

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

532.5

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Р. В. Половин, Е. П. Черкасова

ВВЕДЕНИЕ

Идея Альвена о том, что магнитные силовые линии «приклеены» к частицам¹, позволила объяснить динамику солнечных пятен. Это приближение оказалось слишком грубым в земных условиях, однако оно послужило основой инженерных приложений магнитной гидродинамики (электромагнитные измерительные приборы и насосы, магнитогиродинамические генераторы и ускорители плазмы).

В настоящее время центр тяжести магнитогиродинамических исследований переместился в сторону точного учета всех сопутствующих явлений: вязкости, теплопроводности, конечной электропроводности, тока Холла, неоднородности среды, неравновесных явлений и др. Получаемые при этом решения магнитогиродинамических уравнений являются громоздкими и необозримыми.

С другой стороны, за последние годы в магнитной гидродинамике получен ряд новых, порой неожиданных, результатов. Цель настоящего обзора — изложить эти результаты, оставаясь в рамках теории идеальной среды. В обзоре рассматриваются магнитогиродинамические волны в однородной среде. Даже при таком ограничении, чтобы удержать объем обзора в разумных пределах, пришлось почти полностью опустить доказательства. Громоздкие формулы умышленно не введены в текст, приводятся главным образом качественные результаты. Отсутствие доказательств отчасти компенсируется ссылками на оригинальные статьи.

Исследование устойчивости магнитогиродинамических течений потребовало привлечения условий эволюционности. Эти условия позволили не только отбросить неосуществимые решения уравнений магнитной гидродинамики, но и объяснить с единой точки зрения ряд тонких вопросов обычной гидродинамики (течения в соплах, трансзвуковое обтекание, косые и конические ударные волны).

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Исследование магнитогиродинамических волн мы начнем с волн малой амплитуды в неподвижной однородной среде. Линеаризуя уравнения магнитной гидродинамики и полагая, что зависимость возмущенных величин от координат и времени имеет вид $e^{i(kx - \omega t)}$, находим, что возмущения распадаются на семь волн^{2, 3}.

¹ УФН, т. 88, вып. 4

1. Две быстрые магнитозвуковые волны ⁴, у которых отличны от нуля возмущения δv_x , δv_y , $\delta \rho$, δp , δH_y (v — скорость, ρ — плотность, p — давление, H — магнитное поле; система координат выбрана таким образом, чтобы невозмущенное магнитное поле H_z равнялось нулю). Фазовая скорость ω/k этих волн равна $\pm V_+$, где

$$V_+ = \sqrt{\frac{U^2 + c^2 + \sqrt{(U^2 + c^2)^2 - 4U^2c^2 \cos^2 \theta}}{2}} \quad (1,1)$$

(c — скорость звука, $U = H \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}$ — альвеновская скорость, θ — угол между осью x и вектором H).

2. Две медленные магнитозвуковые волны, у которых также отличны от нуля величины δv_x , δv_y , $\delta \rho$, δp , δH_y , а фазовая скорость равна $\pm V_-$, где

$$V_- = \sqrt{\frac{U^2 + c^2 - \sqrt{(U^2 + c^2)^2 - 4U^2c^2 \cos^2 \theta}}{2}}. \quad (1,2)$$

Магнитозвуковые волны являются плоскополяризованными; это означает, что существует система отсчета, в которой $\delta v_z = \delta H_z = 0$.

3. Две альвеновские волны ¹, у которых отличны от нуля возмущения δv_y , δv_z , δH_y , δH_z , а фазовая скорость равна $\pm U_x$, где

$$U_x = |H_x| \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} = H \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} |\cos \theta|. \quad (1,3)$$

Альвеновская волна имеет круговую поляризацию; это означает, что величина $H_y^2 + H_z^2$ остается постоянной.

4. Энтропийная волна, у которой отлично от нуля лишь возмущение величины $\delta \rho$, а возмущения всех остальных величин (δp , δv , δH) равны нулю. Фазовая скорость энтропийной волны равна нулю.

Фазовая скорость распространения магнитогидродинамических волн зависит от угла θ между направлением магнитного поля и направлением распространения волны. График этой зависимости, называемый фазовой поларой ⁵⁻⁷, для быстрой и медленной магнитозвуковой волны изображен на рис. 1. На этом рисунке

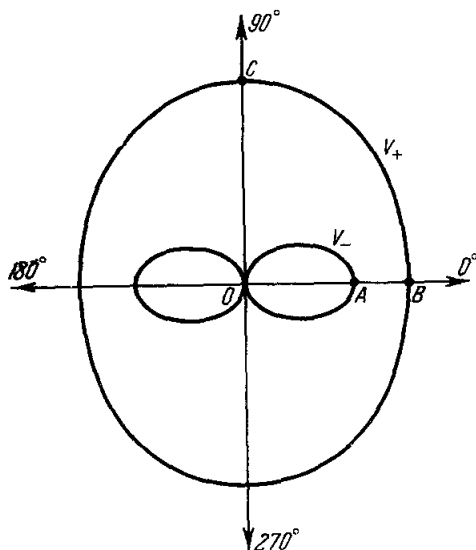


Рис. 1. Фазовые полары.

V_+ — быстрая полара; V_- — медленная полара. Магнитное поле направлено вдоль поларной оси.

$$OA = \min(U, c), \quad OB = \max(U, c),$$

$$OC = \sqrt{U^2 + c^2}.$$

Внутренние кривые (OAO и симметричная с ней кривая) называются медленной фазовой поларой, а внешняя кривая BC — быстрой фазовой поларой.

Произвольное возмущение магнитогидродинамических величин можно представить в виде суперпозиции линейных волн вида $e^{i(kr \cos \theta - \omega t)}$. Скорость распространения магнитозвукового возмущения не совпадает, однако, с фазовой

скоростью волны $\frac{\omega}{k} = V_{\pm}$, а равна групповой скорости ⁸

$$U_{\pm} = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (1,4)$$

В одномерном случае, когда величина θ для всех волн одинакова ($r \cos \theta = x$), фазовая и групповая скорости совпадают (т. е. отсутствует дисперсия).

В двумерном и трехмерном случаях фазовая скорость не совпадает с групповой. В самом деле, из (1,4) следует

$$U_{\pm} \cos \theta = \frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \quad U_{\pm} \sin \theta = \frac{\partial \omega}{\partial k_y}. \quad (1,5)$$

Подставляя в (1,5) $\omega = V_{\pm}(\theta) k$, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, получим параметрические уравнения групповых поляр ^{6, 7, 9-11}

$$\begin{aligned} x &\equiv U_{\pm}(\theta) \cos \theta = V_{\pm}(\theta) \cos \theta - V'_{\pm}(\theta) \sin \theta, \\ y &\equiv U_{\pm}(\theta) \sin \theta = V_{\pm}(\theta) \sin \theta + V'_{\pm}(\theta) \cos \theta \end{aligned} \quad (1,6)$$

(см. рис. 2; значок плюс относится к быстрой групповой поляре, а значок минус — к медленной поляре). На этом рисунке

$$OB = \max(U, c), \quad (1,7)$$

$$OA = \min(U, c), \quad (1,8)$$

$$OC = \sqrt{U^2 + c^2}, \quad OD = \frac{Uc}{\sqrt{U^2 + c^2}}. \quad (1,9)$$

Возмущения от точечного источника, испущенные в момент $t = 0$, будут находиться в момент $t = 1$ в области, заключенной внутри быстрой групповой поляры. Заметим, что в двумерном и трехмерном случаях не происходит расщепления исходного возмущения на быстрые и медленные магнитозвуковые волны. Все возмущение распространяется с быстрой групповой скоростью $U_{+}(\theta)$. С другой стороны, как показывают вычисления ^{12, 13}, возмущения внутри медленных групповых поляр равны нулю.

В произвольный момент t возмущения будут отличны от нуля в области, заключенной между линиями $r = U_{+}(\theta) t$ и $r = U_{-}(\theta) t$, которые мы также будем называть быстрой и медленной групповыми полярами, соответствующими моменту t .

Отметим также, что в магнитной гидродинамике, в отличие от обычной, не выполняется принцип Гюйгенса для трехмерных волн. Этот принцип состоит в том, что гидродинамические возмущения, испущенные в момент $t = 0$ из точки $x = y = z = 0$, будут отличны от нуля

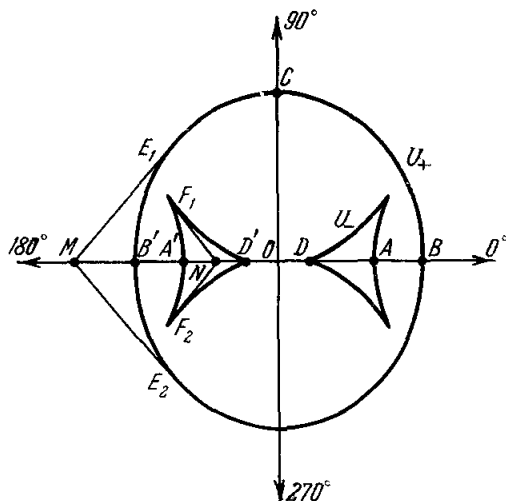


Рис. 2. Групповые поляры.

U_{+} — быстрая поляра; U_{-} — медленная поляра. Магнитное поле направлено вдоль полярной оси.

в любой последующий момент $t > 0$ лишь на поверхности сферы (в обычной гидродинамике)

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (1,10)$$

и будут тождественно равны нулю внутри этой сферы. Наоборот, для двумерных волн в обычной гидродинамике принцип Гюйгенса не выполняется: возмущения будут отличны от нуля во всех внутренних точках круга

$$x^2 + y^2 \leq c^2 t^2. \quad (1,11)$$

В магнитной гидродинамике принцип Гюйгенса не выполняется ни для трехмерных, ни для двумерных волн¹⁴. Возмущения отличны от нуля в любой точке, заключенной между быстрой и медленной групповыми полярами.

