

537.312.62

**ТУННЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА В СВЕРХПРОВОДНИКАХ****Г. Ф. Жарков****1. ВВЕДЕНИЕ**

Открытие и детальное изучение туннельных эффектов в сверхпроводниках в физике низких температур является, пожалуй, одним из наиболее интересных событий последних лет.

Тот факт, что между двумя нормальными металлами, разделенными тонкой прослойкой изолятора, может течь электрический ток, обусловленный обычным квантовомеханическим эффектом, был осознан уже в первые годы после создания квантовой механики<sup>1,2</sup>. Однако изучение этого явления в сверхпроводниках выявило целый ряд особенностей, которые делают его очень удобным и весьма эффективным орудием при исследовании различных характеристик сверхпроводящих металлов.

Мы остановимся лишь на одном, но, пожалуй, самом любопытном из туннельных эффектов в сверхпроводниках — на так называемом эффекте Джозефсона (относительно других туннельных эффектов см. подробный обзор Дугласа и Фаликова<sup>3</sup>, где имеется также обширная библиография).

Можно считать, что в сверхпроводнике при температуре  $T = 0$  все электроны с энергиями вблизи поверхности Ферми объединяются в пары, причем суммарный импульс каждой пары равен нулю. (Подробное изложение микротeorии сверхпроводимости можно найти в ряде книг и обзоров, например в<sup>4-6</sup>.) Наличие такого «дальнего порядка» в импульсном пространстве приводит к появлению некоторой корреляции и в координатном пространстве. Характерная длина  $\xi_0$ , на которой происходит эффективное размытие волновых функций отдельных пар, называется длиной когерентности (или размером пары); для большинства сверхпроводников она оказывается порядка  $\xi_0 \sim 10^{-4}$  см. Обычные туннельные эффекты связаны с разрывом электронов пары и с переводом отдельных электронов из одного металла в другой. Поскольку для разрыва пары необходимо затратить конечную энергию, равную энергии связи пары, обычные одночастичные туннельные эффекты обладают порогом: туннельный ток начинает течь лишь при приложении конечного напряжения. Отсюда непосредственно можно измерить величину так называемой энергетической щели в сверхпроводнике<sup>3</sup>.

Эффект Джозефсона<sup>7</sup>, наоборот, представляет собой туннелирование связанных электронных пар из основного состояния (с поверхности Ферми) одного сверхпроводника на поверхность Ферми другого сверхпроводника. Поскольку при этом не требуется затрачивать энергию на разрыв пар, ток может течь при равной нулю разности потенциалов между металлами (рис. 1, а). Интуитивно ясно, что для наблюдения этого эффекта необходимо, чтобы толщина изолирующего слоя была

существенно меньше длины когерентности  $\xi_0$ . При этом произойдет перекрытие волновых функций электронов в обоих металлах и станет возможен обмен сверхпроводящими парами. Практически для этого требуются толщина порядка  $10 \div 20 \text{ \AA}$ .

Экспериментально такой эффект впервые был наблюден Андерсоном и Роуэллом<sup>8</sup>, которые пропускали ток через очень тонкую пленку диэлектрика (окись олова толщиной  $\sim 10^{-7} \text{ см}$ ) между двумя сверхпроводниками. Они нашли, что если полный ток через барьер не превосходит некоторой величины (несколько миллиампер), он протекает через диэлектрик без образования какого-либо падения напряжения на изолирующем слое. Сопротивление слоя при этом, очевидно, равно нулю, что характерно

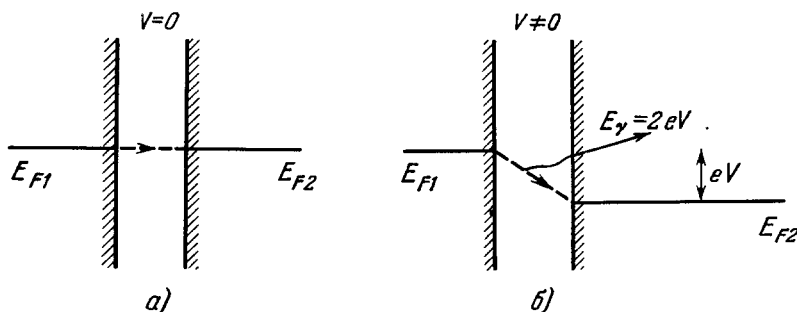


Рис. 1. Квазичастичная схема джозефсоновского тока.

а) Постоянный ток сверхпроводящих пар при  $V=0$ ; б) переменный ток при  $V \neq 0$ , сопровождаемый излучением фотонов (или поглощением фотонов в присутствии внешнего микроволнового излучения).

для сверхпроводников. (Заметим, что сопротивление того же слоя, измеренное в случае, когда металлы по обе стороны слоя были в нормальном состоянии, равнялось  $0,4 \text{ ом}$ .) Сверхпроводящий характер тока через барьер демонстрируется также экспериментами<sup>9-11</sup>, в которых наблюдался стационарный незатухающий ток в кольце из сверхпроводника, разделенном туннельным слоем. Иногда указанные особенности прохождения тока через тонкий изолирующий слой характеризуют термин «слабая сверхпроводимость»<sup>12</sup>, в отличие от свойств истинных сверхпроводников.

Связанные пары могут переходить из одного сверхпроводника в другой и при наличии отличного от нуля напряжения  $V$  на слое. Для этого необходимо лишь, чтобы избыточная энергия  $2eV$ , приобретенная или потерянная парой электронов при прохождении разности потенциалов  $V$ , была испущена (или поглощена), например, в виде электромагнитного излучения частоты  $\nu$  (см. рис. 1, б), причем  $h\nu = 2eV$  или, более общо,

$$nh\nu = 2eV \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

если поглощается или испускается более чем один фотон. В эксперименте наблюдалось<sup>13, 14</sup>, что при подаче на туннельный слой внешнего микроволнового излучения определенной частоты  $\nu$  на барьере, через который протекал джозефсоновский ток, спонтанно устанавливалось падение напряжения при наличии ступенек постоянного потенциала, в соответствии с формулой (1) (см. также<sup>53-55</sup>). Недавно было непосредственно обнаружено и соответствующее электромагнитное излучение из барьера<sup>15-17</sup>, находящегося под напряжением  $V$ . Мы далее увидим, что при  $V \neq 0$  и при наличии сопутствующего электромагнитного излучения ток сверхпроводящих пар через барьер должен иметь нестационарную, зависящую от времени компоненту, осциллирующую с частотой

$v = 2eV/h$ . Непосредственно измерить переменную составляющую тока пока еще не удалось. Джозефсоновский ток зависит также от магнитного поля в барьере, причем весьма примечательным образом. Этот эффект будет подробно обсужден ниже.

Прежде чем переходить к теоретическому описанию эффекта Джозефсона, напомним одно обстоятельство, которое будет нужно нам в дальнейшем. В феноменологической теории сверхпроводимости Гинзбурга — Ландау<sup>18</sup>, вытекающей также из микроскопического рассмотрения<sup>19</sup>, сверхпроводящие электроны описываются некоторой волновой функцией  $\psi$ , причем выражение для тока в сверхпроводнике имеет вид

$$\mathbf{J} = \frac{iq\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{q^2}{mc} \mathbf{A} |\psi|^2, \quad (2)$$

где  $q$  — эффективный заряд носителей тока (в данном случае  $q = 2e$  — заряд связанной пары электронов<sup>19</sup>),  $m$  — эффективная масса,  $\mathbf{A}$  — вектор-потенциал магнитного поля. Записывая  $\psi$  в виде  $\psi = \sqrt{\varrho} e^{i\theta}$ , где  $\varrho$  имеет смысл плотности сверхпроводящих электронов, а  $\theta$  — фаза, перепишем (2) в виде

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{m} q \left( \nabla \theta - \frac{q}{\hbar} \mathbf{A} \right) \varrho. \quad (3)$$

Если мысленно провести внутри массивного сверхпроводника некоторый замкнутый контур, то на нем должно выполняться условие  $\mathbf{J} = 0$ , или  $\hbar \nabla \theta = q\mathbf{A}$ . Отсюда интегрированием по контуру получаем

$$\hbar \oint \nabla \theta ds = q \oint \mathbf{A} ds = q\Phi, \quad (4)$$

где  $\Phi$  — магнитный поток через контур. Требование однозначности волновой функции приводит к выводу, что фаза  $\theta$  в какой-либо точке контура может отличаться от своего значения лишь на величину  $2\pi n$  после полного обхода по контуру. Отсюда из (4) получаем условие

$$\Phi = n\Phi_0, \quad \Phi_0 = \pi\hbar c/e \cong 2 \cdot 10^{-7} \text{ гс/см}^2, \quad (5)$$

где  $\Phi_0$  — квант магнитного потока. В односвязном массивном сверхпроводнике поле внутри металла равно нулю; в формуле (5) этому случаю соответствует значение  $n = 0$ .

