1966 г. Февраль *Том 88, вып. 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

538.3

ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Цель данного обзора — ознакомить читателя с классом радиационных эффектов, которые можно объединить общим названием «дифракционное излучение». Этот вид излучения обладает целым рядом специфических особенностей, отличающих его от известных радиационных эффектов, таких, как излучение при неравномерном движении источника поля, излучение Вавилова—Черенкова и переходное излучение.

Вначале обзора приведено краткое описание известных радиационных эффектов и дано определение дифракционного излучения. После этого обсуждается характер поля движущихся источников различного вида. Затем следует краткое изложение математических методов, позволяющих получить точные решения задач о дифракционном излучении. Основное содержание обзора посвящено рассмотрению различных случаев дифракционного излучения.

Излучение движущейся заряженной частицы можно разделить на несколько видов, в зависимости от физических условий, в которых происходит излучение.

Под дифракционным излучением мы будем понимать широкий класс явлений, связанных с излучением источников поля, движущихся равномерно вблизи различного вида оптических неоднородностей, если это излучение не сводится к излучению Вавилова—Черенкова или к переходному излучению.

Для выяснения физической природы дифракционного излучения рассмотрим простой пример. Пусть точечная заряженная частица движется равномерно и прямолинейно в свободном пространстве мимо некоторого идеально проводящего тела, которое в данном случае играет роль оптической неоднородности. Поле заряженной частицы, движущейся равномерно, можно представить в виде суперпозиции плоских волн различных частот. При этом все волны экспоненциально затухают по мере удаления от траектории частицы. Это и соответствует хорошо известному факту отсутствия излучения при равномерном движении частицы. Наличие оптической неоднородности приводит к рассеянию парциальных волн. Теперь уже полное поле определяется суммой собственного поля частицы и рассеянного электромагнитного поля. Если собственное поле в нашем примере разлагается по затухающим гармоникам, то рассеянное поле может содержать и незатухающие волны, что соответствует излучению.

Можно дать и другое объяснение природы дифракционного излучения, не прибегая к разложению поля на плоские волны. При движении заряда мимо идеально проводящего тела на поверхности его индуцируются переменные токи. Эти токи и являются источником дифракционного излучения.

Из сказанного следует, что решение задач о дифракционном излучении встречается с теми же трудностями, что и решение задач о дифракции электромагнитных волн на заданных оптических неоднородностях. Обе задачи тесно связаны между собой. Однако применение приближенных методов, развитых и с успехом используемых в математической теории дифракции, для задач дифракционного излучения сопряжено с трудностями. Действительно, в теории дифракции применение приближенных методов обычно подразумевает наложение жестких ограничений на частоту рассеянного поля, точнее, на отношение характерного размера препятствия к длине волны. Для дифракционного излучения, наоборот, существенно, что источники возбуждают непрерывный спектр частот, причем ширина спектральной области такова, что критерий справедливости того или иного приближения выполняется не во всей области. Поэтому в нашем обзоре мы будем уделять основное внимание точно решаемым задачам дифракционного излучения. Впервые строгое решение задачи этого типа было получено в работе [25]. Математически решение этих задач во многом аналогично решению классических задач дифракции, причем роль падающей электромагнитной волны играет поле движущегося источника. Характер поля движущихся источников мы рассмотрим ниже, в § 2. Для дальнейшего полезно знать некоторые основные свойства известных радиационных эффектов, таких, как излучение неравномерно движущегося заряда, излучение Вавилова — Черенкова и переходное излучение.

а) Излучение при неравномерном движении. Это — электромагнитное излучение, сопровождающее изменение скорости частицы [1]. При равномерном движении частицы в свободном пространстве электромагнитное излучение отсутствует. Если же движение частицы не является равномерным, возникает излучение о характере излучения можно судить по выражению для вектор-потенциала $\mathbf{A}_\omega$ поля частицы на далеких расстояниях от линии ее движения [1]. Пусть закон движения частицы имеет вид $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Тогда

$$\mathbf{A}_\omega = q\,\frac{e^{ikR_0}}{2\pi c R_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{u}(t)\,e^{i[\omega t-\mathbf{kr}(t)]}\,dt, \tag{1,1}$$

где q — заряд частицы, $\mathbf{u}(t)=\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ — ее скорость, R_0 — расстояние от точки наблюдения до траектории. Если источник не точечный, а линейный, то $\mathbf{A}_\omega$ выражается следующим образом:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{q}{c}\sqrt{\frac{i}{2\pi kr}}\,e^{ikr}\int \mathbf{u}(t)\,e^{i[\omega t-\mathbf{kr}(t)]}\,dt, \tag{1,1a}$$

где векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{r}$ — двумерные векторы в плоскости, перпендикулярной к линии источника. Входящий в формулу (1,1) интеграл имеет размерность длины. Мы назовем его длиной формирования излучения или просто длиной формирования. Эта величина характеризует длину пути, на котором частица находится в фазе с излучением. Для равномерно движущейся частицы, например, длина формирования

$$\mathbf{l} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{u}(t)\,e^{i[\omega t-\mathbf{kr}(t)]}\,dt = 2\pi\mathbf{u}\,\delta(\omega-\mathbf{ku}) = 2\pi\frac{\mathbf{u}}{\omega}\,\delta\left(1-\frac{u}{c}\cos\theta\right), \tag{1,2}$$

где $\mathbf{u}$ — скорость частицы, θ — угол между направлением излучения и скоростью. Так как u/c всегда меньше единицы, для равномерно движущейся частицы длина формирования равна нулю.