§ 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ

Мы ограничимся рассмотрением двумерных стационарных течений. Характеристиками называются линии, на которых возможны бесконечно малые разрывы магнитогидродинамических величин. Эти линии можно рассматривать как ударные волны бесконечно малой интенсивности.

В обычной гидродинамике характеристики существуют лишь при сверхзвуковой скорости среды. Они образуют с вектором скорости угол α , определяемый соотношением $\sin \alpha = \frac{c}{v}$ (α — угол Маха).

В магнитной гидродинамике дело обстоит гораздо сложнее.

Прежде всего, существуют два типа двумерных волн — быстрая и медленная магнитозвуковая. Поэтому существуют два типа характеристик — быстрая и медленная. Кроме того, в ряде случаев возмущения распространяются не только вниз по течению, как в обычной гидродинамике, но и против течения¹⁵.

При стационарном течении характеристика является фронтом волны, исходящей из точечного источника, движущегося со скоростью среды v . Поэтому характеристика представляет собой огибающую семейства групповых поляр $U_{\pm}(\theta)t$, центры которых находятся в точках vt (при этом параметр t пробегает значения от нуля до бесконечности).

На рис. 2 изображена групповая поляра, соответствующая моменту времени $t = 1$. С течением времени размеры групповых поляр увеличиваются, а центры симметрии переносятся со скоростью жидкости v . Если жидкость движется параллельно магнитному полю, то к моменту времени $t = 1$ центр симметрии сдвинется вправо вдоль оси x на расстояние, численно равное скорости жидкости v (жидкость течет слева направо). Иначе говоря, точка, в которой возмущение находилось в момент времени $t = 0$, при $t = 1$ представляет собой конец вектора $(-v)$, проведенного из центра симметрии (на рис. 2 это точки M, N для двух различных значений скорости). Поэтому характеристика совпадает с касательной к групповой поляре $r = U_{\pm}(\theta)t$, проведенной из точки $(-v)$ ^{7,12}. На рис. 2 характеристиками являются прямые NF_1, NF_2 и ME_1, ME_2 . Характеристики NF_1, NF_2 направлены влево, т. е. против течения, а характеристики ME_1, ME_2 — вправо, т. е. вниз по течению.

Если из точки $(-v)$ нельзя провести касательную к групповой поляре, то характеристики отсутствуют. Такое течение называется эллиптическим. Если характеристики существуют, то течение называется гиперболическим.

Определим условия гиперболичности в случае, когда скорость среды параллельна магнитному полю¹⁵⁻¹⁹. Из рис. 2 видно, что когда v и H параллельны, вектор $(-v)$ направлен вдоль луча OB' . Так как быстрая

групповая поляра выпукла, быстрая характеристика существует тогда, когда $v > OB'$ (см. точку M на рис. 2). Из формулы (1,7) следует условие существования быстрых характеристик

$$\max(U, c) < v. \quad (2,1)$$

Так как медленная групповая поляра вогнута, медленная характеристика существует, если $OD' < v < OA'$ (см. точку N на рис. 2). Из формул (1,8), (1,9) следует условие существования медленных характеристик

$$\frac{Uc}{\sqrt{U^2 + c^2}} < v < \min(U, c). \quad (2,2)$$

Условия (2,1), (2,2) совпадают с условиями черенковской генерации магнитозвуковых волн ²⁰.

Заметим, что если скорость среды параллельна магнитному полю, одновременное существование быстрых и медленных характеристик невозможно. Кроме того, быстрые характеристики направлены вниз по течению, а медленные — вверх по течению. Если же скорость не параллельна магнитному полю, то это правило не соблюдается — возможно существование быстрых и медленных характеристик; кроме того, быстрые характеристики могут быть направлены вверх по течению, а медленные — вниз по течению.

В противоположность стационарным течениям, которые могут не иметь характеристик, при нестационарных течениях характеристики существуют всегда. Так, например, для одномерных течений в обычной гидродинамике характеристиками в плоскости (x, t) являются линии, определяемые дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad (2,3)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x + c, \quad (2,4)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x - c. \quad (2,5)$$

Вдоль характеристики (2,3) распространяются возмущения энтропии и ротора скорости, вдоль характеристики (2,4) распространяется звуковая волна, движущаяся по течению, и вдоль характеристики (2,5) — звуковая волна, движущаяся против течения.

§ 3. ТРАНСЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

В обычной гидродинамике трансзвуковыми течениями называют течения с переходом скорости среды через скорость звука. В магнитной гидродинамике роль скорости звука играют скорости распространения малых возмущений.

Переходы через скорость звука возникают при течениях в соплах и при обтекании различных тел. Мы начнем с течений в соплах. Усредняя все величины по поперечному сечению сопла, мы приходим к одномерной задаче, в которой все величины зависят лишь от расстояния x , измеряемого вдоль оси сопла.

Бесконечно малые возмущения скорости, давления и энтропии в обычной гидродинамике распространяются вдоль характеристик (2,3) — (2,5). Характеристики (2,3), (2,4) всегда направлены вниз по течению ($\frac{dx}{dt} > 0$). Характеристика (2,5) направлена вниз по течению при сверхзвуковой

скорости среды ($v_x > c$) и направлена вверх по течению при дозвуковой скорости ($v_x < c$).

Если в одномерном течении переход через скорость звука происходит с ускорением (см. рис. 3, а; индекс 1 относится ко входу в сопло, а индекс 2 — к выходу), то возмущения, возникшие на звуковой линии ($v = c$), выносятся в области вверх ($v_1 < c_1$) и вниз ($v_2 > c_2$) по течению. Поэтому течение впереди и позади звуковой линии ($v = c$) может «подстроиться» к возмущению²¹. Это объясняет причину устойчивой работы сопла Лавала. Такое течение, при котором существует необходимое число волн, способных вынести возмущения из любой точки, мы называем эволюционным. В противном случае мы говорим о неэволюционном течении.

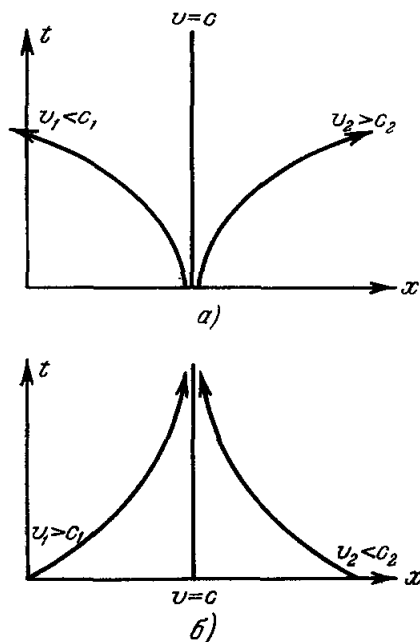


Рис. 3. Характеристики одномерного течения с переходом через скорость звука: а) с ускорением, б) с замедлением.

Индекс 1 относится ко входу в сопло, индекс 2 — к выходу из сопла; $v = c$ — звуковая линия.

С другой стороны, непрерывный переход через скорость звука с замедлением (сверхзвуковой диффузор) невозможен. Это объясняется тем, что различные возмущения, возникшие на входе и выходе из сопла, переносятся на звуковую линию и «застевают» на ней (см. рис. 3, б). Так как эти возмущения независимы, на звуковой линии возникает разрыв²², т. е. образуется ударная волна. (Впервые эта идея была высказана Рейнгольдсом (см. ²³). Образование разрывов на звуковой линии было показано в работах ²⁴⁻²⁷ путем исследования эволюции малых возмущений.)

Такие же рассуждения можно провести и в случае магнитной гидродинамики²⁸. При этом магнитное поле и скорость среды будут иметь две составляющие: H_x и v_x вдоль оси сопла и H_y , v_y в поперечном направлении (система координат выбрана таким образом, чтобы $H_z \equiv 0$ и $v_z \equiv 0$). Такое течение не может быть осуществлено в обычном сопле, так как благодаря поперечной

компоненте скорости v_y частицы будут попадать на стенку. Подобное течение может быть осуществлено в кольцевом сопле²⁹⁻³¹. При этом ось x направлена вдоль оси сопла, ось y — в азимутальном направлении и ось z — по радиусу. Отметим два случая, при которых возможно магнитогидродинамическое течение в обычном (некольцевом) сопле:

- 1) скорость параллельна магнитному полю³²,
- 2) скорость перпендикулярна к магнитному полю.

Во втором случае уравнения магнитной гидродинамики сводятся к уравнениям обычной гидродинамики, если вместо давления p и внутренней энергии единицы массы ε ввести величины

$$p^* = p + \frac{1}{2} \mu_0 H^2, \quad \varepsilon^* = \varepsilon + \frac{1}{2\varrho} \mu_0 H^2, \quad (3,1)$$

а скорость звука заменить величиной

$$c^* = \sqrt{c^2 + U^2}, \quad (3,2)$$

где U — альевеновская скорость.

При магнитогидродинамическом течении в соплах возможны два предельных случая в зависимости от величины электропроводности $\sigma^{33, 34}$.

1. Если магнитное число Рейнольдса $R_m \equiv \frac{lv}{\nu_m}$ (l — характерный размер, $\nu_m = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$ — магнитная вязкость) велико ³⁴⁻³⁶, то существуют три фазовые скорости распространения бесконечно малых возмущений: альвееновская скорость U_x и две скорости распространения магнитозвуковых волн V_{\pm} (если магнитное поле перпендикулярно к скорости среды, то $U_x = V_- = 0$, а $V_+ = \sqrt{c^2 + U^2}$).

2. Если магнитное число Рейнольдса мало ^{34, 35, 37-42}, то можно пренебречь магнитным полем, индуцированным при движении плазмы. При этом изменение магнитного поля является внешним воздействием, и бесконечно малые возмущения распространяются с обычной скоростью звука.