Сверхпроводник может быть и многосвязным, т. е. в теле сверхпроводника может иметься отверстие, содержащее магнитное поле. Соотношение (5) гласит, что величина магнитного потока в отверстии в теле массивного сверхпроводника может принимать лишь дискретные значения — обстоятельство, впервые отмеченное Лондоном<sup>20</sup> и подтвержденное в последнее время экспериментально<sup>21, 22</sup> \*). Если сверхпроводник односвязный, то из условия  $\text{div } \mathbf{J} = 0$  (при калибровке  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ ) получаем из (3) соотношение  $\nabla^2 \theta = 0$ , откуда с учетом (4) следует  $\theta = \text{const}$ . В многосвязном сверхпроводнике фаза, вообще говоря, зависит от координат.

## 2. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭФФЕКТА ДЖОЗЕФСОНА

При феноменологическом описании эффекта Джозефсона фаза волновой функции сверхпроводника играет весьма существенную роль. Ее значение подчеркивается тем обстоятельством, следующим из общих принципов квантовой механики, что фаза волновой функции  $\theta$  и число

\*) Мы ограничиваемся рассмотрением массивных сверхпроводников. Относительно характера квантования поля в полых цилиндрических сверхпроводниках с толщиной стенок, соизмеримой с глубиной проникновения, см., например, в<sup>20, 23</sup>.

электронов  $N$  являются канонически сопряженными переменными. В частности, из калибровочной инвариантности (т. е. из инвариантности относительно изменения фазы) следует сохранение числа частиц, аналогично тому, как из инвариантности относительно вращения вытекает сохранение момента количества движения. Имеет место также обычное соотношение неопределенности между значениями канонически сопряженных переменных \*)

$$\Delta N \cdot \Delta \theta \gtrsim 1. \quad (6)$$

Из сказанного следует, в частности, что число сверхпроводящих пар и фаза волновой функции сверхпроводника также подчиняются соотношению (6). Если мы имеем кусок сверхпроводящего металла с фиксированным числом электронных пар, то из (6) вытекает, что абсолютное значение фазы волновой функции не определено. Если мысленно разделить сверхпроводник на две части, то число сверхпроводящих пар в каждой половине сверхпроводника не может быть жестко фиксировано, поскольку в результате флуктуаций некоторое число пар может переходить из одной половины в другую и наоборот. Вследствие этого приобретает определенный смысл разность фаз волновых функций двух половинок сверхпроводника, в соответствии с (6), хотя полная фаза сверхпроводника по-прежнему не определена.

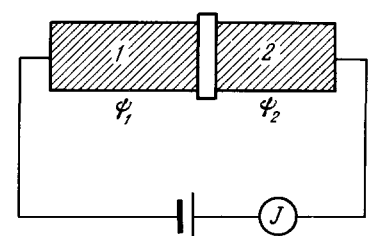


Рис. 2.

Как уже говорилось, в эффекте Джозефсона наблюдается туннельный ток связанных электронных пар между двумя сверхпроводниками, разделенными тонким изолирующим слоем (рис. 2).

Следуя Фейнману <sup>25</sup>, удобно написать следующую систему уравнений, феноменологически описывающую эффект Джозефсона:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = U_1 \psi_1 + K \psi_2, \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = U_2 \psi_2 + K \psi_1. \quad (7)$$

Уравнения (7) записаны в форме уравнений Шрёдингера для связанной квантовомеханической системы с двумя состояниями. Здесь  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — волновые функции сверхпроводников 1 и 2 (см. рис. 2);  $U_1$ ,  $U_2$  — энергетические члены, играющие роль гамильтонианов отдельных сверхпроводников,  $K$  — некоторый матричный элемент, обеспечивающий связь между волновыми функциями системы.

Пусть между сверхпроводниками имеется некоторая разность потенциалов  $V$ , так что  $U_1 - U_2 = qV$ , где  $q$  — заряд переносчиков тока. Выбирая подходящим образом нуль отсчета энергии, можно переписать систему (7) в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{qV}{2} \psi_1 + K \psi_2, \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{qV}{2} \psi_2 + K \psi_1. \quad (8)$$

Вводя обозначения  $\psi_{1,2} = \sqrt{Q_{1,2}} e^{i\theta_{1,2}}$ ,  $\varphi = \theta_2 - \theta_1$ , получаем из (8) четыре уравнения для величин  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ :

$$\dot{Q}_1 = -\dot{Q}_2 = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{Q_2 Q_1} \sin \varphi, \quad \dot{\theta}_{1,2} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} \cos \varphi \mp \frac{qV}{2\hbar}. \quad (9)$$

\*) См. также работу <sup>24</sup>, где уточняется смысл соотношения неопределенности между числом частиц и фазой и проводится обсуждение вопроса.

Поскольку ток  $J$  из 1 в 2 равен  $\dot{q}_1$  (или  $-\dot{q}_2$ ) и учитывая, что  $\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \dot{\varphi}$ , имеем из (9)

$$J = J_{\max} \sin \varphi, \quad J_{\max} = \frac{2K}{h} \sqrt{q_1 q_2}, \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{q}{h} \int V(t) dt. \quad (10)$$

Здесь  $\varphi_0$  — некоторая случайная разность фаз.

Формулы (10) описывают существенные черты эффекта Джозефсона. При  $V = 0$  величина тока  $J$  связана с начальной разностью фаз  $\varphi_0$ , которая в свою очередь зависит от внешних условий (материал сверхпроводника, наличие магнитного поля и т. д.). Поскольку всегда  $|\sin \varphi_0| \leq 1$ , из (10) следует, что величина джозефсоновского тока ограничена некоторым значением  $J_{\max}$ . К сожалению, феноменологический подход не позволяет вычислить  $J_{\max}$ , поскольку мы не знаем величину  $K$ .

На рис. 3 изображена схема опыта по наблюдению туннельного тока, а на рис. 4 приведен характерный вид зависимости  $J$  от  $V$ , получаемый на осциллографе при подаче на туннельный образец переменного напряжения низкой частоты. Центральная жирная линия соответствует стационарному джозефсоновскому току, протекающему через образец при  $V = 0$ . На опыте непосредственно измеряется величина  $J_{\max}$ .

При наличии некоторой постоянной разности потенциалов  $V_0$  между сверхпроводниками фаза  $\varphi$  в (10) линейно зависит от  $t$  и джозефсоновский ток  $J$  проявляет осциллирующую зависимость от времени, так что среднее значение  $J = 0$ . Предположим, зависимость

$$V(t) = V_0 + v \cos \omega t,$$

причем  $V_0$  соответствует постоянной компоненте напряжения на барьере, а второй член соответствует некоторому дополнительному периодическому электрическому полю (например, внешней электромагнитной волне). Считая  $v \ll V_0$  и разлагая  $\sin \varphi$  в (10) в ряд:  $\sin(x + \alpha) \cong \sin x + \alpha \cos x + \dots$ ,  $\alpha \ll 1$ , получим

$$J = J_{\max} \left[ \sin \left( \varphi_0 + \frac{q}{h} V_0 t \right) + \frac{q}{h} \frac{v}{\omega} \sin \omega t \cos \left( \varphi_0 + \frac{q}{h} V_0 t \right) \right].$$

Первый член при усреднении по времени дает нуль, а второй дает конечный результат при соблюдении резонансного условия  $\hbar \omega = q V_0$ , соответствующего, как мы уже упоминали выше, обмену энергией между сверхпроводником и внешним электромагнитным излучением. В эксперименте<sup>13</sup> при подаче на образец внешнего излучения с частотой  $\nu = \omega/2\pi$  действительно наблюдались отличные от нуля значения тока при значениях напряжения на барьере  $V = nh\nu/2e$ .

Эффекты, связанные с присутствием магнитного поля, могут быть включены в рассматриваемую схему путем обобщения выражения для тока  $J = J_{\max} \sin \varphi$  так, чтобы результирующее выражение было градиентно-инвариантно. Это сводится к добавлению к фазе члена типа  $(q/\hbar c) \int A ds$ , где интегрирование ведется по некоторому пути,

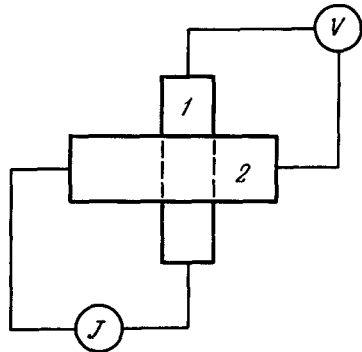


Рис. 3. Схема туннельного эксперимента.

Сверхпроводящая пленка 1 наносится на подложку и затем ее поверхность окисляется в атмосфере кислорода, образуя диэлектрическую прослойку толщиной 10–20 Å. Поперек слоя 1 наносится другой сверхпроводящий слой 2. Токоподводящие контакты крепятся к двум концам образца, а с двух других снимается разность потенциалов  $V$  на барьере.

соединяющему два сверхпроводника. Мы вернемся в дальнейшем к вопросам, связанным с наличием магнитного поля.

