1966 г. Февраль *Том 88, вып. 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

535.0

КОГЕРЕНТНЫЕ СВОЙСТВА ОПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ. II*)

Э. Вольф, Л. Мандель

4. ОБЩЕЕ СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯ

Мы приступаем теперь к систематическому обобщению различных вопросов, связанных с корреляцией оптических полей, о которых речь шла раньше. Мы обнаружим, что такое обобщение в равной степени возможно в рамках классических представлений и в рамках квантовой теории поля и, более того, существует очень интересное соответствие между этими двумя описаниями, если использовать представление Сударшана в фазовом пространстве.

§ 4.1. Классическое описание

Рассмотрим оптическое поле, представленное через комплексную аналитическую волновую амплитуду $\mathbf{V}(\mathbf{r}_i, t_i)$ в пространственно-временно́й точке $\mathbf{r}_i$, t_i (иногда мы будем пользоваться сокращенным обозначением $\mathbf{V}_i$). Представляется несомненным, что наиболее полное возможное «классическое» описание поля дается совместным N-точечным распределением вероятностей для всех N [Вольф (1963)]

$$p_N(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_N)\, d^2\mathbf{V}_1\, d^2\mathbf{V}_2 \ldots d^2\mathbf{V}_N,$$

где

$$d^2\mathbf{V}_k = d\mathbf{V}_k^{(r)}\, d\mathbf{V}_k^{(i)}$$

$$(\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_k^{(r)} + i\mathbf{V}_k^{(i)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N).$$

Мы можем думать, что это совместное распределение комплексного поля получено из известного вероятностного функционала реального поля $\mathbf{V}^{(r)}(\mathbf{r}, t)$ подходящим преобразованием к новым переменным $\mathbf{V}^{(i)}(\mathbf{r}, t)$ (см. (3,4)). Однако мы оставим открытым вопрос, касающийся построения распределения p_N, потому что этот вопрос в общем случае не исследован. В принципе такое распределение позволяет подсчитывать средние величины по ансамблю для любой функции $F(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_N)$ для значений поля в N точках пространства-времени по правилу

$$\langle F(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_N)\rangle = \\ = \int \ldots \int F(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_N)\, p_N(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_N)\, d^2\mathbf{V}_1\, d^2\mathbf{V}_2 \ldots d^2\mathbf{V}_N. \quad (4,1)$$

*) Перевод первой части статьи (разделы 1—3) и список цитированной литературы см. в УФН 87 (3), 491 (1965); окончание будет опубликовано в апрельском выпуске. Перевод В. А. Угарова, редакция и примечания В. П. Козлова.

Следует отметить, что поскольку $\mathbf{V}$ являются комплексными векторами, p_N представляет собой распределение $6N$ действительных переменных, а интеграл, входящий в (4,1), распространен по $3N$ комплексным плоскостям. Мы увидим в § 6.1, что комплексное представление особенно хорошо подходит для квантовомеханического рассмотрения фотоэлектрических измерений поля.

Поскольку определенный выбор комплексной величины $\mathbf{V}$ эквивалентен одновременному выбору амплитуды и фазы классической волны, а для квазимонохроматического света — величины $\mathbf{V}^{(r)}$ и ее производных по времени, может показаться, что $p_N(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_N)$ не будет иметь аналога при квантовом описании поля. Несмотря на эти подозрения, выяснится, что существует довольно близкое соответствие.

Мы уже сталкивались с моментами второго порядка от $\mathbf{V}$ при рассмотрении простых интерференционных экспериментов. Более сложные корреляционные измерения в общем случае требуют привлечения моментов высших порядков, или корреляционных тензоров, от $\mathbf{V}$, определяемых следующим образом:

$$\Gamma^{(N,M)}_{j_1,\ldots,j_N,j_{N+1},\ldots,j_{N+M}}(x_1,\ldots,x_N;\ x_{N+1},\ldots,x_{N+M}) = \\ = \langle V^*_{j_1}(x_1)\ldots V^*_{j_N}(x_N)\,V_{j_{N+1}}(x_{N+1})\ldots V_{j_{N+M}}(x_{N+M})\rangle, \quad (4,2)$$

где под символом x_i подразумеваются пространственные и временна́я координаты $\mathbf{r}_i$, t_i, а j_i представляют собой индексы поляризации, относящиеся к декартовым компонентам комплексного вектора $\mathbf{V}(\mathbf{r}_i, t_i)$. Такие обобщенные моменты порядка $N+M$ были введены [Вольф (1963, 1964); Мандель (1964а)], когда рассматривались корреляционные эксперименты со светом от нетепловых источников. Кроме того, по аналогии с взаимными спектральными плотностями второго порядка, определенными в § 3.1 [см. (3,32)], можно определить также обобщенные взаимные спектральные плотности $(N+M)$-го порядка, хотя в настоящей статье они нам не понадобятся. Для широко распространенного случая стационарного эргодического оптического поля средние по ансамблю можно заменить на средние по времени, и функции $\Gamma^{(N,M)}$ не зависят от выбора начала отсчета времени. В последующем будет приниматься, что корреляция $(N+M)$-го порядка, записанная в виде явной функции лишь $N+M-1$ временны́х переменных, относится к стационарному полю.

Мы можем отметить, что было произведено несколько экспериментов, в которых были эффективно измерены корреляции четвертого порядка; имеются предложения по измерению корреляций шестого порядка. Следует добавить, что корреляции четвертого порядка оказываются иногда полезными при описании интерференционных явлений, включающих в себя элементы случайности. Эти вопросы будут рассмотрены подробнее в разделах 6 и 7.

§ 4.2. Квантовое описание поля

При квантовомеханической трактовке поля излучения поперечное поле *) в каждой точке пространства-времени $\mathbf{r}$, t в гейзенберговской картине представляется эрмитовским оператором $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$, который можно разложить в ряд Фурье по плоским волнам:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = (\hbar c/L^3)^{1/2} \sum_{\mathbf{k},s} (1/k^{1/2})\,[\hat{a}_{k,s}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{k,s} \exp[i(\mathbf{kr}-ckt)] + \\ + \hat{a}^\dagger_{k,s}\,\boldsymbol{\varepsilon}^*_{k,s} \exp[-i(\mathbf{kr}-ckt)]] = \hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}, t). \quad (4,3)$$

*) Так как только поперечная часть поля ответственна за наблюдаемые явления, мы будем рассматривать только эту часть поля.

Операторы $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ и $\hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ — операторы уничтожения и рождения, с которыми мы уже встречались в § 3.2. Эти операторы являются эрмитовски-сопряженными друг другу и подчиняются перестановочным соотношениям, которые можно вывести из (3,41). Мы уже отмечали, что $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ имеет правые собственные состояния вида $|\{v_{k,s}\}\rangle$ и соответствующие собственные значения, которые являются комплексными волновыми амплитудами $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, определяемыми соотношением (3.47). В точности также $\hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ имеет левые собственные состояния $\langle\{v_{k,s}\}|$ и соответствующие собственные значения $\mathbf{V}^*(\mathbf{r}, t)$.

Когерентные свойства поля могут быть описаны с помощью корреляций между операторами поля несколькими возможными способами. Так, Сеницкий (1962b) определил корреляционный оператор как симметризованное произведение действительных операторов в двух точках. Однако для нашего рассмотрения более удобным будет другой оператор. В соответствии с тензорным уравнением (4,2) Глаубер (1963a, b, c) ввел корреляционные тензоры, определенные через упорядоченные произведения комплексных операторов поля, в виде *)

$$G^{(N,M)}_{j_1,\ldots,j_N,j_{N+1},\ldots,j_{N+M}}(x_1,\ldots,x_N,x_{N+1},\ldots,x_{N+M}) = \\ = \mathrm{Tr}\,[\hat{\varrho}\hat{A}^{(-)}_{j_1}(x_1),\ldots,\hat{A}^{(-)}_{j_N}(x_N)\,\hat{A}^{(+)}_{j_{N+1}}(x_{N+1}),\ldots,\hat{A}^{(+)}_{j_{N+M}}(x_{N+M})], \quad (4,4)$$

где через x_i обозначена точка пространства-времени $\mathbf{r}_i$, t_i, а $\hat{\varrho}$ — оператор плотности, представляющий (вообще говоря, смешанное) состояние поля. Для описания N-точечных фотоэлектрических измерений поля с запаздывающими совпадениями в точках пространства-времени $x_1, \ldots, x_N$ требуется оператор типа

$$\hat{A}^{(-)}_{j_1}(x_1)\ldots\hat{A}^{(-)}_{j_N}(x_N)\,\hat{A}^{(+)}_{j_1}(x_1)\ldots\hat{A}_{j_N}(x_N).$$

Здесь учтено, что приемники способны различать поляризации $j_1, \ldots, j_N$, соответственно [ср., однако, работу Холидея и Сажа (1964), предложивших иной оператор]. Действительно, если $|s_1\rangle$ представляет собой состояние поля до измерения, а $|s_2\rangle$ — после измерения, то матричный элемент, соответствующий поглощению фотонов заданной поляризации каждым приемником в заданные моменты времени [ср. Глаубер (1963b), стр. 2531], равен

$$\langle s_2|\hat{A}^{(+)}_{j_1}(x_1)\ldots\hat{A}^{(+)}_{j_N}(x_N)|s_1\rangle.$$

Скорость, с которой происходит такое поглощение, просуммированная по всем конечным состояниям, пропорциональна

$$\sum_{s_2}|\langle s_2|\hat{A}^{(+)}_{j_1}(x_1),\ldots,\hat{A}^{(+)}_{j_N}(x_N)|s_1\rangle|^2 = \\ = \sum_{s_2}\langle s_1|\hat{A}^{(-)}_{j_1}(x_1),\ldots,\hat{A}^{(-)}_{j_N}(x_N)|s_2\rangle\langle s_2|\hat{A}^{(+)}_{j_1}(x_1),\ldots,\hat{A}^{(+)}_{j_N}(x_N)|s_1\rangle = \\ = \langle s_1|\hat{A}^{(-)}_{j_1}(x_1),\ldots,\hat{A}^{(-)}_{j_N}(x_N)\,\hat{A}^{(+)}_{j_1}(x_1),\ldots,\hat{A}^{(+)}_{j_N}(x_N)|s_1\rangle; \quad (4,5)$$

*) Фактически в корреляциях Глаубера вместо оператора $\hat{\mathbf{A}}$ использован оператор электрического поля $\hat{\mathbf{E}}$ [см. также соотношения (5, 61a) и (5,79) ниже]. Как будет ясно из дальнейшего, предлагаемое определение несколько более удобно для приложения к вопросам, имеющим отношение к фотоэлектрической регистрации световых флуктуаций.