При больших магнитных числах Рейнольдса возможны следующие типы течений без прохождения через характерную скорость:

1) «медленное» течение:

$$v_x < V_-, \quad (3,3)$$

2) «доальвееновское» течение:

$$V_- < v_x < U_x, \quad (3,4)$$

3) «сверхальвееновское» течение:

$$U_x < v_x < V_+, \quad (3,5)$$

4) «быстрое» течение:

$$V_+ < v_x. \quad (3,6)$$

При $R_m \ll 1$, как и в обычной гидродинамике, возможны два типа течений без прохождения через характерную скорость:

1) дозвуковое течение: $v_x < c$,

2) сверхзвуковое течение: $v_x > c$.

Непрерывный переход через любую характерную скорость с ускорением возможен, а с замедлением невозможен (при этом всегда образуются ударные волны).

Перейдем теперь к трансзвуковому обтеканию. Начнем с обычной гидродинамики.

Пусть неподвижное ограниченное тело обтекается дозвуковым потоком газа. Так как скорость газа на поверхности обтекаемого тела больше скорости на бесконечности, при некотором критическом значении числа Маха на бесконечности скорость газа вблизи некоторой точки поверхности тела достигнет скорости звука.

Начиная с этого значения числа Маха возможно появление ударных волн. Возникает вопрос: что произойдет, если увеличить скорость набегающего газа, — появятся ли ударные волны или возможно непрерывное обтекание тела, такое, что скорость газа на бесконечности дозвуковая, а у поверхности тела существуют ограниченные области сверхзвукового течения?

Такие непрерывные течения формально существуют ⁴³, однако на практике при переходе от сверхзвуковой скорости к дозвуковой всегда образуются ударные волны ⁴⁴⁻⁴⁶.

Невозможность непрерывного трансзвукового обтекания легко объяснить, если заметить, что вблизи обтекаемого тела течение можно считать одномерным. В этой области применим сделанный выше вывод о течении

в соплах: непрерывный переход от сверхзвукового к дозвуковому течению невозможен.

К этому же выводу пришел Го⁴⁷, исследуя эволюцию малых возмущений.

Невозможность непрерывного трансзвукового обтекания при бесконечно малом изменении контура обтекаемого тела была показана в ряде работ^{43, 48-55}. Против этого доказательства выдвинул возражение Берс⁵⁶: влияние пограничного слоя приводит к тому, что в теории идеальной среды следует рассматривать не истинный профиль, а некоторый эффективный профиль, образуемый пограничным слоем. Поэтому не всякая деформация профиля является допустимой.

Возражение Берса не относится к работе Мораец⁵⁷, в которой показано, что бесконечно малое изменение числа Маха делает непрерывное трансзвуковое обтекание невозможным.

Иногда невозможность трансзвукового обтекания объясняют явлениями в пограничном слое, т. е. вязкостью. Если бы это объяснение было верно, то трансзвуковое обтекание можно было бы осуществить с помощью отсасывания воздуха⁵⁰.

Некоторые авторы связывали невозможность трансзвукового обтекания с образованием предельных линий^{54, 58-60} — огибающих характеристик. Однако дальнейшие исследования показали, что возможны трансзвуковые течения и без предельных линий^{54, 61, 62}.

Перейдем теперь к трансзвуковым течениям в магнитной гидродинамике.

Как было отмечено выше, если скорость течения перпендикулярна к магнитному полю, течение качественно совпадает с течением в обычной гидродинамике. Поэтому переход скорости среды через фазовую скорость магнитозвуковой волны (3,2) с замедлением является неустойчивым²⁶. При произвольной ориентации магнитного поля неустойчивым является любой переход с замедлением скорости среды через фазовую скорость магнитозвуковой или альвеновской волны²⁸.

Трансзвуковые магнитогидродинамические течения в случае, когда скорость среды параллельна магнитному полю, без рассмотрения устойчивости исследованы в работах^{32, 63-67}.

Отметим, что возникающие при этом переходы из области эллиптичности в область гиперболичности стационарных течений и наоборот не имеют ничего общего с возможностью осуществления таких течений. Осуществимость этих течений определяется условиями эволюционности, которые получаются из рассмотрения нестационарных возмущений.

Перейдем, наконец, к двумерным трансзвуковым течениям.

В обычной гидродинамике произвольное двумерное возмущение можно представить в виде суперпозиции возмущения ротора скорости, возмущения энтропии и потенциального изэнтропического звукового возмущения. Последнее описывается уравнением

$$\Phi_{tt} + 2(\Phi_x \Phi_{xt} + \Phi_y \Phi_{yt}) + (\Phi_x^2 - c^2) \Phi_{xx} + (\Phi_y^2 - c^2) \Phi_{yy} + 2\Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} = 0, \quad (3,7)$$

где Φ — потенциал скорости.

Рассмотрим, как ведут себя возмущения вблизи звуковой линии $v = c$. Направив ось x параллельно скорости, получим

$$\Phi_x = c, \quad \Phi_y = 0. \quad (3,8)$$

Полагая, что при переходе от сверхзвуковой скорости к дозвуковой характеристики, попав на звуковую линию, не могут с нее уйти,

продифференцируем соотношения (3,8) по t :

$$\Phi_{xt} = 0, \quad \Phi_{yt} = 0. \quad (3,9)$$

Подставляя (3,8) и (3,9) в (3,7), получим уравнение

$$\Phi_{tt} - c^2 \Phi_{yy} = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\Phi = f_1(y - ct) + f_2(y + ct). \quad (3,10)$$

Функция (3,10) представляет собой суперпозицию двух волн, которые расходятся от плоскости $y = 0$ в положительном и отрицательном направлениях оси y . Таким образом, двум сходящимся волнам соответствуют две расходящиеся волны, т. е. переход через скорость звука является эволюционным.

Это рассуждение теряет силу, если звуковая линия упирается в твердую стенку в точке, в которой вектор скорости имеет определенное направление. При этом от точки $x = 0$, $y = 0$ может отойти только одна волна, и течение является неэволюционным.

Если же звуковая линия упирается, например, в коническую точку, то переход через скорость звука с замедлением является эволюционным. Такие течения наблюдались экспериментально⁶⁸.

§ 4. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

Уравнения магнитной гидродинамики представляют собой систему нелинейных уравнений в частных производных. Исследование такой системы наталкивается на большие математические трудности даже в одномерном случае, когда все магнитогидродинамические величины зависят лишь от одной пространственной координаты x и времени t .

Это исследование значительно упрощается, если начальные данные не содержат параметра размерности длины. При этом уравнения магнитной гидродинамики инвариантны относительно замены переменных $x \rightarrow Cx$, $t \rightarrow Ct$. Поэтому замена переменных $\frac{x}{t} = \xi$ приводит эти уравнения к системе обыкновенных нелинейных уравнений, не содержащих явно независимую переменную ξ . Решения этой системы уравнений называются автомодельными волнами⁶⁹.

Автомодельные волны возникают при распаде произвольного первоначального разрыва магнитогидродинамических величин. К этой задаче сводится задача о поршне и задача о столкновении ударных волн.

Быстрым и медленным магнитозвуковым линейным волнам соответствуют быстрые и медленные автомодельные волны. В этих волнах переменными являются величины v_x , v_y , q , p , H_y (волна движется в направлении оси x).

Скорость распространения быстрой и медленной автомодельных волн определяется формулами (1,1) и (1,2). Эти формулы определяют скорость распространения волны в покоящейся среде. В движущейся среде скорость распространения волны равна $v_x \pm V_{\pm}$. В отличие от линейных волн, в которых величина v_x постоянна, в автомодельных волнах в различных точках величина v_x будет различной.

Основное отличие автомодельных волн от линейных состоит в том, что в линейных волнах все магнитогидродинамические величины — v_x , v_y , q , p , H_y — испытывают малые колебания вокруг равновесных значений, тогда как в автомодельных волнах эти величины монотонно изменяются.

Рассмотрим теперь, как изменяются различные магнитогидродинамические величины в автомодельной волне. Прежде всего, автомодельные волны являются волнами разрежения^{70, 71}: $\Delta \rho < 0$, $\Delta p < 0$. Изменение величин H_y , v_x и v_y в автомодельных волнах показано в таблице:

Изменение H_x , v_x и v_y в волнах различных типов. D^+ и D^- — детонация (быстрая и медленная); I^+ , I^- — ионизация (быстрая и медленная); G_b , G_c , G_d , G_m — горение (быстрое, сверхальевновское, доальевновское и медленное); U^+ и P^+ — быстрые волны (ударная и разрежения); A — 180° — альевновский разрыв; U^- и P^- — медленные волны (ударная и разрежения). Предполагается, что волна движется вправо и $H_x > 0$, $H_y > 0$. В противном случае ΔH_y , Δv_x , Δv_y следует заменить на $\text{sign} H_y \cdot \Delta H_y$, $\varepsilon \Delta v_x$ и $\varepsilon \text{sign}(H_x H_y) \cdot \Delta v_y$, где $\varepsilon = +1$, если волна движется вправо, и $\varepsilon = -1$, если волна движется влево.

			ΔH_y	Δv_x	Δv_y			
D^+	I^+	G_b	+	+	—	U^+		
		G_c	—	—	+	P^+		
D^-	I^-	G_d	—	0	+		A	
		G_m	+	—	—			U^- P^-

Быстрой автомодельной волне соответствует вторая строка таблицы (см. P^+ — «разрежение» в правой части таблицы). Медленной автомодельной волне соответствует нижняя строка (см. P^- в правой части таблицы). Для определенности система координат выбрана таким образом, что волна движется в положительном направлении оси x (относительно среды) и выполняются условия $H_x > 0$, $H_y > 0$.

Автомодельные волны являются плоскополяризованными: если внепрди волны $H_z = 0$, $v_z = 0$, то это соотношение будет выполняться во всех точках автомодельной волны.

Частным случаем автомодельной волны является перпендикулярная волна, у которой проекция магнитного поля на направление распространения волны равна нулю: $H_x = 0$.

Заметим, что альевновская и энтропийная волны не могут быть автомодельными.

§ 5. РАЗРЫВЫ

В предыдущих параграфах мы пренебрегали диссипативными эффектами — вязкостью, теплопроводностью и электрическим сопротивлением, считая соответствующие коэффициенты малыми. Это несправедливо для тех областей пространства, где велики градиенты магнитогидродинамических величин. В рамках теории идеальной среды такие области следует рассматривать как поверхности, на которых терпят разрыв ρ , p , v и H .