Выше были затронуты некоторые наводящие соображения, позволяющие дать интуитивный подход к описанию эффекта Джозефсона. Полезно изложить вывод основных соотношений, опираясь на более детализированную микроскопическую картину. Удобно исходить из следующего выражения для той части гамильтониана системы двух сверхпроводников, которая описывает туннельные переходы между ними <sup>28</sup>:

$$H_T = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \sigma} (T_{\mathbf{kq}} a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{q}\sigma} + T_{\mathbf{qk}}^* c_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}\sigma}), \quad (11)$$

где  $a_{\mathbf{k},\sigma}$  и  $c_{\mathbf{q}\sigma}$  — обычные электронные операторы для двух металлов ( $\mathbf{k}, \mathbf{q}$  — импульсы,  $\sigma$  — спин), а  $T$  — некоторый матричный элемент, описывающий переходы электронов из

одного металла в другой (более общее выражение для  $H_T$  используется в работе <sup>27</sup>).

Наличие взаимодействия (11) между двумя сверхпроводниками приводит к тому, что полная энергия системы оказывается меньше суммы энергий отдельных сверхпроводников. Энергию связи можно найти при помощи обычной теории возмущений во втором приближении:

$$\Delta \mathcal{E}^{(2)} = \sum_{n \neq 0} \frac{|H_T|_{n0}^2}{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_n}. \quad (12)$$

Здесь  $\mathcal{E}_0$  — энергия основного состояния,  $\mathcal{E}_n$  — энергия возбужденных состояний системы. При  $T \cong 0$  наибольшую роль играют виртуальные состояния, в которых один из электронов пары перешел из одного металла в другой, так что в каждом из металлов имеется по одному «возбуждению», причем  $\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_0 = E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}}$ , где  $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\mathbf{p}}^2}$  — энергия одночастичного возбуждения,  $\Delta_{\mathbf{p}}$  — параметр энергетической щели,  $\varepsilon_{\mathbf{p}}$  — блоховская энергия электрона, отсчитанная от поверхности Ферми <sup>28</sup>.

При вычислении матричного элемента, входящего в (12), удобно выразить операторы  $a_{\mathbf{k}\sigma}$  и  $c_{\mathbf{q}\sigma}$  через квазичастичные операторы Боголюбова <sup>29</sup>. Простой подсчет, который мы не будем здесь воспроизводить (см. <sup>12</sup>), дает (при  $T = 0$ )

$$\Delta \mathcal{E}^{(2)} = - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \frac{|T_{\mathbf{kq}}|^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{q}}} \left( 1 - \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{q}}} + \operatorname{Re} \frac{\Delta_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{q}}^*}{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{q}}} \right). \quad (13)$$

Все основные черты эффекта Джозефсона проявляются уже в случае  $T = 0$ , которым мы и ограничимся. Обобщение на случай конечных температур не составляет труда (см., например, <sup>30</sup>, где выражение для джозефсоновского тока при конечных  $T$  выводится при помощи метода функций Грина, а также <sup>31</sup> и <sup>12</sup>).

Известно, что в микроскопическом подходе роль «волновой функции»  $\psi$  теории Гинзбурга — Ландау играет параметр щели  $\Delta$ . Если

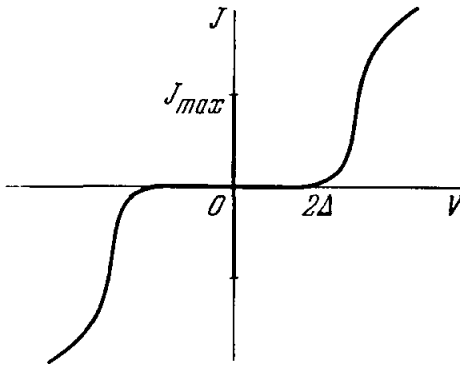


Рис. 4. Схематический вид осциллограммы  $J - V$ , получаемой при подаче на образец переменного напряжения низкой частоты.

Центральная вертикальная линия дает джозефсоновский ток  $J_{\max}$ . Кривая при  $V \neq 0$  соответствует обычному одночастичному туннельному току. Масштаб произвольный.

предположить, что  $\Delta_k$  и  $\Delta_q$  не зависят от  $k$  и  $q$ , и положить

$$\Delta_k = \Delta_1 \exp(i\theta_1), \quad \Delta_q = \Delta_2 \exp(i\theta_2),$$

где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — действительные постоянные, можно записать зависящий от разности фаз член в (13) в виде

$$\Delta \mathcal{E} = -N_1 N_2 \Delta_1 \Delta_2 \langle |T_{kq}|^2 \rangle_{\text{ср}} \cos(\theta_2 - \theta_1) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon_1 d\epsilon_2}{E_1 E_2 (E_1 + E_2)}.$$

Здесь  $N_1$  и  $N_2$  — плотности электронных состояний на поверхностях Ферми соответствующих металлов \*). Вычисляя интеграл, находим <sup>12, 30</sup> при  $\Delta_1/\Delta_2 \gtrsim 0,5$

$$\Delta \mathcal{E} \cong -N_1 N_2 \langle |T_{kq}|^2 \rangle_{\text{ср}} \cos(\theta_2 - \theta_1) \cdot 2\pi^2 \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}, \quad (14)$$

или

$$\Delta \mathcal{E} = -\mathcal{E}_1 \cos \varphi_0, \quad \mathcal{E}_1 = \frac{\hbar}{2e} \frac{\pi \Delta_1 \Delta_2}{(\Delta_1 + \Delta_2) R_N}, \quad (15)$$

где  $\varphi_0 = \theta_2 - \theta_1$ ,  $R_N$  — сопротивление барьера в нормальном состоянии. Ниже мы увидим, что величина джозефсоновского тока тесно связана с величиной энергии связи (15).

### 3 СЛУЧАЙ ПАЛЧИЯ МАГНИТНОГО И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЕЙ

Из соображений калибровочной инвариантности <sup>7, 8, 12, 25</sup> можно обобщить зависимость (15), написав в общем случае

$$\Delta \mathcal{E} = -\mathcal{E}_1 \cos \left( \varphi_0 - \frac{2e}{\hbar c} \int_1^2 \mathbf{A} ds + \frac{2e}{\hbar} \int V(t) dt \right) \equiv -\mathcal{E}_1 \cos \varphi, \quad (16)$$

где  $\varphi_0$  — некоторая начальная разность фаз между сверхпроводниками 1 и 2,  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал,  $V(t)$  — разность потенциалов на туннельном слое.

Из (16) следует, что в общем случае разность фаз  $\varphi$  зависит от магнитного поля между сверхпроводниками и от результирующего напряжения между ними:  $\varphi = \varphi(\mathbf{A}, V)$ . Дифференцируя фазу  $\varphi$  по времени, получаем соотношение

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (17)$$

Из этого уравнения следует, что наличие разности потенциалов на туннельном слое связано с изменением фазы во времени, т. е. соответствует нестационарному случаю.

В случае однородного магнитного поля  $\mathbf{H}$ , лежащего в плоскости барьера перпендикулярно к направлению тока, находим из (16) (см. также <sup>32</sup>)

$$\nabla \varphi = \frac{2ed}{\hbar c} [\mathbf{Hn}]. \quad (18)$$

\*) Плотность электронных состояний  $N(\epsilon)$  возникает автоматически при переходе от суммирования по импульсам и спинам к интегралам по энергии:

$$\sum_{\mathbf{k}, \sigma} \rightarrow \frac{2}{(2\pi)^3} \int dk = \int N(\epsilon) d\epsilon,$$

где для свободного электронного газа  $N(\epsilon) = \pi^{-2} m \sqrt{2m(E_F - \epsilon)}$ . Поскольку в сверхпроводимости принимают участие лишь электроны, лежащие вблизи поверхности Ферми (с энергиями  $\epsilon \sim 0$ ), обычно плотность состояний считают константой  $N = N(0)$ , вынося ее из-под знака интеграла.

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении тока,  $d$  — эффективная толщина слоя, в котором поле  $\mathbf{H}$  отлично от нуля,  $d = l + \lambda_1 + \lambda_2$ , где  $\lambda$  — глубина проникновения поля в сверхпроводник,  $l$  — толщина изолирующей прослойки. Уравнение (18) показывает, что наличие магнитного поля в барьере сопровождается изменением фазы от точки к точке.

Мы видели, что наличие конечной амплитуды перехода  $T_{\text{кп}}$  для электронов по обе стороны барьера приводит к появлению некоторой дополнительной «энергии связи» и установлению соответствующей разности фаз  $\varphi_0$  между сверхпроводниками. Нетрудно убедиться, что энергия связи  $\Delta\mathcal{E}$  (16) фактически представляет собой зависящую от фазы часть свободной энергии системы, рассчитанную на единицу площади барьера. Имеется еще одна дополнительная энергия, зависящая от фазы, а именно — энергия, связанная с наличием протекающего через барьер тока. Эта часть энергии имеет вид (ср. <sup>9)</sup>)

$$-\int \bar{J} V dt = -\bar{J} \frac{\hbar}{2e} \varphi(t), \quad (19)$$

где  $\bar{J}$  — ток через единицу площади барьера, а постоянная интегрирования определяется, в соответствии с (17), условием, что при  $V=0$  имеем  $\varphi = \text{const} = \varphi(0)$ . Таким образом, полная энергия системы, зависящая от фазы  $\varphi$ , имеет вид

$$\mathcal{E} = \int \left( -\mathcal{E}_1 \cos \varphi - \frac{\hbar}{2e} \bar{J} \varphi \right) \frac{d\sigma}{S_6}, \quad (20)$$

где интегрирование идет по поверхности барьера,  $S_6$  — площадь барьера.