Рассмотрим выражение для длины формирования в случае мгновенной остановки частицы. Пусть скорость частицы при $t < 0$ равна u, а в момент $t = 0$ частица останавливается, так что при $t > 0$ скорость ее равна нулю; тогда

$$\mathbf{l} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(t)\, e^{i[\omega t - \mathbf{kr}(t)]}\, dt = \mathbf{u} \int_{-\infty}^{0} e^{it(\omega - \mathbf{ku})} dt =$$
$$= 2\pi \mathbf{u} \delta_{+}(\omega - \mathbf{ku}) = \pi \mathbf{u} \delta(\omega - \mathbf{ku}) + \frac{1}{i} \frac{\mathbf{u}}{\omega - \mathbf{ku}}. \qquad (1,3)$$

Член с δ-функцией равен нулю по тем же соображениям, что и в случае равномерного движения заряда. Таким образом, с точностью до несущественного фазового множителя i

$$l = \frac{u}{\omega \left(1 - \frac{u}{c} \cos\theta\right)}. \qquad (1,4)$$

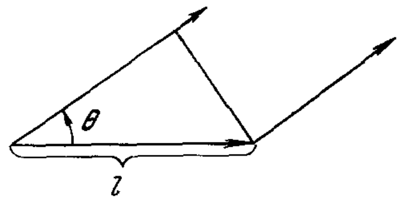

Рис. 1.

Эта же величина может быть получена из простых качественных соображений. Определим путь формирования для излучения частоты ω, распространяющегося под углом θ к скорости частицы, как длину, на которой фаза излученной волны меняется на π. Эту длину легко вычислить с помощью рис. 1. Пусть в начале и в конце отрезка l частица, имеющая скорость u, излучает волну $e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$ частоты ω под углом θ к направлению своего движения.

Разность фаз волн, излученных в начале и в конце отрезка, равна

$$\Delta\varphi = \omega \Delta t - \mathbf{k} \Delta \mathbf{r} = \omega \frac{l}{u} - kl \cos\theta = \frac{\omega l}{u} \left(1 - \frac{u}{c} \cos\theta\right). \qquad (1,5)$$

Приравняв эту величину π, получим для l значение

$$l = \frac{\pi u}{\omega \left(1 - \frac{u}{c} \cos\theta\right)}, \qquad (1,6)$$

близкое к (1,4). Этот простой качественный вывод принадлежит И. М. Франку.

Приведем еще выражение для длины формирования излучения в случае, когда скорость заряженной частицы меняется по величине скачком. Пусть скорость заряженной частицы при $t < 0$ равна u_1, а при $t > 0$ равна u_2. Тогда, опуская снова i, получим

$$l = \frac{u_1}{\omega - \mathbf{ku}_1} - \frac{u_2}{\omega - \mathbf{ku}_2} = \frac{u_1}{\omega \left(1 - \frac{u_1}{c} \cos\theta\right)} - \frac{u_2}{\omega \left(1 - \frac{u_2}{c} \cos\theta\right)}. \qquad (1,7)$$

В этом случае путь формирования равен разности путей формирования, отвечающих мгновенной остановке заряда. Отметим, что, говоря о мгновенном изменении скорости частицы, мы имеем в виду, что скорость меняется в течение конечного промежутка времени Δt, и рассматриваем частоты излучения, малые в сравнении с $1/\Delta t$. Используя введенное нами понятие длины формирования, выражение (1,1) для поля излучения частицы, движущейся по произвольному закону, можно переписать в виде

$$\mathbf{A}_{\omega} = q \frac{e^{ikR_0}}{2\pi c R_0} \mathbf{l}. \qquad (1,8)$$

Энергия, излученная движущимся зарядом в интервал углов $d\theta\, d\varphi$ и в интервал частот $d\omega$, определяется формулой

$$dW_{\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{4\pi^2 c^2} \,|\, l(\omega, \theta) \,|^2 \sin^3\theta \, d\theta \, d\varphi \, d\omega. \qquad (1,9)$$

б) Излучение Вавилова — Черенкова. Источником этого излучения является заряженная частица, движущаяся равномерно. Как мы видим, в свободном пространстве равномерно движущаяся заряженная частица не излучает (длина формирования для этого случая равна нулю). Однако, как видно из формулы (1,2), в случае, когда

$$\cos\theta = \frac{c}{u}, \tag{1,10}$$

длина формирования обращается в бесконечность. Это означает, что на всем своем пути частица находится в фазе со своим излучением. В свободном пространстве равенство (1,10) не может быть выполнено, так как всегда $u < c$. Однако если частица движется в преломляющей среде, скорость света в пустоте следует заменить на фазовую скорость света в среде c/n; тогда в случае, если

$$\cos\theta = \frac{c}{nu}, \tag{1,11}$$

путь формирования обращается в бесконечность. Это означает, что частица излучает равномерно на всем пути. Излучение имеет характерную направленность, определяемую оптическими свойствами среды и скоростью частицы (см. формулу (1,11)). Обязательным условием излучения является требование, чтобы скорость частицы превосходила фазовую скорость света в среде.