Значения магнитогидродинамических величин по обе стороны поверхности разрыва связаны граничными условиями, которые получаются не из уравнений магнитной гидродинамики, а непосредственно из законов сохранения массы, импульса, энергии и непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля и нормальной составляющей магнитного поля^{3, 72}.

Из граничных условий следует, что существуют три различных типа разрывов^{3, 3, 5, 72}.

1. Ударные волны, на которых испытывают скачки величины v_x , v_y , ρ , p , H_y (система координат выбрана таким образом, чтобы ось x была направлена вдоль нормали к поверхности разрыва, а $v_z = 0$, $H_z = 0$).

Ударные волны делятся на быстрые и медленные. Скорость распространения быстрых ударных волн больше альвеновской скорости, скорость распространения медленных волн — меньше. Однако скорость распространения ударных волн не определяется параметрами среды впереди волны, а зависит еще и от интенсивности ударной волны.

Отметим, что если скорость и магнитное поле параллельны друг другу впереди ударной волны, они будут параллельными и позади ударной волны.

Представляют интерес два частных случая ударных волн:

а) Параллельная волна, у которой равны нулю поперечные компоненты скорости и магнитного поля по обе стороны поверхности разрыва:

$$v_y = v_z = 0, \quad H_y = H_z = 0.$$

Из граничных условий следует, что скачки величин v_x , q , p на параллельной ударной волне будут такими же, как и при отсутствии магнитного поля.

б) Особая волна, у которой с одной стороны магнитное поле и скорость направлены вдоль нормали к поверхности разрыва.

2. Альвеновский (или вращательный) разрыв, на котором величины v_x , q , p непрерывны, а вектор магнитного поля испытывает поворот на некоторый угол вокруг оси x . Скорость распространения альвеновского разрыва в неподвижной среде равна альвеновской скорости $U_x = |H_x| \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}$.

Альвеновский разрыв, вообще говоря, не является плоскополяризованным: если впереди разрыва $H_{1z} = 0$, $v_{1z} = 0$, то позади него $H_{2z} \neq 0$, $v_{2z} \neq 0$. Однако если поворот магнитного поля происходит на 180° , альвеновский разрыв плоскополяризован. Характер изменения магнитного поля и скорости на таком разрыве приведен в таблице.

3. Контактный разрыв, на котором величины p , v , H непрерывны, и скачок испытывает только величина q . Скорость распространения контактного разрыва в неподвижной среде равна нулю.

В случае, когда нормальная компонента магнитного поля обращается в нуль, скорости распространения альвеновского разрыва и медленной ударной волны также становятся равными нулю. Поэтому эти разрывы сливаются с контактным разрывом, который также покоится относительно среды. Такой комбинированный разрыв называется тангенциальным. В отличие от ударных волн, на которых может быть произвольно задан скачок одной из магнитогидродинамических величин, на тангенциальном разрыве можно задать произвольно скачки пяти величин.

§ 6. УСЛОВИЯ ЭВОЛЮЦИОННОСТИ РАЗРЫВОВ

Задания граничных условий на разрыве недостаточно, чтобы единственным образом определить разрывное решение. Эта трудность встречается и в обычной гидродинамике. Так, например, при выдвигании поршня из трубы формально возможны два решения: 1) автомоделная волна разрежения, 2) ударная волна разрежения. Второе решение в обычной гидродинамике отбрасывается, так как в ударной волне разрежения убывает энтропия.

В магнитной гидродинамике ударные волны разрежения невозможны, так как на них также происходит убывание энтропии^{73, 74}. Однако в магнитной гидродинамике существует слишком большое количество ударных волн сжатия и задача о движении среды при заданных начальных и граничных условиях часто имеет несколько решений (см., например,^{75 и 76}). Таким образом, условие возрастания энтропии, с помощью которого

Исследование эволюционности значительно проще исследования обычной устойчивости, так как оно просто сводится к подсчету числа расходящихся волн. В то же время условия эволюционности позволяют с единой точки зрения объяснить неосуществимость ряда решений уравнений обычной гидродинамики и предсказать неосуществимость ряда решений уравнений магнитной гидродинамики. Без использования условий эволюционности невозможно решать задачи магнитной гидродинамики при наличии ударных волн.

В магнитной гидродинамике существуют две области эволюционности ударных волн ^{76, 89}:

1) Быстрые ударные волны, для которых

$$V_{1+} \leq v_{1x}, \quad U_{2x} < v_{2x} \leq V_{2+} \quad (6,2)$$

(V_+ , U_x — фазовая скорость быстрых магнитозвуковых и альвеновских волн в направлении нормали к поверхности разрыва, v_x — нормальная

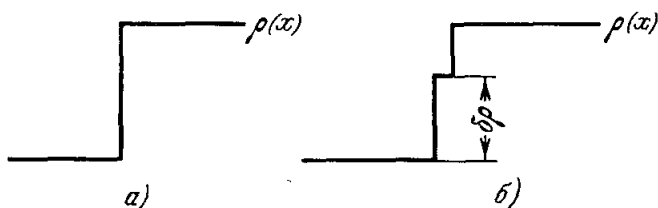


Рис. 4. Расщепление ударной волны.

а) Исходная волна; б) расщепившаяся волна; $\delta\rho$ — возмущение плотности. Ударная волна движется справа налево.

компонента скорости среды в системе отсчета, в которой разрыв покоится; индекс 1 относится к области впереди разрыва, индекс 2 — к области позади разрыва).

2) Медленные ударные волны, для которых

$$V_{1-} \leq v_{1x} < U_{1x}, \quad v_{2x} \leq V_{2-} \quad (6,3)$$

(V_- — фазовая скорость медленной магнитозвуковой волны в направлении нормали).

Некоторую дискуссию вызвал вопрос об условиях эволюционности особых ударных волн ⁹⁰. Позади быстрой особой волны выполняется соотношение $v_{2x} = U_{2x}$, а впереди медленной особой волны $v_{1x} = U_{1x}$. Поэтому согласно условиям эволюционности (6,2) и (6,3) особые ударные волны являются неэволюционными. С другой стороны, достаточно бесконечно малого поперечного магнитного поля H_y , чтобы существовала эволюционная ударная волна, близкая к особой. Так как магнитное поле не может быть задано абсолютно точно, вопрос об эволюционности особых ударных волн не имеет физического смысла — такие волны следует рассматривать как предел эволюционных ударных волн при стремлении к нулю поперечного магнитного поля. Поэтому особые ударные волны следует причислять к эволюционным ⁹¹.

Курантом и Фридрихсом ⁷⁹ (стр. 245); истоки этой идеи восходят к Гюгоонио ⁸⁰ (см. ⁸¹, стр. 99) и Жуге ⁸² (см. ⁸³). В общем случае, включающем в себя уравнения магнитной гидродинамики, условия эволюционности были сформулированы в статье Лэкса ⁸⁴. Вызывает удивление то, что после статьи Лэкса в ряде работ ⁸⁵⁻⁸⁸ признавалась возможность существования неэволюционных ударных волн на том основании, что в таких волнах энтропия возрастает. Невозможность существования неэволюционных ударных волн в магнитной гидродинамике была показана в работе ⁸⁹.

Из условий эволюционности следует ⁹², что ударные волны всегда являются волнами сжатия ($\Delta \rho > 0$, $\Delta p > 0$). Пользуясь этим, можно определить характер изменения остальных магнитогидродинамических величин в ударных волнах (см. первую и четвертую строки таблицы). Отметим, что в медленных ударных волнах поперечное магнитное поле H_y уменьшается, но не изменяет знака ² (перемена знака H_y происходит в неосуществимых неэволюционных ударных волнах).

§ 7. ЭКЗОТЕРМИЧЕСКИЕ И ЭНДОТЕРМИЧЕСКИЕ РАЗРЫВЫ

Рассмотрим разрывы, на которых происходит выделение (экзотермические разрывы) или поглощение (эндотермические разрывы) энергии вследствие протекания химических реакций, фазовых переходов, излучения или поглощения фотонов, диссоциации, ионизации, рекомбинации. Граничные условия на таких разрывах получаются добавлением энергии реакции в закон сохранения энергии.

В экзотермических разрывах температура резко повышается в узком слое. При этом нагрев среды происходит путем теплопроводности либо в ударной волне. В первом случае мы говорим о волнах горения (сюда же относятся конденсационные скачки ^{78, 93}, фотоионизационные разрывы ^{94, 95} и разрывы рекомбинации ⁹⁶), а во втором случае — о волнах детонации. Скорость распространения волны горения определяется характеристиками среды. Наоборот, скорость распространения детонационной волны зависит не только от характеристик среды, но и от интенсивности ударной волны.

Из эндотермических разрывов нам известны только ударные волны, сопровождающиеся диссоциацией, ионизацией и излучением.

Из условий эволюционности следует, что в обычной гидродинамике волны горения могут быть двух типов:

1) дозвуковое горение:

$$v_1 < c_1, \quad v_2 < c_2, \quad (7,1)$$

2) сверхзвуковое горение ⁹⁷:

$$v_1 > c_1, \quad v_2 > c_2. \quad (7,2)$$

Для ударных, детонационных волн и ударных волн, сопровождающихся ионизацией, условия эволюционности в обычной гидродинамике имеют вид

$$v_1 > c_1, \quad v_2 \leq c_2. \quad (7,3)$$

Перейдем к магнитной гидродинамике.

Области эволюционности детонационных волн и ударных волн, сопровождающихся ионизацией ^{98, 99}, совпадают с областями эволюционности ударных волн (6,2) и (6,3).

Особую роль играет детонация в режиме Чепмена — Жуге, при которой скорость продуктов реакции относительно разрыва равна фазовой скорости распространения малых возмущений:

$$v_{2x} = V_{2\pm}. \quad (7,4)$$

В противном случае ($v_{2x} < V_{2\pm}$) детонация называется пересжатой.