Глаубер рассматривал только произведения $(N+N)$-порядка из $2N$ операторов поля; эти произведения он назвал «корреляциями» N-го порядка. Однако корреляции N, M-типа могут быть полезными при рассмотрении когерентных свойств гармонически генерируемого света [см., например Дюкунг и Бломберген (1964); Бломберген (1964)].

если правую часть этого уравнения усреднить по ансамблю начальных состояний системы, она станет тождественной с правой частью (4,4) при $x_{N+r}=x_r$, $j_{N+r}=j_r$ и $M=N$.

Ряд свойств $G^{(N,M)}$ вытекает прямо из определения. Так, например, [см. Глаубер (1963b), раздел 3]

$$G^{(N,M)*}_{j_1,\ldots,j_N,j_{N+1},\ldots,j_{N+M}}(x_1,\ldots,x_N;\ x_{N+1},\ldots,x_{N+M})=$$
$$=G^{(M,N)}_{j_{N+1},\ldots,j_{N+M},j_1,\ldots,j_N}(x_{N+1},\ldots,x_{N+M};\ x_1,\ldots,x_N) \qquad (4,6)$$

и

$$G^{(N,N)}_{j_1,\ldots,j_N,j_1,\ldots,j_N}(x_1,\ldots,x_N;\ x_1,\ldots,x_N)\geqslant 0. \qquad (4,7)$$

Можно также показать, что

$$|G^{(N,M)}_{j_1,\ldots,j_N,j_{N+1},\ldots,j_{N+M}}(x_1,\ldots,x_N;\ x_{N+1},\ldots,x_{N+M})|^2\leqslant$$
$$\leqslant G^{(N,N)}_{j_1,\ldots,j_N,j_1,\ldots,j_N}(x_1,\ldots,x_N,x_1,\ldots,x_N)\times$$
$$\times G^{(M,M)}_{j_{N+1},\ldots,j_{N+M},j_{N+1},\ldots,j_{N+M}}(x_{N+1},\ldots,x_{N+M},\ x_{N+1},\ldots,x_{N+M}). \qquad (4,8)$$

Сходство между квантовомеханическими корреляциями $G^{(N,M)}$ и корреляциями, определенными классически, $\Gamma^{(N,M)}$ позволяет думать, что существует «интимное» соответствие между ними. Мы увидим, что это соответствие особенно ясно может быть обнаружено с помощью представления в фазовом пространстве. Нельзя не отметить, конечно, что хотя нормально упорядоченные произведения операторов уничтожения и рождения играют доминирующую роль в теории оптической когерентности, другими авторами рассматривались недавно иные произведения и устанавливался их физический смысл [Иордан (1964); Кано (1964, 1965); Мандель (1964); Мета и Сударшан (1965)].

§ 4.3. Представление в фазовом пространстве

Вскоре после того как были введены корреляции высших порядков, Сударшану (1963a, b) удалось показать, что существует интересное представление оператора плотности электромагнитного поля $\hat{\varrho}$ в фазовом пространстве (или в «диагональном» $|v_{k,s}\rangle$ -пространстве), которое сразу выявляет соответствие между классическим и квантовомеханическим описаниями. Возможность такого представления для некоторых частных случаев была отмечена также Глаубером (1963c), который назвал это представление P-представлением; однако универсальная применимость этого представления была впервые понята и обоснована Сударшаном.

Сударшан указал, что любой оператор плотности $\hat{\varrho}$ свободного электромагнитного поля может быть представлен в «диагональной» форме, если использовать базис, образованный собственными состояниями $|\{v_{k,s}\}\rangle$ оператора уничтожения $\hat{\mathbf{A}}^{(-)}(x)$ [ср. соотношение (3,46)]:

$$\hat{\varrho}=\int \Phi(\{v_{k,s}\})\,|\{v_{k,s}\}\rangle\langle\{v_{k,s}\}|\,d^2\{v_{k,s}\}. \qquad (4,9)$$

Первоначальное введение этого представления Сударшаном носило несколько эвристический характер. Оно основывалось на формальном разложении (см. Дополнение в конце статьи), содержащем δ-функцию Дирака и ее производные, функционала $\Phi(\{v_{k,s}\})$ по элементам $(\{n_{k,s}\},\{n'_{k,s}\})$ плотности $\hat{\varrho}$ в представлении Фока. Строгая формулировка

теоремы Сударшана была дана позже *) Клаудером, Мак-Кенной и Кюри (1965) и Метой и Сударшаном (1965) [ср. Дополнение, заключительную часть]. Хотя в общем случае $\Phi(\{v_{k,s}\})$, входящее в (4,9), следует рассматривать как обобщенный функционал**), было доказано, что во многих важных случаях $\Phi(\{v_{k,s}\})$ можно считать обычным, неотрицательным функционалом с достаточно хорошими свойствами.

Мы можем считать $\Phi(\{v_{k,s}\})$ распределением в фазовом пространстве, описывающем смешанное состояние поля в многомерном пространстве комплексных переменных $\{v_{k,s}\}$. Это еще более подчеркивается тем фактом, что $\{v_{k,s}\}$ представляют собой собственные значения операторов $\{\hat{a}_{k,s}\}$, действительные и мнимые (эрмитовские и антиэрмитовские) части которых $\mathrm{Re}(\hat{a}_{k,s})$, $\mathrm{Im}(\hat{a}_{k,s})$ ведут себя как канонически сопряженные операторы [Мандель (1963а)]. Таким образом, принимая во внимание (3,41),

$$[\mathrm{Re}(\hat{a}_{k,s}),\ \mathrm{Im}(\hat{a}_{k,s})] = \frac{i}{2}[\hat{a}_{k,s},\ \hat{a}^{+}_{k,s}] = \frac{i}{2}. \tag{4,10}$$

Вычислим корреляционные тензоры $G^{(N,M)}$, определяемые соотношением (4,4), в том случае, когда оператор плотности $\hat{\varrho}$ представлен в

---

*) В недавно вышедшей книге Quantum Optics and Electronics, Les Houches, 1964, изданной Д. Виттом, Бланденом и Коэн-Таннуджи (Gordon and Breach Publishers, New York, 1965, стр. 144), Глаубер пишет об этом представлении и состояниях следующее:

«В недавно появившемся препринте Клаудер, Мак-Кенна и Кюри подтверждают заключение, что не существует подходящей весовой функции P для произвольного оператора плотности. Чтобы до минимума снять эту трудность, они выражают матричные элементы оператора плотности с помощью предельного перехода, в который входит бесконечная последовательность операторов, выраженных в P-представлении. Эта процедура, однако, не позволяет сохранить наиболее ценное свойство P-представления — сведение статистических средних к простым интегралам по комплексной α-плоскости».

С нашей точки зрения, эта интерпретация основного результата Клаудера, Мак-Кенны и Кюри является ошибочной, поскольку эти авторы (а также Мета и Сударшан (1965); см. также Дополнение в конце статьи) ясно показали, в каком смысле нужно понимать сходимость, чтобы теорема Сударшана была доказана строго. В этой связи уместно напомнить, что когда волновая функция $\psi(q)$ разлагается по полной ортогональной системе $\varphi_n(q)$ ($n = 1, 2, 3 \ldots$):

$$\psi(q) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(q), \tag{1}$$

то, вообще говоря, подразумевается не обычная точечная сходимость в строго математическом смысле, а сходимость в смысле среднеквадратичного отклонения [см., например: E. C. Kemble, The Fundamental Principles of Quantum Mechanics with Elementary Applications (Dover Publications, New York, 1958, стр. 138], а именно

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \psi(q) - \sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n(q) \right|^2 dq = 0. \tag{2}$$

Тем не менее, предельный переход, входящий в (2), вовсе не означает отказа от широкого использования символического разложения (1) при вычислении «средних в виде простых интегралов», взятых по комплексной плоскости q. (Вообще говоря, использование разложения (1) в интегральных соотношениях требует обобщения понятия интеграла — перехода от интеграла Римана к интегралу Лебега.—*Прим. ред.*).