Если диэлектрическая постоянная среды равна $\varepsilon(\omega)$, а скорость частицы в среде u, то потери энергии на излучение Вавилова — Черенкова определяются формулой Тамма — Франка [2]

$$\frac{dW}{dz} = \frac{q^2}{c^2}\int\left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon(\omega)\,u^2}\right)\omega\,d\omega, \tag{1,12}$$

где область интегрирования включает частоты, для которых выполнено условие излучения

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}\,u} < 1. \tag{1,13}$$

в) Переходное излучение. Источником переходного излучения, как и излучения Вавилова — Черенкова, является равномерно движущаяся заряженная частица. При этом скорость ее движения может быть и меньше фазовой скорости света в среде, через которую частица проходит. Для переходного излучения существенным является изменение оптических свойств среды вдоль траектории частицы. Простейший и в то же время наиболее принципиально важный пример переходного излучения был впервые рассмотрен В. Л. Гинзбургом и И. М. Франком [3]. Они рассмотрели равномерно движущуюся заряженную частицу, пересекающую по нормали плоскую границу раздела двух диэлектрических сред с постоянными $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$. Было определено поле и потери энергии заряда на излучение назад (в ту среду, в которой заряд двигался первоначально). В дальнейшем Г. М. Гарибян [4] вычислил потери энергии на переходное излучение вперед и показал, что они линейно растут с энергией. Мы приведем здесь формулу для энергии переходного излучения под углом θ к скорости частицы для частоты ω. При этом мы ограничимся случаем излучения вперед. Пусть частица, двигаясь равномерно, выходит из среды с диэлектрической постоянной $\varepsilon(\omega)$ в вакуум. Тогда энергия переходного излучения в вакууме под углом θ к скорости частицы имеет вид

$$W = \frac{2q^2\beta^2}{\pi c}\,\frac{\sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}\int_0^\infty \frac{(\varepsilon-1)\left(1-\beta^2-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta}\right)}{\left(\varepsilon\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta}\right)\left(1-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta}\right)}\,d\omega; \tag{1,14}$$

здесь через β обозначено отношение u/c. Эта формула описывает не только собственно переходное излучение, но и излучение Вавилова — Черенкова (если оно есть), испускаемое частицей в среде и выходящее в вакуум после преломления на границе.

Поляризация переходного излучения (в случае нормального падения заряда на границу раздела) сходна с поляризацией излучения Вавилова — Черенкова. В обоих случаях электрический вектор излучения лежит в плоскости, содержащей траекторию частицы.

Качественные особенности переходного излучения можно объяснить наглядным образом, следуя И. М. Франку. Для этого перепишем несколько иначе выражение (1,7) для длины формирования излучения в случае скачка скорости:

$$l = \frac{c}{\omega}\left(\frac{\frac{u_1}{c}}{1-\frac{u_1}{c}\cos\theta} - \frac{\frac{u_2}{c}}{1-\frac{u_2}{c}\cos\theta}\right); \tag{1,15}$$

из этого выражения видно, что величина l, а значит, и интенсивность излучения определяются изменением параметра u/c при движении частицы. Формула (1,15) справедлива при движении частицы в пустоте. Если частица движется в материальной среде с диэлектрической постоянной $\varepsilon(\omega)$, вместо параметра u/c следует рассматривать параметр $u\sqrt{\varepsilon}/c$. Величина $u\sqrt{\varepsilon}/c$ может меняться и в том случае, если скорость частицы остается неизменной, а меняются оптические свойства среды на пути частицы. Таким образом, параметр $u\sqrt{\varepsilon}/c$, определяющий излучение, может меняться как за счет изменения скорости частицы u, так и за счет изменения диэлектрической постоянной среды ε. Это грубое рассмотрение показывает, что излучение, возникающее при неравномерном движении заряженной частицы в оптически однородной среде, аналогично излучению, которое возникает при равномерном движении частицы, но в оптически неоднородной среде. В рассмотренном выше случае переходного излучения, при вылете частицы из среды в вакуум параметр, о котором идет речь, меняется от значения $u\sqrt{\varepsilon}/c$ в среде до величины u/c в вакууме. В согласии со сказанным, рассматриваемое переходное излучение аналогично излучению движущейся в пустом пространстве частицы, скорость которой меняется от $u\sqrt{\varepsilon}$ до u. Путь формирования в этом случае равен

$$l=\frac{u}{i\omega}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\frac{u}{c}\sqrt{\varepsilon}\cos\theta}-\frac{1}{1-\frac{u}{c}\cos\theta}\right) \tag{1,16}$$

Подставив это значение l в формулу (1,9), получим для энергии излучения

$$dW=\frac{q^2u^2}{4\pi^2c^2}\left[\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\left(1-\frac{u}{c}\sqrt{\varepsilon}\cos\theta\right)\left(1-\frac{u}{c}\cos\theta\right)}\right]^2\sin^3\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\omega. \tag{1,17}$$