При детонации в режиме Чепмена — Жуге нагрев среды происходит за счет выделяемой энергии реакции. При этом амплитуда детонационной волны не зависит от скорости поршня, ограничивающего трубу, в которой происходит детонация. Эта амплитуда определяется свойствами среды.

В случае пересажатой детонации нагрев среды происходит как за счет выделяемой энергии реакции, так и за счет кинетической энергии поршня. При этом амплитуда детонационной волны будет больше, чем в режиме Чепмена — Жуге, и зависит от скорости поршня.

Детонация в режиме Чепмена — Жуге является устойчивой в том смысле, что при малых изменениях параметров среды она не переходит в пересажатую детонацию. Изменение параметров среды вызывает изменение амплитуд магнитогидродинамических волн, сопутствующих детонации в режиме Чепмена — Жуге (см. § 8).

Как известно, в обычной гидродинамике режим Чепмена — Жуге изображается на детонационной адиабате точкой, в которой прямая, проведенная из точки начального состояния, касается детонационной адиабаты. Рассмотрим, как изображается детонация Чепмена — Жуге в магнитной гидродинамике. На рис. 5 изображена магнитогидродинамическая детонационная адиабата¹⁰⁰ (зависимость между полным давлением $p^* = p + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$ и удельным объемом V позади разрыва). Начальное состояние (p_1^* , V_1) изображено точкой 4. Вертикальная и горизонтальная прямые, проходящие через точку 4, отсекают на детонационной адиабате отрезок 18—0, который не может быть осуществлен, так как ему соответствует мнимая плотность потока массы $\rho_1 v_{1x}$. Прямые 4—19, 4—10, 4—15, 4—16 касаются детонационной адиабаты в точках 19, 10, 15, 16, в которых скорость разрыва относительно продуктов реакции равна скорости распространения малых возмущений. Точки 19 и 15 соответствуют детонации в режиме Чепмена — Жуге на быстрой и медленной волнах. Участки 19—20 и 15—14 соответствуют быстрой и медленной пересажатой детонации. Прямая 4—14 имеет тангенс наклона к оси абсцисс, равный $- \rho_1^2 U_{1x}^2$. В точке 14 скорость распространения разрыва в неподвижной среде равна альвеновской скорости.

Перейдем к магнитогидродинамическому горению. Из условий эволюционности следует, что возможны четыре режима магнитогидродинамического горения^{101, 102}:

1) медленное горение:

$$v_{1x} < V_{1-}, \quad v_{2x} < V_{2-}, \quad (7,5)$$

2) доальвеновское горение:

$$V_{1-} < v_{1x} < U_{1x}, \quad V_{2-} < v_{2x} < U_{2x}, \quad (7,6)$$

3) сверхальвеновское горение:

$$U_{1x} < v_{1x} < V_{1+}, \quad U_{2x} < v_{2x} < V_{2+}, \quad (7,7)$$

4) быстрое горение:

$$V_{1+} < v_{1x}, \quad V_{2+} < v_{2x}. \quad (7,8)$$

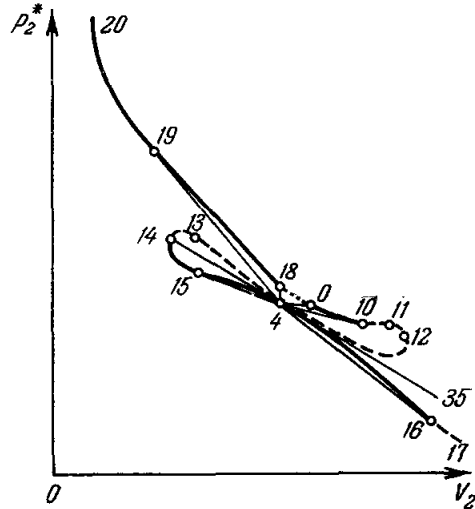


Рис. 5. Детонационная адиабата в магнитной гидродинамике.

Этим режимам соответствуют участки 0—10, 15—4, 4—16, 19—18 на рис. 5 *).

Характер изменения магнитного поля и скорости в волнах магнито-гидродинамической детонации и горения приводится в таблице.

Мы предполагали, что магнитное поле образует острый угол с направлением распространения волны. При поперечном направлении поля ($H_x = 0$) магнито-гидродинамическая детонация качественно подобна обычной^{39, 102–104}.

Изложенные выше результаты применимы, строго говоря, только к термоядерной детонации, так как среда впереди детонационной волны предполагалась идеально проводящей. При химической детонации температура среды впереди волны должна быть меньше точки поджигания; это противоречит тому, что вследствие термической ионизации проводимость среды велика.

Представляет интерес развить теорию детонации для случая, когда проводимость среды впереди разрыва равна нулю, а позади разрыва равна бесконечности¹⁰⁵. При этом в области впереди разрыва гидродинамические волны не взаимодействуют с электромагнитными. Следовательно, поверхность разрыва может излучать вперед электромагнитную волну, амплитуда которой не определяется законами сохранения и может быть найдена только из рассмотрения структуры разрыва^{106, 107} (см. также^{108, 109}).

§ 8. ПОРЯДОК СЛЕДОВАНИЯ ВОЛН

Из условий эволюционности следует, что число волн, которые могут одновременно двигаться в одну сторону, ограничено.

В обычной гидродинамике, если в одну сторону движутся две ударные волны, две автомодельные волны или ударная и автомодельная волны, они обязательно догоняют друг друга. Поэтому если эти волны образовались одновременно, то в одну сторону может двигаться не более одной волны.

Впереди волны сверхзвукового горения и позади волны дозвукового горения не могут двигаться никакие волны. В то же время позади волны сверхзвукового горения может двигаться ударная или автомодельная волна. Так же точно впереди волны дозвукового горения может двигаться ударная или автомодельная волна.

В магнитной гидродинамике две ударные волны одинакового вида (обе быстрые и обе медленные) также догоняют друг друга. Что касается волн различных видов, то альвеновский разрыв догоняет медленную волну, а быстрая ударная волна догоняет все виды разрывов. Подобным же образом ударная волна догоняет автомодельную⁶⁹, если она принадлежит к тому же виду, что и ударная волна, или к более медленному виду. Автомодельная волна догоняет ударную волну того же вида и ударную волну более медленного вида.

Таким образом, если волны образовались одновременно, то в одну сторону может двигаться не более трех волн: впереди быстрая волна (ударная или автомодельная), за ней альвеновская волна и, наконец, медленная волна (ударная или автомодельная).

Определим теперь, какие магнито-гидродинамические волны могут сопутствовать волнам детонации и ионизации.

*) Отметим, что при достаточно большой энергии реакции медленная детонация, ионизация на медленной ударной волне, а также доальвеновское и сверхальвеновское горение невозможны⁹⁹.

Так как условия эволюционности волн ионизации и пересажатой детонации совпадают с условиями эволюционности ударных волн, быстрая волна ионизации или пересажатой детонации не может сопровождаться быстрой ударной или быстрой автомодельной волной (аналогично для медленной волны). Таким образом, в каждую сторону может двигаться не более трех волн.

Если пересажатая детонация или ионизация происходят на быстрой волне, то последовательность волн будет следующей: впереди идет волна пересажатой детонации (или ионизации), за ней — альвееновская волна и, наконец, медленная волна (ударная или автомодельная).

В случае детонации Чепмена — Жуге скорость волны относительно продуктов реакции равна скорости распространения малых возмущений, поэтому за быстрой волной детонации в режиме Чепмена — Жуге может следовать быстрая автомодельная волна (аналогично для медленной волны).

Если детонация Чепмена — Жуге происходит на быстрой волне, то последовательность волн будет следующей: впереди идет быстрая волна детонации в режиме Чепмена — Жуге, за ней — быстрая волна разрежения (автомодельная), затем — альвееновская волна и, наконец, медленная волна (ударная или автомодельная).

Некоторые из перечисленных волн могут отсутствовать.

Характер волн, сопутствующих детонации, зависит от граничных условий. Если детонация происходит в трубе, закрытой с одной стороны идеально проводящим поршнем, характер этих волн зависит от нормальной u_y и тангенциальной u_x компонент скорости поршня. Эта зависимость показана на рис. 6⁹⁸.

Как видно из рис. 6, если поршень покоится, то детонация происходит в режиме Чепмена — Жуге^{99, 110, 111}. Заметим, что одномерная детонация при покоящемся поршне качественно подобна сферической детонации (так как из соображений симметрии скорость среды в центре равна нулю). Поэтому следует ожидать, что сферическая магнитогиродинамическая детонация также происходит в режиме Чепмена — Жуге.

Перейдем к определению возможных типов магнитогиродинамических волн, сопутствующих волнам горения.

Из условий эволюционности следует, что волна быстрого горения движется впереди магнитогиродинамических волн всех типов, волна сверхальвееновского горения заключена между быстрой (ударной или автомодельной) и альвееновской волнами, волна доальвееновского горения заключена между альвееновской и медленной волнами и, наконец, волна медленного горения движется позади всех магнитогиродинамических волн.

Например, при медленном горении впереди движется быстрая волна (ударная или автомодельная), за ней альвееновская волна, затем — медленная волна (ударная или автомодельная) и, наконец, волна медленного горения.

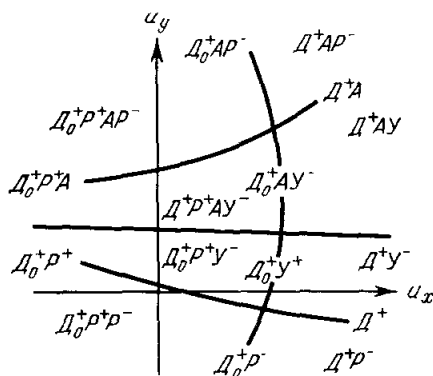


Рис. 6. Возможные режимы детонации на быстрой волне.

