- Мессиа А., 1961, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, vol. I.  
 —, 1962, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, vol. II.
- Метта К. Дж., 1963, *Nuovo Cimento* 28, 401.  
 —, 1964, *J. Math. Phys.* 5, 677.  
 —, 1965a, *Nuovo Cimento* 36, 202.  
 —, 1965b, *Lectures on Theoretical Physics*, edited by W. E. Brittin, University of Colorado Press, Boulder, Colorado, vol. 7 (в печати).  
 — и Вольф Э., 1964a, *Phys. Rev.* 134, A1143.  
 — и Вольф Э., 1964b, *Phys. Rev.* 134, A1149.  
 —, Вольф Э. и Балчандран А. П., 1965, поступило в *J. Math. Phys.*  
 — и Сударшан Э. К. Дж., 1965, *Phys. Rev.* 138, B274.
- Мойдал Дж. Э., 1949, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 45, 99.
- Мороз П. М., 1962, *Thermal Physics*, W. A. Benjamin, New York.
- Меджар Дж. и Мандель Л., 1963, *Nature* 198, 255.  
 — и Мандель Л., 1964, *Quantum Electronics*, Proceedings of the Third International Congress, edited by N. Bloembergen and P. Grivet, Dunod et Cie., Paris; Columbia University Press, New York, стр. 1247.
- Нейгебауэр Г. Э. Дж., 1962, *J. Opt. Soc. Amer.* 52, 470.
- О'Нейл Э. Л., 1963, *Introduction to Statistical Optics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
- и Асакура Т., 1961, *J. Phys. Soc. (Japan)* 16, 301.  
 — и Вальтер А., 1963, *Opt. Acta* 10, 33.
- Паванин Р., Танг К. Л. и Штатц Г., 1963, *Proc. IEEE* 51, 63.
- Панчаратнам С., 1956a, *Proc. Indian Acad. Sci. Sec. A* 44, 247.  
 —, 1956b, *Proc. Indian Acad. Sci. Sec. A* 44, 398.  
 —, 1957a, *Proc. Indian Acad. Sci. Sec. A* 45, 1.  
 —, 1957b, *Proc. Indian Acad. Sci. Sec. A* 45, 402.  
 —, 1963a, *Proc. Indian Acad. Sci.* 57, 218.  
 —, 1963b, *Proc. Indian Acad. Sci.* 57, 231.
- Паррент Дж. Б., 1959a, *J. Opt. Soc. Amer.* 49, 787.  
 —, 1959b, *Opt. Acta* 6, 285.  
 — и Роман П., 1960, *Nuovo Cimento* 15, 370.
- Паули В., 1958, *Encyclopedia of Physics*, edited by S. Flügge, Springer-Verlag, Berlin, Bd. 5, Teil I, стр. 1.
- Пауль Г., 1963, *Ann. Phys.* 12, 290.  
 —, 1964, *Ann. Phys.* 14, 147.
- Брунивер В. и Рихтер Г., 1963, *Ann. Phys.* 12, 325.
- Перард А., 1928, *Rev. Opt.* 7, 1.  
 —, 1935, *Reunions de l'Institut d'Optique*, *Rev. d'optique*, Paris, стр. 10.
- Персепп Э. М., 1956, *Nature* 178, 1449.
- Пикард Р. Г. и Вильямс К. Р., 1965 (будет опубликовано).
- Пис Ф. Дж., 1931, *Ergeb. exakt. Naturwiss.* 10, 84.
- Планк М., 1901a, *Ann. Phys.* 4, 553.  
 —, 1901b, *Ann. Phys.* 4, 564.  
 —, 1959, *The Theory of Heat Radiation*, Dover Publications, New York.
- Райс С. О., 1944, *Bell System Tech. J.* 23, 282.  
 —, 1945, *Bell System Tech. J.* 24, 46.
- Ратклифф Дж. А., 1956, *Rept. Progr. Phys.* 19, 188.
- Ребка Дж. А. и Паунд Р. В., 1957, *Nature* 180, 1035.
- Рид И. С., 1962, *IRE Trans. on Inform. Theory* IT-8, 194.
- Рихтер Г., Брунивер В. и Пауль Г., 1964, *Ann. Phys.* 14, 329.
- Роман П., 1961a, *Nuovo Cimento* 20, 759.  