Разность фаз  $\varphi_0$ , очевидно, должна подстраиваться таким образом, чтобы полная энергия системы была минимальна. Условие  $d\mathcal{E}/d\varphi_0 = 0$  приводит к соотношению между  $\varphi$  и протекающим через барьер током

$$\bar{J} = \frac{2e}{\hbar} \mathcal{E}_1 \int \sin \varphi \frac{d\sigma}{S_6}. \quad (21)$$

Ясно, что в качестве выражения для плотности тока можно положить

$$J = \frac{2e}{\hbar} \mathcal{E}_1 \sin \varphi, \quad (22)$$

где  $\varphi$ , а стало быть, и  $J$  вообще говоря, зависят от координат в плоскости барьера. Максимально возможная величина тока

$$J_{\text{max}} = \frac{2e}{\hbar} \mathcal{E}_1 = \frac{\pi \Delta_1 \Delta_2}{(\Delta_1 + \Delta_2) R_N}, \quad (23)$$

где мы использовали соотношение (15). Другими словами, максимальный джозефсоновский ток  $J_{\text{max}}$  равен по величине току, протекающему через находящийся в нормальном состоянии барьер при наличии разности потенциалов  $V = \pi \Delta_1 \Delta_2 / (\Delta_1 + \Delta_2)$  <sup>30</sup>.

Измеренные значения максимального тока всегда оказываются меньше теоретического, составляя иногда 0,95 предсказанного значения и иногда оказываясь существенно меньше (в несколько раз). Одна из возможных причин указанного расхождения связана с наличием магнитного поля в барьере и с возникающим в результате этого «эффектом самоограничения туннельного тока» <sup>32</sup>. Кратко остановимся на этом обстоятельстве.

Для получения оценки (23) максимальной величины джозефсоновского тока полагают в (22)  $\sin \varphi = 1$ . При этом очевидно пренебрегается пространственным изменением фазы в плоскости барьера, если считать  $\varphi = \text{const}$ . На самом деле зависимость фазы от координат и соответствующим распределением тока по площади барьера пренебрегать нельзя,



в результате чего интегрирование  $\sin \varphi$  по поверхности барьера в (21) дает меньшую эффективную величину тока через единицу площади, чем это следует из (23).

Действительно, пусть мы имеем дело со стационарным случаем  $V = 0$ , и пусть внешнее магнитное поле в барьере отсутствует. Тем не менее, в системе будет присутствовать магнитное поле, связанное с протекающим через барьер током  $J$ . Обычное уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi c^{-1} \mathbf{J},$$

где  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\max} \sin \varphi$ , в совокупности с уравнением (18), дающим закон изменения разности фаз  $\varphi$  в плоскости барьера, приводят к следующему уравнению для фазы:

$$\nabla^2 \varphi = \lambda_J^{-2} \sin \varphi, \quad \lambda_J = \left( \frac{\hbar c^2}{8\pi e J_{\max} d} \right)^{1/2}. \quad (24)$$

Здесь  $\nabla^2$  — двумерный оператор Лапласа, действующий в плоскости барьера,  $d = l + \lambda_1 + \lambda_2$ . Длина  $\lambda_J$  играет роль некоторой глубины проникновения, что отчетливо видно при малых  $\varphi$ , когда уравнение (24) приобретает вид  $\nabla^2 \varphi = \lambda_J^{-2} \varphi$ , аналогичный уравнению, описывающему проникновение магнитного поля в сверхпроводник. Типичное значение  $\lambda_J \sim 1$  мкм. Эти уравнения были решены Ферреллом и Пранге<sup>32</sup> для случая туннельного барьера между сверхпроводниками, имеющего вид слоя толщины  $d$ , конечной ширины и бесконечной длины. Качественный вывод из их анализа состоит в том, что в случае узкого слоя ток и связанное с ним поле равномерно распределены по сечению, но если ширина слоя начинает превосходить  $\lambda_J$ , ток и поле ограничены областью шириной  $\lambda_J$  по краям барьера. Ввиду этого в полный ток дает вклад не вся площадь барьера, а лишь эффективная площадь с характерным размером  $\lambda_J$ . Это приводит к тому, что максимальный ток  $J_{\max}$  в реальных туннельных слоях, имеющих часто поперечные размеры  $\sim 1$  мкм, оказывается меньше теоретически найденного значения.

Нужно отметить, что модель Феррелла и Пранге довольно идеализирована и в реальных экспериментах распределение тока может быть еще более неблагоприятно по сравнению с этой моделью. В принципе, для того чтобы получить реалистическую оценку эффекта самоограничения тока, нужно было бы решить дифференциальные уравнения для случая реальной геометрии образца, найти пространственную зависимость разности фаз, после чего интегрирование  $\sin \varphi$  в (11) по поверхности барьера даст полный ток.

Интересные эффекты возникают в случае присутствия внешнего поля  $\mathbf{H}$  в туннельном слое. Пусть мы имеем стационарный случай  $V = 0$ , причем ток течет перпендикулярно к плоскости барьера, однородное поле  $\mathbf{H}$  лежит в плоскости изолирующего слоя, координата  $x$  даст положение в плоскости слоя перпендикулярно к направлению  $\mathbf{H}$ . Согласно (16) и (20) зависящая от разности фаз плотность свободной энергии системы имеет вид

$$\mathcal{E}(x) = -\mathcal{E}_1 \cos \left( \varphi_0 - \frac{2ed}{\hbar c} Hx \right) - \frac{\hbar}{2e} \bar{J} \left( \varphi_0 - \frac{2ed}{\hbar c} Hx \right), \quad (25)$$

где  $\varphi_0$  — разность фаз при  $H = 0$ . Полная энергия, связанная с барьером и протекающим через него током, получается интегрированием (25) по поверхности туннельного слоя. Если слой имеет вид полоски шириной  $w$  и длиной  $L$  (рис. 5), полная энергия принимает вид

$$\mathcal{E}_{\text{полн}} = -L \mathcal{E}_1 \int_{-w/2}^{w/2} \cos \left( \varphi_0 - \frac{2ed}{\hbar c} Hx \right) dx - L \frac{\hbar}{2e} \bar{J} \int_{-w/2}^{w/2} \left( \varphi_0 - \frac{2ed}{\hbar c} Hx \right) dx.$$

Элементарное интегрирование дает

$$\mathcal{E}_{\text{полн}} = -wL\mathcal{E}_1 \cos \varphi_0 \frac{\sin\left(\frac{2ed}{\hbar c} H \frac{w}{2}\right)}{\frac{2ed}{\hbar c} H \frac{w}{2}} - \frac{\hbar \bar{J} \varphi_0 w L}{2e}.$$

Чтобы получить выражение для полного тока, мы опять приравняем нулю производную  $\partial \mathcal{E}_{\text{полн}} / \partial \varphi_0 = 0$  и, определяя  $I_{\text{полн}} = \bar{J} w L$ , находим \*)

$$I_{\text{полн}} = wL \cdot \frac{2e}{\hbar} \mathcal{E}_1 \sin \varphi_0 \left| \frac{\sin(\pi \Phi / \Phi_0)}{\pi \Phi / \Phi_0} \right|, \quad (26)$$

где  $\Phi = Hwd$  — магнитный поток через поперечное сечение барьера,  $\Phi_0 = \hbar c / 2e$  — введенная нами ранее (5) величина, носящая название

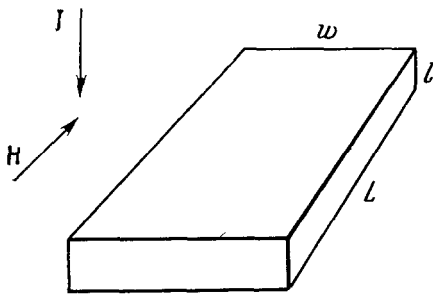


Рис. 5.

кванта магнитного потока. Поскольку полный ток в стационарном случае имеет определенный знак, удобно ввести знак модуля в (26) и считать  $0 \leq \varphi_0 \leq \pi$ . Из (26) видно, что присутствие внешнего поля в барьере приводит к модуляции полного тока через туннельный слой, причем при значениях магнитного потока  $\Phi = n\Phi_0$ , когда в барьере присутствует целое число квантов потока, ток обращается в нуль.