По оси абсцисс отложена продольная компонента скорости поршня u_x , по оси ординат — поперечная компонента u_y . Буквы D^+ , D_0^+ , Y^- , P^+ , P^- , A означают соответственно наличие быстрой волны пересажатой детонации, быстрой волны детонации в режиме Чепмена — Жуге, медленной ударной волны, быстрой и медленной волн разрежения и альвееновского разрыва.

§ 9. РАСПАД РАЗРЫВА

При столкновении двух ударных волн образуется разрыв, на котором не выполняются граничные условия. Поэтому такой разрыв распадается на ряд разрывных и автомодельных волн. Число образовавшихся волн равно семи: три волны, движущиеся вправо (быстрая, альвеновская и медленная), такие же три волны, движущиеся влево, и между ними контактный разрыв, покоящийся относительно среды. Быстрые и медленные волны могут быть либо ударными, либо автомодельными.

Распад разрыва малой интенсивности был исследован в работах ^{84, 112}. Распад неэволюционных ударных волн в ряде частных случаев рассмотрен в работах ¹¹³⁻¹¹⁵. Качественное исследование общей задачи о распаде произвольного магнитогидродинамического разрыва и неэволюционной ударной волны произвольной интенсивности было проведено в работах ¹¹⁶.

Частным случаем задачи о распаде разрыва в начальных условиях является задача о поршне. Если поршень начинает двигаться в момент $t = 0$ с постоянной скоростью, то возникает разрыв между скоростью поршня и скоростью среды. Задача о поршне в различных случаях была решена в работах ^{75, 86, 117-121}.

К задаче о распаде разрыва сводятся также задачи о столкновении ударных волн и об отражении ударных волн от стенки и от области сильного магнитного поля ^{122, 123}.

§ 10. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ

При сверхзвуковом двумерном течении плоскость течения можно разбить на область постоянного течения и область автомодельных волн. Если обтекаемый угол мало отличается от 180° , то автомодельная волна будет иметь малую интенсивность, при этом область, занятая автомодельной волной, стягивается к характеристике стационарного течения. В стационарных автомодельных волнах все величины зависят лишь от угла φ (в полярной системе координат (r, φ)). Такие волны возникают при обтекании угла, меньшего 180° (угол измеряется в области, занятой обтекаемым течением).

Мы ограничимся двумерным случаем, когда $v_z = 0$. Граничные условия на поверхности обтекаемого тела зависят от его электропроводности.

Наиболее сильно магнитогидродинамические эффекты проявляются при бесконечной электропроводности обтекаемого тела. При этом тангенциальная компонента электрического поля на поверхности тела равна нулю:

$$E_t = 0. \quad (10,1)$$

В бесконечно проводящей жидкости, обтекающей тело, электропроводность также бесконечна. Поэтому в системе отсчета, в которой жидкость покоится, электрическое поле \mathbf{E}' равно нулю. Пользуясь преобразованиями Лоренца, можно выразить \mathbf{E}' через электрическое поле \mathbf{E} в лабораторной системе отсчета:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mu_0 [\mathbf{v}\mathbf{H}] = 0. \quad (10,2)$$

Из (10,1) и (10,2) вытекает граничное условие на поверхности обтекаемого проводника

$$[\mathbf{v}\mathbf{H}]_t = 0. \quad (10,3)$$

Так как тело обтекается идеальной жидкостью, то $v_t \neq 0$. Поэтому из (10,3) следует, что нормальная компонента магнитного поля равна нулю:

$$H_n = 0. \quad (10,4)$$

Граничное условие (10,4) выполняется в двух случаях:

1. Скорость лежит в плоскости (x, y) , а магнитное поле направлено вдоль оси z . Этот случай сводится к обычной гидродинамике.

2. Скорость и магнитное поле лежат в плоскости (x, y) и параллельны друг другу.

Согласно результатам § 2, при этом возможны два типа автомодельных волн, ограниченных характеристиками от области постоянного течения:

а) Медленные волны, если $\frac{cU}{\sqrt{c^2 + U^2}} < v < \min(U, c)$. Медленные волны направлены вверх по течению.

б) Быстрые волны, если $\max(U, c) < v$. Быстрые волны направлены вниз по течению.

Стационарные автомодельные волны являются волнами разрежения^{5, 124}.

§ 11. КОСЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

При обтекании угла, большего 180° , или при обтекании клина в ряде случаев поворот скорости среды осуществляется в косой ударной волне, присоединенной к вершине угла.

Рассмотрим сначала косые ударные волны в обычной гидродинамике.

Зная скорость среды впереди ударной волны $v_{1x} = v_1$, $v_{1y} = 0$, можно из законов сохранения массы, импульса и энергии на ударной волне определить возможные значения v_{2x} , v_{2y} позади ударной волны. Соответствующие точки располагаются на кривой, называемой ударной полярой¹²⁵ (рис. 7).

Если задан угол полураствора клина θ , то для нахождения состояния (v_{2x}, v_{2y}) позади ударной волны нужно из начала координат O провести прямую, образующую угол θ с осью абсцисс. Эта прямая пересекает ударную поляру в двух точках S и W , соответствующих двум возможным косым ударным волнам. Ближайшая к началу координат точка S определяет ударную волну сильного семейства, а другая точка W — ударную волну слабого семейства. Если провести касательную OC_0 к ударной поляре, то точка касания отделит волны сильного семейства (им соответствуют точки на дуге AC_0) от волн слабого семейства (дуга C_0B). Если угол полураствора клина больше значения θ_0 (соответствующего точке C_0), то косая ударная волна не может существовать.

Вблизи точки C_0 расположена точка $C_{3в}$ (ей соответствует угол полураствора клина $\theta_{3в}$), такая, что скорость течения позади ударной волны равна скорости звука¹²⁶. На участке $AC_{3в}$ будет $v_2 < c_2$, а на участке

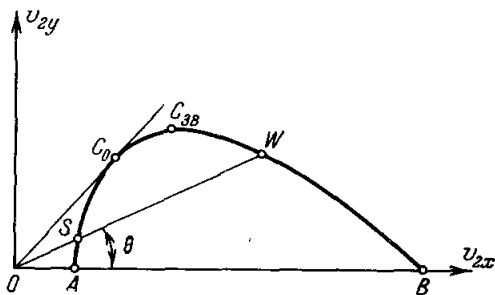


Рис. 7. Ударная поляра.

A — нормальная ударная волна; B — косая ударная волна бесконечно малой интенсивности; θ — угол полураствора клина; S и W — косые ударные волны сильного и слабого семейства; C_0 — точка, соответствующая максимально возможному θ ; $C_{3в}$ — точка, в которой скорость среды позади ударной волны равна скорости звука.

$C_{зв} B$ будет $v_2 > c_2$. (Различие между θ_0 и $\theta_{зв}$ для воздуха менее половины градуса; см. ⁶², стр. 398; ¹²⁷, стр. 432.)

Несмотря на то, что ударные волны сильного семейства формально возможны, на практике они не возникают.

Невозможность существования ударных волн сильного семейства следует из условий эволюционности. Впервые эта идея в неотчетливой форме была высказана Прандтлем ⁴⁶: если $v_2 < c_2$, то возмущения вносятся в угол, что приводит к развалу ударной волны; если же $v_2 > c_2$, то возмущения выносятся из угла.

Доказательство утверждения Прандтля состоит в следующем ¹²⁸. Так как течение впереди ударной волны сверхзвуковое, возмущения не могут проникнуть вверх по течению. Поэтому состояние среды впереди

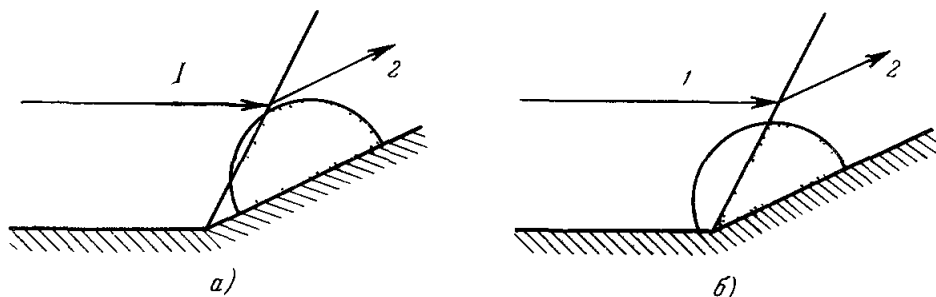


Рис. 8. Условия выметания.

Возмущенная область отмечена точками а) $v_2 > c_2$ — возмущение выметается из вершины, б) $v_2 < c_2$ — возмущение не выметается

ударной волны не может измениться. Если задано состояние среды впереди ударной волны и угол полураствора клина θ , то, согласно рис. 7, состояние позади ударной волны определено. Следовательно, возмущение, возникшее в момент $t = 0$ в вершине угла, должно быть в любой момент $t > 0$ «выметено» отсюда. В двумерном случае возмущения в движущейся среде в момент t заполняют круг (рис. 8, а и б)

$$(x - v_x t)^2 + (y - v_y t)^2 \leq c^2 t^2. \quad (11,1)$$

Условием того, что возмущение в точке $x = y = 0$ равно нулю, является $v_2 > c_2$. При невыполнении этого условия происходит отрыв ударной волны. Эксперименты по столкновению металлических пластинок ¹²⁹ указывают на то, что косая ударная волна отрывается при $\theta < \theta_0$.

Перейдем теперь к магнитогидродинамическим косым ударным волнам.

Подобно характеристикам магнитогидродинамические косые ударные волны могут быть направлены не только вниз, но и вверх по течению ¹³⁰ (см. также ^{64, 65, 131-135}).

Рассмотрим более подробно случай, когда скорость среды параллельна магнитному полю ¹²⁸. Учет условий эволюционности (6,2) и (6,3) значительно сужает число возможных решений ^{136, 137}.