 —, 1961b, *Nuovo Cimento* 22, 1005.  
 — и Маратэй А. С., 1963, *Nuovo Cimento* 30, 1452.  
 — и Вольф Э., 1960a, *Nuovo Cimento* 17, 462.  
 — и Вольф Э., 1960b, *Nuovo Cimento* 17, 477.
- Рэлей, 1892, *Phil. Mag.* 34, 407.
- Сарфатт Дж., 1963, *Nuovo Cimento* 27, 1119.
- Сеницкий И. Р., 1958, *Phys. Rev.* 111, 3.  
 —, 1959, *Phys. Rev.* 115, 227.  
 —, 1960, *Phys. Rev.* 119, 1807.  
 —, 1961a, *Phys. Rev.* 121, 171.  
 —, 1961b, *Phys. Rev.* 123, 1525.  
 —, 1962a, *Phys. Rev.* 127, 1638.

- Сеницкий, 1962b, Phys. Rev. **128**, 2864.  
 —, 1965 (submitted to Phys. Rev.).  
 Сериес Дж. У., 1961, *Advances in Quantum Electronics*, edited by J. R. Singer, Columbia University Press, New York, стр. 128.  
 Силитто Р. М., 1963, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **A66**, 93.  
 Слевяни Д., 1958, Bell System Tech. J. **37**, 163.  
 Смит А. В. и Уильямс Дж. У., 1962, J. Opt. Soc. Am. **52**, 337.  
 Смит С. Дж. и Персепл Э. М., 1953, Phys. Rev. **92**, 1069.  
 Снеддон И. Н., 1955, *Преобразование Фурье*, М., ИЛ.  
 Стокс Дж. Дж., 1852, Trans Cambridge Phil. Soc. **9**, 399; reprinted in Stokes's *Mathematical and Physical Papers* (Cambridge University Press, Cambridge, 1901), т. 3, стр. 233.  
 Стропг Дж. и Ванассе Дж. А., 1959, J. Opt. Soc. Amer. **49**, 844.  
 Сударшан Э. К. Дж., 1962, *Lectures in Theoretical Physics*, Brandeis Summer Institute, W. A. Benjamin, New York, стр. 143.  
 —, 1963a, Phys. Rev. Letts. **10**, 277.  
 —, 1963b, *Proceedings of the Symposium on Optical Masers*, John Wiley & Sons, New York, стр. 45.  
 Твист Р. К. и Литтл А. Дж., 1959, Australian J. Phys. **12**, 77.  
 —, Литтл А. Дж. и Хенбери Браун Р., 1957, Nature **180**, 324.  
 Тер-Хаар Д., 1961, Rept. Progr. Phys. (London) **24**, 304.  
 Титчмарш Э., 1948, *Введение в теорию интегралов Фурье*, М., ИЛ.  
 Толл Дж., 1956, Phys. Rev. **104**, 1760.  
 Толхук Г. А., 1956, Rev. Mod. Phys. **28**, 277.  
 Торальдо ди Франсия Дж., 1948, Rendic. Accad. Naz. Lincei (Classe di Scienze fisiche, математические и природы) **4**, 319.  
 —, 1960, Nuovo Cimento **16**, 61.  
 Уиттекер Э., 1953, *A History of The Theories of Aether and Electricity (The Modern Theories, 1900—1926)*, T. Nelson & Sons, London.  
 — и Ватсон Дж. Н., 1963, *Курс современного анализа*, М., Физматгиз.  
 Уленбек Дж. Э. и Гроуппер Л., 1932, Phys. Rev. **41**, 79.  
 Фальков Д. Л. и Мак-Дональд Дж. Э., 1951, J. Opt. Soc. Amer. **41**, 861.  
 Фано У., 1954, Phys. Rev. **93**, 121.  
 —, 1957, Rev. Mod. Phys. **29**, 74.  
 —, 1961, Amer. J. Phys. **29**, 539.  
 Фелжетт П., 1958a, J. Phys. et radium **19**, 187.  
 —, 1958b, J. Phys. et radium **19**, 237.  
 — и Линфут Э. Г., 1955, Phil. Trans. Roy Soc. (London) **A247**, 369.  
 Форрестер А. Т., 1956, Amer. J. Phys. **24**, 192.  
 —, 1961a, J. Opt. Soc. Amer. **51**, 253.  