На рис. 6 изображены экспериментальные результаты Роуэлла<sup>33</sup>,

изучавшего зависимость джозефсоновского тока от магнитного поля. Периодическая зависимость наиболее четко выражена для барьеров с очень малыми размерами поперек поля, когда поле в барьере можно считать однородным. Данные рис. 6 соответствуют барьеру между двумя толстыми свинцовыми пленками, одна из которых, расположенная параллельно полю, имела ширину 0,04 мм. Размер области в барьере, несущей поле, равен в этом случае  $S_0 = 0,04 \text{ мм} \times 2\lambda \cong 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2$ , где  $\lambda = 390 \text{ \AA}$  — глубина проникновения поля в свинец. Минимумы на кривой рис. 6 при  $H = 6,5; 13$  и  $19,5$  очень хорошо согласуются со значениями потока  $\Phi = n\Phi_0$  через барьер для  $n = 1, 2, 3$ , демонстрируя хорошее соответствие с формулой (26). Зависимость джозефсоновского тока от магнитного поля и температуры изучалась также в<sup>34, 51, 58, 59</sup>.

Проведем интерпретацию результатов, следующих из уравнения (18), дающего дифференциальный закон изменения разности фаз  $\varphi$  в плоскости барьера, с использованием понятия квантованного магнитного потока<sup>35</sup>. Внешнее поле проникает в пространство между сверхпроводниками в виде тонкого магнитного листа толщиной  $d = l + \lambda_1 + \lambda_2$ . Рассмотрим две точки,  $P$  и  $Q$ , на противоположных сторонах барьера (вне области проникновения поля) и соединим их двумя кривыми, пересекающими барьер в точках  $A$  и  $B$  (рис. 7). Согласно (18) изменение разности фаз  $\varphi$  от точки  $A$  к точке  $B$  пропорционально магнитному потоку между двумя кривыми, причем один квант потока соответствует изменению фазы на  $2\pi$ .

Детальное поведение двух связанных туннельным слоем сверхпроводников зависит от поперечных размеров барьера. Барьеры с разме-

\*) Этот же результат, разумеется, получается и непосредственным интегрированием плотности тока (22) по поверхности барьера.

рами, превосходящими  $\lambda_J$ , ведут себя аналогично сверхпроводникам второго рода <sup>36</sup>. В слабом магнитном поле диамагнитные токи экранируют поле и оно проникает в барьер лишь по краям, на расстояниях порядка  $\lambda_J$  от краев. При достижении некоторого критического поля (см. <sup>32, 35</sup>),

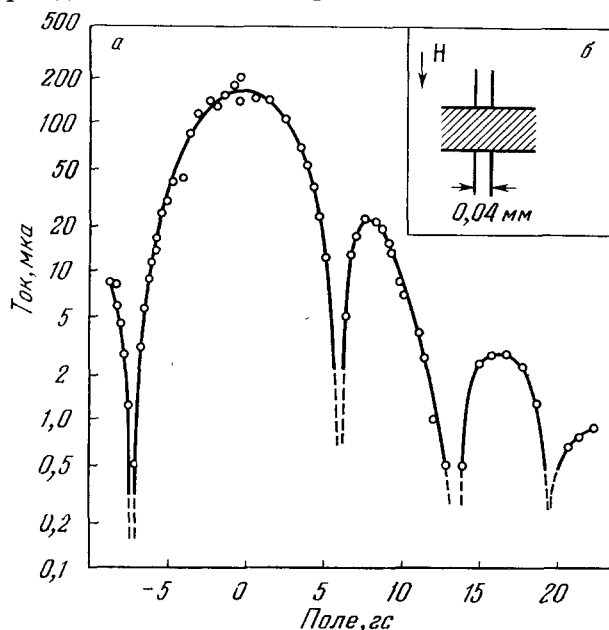


Рис. 6. а) Зависимость максимального джозефсоновского тока от поля для барьера Pb/Pb при 1,3° K<sup>33</sup>; б) схема туннельного барьера.

обычно порядка 1 Гс, происходит фазовый переход второго рода и квантованные линии магнитного потока начинают проникать в барьер, причем расстояние между линиями уменьшается при увеличении поля.

Поведение барьеров с размерами меньше  $\lambda_J$  несколько иное. Так же как в случае очень тонких сверхпроводящих пленок, магнитное поле внутри барьера почти однородно. В этом случае, как мы видели выше, наибольший интерес представляет зависимость максимального джозефсоновского тока от поля. Наличие поля приводит к изменению разности фаз  $\varphi$  от точки к точке. Следовательно, ввиду зависимости  $J = J_1 \sin \varphi$ , при достаточно большом поле барьер разбивается на области, в которых ток имеет противоположные знаки, и полный ток через барьер существенно уменьшается. Зависимость критического тока от поля дается при этом формулой типа (26), полученной для прямоугольного барьера:

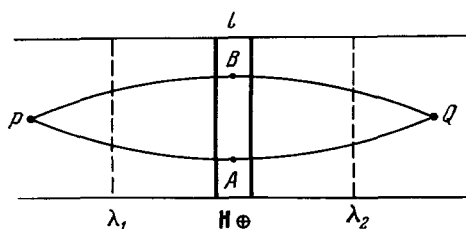


Рис. 7.

$$I \sim \left| \frac{\sin (H/H_0)}{H/H_0} \right|, \quad (26')$$

где  $H_0/2\pi$  — поле, при котором в барьере имеется один квант потока  $hc/2e$ .

Последняя зависимость аналогична известной в оптике формуле, дающей фраунгоферовскую дифракцию на щели. Как ясно из изложенного выше, это не случайно, поскольку эффект Джозефсона обязан своим происхождением квантовомеханической интерференции фаз волновых функций отдельных сверхпроводников и аналогия с интерференционными явлениями в оптике вполне закономерна. Эта аналогия прослеживается гораздо дальше на излагаемом ниже примере эффекта Джозефсона на параллельно соединенных туннельных барьерах.

#### 4. ЭФФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА НА ПАРАЛЛЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ БАРЬЕРАХ

Весьма интересный эффект был наблюден недавно Жаклевичем, Мерсеро и др.<sup>37</sup> Ими изучался джозефсоновский ток через два параллельно соединенных туннельных барьера в зависимости от приложенного внешнего магнитного поля. Чтобы лучше понять происхождение эффекта, рассмотрим схему эксперимента, изображенную на рис. 8. Допустим,

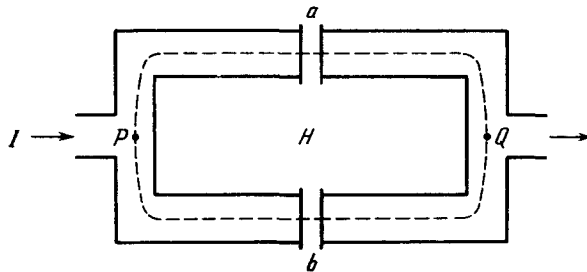


Рис. 8.

что поперечные сечения барьеров  $a$  и  $b$  малы по сравнению с поперечным сечением всего сверхпроводящего кольца. Это предположение позволит нам пренебречь пространственным изменением фазы в изолирующем слое. Мы также будем считать, что поперечные размеры барьеров малы по сравнению с характерной джозефсоновской длиной  $\lambda_J$ . Это значит, что плотность тока через барьер однородна. Предположим далее для простоты, что оба изолирующих слоя одинаковы и симметрично расположены, поле  $H$  направлено перпендикулярно к плоскости рис. 8. Будем считать тело кольца достаточно толстым, чтобы можно было выбрать непрерывный контур внутри кольца, на котором сверхпроводящий ток  $J = 0$ . При этом согласно (4) и (5) внутри контура может находиться лишь целое число квантов магнитного потока.

Полный ток через каждый из барьеров  $a$ ,  $b$ , рассматриваемых по отдельности, есть

$$J_a = J \sin \varphi_a, \quad J_b = J_1 \sin \varphi_b,$$

где  $\varphi_a$  и  $\varphi_b$  — скачки фазы на соответствующих барьерах. Полный внешний ток  $I$ , пропускаемый через систему, есть сумма токов через каждый из барьеров. Волновая функция системы должна быть однозначна при обходе вокруг кольца. Следовательно, разность фаз при переходе из точки  $P$  в точку  $Q$  по контуру  $PaQ$ , проходящему через барьер  $a$ , должна равняться (с точностью до слагаемого  $2\pi n$ ) разности фаз по контуру  $PbQ$ , проходящему через  $b$ . Другими словами,

$$\varphi_a + \frac{2e}{\hbar c} \int_a^Q \mathbf{A} \, ds = \varphi_b + \frac{2e}{\hbar c} \int_b^Q \mathbf{A} \, ds + 2\pi n.$$

или, переписывая члены в ином порядке,

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{2e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \, ds + 2\pi n.$$

Для изучения симметричного результата напомним

$$\varphi_a = \varphi_0 + \frac{e}{\hbar c} \Phi + n\pi, \quad \varphi_b = \varphi_0 - \frac{e}{\hbar c} \Phi - n\pi, \quad \Phi = \oint \mathbf{A} \, ds = \int \mathbf{H} \, d\sigma;$$

тогда

$$\begin{aligned} I_{\text{полн}} &= J_1 \sin \left( \varphi_0 + \frac{e}{\hbar c} \Phi + n\pi \right) + J_1 \sin \left( \varphi_0 - \frac{e}{\hbar c} \Phi - n\pi \right) = \\ &= 2J_1 \sin \varphi_0 \left| \cos \frac{\pi \Phi}{\Phi_0} \right|, \quad 0 \leq \varphi_0 \leq \pi, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\varphi_0$  — скачок фазы, зависящий лишь от полного тока, проходящего через систему,  $\Phi_0 = \hbar c / 2e$  — квант потока,  $\Phi$  — магнитный поток в кольце.