) В недавней работе [D. Holliday, M. L. Sage, Phys. Rev. **138,2B (1965)485] был построен пример, показывающий, что обращение с распределением Φ как с «обычным» обобщенным функционалом может привести к ошибочным результатам. Грубо говоря, распределение Φ «приспособлено» в основном для вычисления моментных функций (4,11) — см. Мета и Сударшан (1965). (*Прим. ред.*)

«диагональной» форме (4.9). Тогда мы имеем

$$G^{(N,M)}_{j_1,\ldots,j_N,j_{N+1},\ldots,j_{N+M}}(x_1,\ldots,x_N,x_{N+1},\ldots,x_{N+M}) = \\ = \mathrm{Tr}\int \Phi(\{v_{k,s}\})\,|\{v_{k,s}\}\rangle\langle\{v_{k,s}\}|\times \\ \times \hat{A}^{(-)}_{j_1}(x_1)\ldots\hat{A}^{(-)}_{j_N}(x_N)\,\hat{A}^{(+)}_{j_{N+1}}(x_{N+1})\ldots\hat{A}^{(+)}_{j_{N+M}}(x_{N+M})\,d^2\{v_{k,s}\}.$$

Последовательным применением соотношения, сопряженного уравнению для собственных значений (3,46)

$$\langle\{v_{k,s}\}|\,\hat{A}^{(-)}_{j_r}(x_r) = V^*_{j_r}(x_r)\,\langle\{v_{k,s}\}| \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots\ N)$$

в предыдущем интеграле, переставляя порядок множителей в произведении $|\{v_{k,s}\}\rangle\langle\{v_{k,s}\}|$ с остающимся оператором и снова применяя (3,46), мы придем к выражению

$$G^{(N,M)}_{j_1,\ldots,j_N,j_{N+1},\ldots,j_{N+M}}(x_1,\ldots,x_N,x_{N+1},\ldots,x_{N+M}) = \\ = \mathrm{Tr}\int \Phi(\{v_{k,s}\})\,V^*_{j_1}(x_1)\ldots V^*_{j_N}(x_N)\times \\ \times V_{j_{N+1}}(x_{N+1})\ldots V_{j_{N+M}}(x_{N+M})\,|\{v_{k,s}\}\rangle\langle\{v_{k,s}\}|\,d^2\{v_{k,s}\} = \\ = \int \Phi(\{v_{k,s}\})\,V^*_{j_1}(x_1)\ldots V^*_{j_N}(x_N)\,V_{j_{N+1}}(x_{N+1})\ldots V_{j_{N+M}}(x_{N+M})\,d^2\{v_{k,s}\} = \\ = \langle V^*_{j_1}(x_1)\ldots V^*_{j_N}(x_N)\,V_{j_{N+1}}(x_{N+1})\ldots V_{j_{N+M}}(x_{N+M})\rangle. \qquad (4,11)$$

Угловые скобки в (4,11) можно интерпретировать как математическое ожидание от произведения $V_j(x)$, если распределение в фазовом пространстве $\Phi\{(v_{k,s})\}$ использовано в качестве весовой функции или «плотности вероятности». Хотя $\Phi(\{v_{k,s}\})$ представляет собой действительную функцию комплексных переменных $\{v_{k,s}\}$, она вовсе не обязательно положительна всюду, как это имеет место для классической вероятности. Подобного рода функции впервые обсуждались Вигнером (1932) [ср. также Мойал (1949); Беккер (1958); Сударшан (1962), § 4.1; Мета (1964)], которому удалось показать, что эти функции можно использовать как весовые функции или «вероятностные» распределения для расчета математических ожиданий физических величин. Название «квазивероятность» для таких функций было придумано Беккером (1958). Выбор распределения в фазовом пространстве, вообще говоря, неоднозначен, поскольку существуют различные распределения, дающие одно и то же значение математического ожидания для произвольной функции $F(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_N)$ от классических переменных поля [ср. Мета (1964)]. Эта неоднозначность отчасти связана с несколькими альтернативными путями, которыми квантовомеханические операторы могут быть связаны с функциями классических переменных поля. Обзор различных способов такой связи можно найти у Шьюэлла (1959).

Правая часть (4,11) имеет в точности тот же самый вид, что и выражение (4,2) для корреляционной функции $\Gamma^{(N,M)}$, определенной классическим способом. Аналогию можно сделать еще более наглядной, если ввести «плотность вероятности в конфигурационном пространстве» *) $p_N(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_N)$, которая соответствует $\Phi(\{v_{k,s}\})$. Нужно лишь проинтегрировать $\Phi(\{v_{k,s}\})$ по переменным $\{v_{k,s}\}$, подчиненным N

*) Подобно распределению Ф, определенные указанным образом «суженные» распределения p_N вовсе не обязательно неотрицательны. Использование отрицательных функций вероятности для расчета математических ожиданий обсуждалось, например, Бартлеттом (1944).

связям типа [ср. Мандель (1963a)]

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}_i, t_i) = \left(\frac{hc}{L^3}\right)^{1/2} \sum_{k,s} \frac{1}{\sqrt{k}} v_{k,s} \boldsymbol{\varepsilon}_{k,s} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r}_i - ckt_i)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{4,12}$$

Таким образом,

$$p_N\{\mathbf{V}(\mathbf{r}_1, t_1), \ldots, \mathbf{V}(\mathbf{r}_N, t_N)\} = \\ = \int \Phi(\{v_{k,s}\}) \prod_{i=1}^{N} \delta\{\mathbf{V}(\mathbf{r}_i, t_i) - (hc/L^3)^{1/2} \sum_{k,s} k^{-1/2} v_{k,s} \boldsymbol{\varepsilon}_{k,s} \times \\ \times \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r}_i - ckt_i)]\} \, d^2\{v_{k,s}\}. \tag{4,13}$$

При таком выборе плотности вероятности корреляции $\Gamma^{(N,M)}$ тождественны с соответствующими корреляциями $G^{(N,M)}$. Описание поля с помощью Φ или ассоциированных с нею плотностей вероятности p_N называют иногда *полуклассическим* [ср. Сударшан (1963a, b)], хотя фактически такое представление является чисто квантовомеханическим описанием *).

Используются ли в качестве весовых функций плотности вероятностей $\{p_N\}$, определенные классическим способом в § 4.1 или квантовомеханически соотношением (4,13), в любом случае получаемые формулы имеют строгое соответствие между собой. Более того, это соответствие пронизывает всю теорию когерентности. По этой причине впредь мы будем обозначать все корреляции поля буквой Γ, оставляя выбор весовых функций открытым, если только мы специально не касаемся различия между корреляциями, определенными классическим и квантовомеханическим способами. Во всяком случае, мы убедимся позже, что строгое *равенство* между «распределениями вероятностей» и, следовательно, между соответствующими корреляциями существует, по крайней мере, для случая теплового оптического излучения.

Иногда утверждается [Глаубер (1963b), стр. 2533], что для стационарного эргодического поля корреляционная функция $G^{(1,1)}$, определенная квантовомеханическим соотношением (4,4), в предельном случае сильного поля низкой частоты сведется к взаимной когерентной функции $\Gamma^{(1,1)}$, определенной по (3,12) через неквантованное поле. Из предыдущих замечаний сразу делается ясным [и это подтверждается строгим расчетом, проведенным для излучения черного тела; Мета и Вольф (1964a, b)], что точное равенство между корреляционными функциями G и Γ может иметь место независимо от силы и частоты поля.

Представление в фазовом пространстве ведет также к интересному выражению для распределения вероятностей $p(n)$ числа фотонов n в заданном объеме пространства V в момент времени t (см. примечание в ч. I на стр. 498) для произвольного состояния поля [ср. Гилметти (1964)]. Мы выберем V за объем нормировки и заметим, что вероятность произвольного распределения $\{n_{k,s}\}$ по различным модам дается математическим ожиданием соответствующего проектирующего оператора. Таким образом,

$$p(\{n_{k,s}\}) = \mathrm{Tr}[\hat{\varrho} \,|\, \{n_{k,s}\}\rangle\langle\{n_{k,s}\}|]$$

*) В нашей статье мы используем прилагательное «полуклассический» в обычном его значении, а именно: этот термин относится к проблемам, в которые входит взаимодействие электромагнитного поля с веществом, причем поле трактуется классически, а взаимодействие — квантовомеханически.

и из (4,9)—

$$p(\{n_{k,s}\}) = \mathrm{Tr} \int \Phi(\{v_{k,s}\}) \, |\{v_{k,s}\}\rangle \langle\{v_{k,s}\}| \, |\{n_{k,s}\}\rangle \langle\{n_{k,s}\}| \, d^2\{v_{k,s}\} =$$

$$= \int \Phi(\{v_{k,s}\}) \, |\langle\{v_{k,s}\}|\{n_{k,s}\}\rangle|^2 \, d^2\{v_{k,s}\} =$$

$$= \int \Phi(\{v_{k,s}\}) \prod_{k,s} \left[\frac{(v^*_{k,s} v_{k,s})^{n_{k,s}}}{n_{k,s}!} \exp(-v^*_{k,s} v_{k,s}) \right] d^2\{v_{k,s}\}, \quad (4,14)$$

если использовать известные скалярные произведения векторов состояний $\{n_{k,s}\}\rangle$ и $\{v_{k,s}\}\rangle$ [ср. Глаубер (1963c)]. Далее,

$$p(n) = \sum_{\{n_{k,s}\}} p(\{n_{k,s}\}) \, \delta_{n,m},$$

где

$$m = \sum_{k,s} n_{k,s},$$

и из (4,14) с помощью теоремы о полиномиальном распределении мы получим

$$p(n) = \int \Phi(\{v_{k,s}\}) \frac{U^n}{n!} e^{-U} \, d^2\{v_{k,s}\}, \quad (4,15a)$$

где

$$U = \sum_{k,s} |v_{k,s}|^2.$$

Соотношение (4,15a) может быть переписано еще и в другом виде:

$$p(n) = \int_0^\infty P(U') \frac{U'^n}{n!} e^{-U'} \, dU', \quad (4,15b)$$

где

$$P(U') = \int \Phi(\{v_{k,s}\}) \, \delta(U' - U) \, d^2\{v_{k,s}\}.$$

Это и есть нужное нам распределение. Сразу видно, что оно представляет собой среднее из пуассоновских распределений, причем весовой функцией является распределение в фазовом пространстве Ф. Любопытно отметить, что довольно сходные результаты были получены Боте уже в 1927 г. Выражения, совпадающие с (4,15), были получены позднее Манделем (1958) и Манделем, Сударшаном и Вольфом (1964) из полуклассического рассмотрения процессов фотоэлектрического измерения [см. также Келли и Клейнер (1964)]. Эти результаты будут изложены в § 6.2. Мы увидим, что выражения (4,15) приводят к весьма полезному способу различения некоторых оптических полей, например полей, создаваемых лазерами, и полей, создаваемых тепловыми источниками *) [ср. Мандель (1964)].