Это выражение оказывается в хорошем согласии с тем, которое получается из точной формулы (1,14) в предельном случае больших энергий частицы $u\sim c$, больших частот и малых углов излучения. При перечисленных условиях можно не учитывать отражения и преломления излученного света на границе раздела, что упрощает рассмотрение. При релятивистских скоростях частицы переходное излучение вперед может содержать весьма высокие частоты. Чтобы определить верхнюю границу спектра переходного излучения, воспользуемся асимптотическим выражением для диэлектрической постоянной ε при больших частотах

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2},\qquad \omega_0^2=\frac{4\pi ne^2}{m}. \tag{1,18}$$

Подставив это выражение для $\varepsilon(\omega)$ в формулу (1,17), получим, что спектр переходного излучения вперед простирается до частот

$$\omega_{\text{пред}}\approx\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{1,19}$$

а потом быстро спадает. Поэтому полные потери на переходное излучение в релятивистском случае пропорциональны предельной частоте $\omega_{\text{пред}}$ [4]:

$$W=\frac{e^2}{3c}\,\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1,20}$$

Из формулы (1,20) видно также, что в ультрарелятивистском случае потери энергии на излучение пропорциональны энергии частицы.

Отметим здесь одну интересную особенность переходного излучения. Из формулы (1,19) видно, что предельная частота в спектре переходного излучения растет пропорционально энергии частицы и при достаточно больших энергиях может попасть, например, в область жесткого рентгеновского или жесткого γ-излучения. Казалось бы, в этом случае классическое рассмотрение становится неприменимым. Однако, как видно из формулы (1,16), длина формирования излучения также растет с энергией частицы, и при этом пропорционально квадрату энергии. Таким образом, с ростом энергии частицы мы приходим к парадоксальному положению, когда излучение имеет очень малую длину волны (меньше межатомных расстояний), но формируется на очень больших, макроскопических, отрезках пути. Это говорит о справедливости классического подхода.

§ 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩИХСЯ ИСТОЧНИКОВ

Для дальнейшего нам понадобятся выражения для поля источника, равномерно движущегося в свободном пространстве или в однородной преломляющей среде. Мы ограничимся рассмотрением источников простейшего вида — линейных источников (заряженная нить и нить с током) и точечного заряда.

Электромагнитное поле в свободном пространстве удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\\&\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\\&\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\varrho,\\&\operatorname{div}\mathbf{H}=0.\end{aligned}\right\}\tag{2,1}$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, ϱ и $\mathbf{j}$ — плотность заряда и плотность тока, создаваемые источником.

Обычно от системы уравнений Максвелла (2,1) совершают переход к уравнениям для скалярного потенциала φ и векторного потенциала $\mathbf{A}$, через которые поля выражаются по известным формулам

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\\&\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}.\end{aligned}\tag{2,2}$$

Уравнения для потенциалов имеют вид

$$\begin{aligned}&\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\\&\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=-4\pi\varrho,\end{aligned}\tag{2,3}$$

причем потенциалы $\mathbf{A}$ и φ связаны дополнительным условием Лоренца

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0.\tag{2,4}$$

Для описания электромагнитного поля незаряженных токонесущих источников (например, нейтральной нити с током), когда можно положить $\varphi=0$, удобно воспользоваться вектор-потенциалом $\mathbf{A}$. В других случаях, когда для описания полного поля необходимо знать как векторный, так и скалярный потенциал, причем обе эти функции должны удовлетворять граничным условиям рассматриваемой задачи, оказывается более удобным определять поле с помощью вектора Герца $\mathbf{\Pi}$.

Будем описывать источники поля функцией $\mathscr{P}$, через которую плотность заряда ϱ и плотность тока $\mathbf{j}$ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}&\varrho=-\operatorname{div}\mathscr{P},\\&\mathbf{j}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{2,5}$$

(Очевидно, при таком определении не нарушается закон сохранения заряда.) Введем также вектор Герца $\mathbf{\Pi}$, связанный с потенциалами $\mathbf{A}$ и φ соотношениями

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t},\\&\varphi=-\operatorname{div}\mathbf{\Pi}.\end{aligned}\tag{2,6}$$

В результате приходим к следующему уравнению для вектора Герца:

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{\Pi}=-4\pi\mathscr{P}.\tag{2.7}$$

Из формул (2,2) и (2,6) следует, что векторы электромагнитного поля выражаются через вектор $\mathbf{\Pi}$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \left(\operatorname{grad} \operatorname{div} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{\Pi}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2,8}$$

Получим явные выражения вектора Герца для источников электромагнитного поля простейшего вида: заряженной нити, линейного тока и точечного заряда, равномерно движущихся в свободном пространстве. Отметим здесь, что эти элементарные решения являются функциями Грина для уравнения Даламбера соответственно в двумерном (линейные источники) и трехмерном (точечный заряд) случаях. Через эти функции может быть выражено решение при произвольном распределении зарядов и токов.

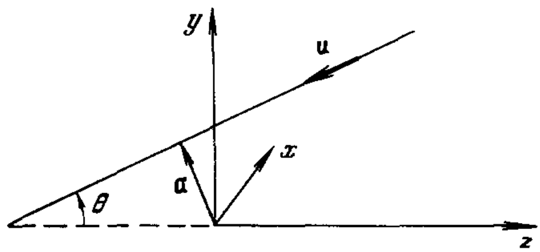

Рис. 2.