Если поперечные по отношению к полю размеры барьеров не малы по сравнению с площадью кольца, что более соответствует действитель-



Рис. 9. Зависимость джозефсоновского тока от магнитного поля для двух параллельно соединенных барьеров, демонстрирующая интерференционные эффекты<sup>37</sup>. Интерференционные максимумы отстоят друг от друга на  $\Delta H = 4,8 \cdot 10^{-3}$  эс. Максимальный джозефсоновский ток соответствует примерно  $10^{-3}$  а.

ным экспериментальным условиям, приведенный результат (27) придется несколько изменить. При этом следует суммировать токи в различных частях барьера, в соответствии с локальной разностью фаз, как это было проведено для случая одного туннельного слоя (см. (26)). Для случая двух симметричных одинаковых барьеров в результате получается формула для зависимости максимального тока от магнитного поля, аналогичная «интерференционной модулированной дифракции» в оптике:

$$I = 2J_1 \sin \varphi_0 \left| \frac{\sin(\pi H / H_0)}{\pi H / H_0} \right| \left| \cos \frac{\pi H}{H_1} \right|, \quad (28)$$

где  $H_1$  — поле, соответствующее одному кванту потока внутри контура, лежащего в кольце и проходящего через центры барьеров, а  $H_0$  — поле, соответствующее одному кванту потока в каждом из барьеров, с учетом глубины проникновения поля.

На рис. 9 схематически изображена одна из экспериментальных кривых<sup>37</sup>, на которых проявляются обе указанные периодические зависимости от поля. Крупномасштабные минимумы и максимумы соответствуют модуляции фазы внутри каждого барьера, а мелкие обязаны интерференционным эффектам. Эти эффекты в принципе позволяют использовать двойной джозефсоновский барьер в качестве чувствительного прибора для точного измерения величины магнитного поля.

В первоначальном эксперименте<sup>37</sup> расстояние  $\Delta H$  между двумя последовательными мелкими максимумами было  $10^{-2} \div 10^{-3}$  гс. Очевидно, чем больше площадь  $S$ , лежащая внутри кольца, схематически изображенного на рис. 8, тем ближе минимумы и максимумы и с тем большей точностью можно измерять магнитное поле. В одном из экспериментов<sup>38</sup> удалось достичь разрешения  $\Delta H \cong 3 \cdot 10^{-4}$  гс (см. также<sup>39, 52</sup>). Основная трудность пока состоит в приготовлении туннельных образцов больших размеров. Однако, как отмечено Фейнманом<sup>25</sup>, если иметь образец с площадью кольца  $S \sim 1$  см<sup>2</sup>, разрешение будет  $\Delta H = \Phi_0/S \cong 10^{-7}$  гс. Если же иметь в виду возможность приготовить не два, а  $10 \div 20 \div 100$  параллельных джозефсоновских барьеров, то разрешающая сила соответствующего прибора будет еще больше. Здесь напрашивается аналогия с дифракционной решеткой в оптике, позволяющей с высокой степенью точности измерять длину волны падающего света. Можно надеяться, что развитие техники приготовления туннельных образцов позволит достичь точности измерения магнитного поля, сравнимой с оптической<sup>25</sup>.

Другой интересный эксперимент, проведенный теми же авторами<sup>38</sup>, состоял в том, что магнитный поток вводился внутрь кольца (см. рис. 8) при помощи узкого длинного соленоида, причем поле вне соленоида было пренебрежимо мало. Несмотря на то, что магнитное поле в сверхпроводящих подводах и туннельных барьерах оставалось равным нулю, джозефсоновский ток через систему проявлял характерную периодическую зависимость от полного потока  $\Phi = \oint \mathbf{A} \, ds$  внутри кольца. Другими словами, величина тока определялась значениями вектор-потенциала на контуре. Авторы работы<sup>38</sup> отмечают, что этот эксперимент, по-видимому, позволяет отнести вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  к числу реально наблюдаемых физических величин, таких, как магнитное и электрическое поля, являющиеся производными от  $\mathbf{A}$  (см. по этому поводу также<sup>40, 52</sup>). Ясно также, что при этом мы не вступаем в противоречие с калибровочной инвариантностью электромагнитного поля. Действительно, в этом эксперименте наблюдается зависимость физической величины (тока) не от самого вектор-потенциала  $\mathbf{A}$ , а от интеграла от него по замкнутому контуру, что ввиду соотношения

$$\oint \mathbf{A} \, ds = \int \mathbf{H} \, d\sigma = \Phi$$

делает калибровочную инвариантность очевидной.

В заключение подчеркнем еще раз, что упомянутые опыты демонстрируют интерференционные эффекты (и, стало быть, фазовую когерентность) в квантовомеханической системе на больших расстояниях (до 3,5 мм<sup>38</sup>; см. также<sup>57, 61-63</sup>). Они подтверждают высказанное Лондоном<sup>20</sup> представление о сверхпроводнике как о едином квантовом состоянии, характеризующемся наличием когерентности на макроскопических расстояниях.

## 5. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ЭФФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА

Остановимся теперь несколько более подробно на нестационарных эффектах, связанных с наличием конечной разности потенциалов  $V$  на барьере и соответствующей зависимости фазы от времени. Большинство эффектов лишь косвенно демонстрирует наличие переменного джозефсоновского тока. Мы уже упоминали об экспериментах<sup>13, 14</sup>, где на барьере, помещенном во внешнее микроволновое поле, наблюдались скачки напряжения в соответствии с соотношениями (1), (17) (см. также<sup>58, 60</sup>).

Другой косвенный эксперимент<sup>41</sup>, иллюстрирующий наличие переменной составляющей тока, основан на том, что присутствие переменных

полей в барьере приводит к своеобразной резонансной зависимости постоянной составляющей тока от напряжения на барьере. Чтобы лучше понять природу эффекта, приведем простой расчет<sup>41</sup>, в котором туннельный образец трактуется как два полубесконечных сверхпроводника, разделенных тонким оксидным слоем толщиной  $l$ . Допустим также, что в барьере имеется внешнее магнитное поле  $H_0$ , параллельное оси  $y$  (рис. 10).

Выпишем уравнения, описывающие джозефсоновский ток:

$$j(\mathbf{r}, t) = j_1 \sin \varphi(\mathbf{r}, t), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar},$$

$$\nabla \varphi = \frac{2ed}{\hbar c} [\mathbf{Hn}], \quad (29)$$

где  $\mathbf{H}$  — полное магнитное поле в барьере,  $V = V_0 + v(t)$ ,  $d = l + 2\lambda$ ,  $j_1$  — ток через барьер в нормальном состоянии при напряжении  $\frac{1}{2}\pi\Delta$ ,  $\varphi$  — разность фаз на барьере.

При  $V = V_0$  и  $H = H_0$  из (29) следует  $\varphi = \omega t - kz$ , где  $\omega = 2eV_0/\hbar$ ,  $k = 2eH_0 d/\hbar c$ .

Для учета влияния переменного электромагнитного поля в барьере на джозефсоновский ток необходимо добавить к системе (29) уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (30)$$

( $\varepsilon$  — диэлектрическая постоянная оксидного слоя). Толщина слоя обычно порядка 10–20 Å, так что зависимость поля в слое от координаты  $x$  можно пренебречь. Компонента поля  $E_x$  экранируется и не проникает в сверхпроводник. Интегрирование первого из уравнений (30) по поверхности  $abcd$  (рис. 10) дает

$$l \frac{\partial E_x^0}{\partial z} = -\frac{2\lambda + l}{c} \frac{\partial H_y^0}{\partial t}, \quad (31)$$

где  $E_x^0$  и  $H_y^0$  — поля в оксидном слое. Аналогично, беря нормаль поверхности параллельно оси  $z$ , находим

$$l \frac{\partial E_x^0}{\partial y} = \frac{2\lambda + l}{c} \frac{\partial H_z^0}{\partial t}. \quad (32)$$

Из второго уравнения (30) следует

$$\frac{\partial H_z^0}{\partial y} - \frac{\partial H_y^0}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_x^0}{\partial t}. \quad (33)$$

Из (31) — (33) следует уравнение для переменной компоненты напряжения на барьере  $v = lE_x^0$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v = \frac{4\pi l}{\varepsilon c^2} \frac{\partial j_x}{\partial t}, \quad (34)$$

где  $c = c(l/\varepsilon d)^{1/2}$  — скорость распространения электромагнитных колебаний в изолирующем слое. Поскольку в эксперименте  $v \ll V_0$ , правую часть (34), играющую роль вынуждающей силы, можно представить в виде  $(4\pi l/\varepsilon c^2) j_1 \omega \cos(\omega t - kz)$ . Вводя величину  $Q$ , характеризующую потери

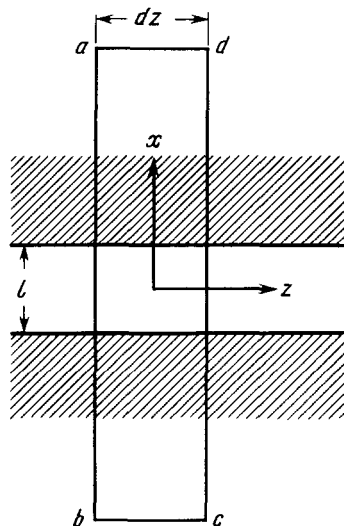


Рис. 10.