Как мы увидим ниже, для многих случаев рассмотрение вопросов когерентности более удобно вести на основе корреляций, чем на основе самих распределений; тогда различие между квантовомеханическим и классическим описаниями формально пропадает, хотя оно неявно содержится в способе расчета математических ожиданий (т. е. в выборе распределения вероятностей p_N).

*) Такой подход весьма резко критиковался Глаубером, (Quantum Electronics, III, стр. 108, 1964). Однако эта критика не помешала Глауберу прийти к тем же самым выводам на основе тех же самых уравнений в более поздней публикации (Glauber, Quantum Optics and Electronics, Les Houches, 1964, edited by C. de Witt, A. Blandin and C. Cohen-Tannoudji (Gordon and Breach Publishers, New York, 1965), стр. 65, 181).

§ 4.4. Порядок и степень когерентности

Связь между корреляционными функциями второго порядка $\Gamma^{(1,1)}_{j,j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)$ в двух пространственно-временных точках и видимостью возникающих интерференционных полос, образующихся при условии, что излучение в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ (линейно поляризованное в направлении j) таково, что может возникать интерференция, уже была описана в § 3.1. Для стационарного линейно поляризованного поля модуль нормированной корреляционной функции $|\gamma^{(1,1)}_{j,j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1 - t_2)|$, лежащий между нулем и единицей, оказался удобной мерой степени когерентности. В общем случае, можно считать $|\gamma^{(1,1)}_{j_1,j_2}(x_1, x_2)|$ мерой степени когерентности второго порядка в точках пространства-времени x_1 и x_2 между компонентами поля j_1 и j_2. Условие полной когерентности второго порядка между этими компонентами в x_1 и x_2 тогда запишется в виде [ср. Мандель и Вольф (1961a); Паррент (1959a, b); Штрейфер (1964); Мета, Вольф и Балахандрам (1965)]

$$|\gamma^{(1,1)}_{j_1,j_2}(x_1, x_2)| = 1. \tag{4,16}$$

Обобщение условия (4.16) было предложено Глаубером (1963б, 1964); он определил с его помощью необходимое условие когерентности $2N$-порядка *).

Глаубер ввел нормированную функцию корреляции $2N$-порядка вида

$$\gamma^{(N,N)}_{j_1,\ldots,j_{2N}}(x_1, \ldots, x_{2N}) = \Gamma^{(N,N)}_{j_1,\ldots,j_{2N}}(x_1, \ldots, x_{2N}) \Big/ \prod_{r=1}^{2N} \{\Gamma^{(1,1)}_{j_r,j_r}(x_r, x_r)\}^{1/2}, \tag{4,17}$$

которая сводится к обычной корреляции при $N = 1$. Разумеется, $\Gamma^{(1,1)}_{j_r,j_r}(x_r, x_r)$ представляет собой среднюю интенсивность света, соответствующую компоненте поляризации j_r в точке пространства-времени x_r.

По аналогии с условием (4,16), для когерентности второго порядка соотношение

$$|\gamma^{(n,n)}_{j_1,\ldots,j_{2n}}(x_1, \ldots, x_{2n})| = 1 \qquad \text{для всех } n \leqslant N \tag{4,18}$$

было предложено как условие когерентности $2N$-порядка [Глаубер (1963b; 1964)] **). Поскольку $\Gamma^{(N,N)}_{j_1,\ldots,j_N,j_1,\ldots,j_N}(x_1, \ldots, x_N; x_1, \ldots, x_N)$ является действительной положительной величиной, пропорциональной совместной «N-точечной» скорости фотоэлектрических отсчетов для компонент поляризации $j_1, \ldots, j_N$ в точках пространства-времени $x_1, \ldots, x_N$, то и $\gamma^{(N,N)}_{j_1,\ldots,j_N,j_1,\ldots,j_N}(x_1, \ldots, x_N; x_1, \ldots, x_N)$ также действительна и положительна. Таким образом, условие (4,18) для когерентности $2N$-го порядка подразумевает, что совместная n-точечная скорость отсчетов сводится к произведению скоростей отсчетов n отдельных приемников при $n \leqslant N$. Условие когерентности $2N$-го порядка исключает возможность корреляций интенсивности вплоть до N-го порядка. Согласно этому определению эффекты корреляции интенсивности, впервые наблюдавшиеся Хэнбери Брауном и Твиссом (1956a, 1957a, b), не существуют для света, имеющего порядок когерентности выше, чем два. Кроме того, имея в виду интерпретацию, изложенную выше, поле излучения, имеющее ограниченное число, скажем, N-фотонов, не может иметь порядок когерентности больше, чем $2N$.

---

*) Заметим, что эту величину Глаубер называет когерентностью N-го порядка.

**) Другое обобщенное определение когерентности см.: J. Peřina, Phys. Letts. 14 (1), 34 (1965). (*Прим. ред.*)

Опять же по аналогии с $|\gamma_{j,j}^{(1,1)}(x_1, x_2)|$ есть искушение рассматривать $|\gamma_{j_1,\ldots,j_{2N}}^{(N,N)}(x_1, \ldots, x_{2N})|$ как степень когерентности $2N$-го порядка. Однако, вообще говоря, эта величина вовсе не ограничена пределами от нуля до единицы, и такая интерпретация представляется неоправданной.

Было выяснено [Глаубер (1963b, 1964)], что условие (4,18) для когерентности $2N$-го порядка не является инвариантом вращения и должно быть заменено на более сильное условие. К настоящему времени показано [Мандель и Вольф (1961a); Паррент (1959a, b)], что соотношение (4,16) для некоторых точек пространства-времени x_1 и x_2 при $j_1 = j_2$ подразумевает факторизацию вида *)

$$\Gamma_{j,j}^{(1,1)}(x_1, x_2) = V_j^*(x_1)\, V_j(x_2). \tag{4,19}$$

По аналогии с (4,19), Глаубер (1963b; 1964) предложил считать условие факторизации

$$\Gamma_{j_1,\ldots,j_{2n}}^{(n,n)}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \prod_{r=1}^{n} V_{j_r}^*(x_r) \prod_{r=n+1}^{2n} V_{j_r}(x_r) \qquad \text{для всех } n \leqslant N \tag{4,20}$$

в качестве условия когерентности $2N$-го порядка. Очевидно, что выполнение (4,20) подразумевает выполнение (4,18) и что, вообще говоря, соблюдения столь сильного условия трудно ожидать, кроме как в ограниченной области пространства-времени.

Тем не менее легко показать, что, по крайней мере в принципе, существуют поля излучения, которые когерентны во всех порядках и во всех точках пространства-времени [ср. Глаубер (1963b; 1964)]. Рассмотрим поле, которое является собственным состоянием $|\{v'_{k,s}\}\rangle$ оператора уничтожения $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющего условию (3,46). Тогда матрица плотности в представлении Сударшана (4,9) будет иметь вид

$$\Phi(\{v_{k,s}\}) = \delta(\{v_{k,s}\} - \{v'_{k,s}\}); \tag{4,21}$$

если это выражение подставить в (4,11), обычная схема рассуждений приведет к

$$\Gamma_{j_1,\ldots,j_N,j_{N+1},\ldots,j_{N+M}}^{(N,M)}(x_1, \ldots, x_N; x_{N+1}, \ldots, x_{N+M}) = \\ = \prod_{r=1}^{N} V_{j_r}^*(x_r) \prod_{r=N+1}^{N+M} V_{j_r}(x_r). \tag{4,22}$$

Следовательно, поле в состоянии $|\{v'_{k,s}\}\rangle$ когерентно во всех порядках и во всех точках пространства-времени. Однако, как можно показать, единственными состояниями такого рода, представляющими стационарное поле, являются состояния вакуума.

Хотя до сих пор речь шла об определениях когерентности четных порядков, совершенно ясно, что свойство факторизации (4,22) и нормированная корреляционная функция вида $\gamma_{j_1,\ldots,j_{N+M}}^{(N,M)}(x_1, \ldots, x_{N+M})$ могут с таким же успехом определять когерентность нечетного порядка или, в общем случае, порядка $N + M$, где N и M — произвольные неотрицательные числа. Такое описание может оказаться естественным для обсуждения когерентных свойств оптических гармоник в нелинейной среде [ср. Франкен и Уорд (1963); Бломберген (1963)].

---

*) Условие (4,16) эквивалентно также линейной зависимости между значениями поля в рассматриваемых пространственно-временных точках [Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, М., Физматгиз, 1961, стр. 176]. (*Прим. ред.*)

Корреляционные функции для $N > 2$, $M > 2$ и соответствующие меры когерентности до сих пор практически играли весьма малую роль. Фактически целесообразность всей концепции когерентности высших порядков предстоит еще доказать. Как мы увидим, для оптических полей, возбуждаемых тепловыми равновесными источниками (например, горячими звездами, раскаленными нитями, газовым разрядом и т. д.), корреляции $(1 + 1)$-порядка содержат в себе всю необходимую информацию относительно поля, а полная когерентность порядка выше чем второго вообще невозможна.