а) Поле источников, равномерно движущихся в пустоте. Рассмотрим нить, параллельную оси x (рис. 2), несущую на себе заряд линейной плотности q, движущуюся с постоянной скоростью $\mathbf{u} = \{u_y, u_z\}$ в плоскости y, z. Расстояние от начала координат до траектории обозначим через $\mathbf{a}$. Плотность заряда ϱ и соответствующая ей плотность тока $\mathbf{j}$ определяются выражениями

$$\varrho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a} - \mathbf{u}t), \qquad \mathbf{j} = q\mathbf{u}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a} - \mathbf{u}t). \tag{2,9}$$

Вектор плотности источника $\mathcal{P}$, определяемый согласно (2,5), при этом оказывается равным

$$\mathcal{P} = \frac{q\mathbf{u}i}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{a}-\mathbf{u}t)} \frac{dk_x\, dk_y}{\mathbf{k}\mathbf{u}}, \tag{2,10}$$

где мы воспользовались известным разложением δ-функций, входящих в (2,9), по плоским волнам

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a} - \mathbf{u}t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{a}-\mathbf{u}t)}\, dk_x\, dk_y.$$

Решение неоднородного уравнения Даламбера (2,7) с правой частью вида (2,10) определяется формулой

$$\mathbf{\Pi}^0 = \frac{q\mathbf{u}i}{\pi} \int \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{a}-\mathbf{u}t)}}{|\mathbf{k}|^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{u})^2}{c^2}} \frac{dk_x\, dk_y}{\mathbf{k}\mathbf{u}}. \tag{2,11}$$

Перейдем к новым переменным интегрирования ω и $\varkappa$, определяемым соотношениями

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{u}, \qquad \varkappa = \frac{\mathbf{k}\mathbf{a}}{a}. \tag{2,12}$$

При этой замене в качестве новых независимых переменных принимаются составляющие волнового вектора $\mathbf{k}$ по двум взаимно перпендикулярным направлениям: вдоль траектории нити (по вектору $\mathbf{u}$) и по нормали к ней (по вектору $\mathbf{a}$):

$$\mathbf{k} = \omega \frac{\mathbf{u}}{u^2} + \varkappa \frac{\mathbf{a}}{a}. \tag{2,13}$$

Величина $\omega = \mathbf{k}\mathbf{u}$ в этом случае определяет частоту плоских волн, входящих в разложение (2,11). В новых переменных интегрирования вектор Герца записывается следующим образом *):

$$\mathbf{\Pi}^0 = \frac{iq\mathbf{u}}{\pi u} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{e^{i\frac{\omega}{u}\left(\frac{\mathbf{ur}}{u}-ut\right)+i\varkappa\left(\frac{\mathbf{ar}}{a}-a\right)}}{\varkappa^2+\frac{\omega^2}{u^2}(1-\beta^2)} \frac{d\varkappa\, d\omega}{\omega}. \qquad (2,14)$$

Проводя интегрирование по переменной $\varkappa$ с помощью вычетов, получаем

$$\mathbf{\Pi}^0 = \frac{iq\mathbf{u}}{\gamma u} \int e^{i\frac{\omega}{u}\left(\frac{\mathbf{ur}}{u}-ut\right)-k\gamma\left|\frac{\mathbf{ar}}{a}-a\right|} \frac{d\omega}{k\omega}, \qquad (2,15)$$

где обозначено

$$k=\frac{\omega}{c}, \qquad \beta=\frac{u}{c}, \qquad \gamma=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}. \qquad (2,16)$$

Мы получили спектральное разложение для вектора Герца по частоте. Для элементарных источников можно было бы провести также интегрирование по ω и получить явную зависимость вектора Герца от координат и времени. Однако мы не будем этого делать, так как в дальнейшем будем определять характеристики дифракционного излучения в виде таких же спектральных разложений. Как видно из выражения (2,15), поле заряженной нити представляет собой суперпозицию волн вида

$$e^{i\frac{\omega}{u}\frac{\mathbf{ur}}{u}-k\gamma\left|\frac{\mathbf{ar}}{a}-a\right|}.$$

Это —«неоднородные» плоские волны частоты ω, распространяющиеся в направлении движения источника и экспоненциально затухающие с коэффициентом затухания $k\gamma$ при удалении от траектории источника.

Для описания поля линейного тока, равномерно движущегося в свободном пространстве, достаточно использовать векторный потенциал $\mathbf{A}$, определяемый первым *уравнением системы (2,3). Приведем спектральное разложение для векторного потенциала, аналогичное* выражению (2,16):

$$\mathbf{A}^0=\frac{\mathbf{j}_0}{u\gamma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega}{u}\left(\frac{\mathbf{ur}}{u}-ut\right)-k\gamma\left|\frac{\mathbf{ar}}{a}-a\right|} \frac{d\omega}{\omega}; \qquad (2,17)$$

здесь $\mathbf{j}_0$ — ток вдоль нити.