в системе (диссипационные и радиационные), находим решение (7):

$$v = v_0 \cos(\omega t - kz + \theta),$$

$$v_0 = \frac{(4\pi l/\varepsilon\omega) j_1}{\{[1 - (kc/\omega)^2]^2 + (1/Q)^2\}^{1/2}}, \quad \theta = \arctg \frac{1/Q}{1 - (kc/\omega)^2}. \quad (35)$$

Поскольку в уравнение (29) входит полное  $V = V_0 + v$ , фазовый сдвиг  $\varphi$  изменяется на величину  $(v_0/V) \sin(\omega t - kz)$  и плотность тока принимает вид

$$j = j_1 \sin[\omega t - kz + \left(\frac{v_0}{V}\right) \sin(\omega t - kz + \theta)]. \quad (36)$$

Происхождение дополнительной зависимости от времени в (36) объяснено взаимодействием переменной компоненты тока с собственными колебаниями в туннельном слое и по своей природе аналогично эффекту внешнего микроволнового поля<sup>14</sup>. В первом порядке по  $v_0/V$  постоянная часть (36) есть

$$j_{\text{пост}} = j_1 \frac{v_0}{V} \sin \theta = j_1 \frac{4\pi l j_1}{\varepsilon\omega V_0} \frac{1/Q}{[1 - (kc/\omega)^2]^2 + (1/Q)^2}, \quad (37)$$

т. е. результирующий постоянный ток имеет резонансную структуру (рис. 11), причем максимум тока имеется при  $\omega/k = \bar{c}$ . Используя приведенные выше значения  $k$ ,  $\bar{c}$  и  $\omega$ , получаем следующее линейное соотношение между разностью напряжений  $V_p$ , при которой имеется пик тока, и приложенным магнитным полем:

$$V_p = \left(\frac{ld}{e}\right)^{1/2} H_0. \quad (38)$$

На рис. 12, а приведено сравнение формулы (38) с экспериментальными данными<sup>41</sup> для туннельного барьера свинец — окись свинца — свинец при  $\lambda = 400 \text{ \AA}$ ,  $l = 15 \text{ \AA}$  и  $\varepsilon = 3,8$ .

Из (37) можно также найти зависимость значения тока в пике от напряжения. В резонансе плотность тока есть

$$(j_{\text{пост}})_p = \frac{j_1 Q \cdot 4\pi l j_1}{\varepsilon\omega V_p}, \quad (39)$$

и поскольку  $\omega = 2eV_p/\hbar$ , правая часть (39) изменяется как  $1/V_p^2$ . На рис. 12, б проведено сравнение формулы (39) с экспериментальными данными. Наилучшее согласие получается при  $Q = 3,5$ . Изложенная простая модель удивительно хорошо описывает экспериментальные данные. Более подробное обсуждение относящихся к этому вопросов можно найти в<sup>41</sup>.

В работе Гиавера<sup>15</sup> наличие излучения, сопровождающего нестационарный джозефсоновский ток, было продемонстрировано следующим элегантным способом. Был изготовлен специальный туннельный образец, поперечный разрез которого схематически изображен на рис. 13. На подложку наносился слой олова 1, поверхность которого подвергалась длительному окислению, образуя толстый оксидный слой (заштриховано). Затем поверх наносился другой слой олова 2, подвергавшийся лишь кратковременному окислению так, чтобы диэлектрическая пленка была достаточно тонка. Наконец, сверху наносился еще один слой олова 3, как показано на рис. 13. Пленка между 1 и 2 была достаточно толста, чтобы подавить джозефсоновский эффект, а на пленке между 2 и 3 можно было наблюдать ток Джозефсона.

При подаче напряжения  $V_{12}$  между слоями 1 и 2 снималась вольт-амперная характеристика для обычного одночастичного туннельного тока (кривая 1 на рис. 14). Если теперь между слоями 2 и 3 так пропускать



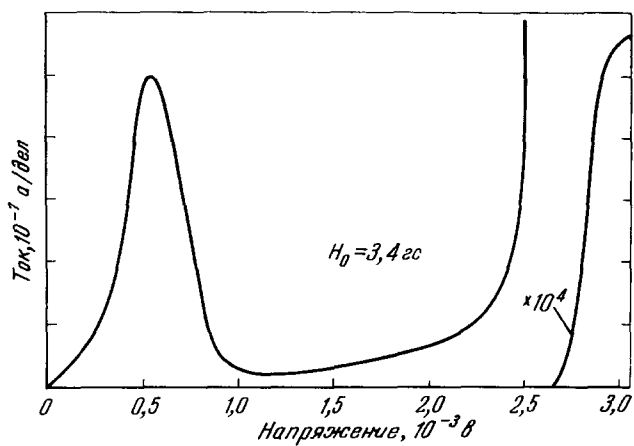


Рис. 11. Одна из экспериментальных кривых <sup>41</sup>, демонстрирующая резонансную структуру зависимости  $I - V$ .

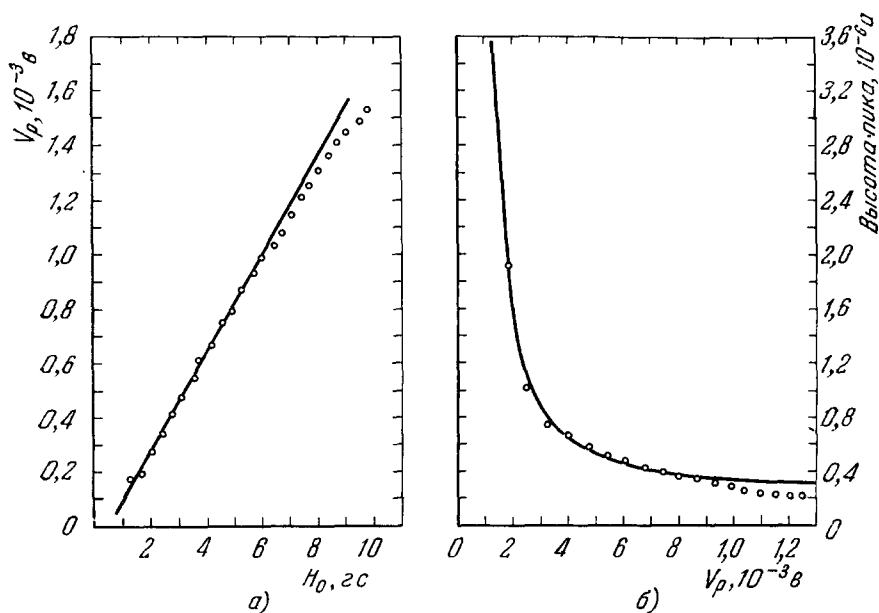


Рис. 12. Экспериментальные данные и теоретические кривые <sup>41</sup>, дающие: а) зависимость положения пика  $V_p$  от приложенного магнитного поля  $H_0$ ; б) зависимость высоты пика от  $V_p$ .

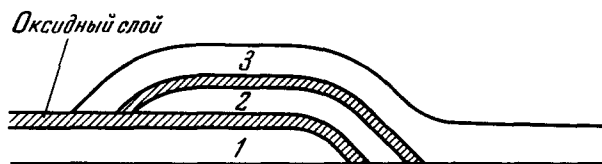


Рис. 13. Схематическое изображение туннельного образца <sup>15</sup>.

джозефсоновский ток, чтобы при этом на барьере возникало некоторое напряжение  $V_{23}$ , и одновременно снимать вольт-амперную характеристику между слоями 1 и 2, то последняя будет иметь вид, изображенный на рис. 14 (кривая 2). Ступеньки тока на этой кривой имеются при значениях напряжения  $V_{12} = (1/e)(2\Delta \pm 2neV_{23})$ , где  $2\Delta$  — величина щели олова (на рис. 14 ей соответствует начало быстрого роста обычного одночастичного тока). Энергия  $2eV_{23}$  как раз равна энергии  $\hbar\omega$  фотонов, испущенных из джозефсоновского барьера (2, 3) и поглощенных в туннельной структуре (1, 2). Здесь мы имеем полную аналогию с экспериментами Дайема и Мартина<sup>42</sup>, обнаружившими такие же ступеньки одночастичного тока при облучении барьера внешним электромагнитным излучением.