§ 4 5. Тепловое излучение света

Поле излучения, возбуждаемое тепловым источником, имеет особенно простой характер, в котором распределение ансамбля комплексных амплитуд поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ гауссовское. Вплоть до самого последнего времени именно такие оптические поля только и представляли интерес.

Гауссовская природа флуктуаций поля обычно доказывается ссылкой на основную предельную теорему статистики, поскольку поле излучения в каждой точке пространства в общем случае состоит из вкладов многочисленных независимых атомных источников. Очень интересная дискуссия вопроса о представлении распределения вероятностей имела место между Лауэ и Эйнштейном в 1915 г. [фон Лауэ (1915a, b); Эйнштейн (1915); см. также Эйнштейн и Хопф (1910)]; строгое исследование вопроса на классической основе было сделано значительно позже [Яноши (1957; 1959); см. также Ван-Циттерий (1934; 1939); Блан-Лапьерр и Дюмонте (1955); Дюмонте (1956a), стр. 173)].

Квантовомеханический вывод статистических свойств поля обычно опирается на теорему Блоха [Блох, 1932] для осцилляторов в термодинамическом равновесии. Ниже, используя представление Сударшана в фазовом пространстве, можно будет без особого труда показать, что когда квантованное поле излучения находится в равновесии при температуре T и поэтому может быть описано с помощью канонического ансамбля, общее распределение вероятности для всех амплитуд Фурье $v_{k,s}$ представляет собой просто произведение гауссовских распределений [ср. Мандель (1963a)]. Общее распределение вероятностей комплексного поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ для любого числа точек пространства-времени в связи с этим также гауссовское, поскольку $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ является линейной комбинацией $v_{k,s}$.

Оператор плотности квантовомеханической системы, находящейся в равновесии при температуре T [ср. Мессиа (1961), стр. 448],—

$$\hat{\varrho} = \frac{\exp(-\hat{H}/kT)}{\mathrm{Tr}\,[\exp(-\hat{H}/kT)]}, \tag{4,23}$$

где $\hat{H}$ — гамильтониан системы, а в сочетании kT k — постоянная Больцмана. Для квантованного свободного электромагнитного поля мы имеем [ср. Мессиа (1961), стр. 430]

$$\hat{H} = \sum_{k,s} \hat{a}^{\dagger}_{k,s}\hat{a}_{k,s} c\hbar \boldsymbol{k}\ ^{*)}, \tag{4,24}$$

если пренебречь нулевой энергией. Для того чтобы перейти к «диагональному» представлению $\hat{\varrho}$ в базисе состояний $|\{v_{k,s}\}\rangle$, нужно подставить (4,24) в (4,23) и использовать условие замкнутости (3,48). Тогда мы получим

$$\hat{\varrho} = \hat{F}/\mathrm{Tr}\,(\hat{F}), \tag{4,25}$$

*) Здесь $\boldsymbol{k}$ — волновое число фотона с импульсом $\hbar\boldsymbol{k}$ и поляризацией s. (*Прим. ред.*)

где

$$\hat{F} = \prod_{k,s} \pi^{-1} \int \exp(-\hat{a}^{\dagger}_{k,s}\hat{a}_{k,s} c\hbar \boldsymbol{k}/kT) \,|\, v_{k,s}\rangle \langle v_{k,s} \,|\, d^2 v_{k,s}. \tag{4,26}$$

Состояния $|\, v_{k,s}\rangle$ легко могут быть представлены через собственные состояния $|\, n_{k,s}\rangle$ операторов числа частиц $\hat{a}^{\dagger}_{k,s}\hat{a}_{k,s}$

$$\hat{a}^{\dagger}_{k,s}\hat{a}_{k,s} \,|\, n_{k,s}\rangle = n_{k,s} \,|\, n_{k,s}\rangle \tag{4,27}$$

в виде [ср. Клаудер (1960), стр. 125]

$$|\, v_{k,s}\rangle = \sum_{n_{k,s}} \exp(-|\, v_{k,s}|^2/2) \{v_{k,s}^{n_{k,s}}/[(n_{k,s})!]^{1/2}\} \,|\, n_{k,s}\rangle. \tag{4,28}$$

Если ввести (4,28) в выражение (4,26) и использовать уравнение (4,27) для собственных значений, мы получим

$$\hat{F} = \prod_{k,s} \pi^{-1} \int \sum_{n_{k,s}} \sum_{m_{k,s}} \exp(-n_{k,s} c\hbar \boldsymbol{k}/kT) \exp(-|\, v_{k,s}|^2) \times$$

$$\times \frac{v_{k,s}^{n_{k,s}} v_{k,s}^{*m_{k,s}}}{(n_{k,s}!\, m_{k,s}!)^{1/2}} \,|\, n_{k,s}\rangle \langle m_{k,s} \,|\, d^2 v_{k,s}. \tag{4,29}$$

Сделав подстановку $v_{k,s} = r_{k,s} \exp(i\vartheta_{k,s})$ и интегрируя по $\vartheta_{k,s}$, мы сразу же обнаруживаем, что подынтегральные выражения в (4,29) обращаются в нуль, за исключением того случая, когда $n_{k,s} = m_{k,s}$. С помощью подстановки $v_{k,s} \exp\left(-\frac{1}{2} c\hbar \boldsymbol{k}/kT\right) = u_{k,s}$ и выражений (4,29) и (4,25) можно представить $\hat{\varrho}$ в следующей форме:

$$\hat{\varrho} = \frac{\prod_{k,s} \pi^{-1} \int \exp\{-|\, u_{k,s}|^2 [\exp(c\hbar \boldsymbol{k}/kT) - 1]\} \,|\, u_{k,s}\rangle \langle u_{k,s} \,|\, d^2 u_{k,s}}{\prod_{k,s} \pi^{-1} \int \exp[-|\, u_{k,s}|^2 (\exp(c\hbar \boldsymbol{k}/kT) - 1)]\, d^2 u_{k,s}} =$$

$$= \prod_{k,s} \frac{\exp(c\hbar \boldsymbol{k}/kT) - 1}{\pi} \int \exp\{-|\, u_{k,s}|^2 [\exp(c\hbar \boldsymbol{k}/kT - 1]\} \,|\, u_{k,s}\rangle \langle u_{k,s} \,|\, d^2 u_{k,s}, \tag{4,30}$$

которая по своему виду совпадает с (4,9). Отсюда следует, что совместная плотность вероятностей для совокупности $\{v_{k,s}\}$ может быть представлена в виде

$$\Phi(\{v_{k,s}\}) = \prod_{k,s} \frac{1}{\pi} \langle n_{k,s}\rangle \exp[-|\, v_{k,s}|^2/\langle n_{k,s}\rangle], \tag{4,31}$$

где $\langle n_{k,s}\rangle$ — хорошо известные математические ожидания операторов чисел частиц $\hat{a}^{\dagger}_{k,s}\hat{a}_{k,s}$ при тепловом равновесии [Хуанг (1963), стр. 255; см. также Кано (1964b)]

$$\langle n_{k,s}\rangle = [\exp(c\hbar \boldsymbol{k}/kT) - 1]^{-1}. \tag{4,32}$$

Так как распределения вероятностей всех $v_{k,s}$ представляют собой независимые гауссовские распределения с нулевыми средними значениями, совершенно очевидно из (3,47), что результирующая комплексная волновая амплитуда $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ также будет подчиняться гауссовскому распределению с нулевым средним и дисперсией [ср. Кенни и Кипинг (1954), стр. 169]:

$$\langle \mathbf{V}^*(\mathbf{r}, t)\, \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)\rangle = \langle I(\mathbf{r}, t)\rangle = (hc/L^3) \sum_{k,s} (\langle n_k\rangle/\boldsymbol{k}). \tag{4,33}$$

Таким образом, если X и Y обозначают действительную и мнимую части компоненты $V_j(\mathbf{r}, t)$, общее распределение вероятностей будет

$$p(X, Y) = \frac{1}{\pi} \langle I_j \rangle \exp[-(X^2+Y^2)/\langle I_j \rangle], \tag{4,34}$$

где учтено, что $\langle XY \rangle = 0$, $\langle X^2 \rangle = \langle Y^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle I_j \rangle$ [см. примечание к формуле (3,17)].

Хотя все утверждения, сделанные выше, строго говоря, относятся только к излучению черного тела, сразу видно, что они остаются в силе и в том случае, если спектр видоизменяется произвольным образом с помощью линейных фильтров. Это происходит потому, что гауссовские случайные процессы после применения к ним линейных преобразований по-прежнему остаются гауссовскими [ср. Давенпорт и Рут (1958), стр. 155]. Вместе с тем ясно, что тепловое излучение в общем случае можно отличить от светового излучения нетепловых источников, типа оптических лазеров, по флуктуационным свойствам, даже если соответствующие спектральные и угловые распределения совпадают.