 —, 1961b, *Advances in Quantum Electronics*, edited by J. R. Singer, Columbia University Press, New York, стр. 233.  
 —, Гудмундсен Р. А. и Джонсон П. О., 1955, Phys. Rev. **99**, 1691.  
 Франкен П. А., 1961, Phys. Rev. **121**, 508.  
 — и Уорд Дж. Ф., 1963, Rev. Mod. Phys. **35**, 23.  
 Фрид К. и Хаус Г. А., 1965, Appl. Phys. Letts. **6**, 85.  
 Фридман Б., 1956, *Principles and Techniques of Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, гл. 3.  
 Фюргт Р., 1928a, Zs. Phys. **48**, 323.  
 —, 1928b, Zs. Phys. **50**, 310.  
 Хакен Г., 1964, Phys. Rev. Letts. **13**, 329.  
 — и Зауэрманн Г., 1963, Zs. Phys. **173**, 261.  
 Халфин Л. А., 1957, ЖЭТФ **33**, 1371.  
 —, 1960, ДАН СССР **132**, 105.  
 —, 1961, ДАН СССР **141**, 599.  
 Харкевич А. А., 1962, *Спектры и анализ*, М., Физматгиз.  
 Харуит М., 1960, Phys. Rev. **120**, 1551.  
 Хаус Г. А. и Муллен Дж. А., 1962, Phys. Rev. **128**, 2407.  
 — и Муллен Дж. А., 1963, *Proceedings of the Symposium on Optical Masers*, John Wiley & Sons, New York, стр. 131.  
 Хелстром К., 1964, Proc. Phys. Soc. (London) **83**, 777.  
 Хем Р. Н. и Харрис Э. Дж., 1963, Nuovo Cimento **29**, 568.  
 Херриот Д. Р., 1962, J. Opt. Soc. Amer. **52**, 31.  
 Ходара Г., 1964, WESCON/64, paper 17, 4.

- Холидэй Д., 1964, *Phys. Letts.* **8**, 250.  
 — и Сэйдж М. Л., 1964, *Ann. Phys.* **29**, 125.  
 Хоу Хеин-ю, Рихартц М. и Юнь Кан-лянь, 1947, *J. Opt. Soc. Amer.* **37**, 99.  
 Хуанг К., 1963, *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, New York.  
 Цернике Ф., 1938, *Physica* **5**, 785.  
 —, 1948, *Proc. Phys. Soc. (London)* **61**, 158.  
 Чилметти Ф., 1964, *Phys. Letts.* **12**, 210.  
 Швабль Ф. и Тирринг В., 1964, *Ergeb. Exact. Naturwiss.* **36**, 219.  
 Шебер С. С., 1961, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Harper & Row, New York.  
 Швингер Ю., 1953, *Phys. Rev.* **91**, 728.  
 —, 1961, *J. Math. Phys.* **2**, 407.  
 Шенцион К. Э., 1948, *Bell Syst. Tech. J.* **27**, 623.  
 Шифф Л. И., 1955, *Квантовая механика*, М., ИЛ.  
 Шрейфер В., 1964, *Ann. Phys. (N. Y.)* **27**, 72.  
 Шредингер Э., 1928, *Ann. Phys.* **87**, 570.  
 Шьюзелл Дж., 1959, *Amer. J. Phys.* **27**, 16.  
 Эйнштейн А., 1905, *Ann. Physik* **17**, 132.  
 —, 1909a, *Phys. Z.* **10**, 185.  
 —, 1909b, *Phys. Z.* **10**, 817.  
 —, 1912 *La Theorie du rayonnement et les quanta*, Instituts Solvay, Brussels, Conseil de Physique 1 er 1911, edited by P. Langevin and L. de Broglie, Gauthier-Villars, Paris, стр. 407.  
 —, 1915, *Ann. Phys.* **47**, 879.  
 — и Хопф Л., 1910, *Ann. Phys.* **33**, 1096.  
 Яглом А. М., 1952, Введение в теорию стационарных случайных функций, УМН **7** 5 (51), 3—168.  
 Яноши Л., 1957, *Nuovo Cimento* **6**, 111.  
 —, 1959, *Nuovo Cimento* **12**, 370.  
 —, Нэрэй З. и Варга П., 1961, *Közp. Fiz. Kut. Intez. Közl. (Budapest)* **9**, 197.
-