Перейдем теперь к определению поля равномерно движущейся точечной частицы с зарядом q. Пусть скорость частицы равна $\mathbf{u}$ и расстояние от начала координат до траектории частицы равно $\mathbf{a}$. Проводя вычисления, аналогичные описанным выше, получим *следующее разложение вектора Герца по плоским волнам:*

$$\mathbf{\Pi}^0=\frac{iq\mathbf{u}}{2\pi^2 u} \int \frac{e^{i\frac{\omega}{u}\left(\frac{\mathbf{ur}}{u}-ut\right)+i\varkappa(\mathbf{r}-\mathbf{a})}}{\varkappa^2+\frac{\omega^2}{u^2}(1-\beta^2)} \frac{d\omega}{\omega}\, d\varkappa, \qquad (2,18)$$

где $\varkappa$ — составляющая волнового вектора, перпендикулярная к скорости частицы.

Выражение (2,18) может быть проинтегрировано по $\varkappa$, что дает спектральное разложение вектора Герца, описывающего поле точечной заряженной частицы. Оно имеет вид

$$\mathbf{\Pi}^0=\frac{iq\mathbf{u}}{\pi u} \int e^{i\frac{\omega}{u}\left(\frac{\mathbf{ur}}{u}-ut\right)} K_0(k\gamma\,|\mathbf{r}-\mathbf{a}|_{\perp}) \frac{d\omega}{\omega}, \qquad (2,19)$$

где $(\mathbf{r}-\mathbf{a})_{\perp}$ — проекция вектора $\mathbf{r}-\mathbf{a}$ на плоскость, нормальную к скорости частицы, а K — функция Макдональда. Формула (2,19) дает разложение поля точечной заряженной частицы по цилиндрическим волнам, которые затухают экспоненциально по мере удаления от пути частицы. Расстояние R от пути частицы, на котором волна с частотою ω затухает в e раз, определяется формулой

$$R \sim \frac{1}{k\gamma} = \frac{u}{\omega\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (2,20)$$

*) Полученное разложение для вектора Герца $\mathbf{\Pi}^0$ расходится при малых частотах. Однако эта расходимость не имеет физического смысла и исчезает при переходе непосредственно к векторам электромагнитного поля.

Отметим, что эта же оценка справедлива и для плоских волн, по которым разлагается поле линейного источника (формулы (2,15) для вектора Герца заряженной нити и (2,17) для поля линейного тока). С ростом скорости частицы величина R растет, и когда скорость частицы приближается к скорости света, волны, по которым разлагается поле частицы, становятся незатухающими. Поле заряженной частицы в ультрарелятивистском случае приближается по своим свойствам к полю свободной поперечной электромагнитной волны. Это позволяет приближенно определять поле дифракционного излучения с помощью методов геометрической оптики.

В ряде случаев бывает необходимо не проводить в формуле (2,18) интегрирование по $\varkappa$ до конца, а представить вектор Герца в виде суперпозиции плоских волн, у которых заданы не только частота, но и проекция волнового вектора на выделенное направление. Обычно такая необходимость определяется характером симметрии оптической неоднородности. Приведем подобное разложение для двух наиболее интересных конкретных случаев.

Пусть точечная частица движется в плоскости y, z (см. рис. 2); геометрия задачи требует, чтобы поле частицы было представлено в виде суперпозиции волн заданной частоты и с заданной проекцией волнового вектора на ось x. Интегрируя выражение (2,18) по компонентам вектора $\boldsymbol{\varkappa}$, перпендикулярным к оси x, получим

$$\mathbf{\Pi}^0=\frac{iq\mathbf{u}}{2\pi u}\int e^{i\frac{\omega}{u}\left(\frac{\mathbf{ur}}{u}-ut\right)+i\varkappa_x x}\,\frac{e^{-\sqrt{\varkappa_x^2+k^2\gamma^2}\,\left|\frac{\mathbf{ra}}{a}-a\right|}}{\sqrt{\varkappa_x^2+k^2\gamma^2}}\,\frac{d\omega}{\omega}\,d\varkappa_x. \tag{2,21}$$

Использование такого выражения оказывается удобным, если рассеивающее препятствие обладает цилиндрической симметрией с осью симметрии, параллельной оси x (иными словами, оптическая неоднородность является цилиндрической поверхностью, все образующие которой параллельны оси x). Формулу (2,21) можно рассматривать как представление поля точечной частицы через поле бесконечных линейных источников, плотность заряда в которых модулирована по гармоническому закону.

Если рассеивающее препятствие обладает аксиальной симметрией, а частица движется параллельно оси симметрии, удобно разложить поле частицы по гармоникам заданной частоты и с заданным значением азимутальной составляющей волнового вектора. Пусть оптическая неоднородность имеет ось симметрии, совпадающую с осью z, и частица движется параллельно оси z на расстоянии a от нее. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z, совместив ось z с осью симметрии препятствия (оптической неоднородности). Записав выражение (2,19) в новой системе координат и воспользовавшись теоремой сложения для бесселевых функций, получим

$$\Pi_z^0=\frac{iq}{\pi}\sum_m e^{im\varphi}\int e^{i\frac{\omega}{u}(z-ut)}\left\{\begin{matrix} J_m(k\gamma a)\,K_m(k\gamma r)\\ J_m(k\gamma r)\,K_m(k\gamma a)\end{matrix}\right\}\frac{d\omega}{\omega}. \tag{2,22}$$

Здесь верхнюю строчку в фигурных скобках следует брать при $r > a$, нижнюю при $r < a$.