Важнейшей особенностью гауссовских процессов является то, что они полностью определяются их первыми и вторыми моментами. Для поля излучения, создаваемого тепловыми источниками, все корреляции высших порядков типа (4,2) сводятся к произведениям корреляций второго порядка [Рид (1962); Мета (1965b), стр. 398]

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^{(N,N)}_{j_1,\ldots,j_N,j_{N+1},\ldots,j_{2N}}(x_1,\ldots,x_N;x_{N+1},\ldots,x_{2N}) \\ &\quad = \sum_{\pi} \Gamma^{(1,1)}_{j_1,j_{N+1}}(x_1,x_{N+1}) \ldots \Gamma^{(1,1)}_{j_N,j_{2N}}(x_N,x_{2N}), \\ &\Gamma^{(N,M)} = 0, \qquad \text{если } N \neq M, \end{aligned}\right\} \tag{4,35}$$

где значком $\sum_{\pi}$ обозначена сумма по всем $N!$ возможным перестановкам индексов от 1 до N. Это обстоятельство, вне всякого сомнения, объясняет то внимание, которое уделялось корреляциям второго порядка в прошлом. В частности, рассчитывались корреляции поля излучения черного тела, о чем будет идти речь в § 5.7.

Из (4,35) можно видеть, что когда все координаты x_i и индексы поляризации j_i совпадают,

$$\Gamma^{(N,N)}_{j,\ldots,j}(x,\ldots,x) = N!\,[\Gamma^{(1,1)}_{j,j}(x,x)]^N = N!\,\langle I_j(x)\rangle^N, \tag{4,36}$$

где $\langle I_j(x)\rangle$ представляет собой среднюю интенсивность отдельной компоненты поляризации. Отсюда следует, что условия (4,18) и (4,20) полной когерентности могут удовлетворяться только в случае $N = 1$ [ср. Глаубер (1963b; 1964)], так что представление о полной когерентности высших порядков оказывается неприменимым к тепловому излучению.

Описание поля теплового излучения в фазовом пространстве через величины $\Phi(\{v_{k,s}\})$ является одним из самых распространенных; вместе с тем оно весьма просто связано с альтернативным описанием через числа заполнения $n_{k,s}$ для различных мод $\mathbf{k}$, s. Это легко можно понять, преобразуя матрицу плотности $\Phi(\{v_{k,s}\})$, определяемую соотношением (4,31), с помощью общего преобразования [Сударшан (1963a, b)] к базису собственных состояний энергии $|\{n_{k,s}\}\rangle$:

$$\varrho(\{n_{k,s}\}, \{n'_{k,s}\}) = \prod_{k,s} \int \Phi(\{v_{k,s}\}) \exp(-|v_{k,s}|^2) \frac{v_{k,s}^{n_{k,s}} v_{k,s}^{*n'_{k,s}}}{(n_{k,s}!\, n'_{k,s}!)^{1/2}} d^2 v_{k,s}, \tag{4,37}$$

причем мы получим

$$\varrho(\{n_{k,s}\}, \{n'_{k,s}\}) = \prod_{k,s} [(1+\langle n_{k,s}\rangle)(1+1/\langle n_{k,s}\rangle)^{n_{k,s}}]^{-1} \delta_{n_{k,s}, n'_{k,s}}. \quad (4,38)$$

Матрица плотности оказывается диагональной и соответствует совокупности статистически независимых распределений Бозе — Эйнштейна [ср. Морзе (1962), стр. 218] для чисел заполнения различных мод [см. также Холидей (1964); Кано (1964b)].

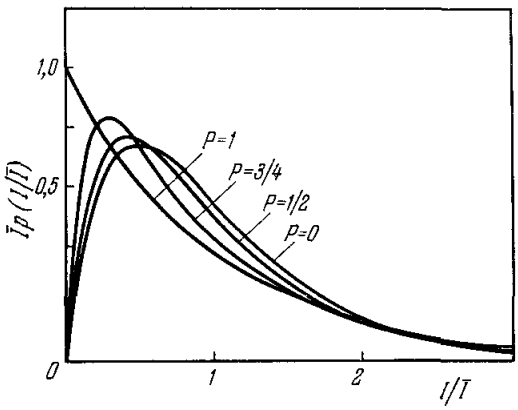

Рис. 4. Некоторые примеры плотностей вероятностей $p(I)$ [уравнение (4,41)] для различных значений степени поляризации P [по Манделю (1963c)].

Практически, в оптическом поле непосредственно ни $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, ни $n_{k,s}$ измерены быть не могут. Однако полные мгновенные интенсивности $\mathbf{V}^*(\mathbf{r}, t)\,\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = I(\mathbf{r}, t)$ или интенсивности $V_j^*(\mathbf{r}, t)\,V_j(\mathbf{r}, t) = I_j(\mathbf{r}, t)$, связанные с отдельной j-й компонентой поляризации, вполне доступны для измерения с помощью фотоэлектрического приемника. Процесс регистрации более подробно будет рассмотрен специально в § 6.1. Здесь же нам просто хотелось бы указать формы распределений $p(I_j)$ и $p(I)$ для гауссовской переменной $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$.

Согласно (4,34) величины X и Y представляют собой статистически независимые гауссовские переменные с нулевыми средними значениями и дисперсиями $\frac{1}{2}\langle I_j\rangle$. Далее, из хорошо известных свойств χ^2-распределения в статистике [Кенни и Кипинг (1954), стр. 98] вытекает, что

$$I_j = X^2 + Y^2$$

подчиняется экспоненциальному распределению

$$p(I_j) = (1/\langle I_j\rangle)\exp(-I_j/\langle I_j\rangle). \quad (4,39)$$

Распределение полной мгновенной интенсивности I, вообще говоря, зависит от степени поляризации света P $(0 \leqslant P < 1)$; эта величина подробнее будет рассмотрена в § 5.6. В частном случае, когда две взаимно перпендикулярно поляризованные компоненты $V_1(\mathbf{r}, t)$ и $V_2(\mathbf{r}, t)$ подчиняются условию взаимной спектральной чистоты (см. § 5.5), получить выражение для $p(I)$ очень несложно, потому что средние интенсивности $\langle I_1\rangle$ и $\langle I_2\rangle$ обеих компонент можно представить в виде [ср. соотношение (5,58)]

$$\begin{aligned} \langle I_1\rangle &= \frac{1}{2}(1+P)\langle I\rangle, \\ \langle I_2\rangle &= \frac{1}{2}(1-P)\langle I\rangle \end{aligned} \quad (4,40)$$

и как $p_1(I_1)$, так и $p_2(I_2)$ имеют форму (4,39). Поэтому результирующая интенсивность I удовлетворяет распределению [ср. Мандель (1963c)]

$$p(I) = \int_0^\infty p_1(I_1)\,p_2(I-I_1)\,dI_1 = \\ = \frac{1}{P\langle I\rangle}\left\{\exp\left[-\frac{2I}{\langle I\rangle(1+P)}\right] - \exp\left[-\frac{2I}{\langle I\rangle(1-P)}\right]\right\}. \quad (4,41)$$

Несколько примеров распределения $p(I)$ для различных значений P приведены на рис. 4. Из рисунка видно, что все кривые проходят через начало координат, за исключением кривой для $P = 1$, соответствующей полностью поляризованному свету. Это объясняется тем, что в пучке полностью поляризованного света ансамбль спиновых состояний вырождается до одного-единственного члена. Очень близкое к (4,41) выражение было получено [Блан-Лапьерр (1956)] для флуктуации огибающей гауссовского случайного процесса [см. также Гурвитц (1945)]. Наконец, из (4,41) можно получить, что флуктуации интенсивности удовлетворяют соотношению

$$\langle(\Delta I)^2\rangle = \frac{1}{2}(1+P^2)\langle I\rangle, \tag{4,42}$$

которое определяет верхнюю и нижнюю границы для $\langle(\Delta I)^2\rangle$.

§ 4.6. Нетепловое излучение света

Наиболее важным примером нетеплового, или негауссовского, света является световое излучение оптического мазера, которое также и во многих других отношениях существенно отличается от типично теплового излучения. Так, например, параметр вырождения δ (см. § 2.3) (или среднее число заполнения на единичную ячейку фазового пространства) для светового излучения мазера может оказаться очень большим ($\delta \gg 1$), тогда как для теплового излучения света этот параметр обычно очень мал (характерные цифры приведены в § 2.3). Нетепловой характер излучения лазеров был очень быстро осознан многими авторами [Голей (1961); Смит и Вильямс (1962); Мандель (1962a, b); Глаубер (1963a); Мандель и Вольф (1963a, b); см. также Форрестер (1961a, b); Коркоран и Пао (1962); Болвин, Алкемаде и Бошлоо (1963)] и к настоящему времени имеет надежные экспериментальные подтверждения [Белиссио, Фрид и Хауз (1964); Бейли и Сандерс (1964); Армстронг и Смит (1964; 1965); Фрид и Хауз (1965)].

Наиболее существенное отличие лазера от теплового источника состоит в сильной связи, которая существует между источником и создаваемым им полем; эта связь приводит к появлению одного (или, возможно, нескольких) в высшей степени предпочтительного (или предпочтительных) атомного перехода (переходов). Излучение создается главным образом за счет вынужденного излучения. Это излучение может находиться в тепловом равновесии с источником, однако сильная связь исключает возможность подстановки «свободного» гамильтониана (4,24) в оператор плотности (4,23). Описание связанной системы источника и поля в мазере было предложено многими авторами [Вебер (1957; 1959); Сеницкий (1958; 1959; 1960; 1961; 1961b; 1962); Луссел, Ярив и Зигман (1961); Швингер (1961); Маккумбер (1963); Гордон, Уокер и Луссел (1963); Лемб (1964); Швабль и Тирринг (1964); Вагнер и Хеллварт (1964)]. Мы не станем вдаваться в подробный анализ, включающий решение уравнений движения связанной системы, а отметим только, что в случае колебаний идеального лазера на единственной $\mathbf{k}',s'$-моде, поле излучения весьма близко к тому, что является «классическим» состоянием с вполне определенной комплексной амплитудой $v'_{k',s'}$. Повод для рассмотрения этого собственного состояния поля лазера недавно обсуждался Паулем, Бруннером и Рихтером (1963), Иорданом и Гильметти (1964), Пикаром и Вилисом (1965) и Хакеном (1964) [см. также Мандель (1964c) и Кано (1964a)]. Поскольку фаза $v'_{k',s'}$ в общем случае будет случайной, можно записать

аппроксимацию «диагональной матрицы плотности» поля в виде

$$\Phi(\{v_{k,s}\}) = (2\pi|v'_{k',s'}|)^{-1}\,\delta(|v_{k,s}| - |v'_{k',s'}|) \prod_{k,\,s\neq k',\,s'} (2\pi|v_{k,s}|)^{-1}\,\delta(|v_{k,s}|). \quad (4,43)$$

Хотя выражение (4,43) не представляет чистого состояния, легко показать, что поле в таком состоянии, тем не менее, когерентно во всех четных порядках вида $N+N$ в смысле условия когерентности (4,20) [ср. также Паул (1963)].