Наконец, в работе Янсона, Свистунова и Дмитренко<sup>16</sup> джозефсоновский туннельный образец помещался в волновод, и с помощью

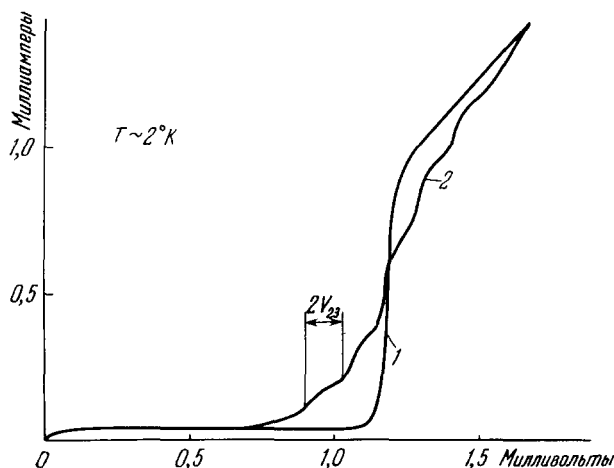


Рис. 14. Вольт-амперная характеристика туннельного образца, изображенного на рис. 13.

Кривая 1 — одночастичный ток  $I_{12}$  при напряжении  $V_{23} = 0$ ; кривая 2 — одночастичный ток  $I_{12}$  при напряжении  $V_{23} \neq 0$ .

чувствительного приемника ими было непосредственно зарегистрировано электромагнитное излучение на волне 3 см с выходной мощностью  $10^{-14}$  вт, сопутствующее переменному току Джозефсона. В работе Дмитренко и Янсона<sup>56</sup> получена на порядок бóльшая мощность. В этой работе имеются интересные данные о ширине и форме линии излучения Джозефсона, с помощью которых, возможно, удастся изучать распределение «сверхпроводящих» электронных пар по энергиям. Исследование структуры излучения Джозефсона продолжается.

Таким образом, наличие нестационарного эффекта Джозефсона следует считать твердо установленным. В принципе на основе этого эффекта можно было бы попытаться создать различные генераторы микроволнового излучения переменной частоты, однако получаемые пока мощности недостаточны для практических целей.

В заключение приведем несколько дополнительных ссылок на работы, где эффект Джозефсона трактуется в рамках теории Гинзбурга — Ландау (см. <sup>43, 44</sup>), используется квазиспиновый подход<sup>45</sup>, рассматривается влияние парамагнитных примесей в сверхпроводящем образце<sup>46</sup> и др. Обсуждение возможностей практического применения туннельных эффек-

тов можно найти в сборнике <sup>47</sup>. Упомянем, кроме того, ряд еще не опубликованных материалов <sup>48-50</sup>.

Можно быть уверенным, что число работ, посвященных этому интересному эффекту, будет продолжать расти.

Физический институт

им. П. Н. Лебедева АН СССР

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. Frenkel, Phys. Rev. **36**, 1604 (1930).
2. А. Зоммерфельд, Г. Бете, Электронная теория металлов, М.—Л., ОНТИ, 1938.
3. D. Douglas, L. Falicov, в сб. Progress in Low Temperature Physics (C. Gorter, Ed.), vol. 4, J. Wiley and Sons, N. Y., 1964, стр. 97.
4. Дж. Бардин, Дж. Шриффер, Новое в изучении сверхпроводимости, М., Физматгиз, 1962.
5. А. Абрикосов, Л. Горьков, И. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., Физматгиз, 1962.
6. J. Schrieffer, Theory of Superconductivity (Benjamin, Ed.), 1964.
7. B. Josephson, Phys. Letts. **1**, 251 (1962).
8. P. Anderson, J. Rowell, Phys. Rev. Letts. **10**, 230 (1963).
9. A. Goldman, Dissertation (Stanford University, 1965).
10. A. Goldman, P. Kreisman, D. Scalapino, Phys. Rev. Letts. **15**, 495 (1965).
11. T. Smith, Phys. Rev. Letts. **15**, 460 (1965).
12. P. Anderson, The Many-Body Problem (E. Caianiello, Ed.), Academic Press, N. Y., 1964, стр. 113.
13. S. Shapiro, Phys. Rev. Letts. **11**, 80 (1963).
14. S. Shapiro, A. Janus, S. Holly, Rev. Mod. Phys. **36**, 223 (1964).
15. I. Giaever, Phys. Rev. Letts. **14**, 904 (1965).
16. И. Янсон, В. Свистунов, И. Дмитренко, ЖЭТФ **48**, 976 (1965).
17. D. Langenberg, D. Scalapino, B. Taylor, R. Eck, Phys. Rev. Letts. **15**, 294, 842 (1965).
18. В. Гинзбург, Л. Ландау, ЖЭТФ **20**, 1064 (1950).
19. Л. Горьков, ЖЭТФ **36**, 1918 (1959).
20. F. London, Superfluids, vol. 1, J. Wiley and Sons, N. Y., 1950.
21. B. Deaver, W. Fairbank, Phys. Rev. Letts. **7**, 43 (1961).
22. R. Doll, M. Näubauer, Phys. Rev. Letts. **7**, 51 (1961).
23. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **42**, 299 (1962).
24. P. Carruthers, M. Nieto, Phys. Rev. Letts. **14**, 387 (1965).
25. R. Feynman, Lectures on Physics, vol. 3, § 21, Addison-Wesley, 1964.
26. M. Cohen, L. Falicov, J. Phillips, Phys. Rev. Letts. **8**, 316 (1962).
27. И. Кулик, ЖЭТФ **49**, 1211 (1965).
28. J. Bardeen, L. Cooper, J. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
29. Н. Боголюбов, В. Толмачев, Д. Ширков, Новый метод в теории сверхпроводимости, М., Изд-во АН СССР, 1958.
30. V. Ambegaokar, A. Baratoff, Phys. Rev. Letts. **10**, 486 (1963); **11**, 104 (E) (1963).
31. P. de Gennes, Phys. Letts. **5**, 22 (1963).
32. R. Ferrell, R. Prange, Phys. Rev. Letts. **10**, 479 (1963).
33. J. Rowell, Phys. Rev. Letts. **11**, 200 (1963).
34. M. Fiske, Rev. Mod. Phys. **36**, 221 (1964).
35. B. Josephson, Rev. Mod. Phys. **36**, 216 (1964).
36. А. Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
37. R. Jaklevič, J. Lambe, A. Silver, J. Mercereau, Phys. Rev. Letts. **12**, 159 (1964).
38. R. Jaklevič, J. Lambe, A. Silver, J. Mercereau, Phys. Rev. Letts. **12**, 274 (1964).
39. J. Zimmerman, J. Mercereau, Phys. Rev. Letts. **13**, 125 (1964).
40. Е. Фейнберг, УФН **78**, 53 (1962).
41. R. Eck, D. Scalapino, B. Taylor, Phys. Rev. Letts. **13**, 15 (1964).
42. A. Dayem, R. Martin, Phys. Rev. Letts. **8**, 246 (1962).
43. K. Maki, Prog. Theor. Phys. **30**, 573 (1963).
44. D. Jacobson, Phys. Rev. **A138**, 1066 (1965).
45. P. Wallace, M. Stavn, Canad. J. of Phys. **43**, 411 (1965).
46. И. Кулик, ЖЭТФ **50** (1), 3 (1966).

47. Proc. of the IEEE **52**, 10 (1964).
  48. B. Josephson, Supercurrents through Barriers (preprint).
  49. R. Eck, D. Scalapino, B. Taylor, Tunnel Junction of Modes Driven by the Josephson Current (preprint).
  50. Proc. of IX Conference on Low Temperature Physics, 1965 (в печати).
  51. И. Янсон, В. Свистунов, И. Д. Дмитренко, ЖЭТФ **47**, 2091 (1964).
  52. R. Jaklevič, J. Lambe, J. Mercereau, A. Silver, Phys. Rev. **A140**, 1628 (1965).
  53. И. Дмитренко, И. Янсон, В. Свистунов, Письма ЖЭТФ **2**, 17 (1965).
  54. И. Дмитренко, И. Янсон, ЖЭТФ **49**, 1741 (1965).
  55. И. Кулин, Письма ЖЭТФ **2**, 134 (1965).
  56. И. Дмитренко, И. Янсон, Письма ЖЭТФ **2**, 242 (1965).
  57. R. Ferrell, Phys. Rev. Letts. **15**, 527 (1965).
  58. D. Coon, M. Fiske, Phys. Rev. **A138**, 744 (1965).
  59. T. Shigi, Y. Sagi, J. Phys. Soc. Japan **20**, 1276 (1965).
  60. E. Riedel, Zs. Naturforsch. **19a**, 1634 (1964).
  61. J. Zimmerman, A. Silver, Phys. Rev. Letts. **10**, 47 (1964).
  62. J. Lambe, A. Silver, J. Mercereau, R. Jaklevič, Phys. Letts. **11**, 16 (1964).
  63. A. Silver, J. Zimmerman, Phys. Rev. Letts. **15**, 888 (1965).
-