б) Поле источников, движущихся в преломляющей среде. Уравнения Максвелла для преломляющей среды записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E}&=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\ \operatorname{rot}\mathbf{H}&=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\\ \operatorname{div}\mathbf{D}&=4\pi\rho,\\ \operatorname{div}\mathbf{B}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{2,23}$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — соответственно электрическая и магнитная индукции. Система уравнений (2,23) должна быть дополнена материальными уравнениями, связывающими поля и индукции. Мы примем материальные уравнения следующего вида:

$$\mathbf{D}=\hat{\varepsilon}\mathbf{E},\qquad \mathbf{B}=\hat{\mu}\mathbf{H}, \tag{2,24}$$

где величины $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ являются некоторыми линейными операторами. Для монохроматических полей, в которых все величины пропорциональны $e^{-i\omega t}$, действие операторов $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ сводится к умножению спектральных компонент полей на некоторые функции $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$:

$$\mathbf{D}(\omega)=\varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}(\omega),\qquad \mathbf{B}(\omega)=\mu(\omega)\,\mathbf{H}(\omega). \tag{2,25}$$

Считая, что ε и μ зависят от ω, но не зависят от $\mathbf{k}$, мы тем самым отказываемся от рассмотрения пространственной дисперсии.

Потенциалы $\mathbf{A}$ и φ в преломляющей среде определяются соотношениями

$$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A},\qquad \mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{2,26}$$

и удовлетворяют системе уравнений

$$\left(\Delta-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}=-\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j},\qquad \left(\Delta-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\varrho, \tag{2,27}$$

которая справедлива, если потенциалы $\mathbf{A}$ и φ удовлетворяют дополнительному условию

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0. \tag{2,28}$$

Уравнение для вектора Герца имеет вид

$$\left(\Delta-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{\Pi}=-4\pi\mathcal{P},$$

где вектор $\mathcal{P}$ определен равенствами (2,5).

Потенциалы $\mathbf{A}$ и φ выражаются через вектор Герца по формулам

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t},\qquad \varphi=-\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}, \tag{2,29}$$

а поля — по формулам

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi},\qquad \mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}-\frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2}. \tag{2,30}$$

В дальнейшем для простоты мы будем рассматривать немагнитные преломляющие среды и полагать $\mu=1$.

Поле линейного заряда в преломляющей среде записывается следующим образом:

$$\mathbf{\Pi}^0=\frac{iq\mathbf{u}}{\pi u}\int\frac{e^{i\frac{\omega}{u}\left(\frac{\mathbf{ur}}{u}-ut\right)+i\varkappa\left(\frac{\mathbf{ar}}{a}-a\right)}}{\varkappa^2+\frac{\omega^2}{u^2}(1-\varepsilon\beta^2)}\,\frac{d\varkappa\,d\omega}{\omega}. \tag{2,31}$$

Эта формула очень похожа на выражение для вектора Герца поля линейного заряда в пустоте (2,14) и отличается от него только заменой в знаменателе величины $1-\beta^2$ на $1-\varepsilon\beta^2$.

Интегрируя по $\varkappa$, получаем спектральное разложение вектора Герца

$$\mathbf{\Pi}^0=iq\mathbf{u}\int e^{i\frac{\omega}{u}\left(\frac{\mathbf{ur}}{u}-ut\right)-\frac{|\omega|}{u}\sqrt{1-\varepsilon\beta^2}\left|\frac{\mathbf{ar}}{a}-a\right|}\,\frac{d\omega}{\omega^2\sqrt{1-\varepsilon\beta^2}}. \tag{2,32}$$

Из формулы (2,31) видно существенное отличие поля источника, движущегося в преломляющей среде, от поля источника, движущегося в пустоте. Если величина $\varepsilon\beta^2<1$, то, как и при движении в пустоте, поле движущегося источника состоит лишь из затухающих волн. В случае же выполнения условия $\varepsilon\beta^2>1$, т. е. при движении источника со скоростью, превышающей фазовую скорость распространения электромагнитных волн в среде, появляются незатухающие гармонические волны. Это — так называемое излучение Вавилова — Черенкова, на создание которого источник тратит энергию.

С помощью приведенных формул нетрудно получить выражения для вектора Герца линейного тока и точечного заряда, равномерно движущихся в преломляющей среде. Во всех случаях выполнение условия $\varepsilon\beta^2>1$ приводит к появлению излучения Вавилова — Черенкова, которое уходит на бесконечность (если среда непоглощающая), причем направление распространения излучения Вавилова — Черенкова составляет со скоростью заряда угол θ, удовлетворяющий равенству (1,11).

Знак величины $\sqrt{1-\varepsilon\beta^2}$ в случае, когда $\varepsilon\beta^2>1$, следует выбирать так, чтобы разложение вектора Герца содержало только расходящиеся волны.

§ 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ПОЛУЧИТЬ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИОННОМ ИЗЛУЧЕНИИ

Для точного решения задач дифракционного излучения мы будем использовать тот же метод, который был развит в математической теории дифракции для решения задач о рассеянии плоской электромагнитной волны на препятствиях некоторого специального вида. Этим методом, называемым методом Винера — Хопфа — Фока, были строго решены многие задачи теории дифракции [5-7].