Состояние, описываемое выражением (4,43), позволяет получить особенно простую формулу для распределения вероятности $p(n)$ числа фотонов, отсчитываемых в объеме δV в данный момент времени (или числа фотонов, падающих на поверхность в заданный промежуток времени). Чтобы получить эту формулу, достаточно подставить (4,43) в (4,15). Тогда мы получим

$$p(n) = \frac{|v'_{k',s'}|^{2n}}{n!} \exp[-|v'_{k',s'}|^2]; \quad (4,43а)$$

это выражение представляет собой пуассоновское распределение по n. Последние фотоэлектрические измерения флуктуаций лазерного пучка на одной моде, по-видимому, находятся в согласии с этим распределением [Белиссио, Фрид и Хауз (1963); Бейли и Сандерс (1964); Армстронг и Смит (1964; 1965); однако следует сравнить с этими результатами результаты Фрида и Хауза (1965)], хотя до сих пор произведена проверка только вторых моментов n.

Но если рассматривать распределение (4,43а) как подтвержденное эмпирически, можно показать, что существует следующее взаимоотношение между корреляциями поля лазера на одной моде [Мандель (1965)]:

$$\langle \hat{A}_j^{(-)m}(\mathbf{r}, t)\, \hat{A}_j^{(+)m}(\mathbf{r}, t)\rangle = \langle \hat{A}_j^{(-)}(\mathbf{r}, t)\, \hat{A}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t)\rangle^m, \quad (4,43б)$$

где угловые скобки обозначают квантовомеханическое ожидание. Оператор плотности поля будет оператором, удовлетворяющим (4,43б), но, вообще говоря, может иметь вид, значительно отличающийся от (4,43).

Конечно, практически свет оптического мазера содержит в себе как долю спонтанного излучения, так и излучение от нескольких мод, которые к тому же могут быть взаимосвязанными [ср. Паананен, Танг и Штатц (1963); Лемб (1964); Хакен и Зауерман (1963); Деланг и Боуис (1963), Липсет и Мандель (1963; 1964а); Хауз и Маллен (1962; 1963); Беллисио, Фрид и Хауз (1964)]. Очевидно, что практически матрица плотности может быть значительно сложнее, чем (4,43). Действительно, когда присутствует большое число независимых мод, матрица плотности снова может приближаться *) к гауссовской форме (4,31).

Несмотря на это, представляет некоторый интерес остановиться на следствиях выражения (4,43) для идеального лазерного пучка на одной моде. Пусть $V_j(\mathbf{r}, t)$ — некоторая определенная компонента поляризации $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ и

$$\mathrm{Re}\,[V_j(\mathbf{r}, t)] = X, \qquad \mathrm{Im}\,[V_j(\mathbf{r}, t)] = Y,$$

*) Подробное обсуждение свойств лазерного поля и, в частности, вопроса о ширине спектральной линии, недавно было сделано Лембом [Quantum Optics and Electronics, Les Houches, 1964, edited by C. de Witt, A. Blandin and C. Cohen-Tannoudji (Gordon and Breach Publishers, New York, 1965), стр. 377. См. также Glauber, ibid., стр. 165].

где Re и Im обозначают соответственно действительную и мнимую части; тогда подобно (4,34) мы получим из (4,43)

$$p(X, Y) = \frac{1}{2\pi (X^2+Y^2)^{1/2}} \delta \{(X^2+Y^2)^{1/2} - \langle I_j \rangle^{1/2}\}, \tag{4,44}$$

где

$$\langle I_j \rangle^{1/2} = | v_{k', s'} | \, | (\varepsilon_{k', s'})_j | \, (hc/k'L^3)^{1/2},$$

а из свойств δ-функции Дирака следует, что

$$p(X, Y) = \frac{1}{\pi} \delta (X^2+Y^2 - \langle I_j \rangle). \tag{4,44а}$$

Сразу видно, что X и Y уже не являются больше статистически независимыми, хотя нетрудно показать, что $\langle X, Y \rangle$ обращается в нуль (ср. примечание к (3,17)). Интегрируя по одной из переменных, получим

$$p(X) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \delta (X^2 + Y^2 - \langle I_j \rangle) \, dY =$$

$$= \begin{cases} [\pi (\langle I_j \rangle - X^2)^{1/2}]^{-1} & \text{при } |X| < \langle I_j \rangle^{1/2}, \\ 0 & \text{при } |X| > \langle I_j \rangle^{1/2}. \end{cases} \tag{4,45}$$

В отличие от гауссовского распределения, это распределение вероятности при $X = 0$ имеет *минимум*. Сравнение двух этих распределений сделано на рис. 5; из рисунка видно, что они соответствуют хорошо известным координатным распределениям для гармонического осциллятора в основном состоянии и в предельном случае очень больших возбуждений. Этот результат наводит на мысль о том, что поле лазера можно представить как набор сильно возбужденных квантовых осцилляторов. Величина $\langle I_j \rangle$ представляет собой, конечно, математическое ожидание интенсивности света, связанной с j-й компонентой. В идеальном случае, описываемом (4,43), величина I_j вообще не отклоняется от $\langle I_j \rangle$

$$p(I_j) = \delta (I_j - \langle I_j \rangle). \tag{4,46}$$

Легко сообразить, что эти простые распределения для поля идеального лазера, работающего на одной моде, значительно видоизменяются при появлении вклада двух или более мод. Предположим, что мы имеем дело с полем, представляющим собой суперпозицию n независимых мод лазера, имеющих одно и то же направление распространения и одну и ту же поляризацию. Если $p(X)$ описывает распределение действительной части результирующей комплексной амплитуды, а $p_1(X_1), p_2(X_2), \ldots, p_n(X_n)$ описывают распределения отдельных компонент, то очевидно, что

$$p(X) = \int_{-\langle I_1 \rangle^{1/2}}^{+\langle I_1 \rangle^{1/2}} \ldots \int_{-\langle I_n \rangle^{1/2}}^{+\langle I_n \rangle^{1/2}} p_1(X_1) \, p_2(X_2) \ldots p_n(X_n) \times$$
$$\times \delta (X - X_1 - X_2 - \ldots - X_n) \, dX_1 \, dX_2 \ldots dX_n. \tag{4,46а}$$

В частном случае поля, образованного двумя модами, имеющими равные средние интенсивности $\frac{1}{2} \langle I \rangle$, из (4,46а) с помощью (4,45) получаем выражение

$$p(X) = \frac{1}{\pi^2} \int_{X - \left(\frac{1}{2}\langle I \rangle\right)^{1/2}}^{\left(\frac{1}{2}\langle I \rangle\right)^{1/2}} \frac{dx}{\left[\frac{1}{2}\langle I \rangle - x^2\right]^{1/2} \left[\frac{1}{2}\langle I \rangle - (X-x)^2\right]^{1/2}} \quad \text{при } |X| < (2\langle I \rangle)^{1/2},$$

$$p(X) = 0 \qquad \text{при } |X| > (2\langle I \rangle)^{1/2},$$

которое, как можно показать, выражается через полный эллиптический интеграл первого рода [см., например, Гробнер и Хофрейтер (1950), часть II, стр. 47], а именно:

$$p(X)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{2}{\langle I\rangle}\right)^{1/2}\times$$
$$\times K\left[\left(1-\frac{X^2}{2\langle I\rangle}\right)^{1/2}\right]. \quad (4,46б)$$

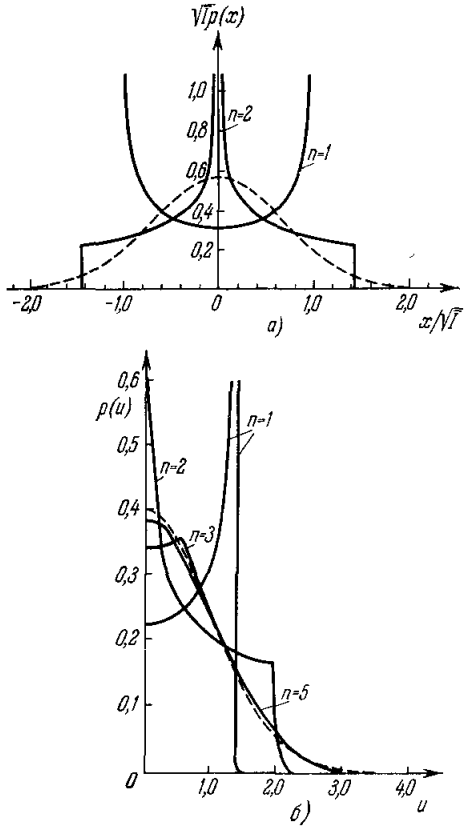

Рис. 5. *а*) Сравнение плотности вероятностей $p(X)$ ($X = \mathrm{Re}\,V(r, t)$) для равновесного излучения (пунктирная линия) и для света идеального мазера с одной ($n = 1$) и двумя ($n = 2$) независимыми модами [по Манделю (1964; 1965)]. *б*) Плотность вероятностей для вещественной части мгновенной комплексной амплитуды, образующейся при наложении n синусоидальных волн на гауссовский шум. Пунктирная кривая изображает плотность вероятностей для одного гауссовского шума [по Ходаре (1964)].