Определим прежде всего, под каким углом может быть наклонена косая магнитогидродинамическая ударная волна. Из граничных условий следует, что при прохождении среды через ударную волну нормальная компонента магнитного поля не изменяется. Из таблицы видно, что тангенциальная компонента магнитного поля увеличивается в быстрых ударных волнах и уменьшается в медленных ударных волнах (не изменяя знака). Поэтому в быстрых ударных волнах угол между вектором магнитного поля и нормалью к поверхности разрыва увеличивается, а в медленных уменьшается. Так как вектор скорости параллелен магнитному полю, он преломляется на ударной волне таким же образом. Поэтому при

обтекании угла, большего 180° , линия разрыва может быть расположена лишь в секторе, показанном на рис. 9. Из рис. 9 видно, что быстрая ударная волна направлена вниз по течению, а медленная — вверх по течению.

Границы областей F и S (соответствующие углам наклона линии разрыва 90° и $90^\circ + \theta$ на рис. 9) достигаются в быстрой и медленной особых ударных волнах.

Можно показать, что в случае, когда вектор скорости параллелен магнитному полю, к вершине угла может быть присоединено не более одной волны (это утверждение несправедливо, если векторы скорости и магнитного поля не параллельны, что видно из того, что при этом из одной точки может исходить несколько характеристик, которые можно рассматривать как ударные волны бесконечно малой интенсивности).

Перейдем теперь к условиям выметания.

Из условий эволюционности следует¹²⁸, что впереди быстрой ударной волны выполняется условие

$$v_1 > (\max U_1, c_1). \quad (11,2)$$

Это означает, что возмущения не могут проникнуть вверх по течению. Поэтому они должны быть выметены из области вблизи вершины угла позади ударной волны. Поэтому вектор скорости должен лежать либо вне быстрой групповой поляры, либо внутри медленной, т. е. должно выполняться одно из условий:

$$v_2 > \max (U_2, c_2) \quad (11,3)$$

или

$$\frac{U_2 c_2}{\sqrt{U_2^2 + c_2^2}} < v_2 < \min (U_2, c_2). \quad (11,4)$$

Можно показать, что условие (11,4) противоречит законам сохранения на быстрой ударной волне.

Для медленной ударной волны условие (11,2) невозможно. Если впереди волны выполняется условие

$$\frac{U_1 c_1}{\sqrt{U_1^2 + c_1^2}} < v_1 < \min (U_1, c_1), \quad (11,5)$$

то возмущения не могут проникнуть вверх по течению. Поэтому возмущения должны выметаться из вершины угла позади ударной волны, т. е. должно выполняться условие (11,4). Если условие (11,5) не выполняется, то условие (11,4) также не должно выполняться.

§ 12. КОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

При сверхзвуковом обтекании конуса возникают конические ударные волны. Между коническими ударными волнами в обычной и магнитной гидродинамике существует значительное различие, связанное с выполнением принципа Гюйгенса в обычной гидродинамике и невыполнением его в магнитной гидродинамике.

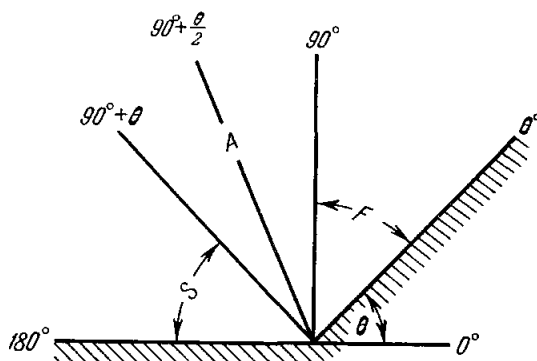


Рис. 9. Секторы, в которых возможна линия разрыва.

F — сектор, в котором возможна быстрая ударная волна; S — сектор, в котором возможна медленная ударная волна; A — направление альвеновского разрыва. Среда движется в незатрихованной области слева направо, вектор скорости параллелен магнитному полю.

Начнем с обычной гидродинамики. Коническое течение является трехмерным, поэтому возмущение, созданное в момент $t = 0$ в точке $x = y = z = 0$, в силу принципа Гюйгенса в любой момент $t > 0$ изменяет течение лишь на поверхности сферы

$$(x - v_x t)^2 + (y - v_y t)^2 + (z - v_z t)^2 = c^2 t^2, \quad (12,1)$$

но не внутри ее. Следовательно, возмущение всегда выметается из вершины угла. Таким образом, течение позади конической ударной волны может быть дозвуковым, как это и наблюдается экспериментально¹³⁸. Что же касается конических ударных волн сильного семейства, то они невозможны^{139, 140}. Это можно доказать следующим образом¹⁴¹. Если скорость позади конической ударной волны дозвуковая, то при обтекании конуса уравнение поверхности разрыва в сферической системе координат (r, φ, θ) имеет вид

$$\theta = \theta_w + Ar^m + \dots, \quad (12,2)$$

где θ_w , A , m — постоянные. Как показывает численный расчет¹⁴¹, для ударных волн сильного семейства $m < 0$, а для ударных волн слабого семейства $m > 0$. Из этого непосредственно следует, что конические ударные волны сильного семейства невозможны, так как для них поверхность разрыва (12,1) не проходит через точку $r = 0$.

Исследование скачков гидродинамических величин на конических ударных волнах проведено в статье¹⁴². Конические ударные волны всегда сопровождаются непрерывными коническими течениями; их исследованию посвящены работы¹⁴²⁻¹⁴⁵.

Движение конуса под углом атаки исследовано в работах¹⁴⁶⁻¹⁴⁹.

Перейдем теперь к коническим ударным волнам в магнитной гидродинамике (такие волны в случае, когда скорость среды на бесконечности параллельна магнитному полю, рассмотрены в работах^{150, 151}).

В магнитной гидродинамике косые и конические ударные волны качественно подобны, так как ни для двумерных, ни для трехмерных волн не выполняется принцип Гюйгенса. Поэтому для конических ударных волн должны выполняться те же условия выметания, что и для косых: для быстрых конических ударных волн (которые направлены вниз по течению) должны выполняться условия (11,2), (11,3); для медленных ударных волн (которые направлены вверх по течению) должны либо выполняться оба условия (11,4) и (11,5), либо не выполняться ни одно из них.

Физико-технический институт
АН УССР, г. Харьков

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Альвен, Космическая электродинамика, М., ИЛ, 1952.
2. С. И. Сыроватский, УФН 62, 247 (1957).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
4. G. Herlofson, Nature 165, 1020 (1950).
5. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, Магнитная гидродинамика, М., Физматгиз, 1962.
6. H. Grad, в сб. Magnetodynamics of Conducting Fluids (Ed. D. Bershader), Stanford Univ. Press, 1959, стр. 37.
7. W. R. Sears, Rev. Mod. Phys. 32, 701 (1960).
8. M. J. Lighthill, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), A252 (No. 1014), 397 (1960).
9. J. Bazer, O. Fleischman, Phys. Fluids 2, 366 (1959).
10. Y. M. Lyunn, Phys. Fluids 5, 626 (1962).

11. J. E. McCune, E. L. Resler, J. Aero and Space Sci. **27**, 493 (1960).
12. H. Grad, Rev. Mod. Phys. **32**, 831 (1960).
13. H. Weitzner, Bull. Amer. Phys. Soc. **5**, 321 (1960).
14. Р. Курант, Уравнения с частными производными, М., Изд-во «Мир», 1964.
15. М. Н. Коган, ПММ **23**, 70 (1959).
16. С. И. Сыроватский, Труды ФИАН **8**, 13 (1956).
17. T. Taniuti, Progr. Theor. Phys. **19**, 749 (1958).
18. J. Jmai, Rev. Mod. Phys. **32**, 992 (1960).
19. P. Germain, Rech. aérionaut, Nr. 7, 13 (1960).
20. А. И. Морозов, в сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 4, М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 331.
21. Л. Крокков, в сб. «Основы газовой динамики», М., ИЛ, 1963, стр. 64.
22. Р. В. Половин, ЖЭТФ **41**, 394 (1961).
23. Дж. И. Тейлор, в сб. «Газовая динамика», ГОНТИ, М.—Л., 1939, стр. 29—48.
24. A. Kantrowitz, Phys. Rev. **71**, 465 (1947).
25. R. E. Meyer, Proc. Symp. Appl. Math., vol. 4, McGraw-Hill Co, New York—Toronto—London, 1953, стр. 41.
26. J. Naze, Compt. rend. **246**, 3315 (1958); **248**, 362, 525 (1959).
27. A. Kantrowitz, в сб. «Основы газовой динамики», М., ИЛ, 1963, стр. 325.
28. Р. В. Половин, ПМТФ, № 6, 3 (1961).
29. C. L. Longmire, The Use of Plasma for Propulsion of Interplanetary Rockets, Plasma Acceleration, Stanford Univ. Press, 1960.
30. К. П. Черкасова, ПМТФ, № 5, 144 (1962).
31. А. И. Морозов, Л. С. Соловьев, ЖТФ **34**, 1154 (1964).
32. C. K. Chu, Phys. Fluids **5**, 550 (1962).
33. Л. А. Вулис, П. Л. Гусика, ЖТФ **31**, 806 (1961).
34. J. A. Shercliff, Rev. Mod. Phys. **32**, 980 (1960).
35. К. А. Лурье, ПМТФ, № 5, 3 (1961).
36. К. Б. Павлов, ЖЭТФ **39**, 304 (1960).
37. Г. С. Голицын, К. П. Станюкович, ЖЭТФ **33**, 1417 (1957).
38. И. Б. Чекомарев, ПММ, **24**, 382 (1960).
39. R. A. Gross, J. Aero and Space Sci. **25**, 788 (1958).
40. J. E. McCune, W. R. Sears, J. Aero and Space Sci. **27**, 139 (1960).
41. E. L. Resler, W. R. Sears, ZAMP **96**, 509 (1958).
42. W. R. Sears, ARS Journ. **29**, 397 (1959).
43. К. Г. Гудерлей, Теория околосвуковых течений, М., ИЛ, 1960.
44. Т. Карман, Сверхзвуковая аэродинамика, М., ИЛ, 1948, стр. 61.
45. Г. В. Липман, А. Е. Пакет, Введение в аэродинамику сжимаемой жидкости, М., ИЛ, 1949.
46. Л. Прандтль, в сб. «Газовая динамика», М.—Л., ГОНТИ, 1939, стр. 5.
47. Y. H. Kuо, J. Aero and Space Sci. **18**, 1 (1951).
48. Ф. И. Франкль, УМН **15**, 163 (1960).
49. Ф. И. Франкль, ПММ **11**, 199 (1947); **20**, 196 (1956).
50. W. R. Sears, J. Appl. Phys. **21**, 771 (1950).
51. C. S. Morawetz, Comm. Pure Appl. Math. **7**, 697 (1954); **9**, 45 (1956); **10**, 107 (1957).
52. A. Buseman, J. Aero and Space Sci. **16**, 337 (1949); Proc. Symp. on Appl. Math., vol. 4, McGraw-Hill, New York—Toronto—London, 1953, стр. 29.
53. A. R. Maxwell, Quart. J. Mech. Appl. Math. **7**, 40 (1954).
54. L. Bers, Comm. Pure and Appl. Math. **7**, 79 (1954).
55. Дж. Серрин, Математические основы классической механики жидкости, М., ИЛ, 1963.
56. Л. Берс, Математические вопросы дозвуковой и околосзвуковой газовой динамики, М., ИЛ, 1961.
57. C. S. Morawetz, Comm. Pure Appl. Math. **11**, 129 (1958).
58. О. С. Рыжов, ПММ **27**, 309 (1963).
59. В. С. Татаренчик, ПММ **8**, 401 (1944).
60. J. W. Craggs, Proc. Cambr. Phil. Soc. **44**, 360 (1948).
61. I. Colodner, C. S. Morawetz, Comm. Pure Appl. Math. **6**, 97 (1953).
62. R. Mises, Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow, Academic Press, New York, 1958.
63. K. Tamada, Phys. Fluids **5**, 871 (1962).
64. N. Geffen, Phys. Fluids **6**, 566 (1963).
65. М. Н. Коган, ПММ **25**, 132 (1961).
66. M. D. Cowley, ARS Journ. **30**, 271 (1960).
67. R. Peyret, Compt. rend. **250**, 1971 (1960).
68. G. J. Taylor, J. W. Massoll, Proc. Roy. Soc. **A139**, 278 (1933).
69. А. И. Ахизер, Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, ЖТФ **29**, 933 (1959); Укр. физ. ж. **3**, 433 (1958).