Аналогичный результат был получен также Ходарой (1964) для простой модели. Это распределение также воспроизведено на рис. 5, *а*. Из рисунка видно, что оно значительно отличается от соответствующего распределения для одной моды. С подключением дополнительных независимых мод $p(X)$ довольно быстро стремится к гауссовскому распределению. Ходара (1965) рассчитал кривые распределения действительной части мгновенной комплексной амплитуды, возникающей при суперпозиции нескольких синусоидальных волн, на которые накладывается гауссовский шум. Некоторые из этих кривых приведены на рис. 5, *б*. При отсутствии гауссовского шума эти кривые соответствуют частному виду ситуации, описываемой общим распределением (4,46а).

Как уже подчеркивалось ранее, практически распределения могут значительно отклоняться от приведенных выше простых форм, и в общем случае для полного описания статистических свойств необходимы корреляции высших порядков. В качестве примеров нетеплового излучения света укажем черенковское излучение, создаваемое релятивистским электроном, движущимся в среде [ср. Зоммерфельд (1954), раздел 47], дипольное излучение электрона, исходящее от электронного пучка, движущегося через периодическую структуру, как это имеет место в эффекте Смита — Перселла [Смит и Перселл (1953); Кастлер (1955); Торальдо ди Франсиа (1960); Ишигуро и Тако (1961)]. По-видимому, о статистических свойствах такого излучения известно очень мало.

§ 4.7. Энтропия оптического поля

Для любой физической системы, описываемой ансамблем квантовых состояний, возможно в принципе определить энтропию в соответствии с правилами, установленными Больцманом, Гиббсом и фон Нейманом

[см., например, Ландау и Лифшиц (1958), гл. V]. Неудивительно, что вплоть до недавнего времени интересовались энтропией квантованного поля только для излучения черного тела в условиях теплового равновесия при заданной температуре. Именно изучение энтропии электромагнитного поля привело Планка к введению кванта [Планк (1901a, b), 1959; см. также Клейн (1962)]. К этой проблеме обращался также Эйнштейн (1905).

Позже фон Лауэ и другие авторы прилагали термодинамические соображения к задачам интерференции [фон Лауэ (1906; 1907; 1915c, стр. 405—410] и дифракции [фон Лауэ (1909; 1910); Торальдо ди Франсиа (1948)]. Некоторые смежные вопросы рассматривались Кааном (1952) и Джонсом (1953).

Самое непосредственное отношение к рассматриваемому в этой статье вопросу имеет работа фон Лауэ (1907). Лауэ изучал вопрос о том, каким образом энтропия светового пучка, образованного суперпозицией двух или трех пучков, частично когерентных по отношению друг к другу, зависит от интенсивности отдельных пучков и степени их когерентности.

Совсем недавно Гамо (1964a; раздел 7.2; 1964b) получил некоторые интересные обобщения результатов Лауэ; он показал, как можно рассчитывать энтропию оптического поля, созданного тепловым источником и распространяющегося через оптическую систему. Анализ Гамо опирается на представление частично когерентного поля в виде суммы некоторых взаимно некогерентных элементарных полей, определенных с помощью теоремы отсчетов из теории информации *). Такое представление о частично когерентном поле было впервые введено Габором (1956a, b) и Гамо (1956; 1957a, b; 1958a, b; 1960).

Поскольку обзор результатов Гамо уже есть [Гамо, 1964a], мы ограничимся лишь указанием на то, как можно получить выражение для статистической энтропии оптического поля с помощью представления Сударшана для матрицы плотности. Для этой цели мы вспомним вывод § 4.3 о том, что можно рассматривать пространство собственных значений $\{v_{k,s}\}$ операторов уничтожения $\hat{a}_{k,s}$ для всех $\mathbf{k}$, s в качестве фазового пространства поля. Отсюда вытекает, что «диагональные элементы» $\Phi(\{v_{k,s}\})$ оператора плотности $\hat{\varrho}$ поля, выраженные в представлении Сударшана, где $|\{v_{k,s}\}\rangle$ являются составляющими базиса, образуют распределение поля в фазовом пространстве.

Имея в виду перестановочные соотношения (4,10), которым подчиняются как действительная, так и мнимая части $\hat{a}_{k,s}$, мы сначала разобьем фазовое пространство на ячейки с объемом $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, где n — число возможных $\mathbf{k}$,s-мод поля. Пусть будет N ячеек, которые мы последовательно пронумеруем индексом $j = 1, 2, \ldots, N$. Тогда вероятность обнаружить

*) С развитием статистической теории связи Шенноном (1948) были сделаны попытки рассматривать проблемы оптической передачи и образования изображения с помощью коммуникационных «каналов» Шеннона [см., например, Фелджетт и Линфут (1955); Линфут (1955); О'Нейл и Асакура (1961)]. Такая трактовка, в которой оптическое изображение принимается за сигнал в смысле Шеннона, приводит к выражению для энтропии оптического изображения, но эта «сигнальная» энтропия совершенно отлична от меры энтропии поля, как она понимается в статистической механике или термодинамике [ср. Габор (1950; 1961, стр. 148—152); О'Нейл и Асакура (1961), стр. 301; Гордон (1962)] — «сигнальная» энтропия определяется условиями формирования и восприятия изображения (передаточной функцией оптической системы и шумом приемника), тогда как термодинамическая энтропия характеризует внутреннее состояние поля. (*Прим. ред.*)

систему в состоянии, соответствующем j-й ячейке, равна

$$p_j = \int\limits_{\text{по ячейке } j} \Phi(\{v_{k,s}\})\, d^2\{v_{k,s}\}, \tag{4,47}$$

причем интеграл берется по всему объему j-й ячейки. В отличие от $\Phi(\{v_{k,s}\})\, d^2\{v_{k,s}\}$, вероятность p_j имеет в квантовой механике физический смысл и должна быть неотрицательной. Статистическая или термодинамическая энтропия поля в смешанном состоянии, представленном через $\hat{\varrho}$, дается тогда в виде [Ландау и Лифшиц (1958), стр. 25 и 34]

$$S = -k \sum_{j=1}^{\Lambda} p_j \ln p_j, \tag{4,48}$$

где k — постоянная Больцмана. Энтропия — это мера беспорядка в поле, и она, очевидно, зависит от корреляционных свойств. Как хорошо известно, S достигает максимума, когда все p_j делаются равными. Говоря широко, это означает, что значения $v_{k,s}$ однородным образом (и независимо для различных $\mathbf{k}$, s) распределены по всему возможному интервалу своего изменения, допустимому внешними условиями.

Нетрудно составить грубое интуитивное представление о том, как отражается достижение максимума энтропии на когерентных свойствах поля. Действительно, когда область возможных значений мод $\mathbf{k}$, s и их амплитуд $v_{k,s}$ настолько широка, насколько это вообще возможно, из соотношения (3,47) и хорошо известных свойств преобразования Фурье вытекает, что интервал корреляций между величинами $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ в сопряженной области конфигурационного пространства будет настолько мал, насколько это возможно вообще. Это утверждение справедливо для корреляций как в пространстве, так и во времени, и мы можем несколько грубо говорить об оптическом поле, находящемся в наиболее некогерентном состоянии. Стоит отметить, что интервал корреляций для излучения черного тела имеет порядок лишь средней длины волны $\bar{\lambda}$ в пространстве и порядок, соответствующий среднему периоду $1/\nu$ во времени (см. § 5.7).

С другой стороны, легко показать, что поле, которое полностью когерентно в смысле определения § 4.4, обладает минимумом энтропии. Пусть состояниями поля будут собственные состояния $|\{v'_{k,s}\}\rangle$ оператора уничтожения $\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$. Тогда $\Phi(\{v_{k,s}\})$ примет вид (4,21), а именно $\Phi(\{v_{k,s}\}) = \delta(\{v_{k,s}\} - \{v'_{k,s}\})$, и вероятности, p_j определяемые по (4,47), обращаются в нуль повсюду, за исключением одной ячейки, скажем, $j = l$, заключающей в себе точку $\{v'_{k,s}\}$, для которой $p_l = 1$. Отсюда следует, что энтропия S для когерентного поля обращается в нуль, как это и следовало ожидать.

Кажется довольно естественным ожидать, что когерентное до порядка $2N$ поле будет обладать меньшей энтропией, чем поле, когерентное вплоть до $2M$-го порядка, если $M < N$, и что при заданном порядке когерентности поле с бо́льшим интервалом корреляции в пространстве-времени будет обладать меньшей энтропией. Однако поведение энтропии при различных условиях когерентности (порядка выше второго) до сих пор еще не выяснено.

Хотя наличие единой меры, такой, как энтропия, для всей совокупности соотношений когерентности поля, могло бы быть привлекательным во многих отношениях, общая ценность такой меры достаточно сомнительна. Возможно, что именно поэтому мера энтропии до сих пор не играла сколько-нибудь заметной роли в развитии теории когерентности.

(*Окончание статьи см. в апрельском выпуске УФН*).