70. А. Г. Куликовский, ДАН СССР 121, 987 (1958).
71. Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, ЖЭТФ 35, 509 (1958); Укр. физ. ж. 3, 567 (1958).
72. F. Hoffmann, E. Teller, Phys. Rev. 80, 692 (1950).
73. С. В. Иорданский, ДАН СССР 121, 610 (1958).
74. Р. В. Половин, Г. Я. Любарский, ЖЭТФ 35, 510 (1958); УФЖ, 3 571 (1958).
75. Р. В. Половин, ЖЭТФ 39, 1005 (1960).
76. Р. В. Половин, УФН 72, 33 (1960).
77. И. М. Гельфанд, УМН 14, 87 (1959).
78. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1954.
79. Р. Курант, К. Фридрихс, Сверхзвуковые течения и ударные волны. М., ИЛ, 1950.
80. H. Hugoniot, Journ. Ecole polytechn. 58, 1 (1889).
81. Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газодинамику, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1946.
82. E. Jouguet, Mechanique des explosifs, Paris, 1917.
83. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 10, 542 (1940).
84. P. Lax, Comm. Pure Appl. Math. 10, 537 (1957).
85. R. Thibaut, Compt. rend. 255, 834 (1962).
86. J. Bazer, Astroph. J. 128, 686 (1958).
87. J. Bazer, W. B. Ericson, Astrophys. J. 129, 758 (1959).
88. W. B. Ericson, J. Bazer, Phys. Fluids 3, 63 (1960).
89. А. И. Ахизер, Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, ЖЭТФ 35, 731 (1958).
90. N. H. Kemmer, P. Germain, H. Grad, Revs. Mod. Phys. 32, 958 (1960).
91. Р. В. Половин, в сб. «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза», вып. 3, Киев, Изд-во АН УССР, 1963, стр. 169.
92. T. Taniuti, Prog. Theor. Phys. 28, 756 (1962).
93. С. З. Беленький, ДАН СССР 48, 172 (1945).
94. F. A. Goldsworthy, Phil. Trans. Roy. Soc. (London) A253 (No. 1028), 277 (1961); Rev. Mod. Phys. 30, 1062 (1958).
95. W. T. Axford, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), A253 (No. 1029), 301 (1961).
96. S. Feldman, Phys. Fluids 1, 546 (1958).
97. R. Dunlap, R. L. Brehm, J. A. Nicolls, Jet Propulsion 28, 451 (1958).
98. В. П. Демуцкий, Р. В. Половин, ЖЭТФ 31, 419 (1961).
99. А. А. Бармин, ДАН СССР 138, 77 (1961); ПММ 26, 801 (1962).
100. В. П. Демуцкий, ЖТФ 31, 1392 (1961).
101. Р. В. Половин, В. П. Демуцкий, ЖЭТФ 40, 1746 (1961).
102. Э. Ларин, И. Шехтман, ЖЭТФ 35, 203 (1958).
103. R. A. Gross, W. Chinitz, T. J. Rivlin, J. Aero and Space Sci. 27, 283 (1960).
104. Г. А. Любимов, ДАН СССР 126, 532 (1959).
105. J. V. Helliwell, D. C. Ruck, Phys. Fluids 5, 738 (1962).
106. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, ДАН СССР 129, 52 (1959); Изв. АН СССР, ОТН, Механика — машиностроение, № 4, 130 (1959).
107. Г. А. Любимов, ДАН СССР 126, 532 (1959); Изв. АН СССР, ОТН, Механика — машиностроение, № 5, 9 (1959).
108. С. К. Чу, Phys. Fluids 7, 1349 (1964).
109. Ю. Л. Жилин, ПММ 24, 543 (1960).
110. В. П. Демуцкий, ЖТФ 32, 445 (1961).
111. Р. В. Половин, Диссертация (ХГУ, 1963).
112. Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, ЖЭТФ 35, 1291 (1958).
113. Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, ЖЭТФ 36, 1272 (1959).
114. Р. В. Половин, К. П. Черкасова, ЖЭТФ 41, 263 (1961).
115. К. П. Черкасова, ПМТФ, № 6, 169 (1961).
116. В. В. Гогосов, ПММ 25, 108 (1961); 26, 88 (1962); ДАН СССР 142, 292 (1962).
117. Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, ДАН СССР 128, 684 (1959).
118. И. А. Ахизер, Р. В. Половин, ЖЭТФ 38, 529 (1960).
119. Р. В. Половин, ЖЭТФ 38, 1544 (1960).
120. А. А. Бармин, В. В. Гогосов, ДАН СССР 134, 1041 (1960).
121. В. В. Гогосов, ДАН СССР 135, 30 (1960).
122. В. В. Гогосов, ПММ 25, 456 (1961); ДАН СССР 141, 55 (1961).
123. С. Е. Гребенщиков, М. Д. Райзер, А. А. Рухадзе, А. Г. Франк, ЖЭТФ 31, 529 (1961).
124. Г. А. Любимов, ДАН СССР 126, 733 (1959).
125. Ф. Шуберт, «Газовая динамика», М., ИЛ, 1950, стр. 92.

126. С. З. Беленький, Труды ФИАН 10, 5 (1958).
 127. А. Ферри, Аэродинамика сверхзвуковых течений, М.—Л., Гостехиздат, 1952.
 128. Р. В. Половин, ЖТФ, 34, 1798 (1964).
 129. W. A. Allen, J. W. Rogers, Phys. Fluids 4, 493 (1961).
 130. М. Н. Коган, ПММ 23, 70, 557 (1959); 24, 370, 530 (1960).
 131. Y. Kato, T. Taniuti, Progr. Theor. Phys. 21, 606 (1959).
 132. H. Cabannes, Compt. rend. 245, 1379 (1957); 250, 1968 (1960); Rev. Mod. Phys. 32, 973 (1960).
 133. S. Morioka, J. Phys. Soc. Japan 16, 2346 (1961).
 134. М. И. Мимур, Ракетн. техника и космонавтика, № 10, 40 (1963).
 135. М. И. Киселев, Н. И. Колосницын, ДАН СССР 131, 773 (1960).
 136. М. Н. Коган, в сб. «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы», вып. 2, Рига, Изд-во АН Латв. ССР, 1962, стр. 55.
 137. H. Cabannes, Compt. rend. 257, 375 (1963).
 138. G. T. Taylor, J. W. Massoll, Proc. Roy. Soc. A139, 298 (1933).
 139. H. Richter, ZAMM 28, 341 (1948).
 140. Т. Карман, в сб. «Газовая динамика», М.—Л., ГОНТИ, 1939, стр. 45.
 141. H. Cabannes, C. Stael, J. Fluid Mech. 10, 289 (1961); Rech. aeron., Nr. 27, 7 (1952); Compt. rend. 251, 1960 (1960).
 142. А. Буземан, в сб. «Газовая динамика», М., ИЛ, 1950, стр. 197.
 143. Б. М. Булах, ПММ 18, 451 (1954); 19, 393 (1955).
 144. Г. В. Цумвальт, Г. Г. Танг, Ракетн. техника и космонавтика, № 10, 190 (1963).
 145. Р. Седний, Н. Гербер, Ракетн. техника и космонавтика, № 11, 22 (1964).
 146. А. Стоун, в сб. «Газовая динамика», М., ИЛ, 1950, стр. 239.
 147. R. Saueer, Anfangswertproblem bei partiellen Differentialgleichungen, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1952, § 38.
 148. Я. Г. Сапунков, ПММ 27, 190, 930 (1963).
 149. Б. М. Булах, ПММ 26, 300, 973 (1962).
 150. M. Bausset, Compt. rend. 257 (1963).
 151. J. P. Barthel, P. S. Lykoudis, Phys. Fluids 4, 1566 (1961).
-