Задача о дифракционном излучении отличается от классических задач теории дифракции тем, что падающее поле представляет собой суперпозицию затухающих волн. Ниже мы увидим, к каким изменениям в результатах приводит такое отличие.

Мы проиллюстрируем метод Винера — Хопфа — Фока на примере дифракции плоской электромагнитной волны, падающей на идеально проводящую полуплоскость.

Пусть на идеально проводящую полуплоскость $y = 0$, $z > 0$ падает плоская электромагнитная волна. Для простоты будем считать, что волновой вектор падающей волны лежит в плоскости y, z.

Будем рассматривать случай, когда магнитное поле падающей волны параллельно ребру экрана, т. е. оси x. Такую поляризацию падающего поля (нетрудно видеть, что у рассеянного поля будет такая же поляризация), следуя Л. А. Вайнштейну [6], будем называть магнитной поляризацией.

Падающее поле можно описать с помощью вектора Герца $\mathbf{\Pi}^0$ с единственной отличной от нуля компонентой

$$\Pi_y^0 = e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \tag{3,1}$$

где $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$ — двумерные векторы в плоскости y, z.

Рассеянное поле будем описывать вектором Герца

$$\mathbf{\Pi}^1 = \mathbf{\Pi}^1(y, z).$$

Таким образом, полное поле, включающее падающую и рассеянную волны, описывается вектором Герца

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^0 + \mathbf{\Pi}^1. \tag{3,2}$$

Полное поле должно удовлетворять следующим требованиям:

1) быть решением волнового уравнения (2,7) без правой части;

2) удовлетворять краевым условиям на идеально проводящей полуплоскости:

$$E_z = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad z > 0; \tag{3,3}$$

3) удовлетворять условию излучения на бесконечности: поток энергии рассеянного поля должен быть направлен от ребра полуплоскости;

4) наконец — удовлетворять так называемому условию на ребре экрана: плотность энергии вблизи края экрана пространственно интегрируема.

Перейдем к решению поставленной задачи, которая впервые была решена А. Зоммерфельдом иным методом [8].

Падающая волна индуцирует на полуплоскости переменные токи $\mathbf{j} = \mathbf{j}_z(z)$, которые и являются источником рассеянного поля.

Вектор Герца рассеянного поля можно выразить через индуцированные токи следующим образом:

$$\mathbf{\Pi}^1 = \frac{i}{\omega} \int \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{j}(z)\, ds. \tag{3,4}$$

Интегрирование проводится по всей полуплоскости, R — расстояние от точки интегрирования $(x', y' = 0, z')$ до точки наблюдения (x, y, z):

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2}. \tag{3,5}$$

Проводя интегрирование по x' с помощью формулы

$$H_0^{(1)}(k\,|D|) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{D^2+\xi^2}}}{\sqrt{D^2+\xi^2}}\, d\xi, \tag{3,6}$$

получаем

$$\mathbf{\Pi}^1 = -\frac{\pi}{\omega} \int_0^{\infty} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{y^2+(z-\xi)^2}\right) \mathbf{j}(\xi)\, d\xi. \tag{3,7}$$

Представим неизвестное распределение тока $j(z)$ в виде разложения в интеграл Фурье по z:

$$j(z)=\int f(w)\,e^{iwz}\,dw. \qquad (3,8)$$

Подстановка этого выражения в (3,7) и интегрирование по ξ дают

$$\Pi^1=-\frac{2\pi}{\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iv|y|}}{v}\,f(w)\,e^{iwz}\,dw, \qquad (3,9)$$

где

$$v=\sqrt{k^2-w^2} \qquad (\operatorname{Im} v\geqslant 0). \qquad (3,10)$$

Отметим, что из такой записи вытекает важное свойство рассеянного излучения. Это свойство состоит в том, что вектор Герца рассеянного поля является четной функцией координаты y. Как легко видеть, отсюда вытекает симметрия углового распределения рассеянного излучения относительно плоскости экрана. Это утверждение справедливо для дифракции на любом плоском экране. Поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением рассеянного поля по одну сторону от экрана.

Как легко убедиться, выражение (3,9) является решением однородного волнового уравнения (3,7). Для определения явного вида функции $f(w)$ воспользуемся граничным условием на полуплоскости (3,3). В результате приходим к следующему неоднородному интегральному уравнению:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}vf(w)\,e^{iwz}\,dw=-\frac{\omega k_y k_z}{2\pi}\,e^{ik_z z} \quad \text{при} \quad z>0, \qquad (3,11)$$

где

$$k_z=-k\cos\theta.$$

Через $\pi-\theta$ обозначен угол, составляемый направлением распространения плоской волны с положительным направлением оси (см. рис. 2).

Для решения задачи необходимо добавить к этому уравнению еще условие, определяющее поведение функции $j(z)$ на продолжении рассеивающей полуплоскости. В качестве этого условия возьмем очевидное равенство

$$j(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(w)\,e^{iwz}\,dw=0 \qquad \text{при} \quad z<0, \qquad (3,12)$$

выражающее отсутствие токов на продолжении полуплоскости. Таким образом, функция $f(w)$ определяется как решение системы парных интегральных уравнений (3,11) и (3,12), из которых первое справедливо при положительных z, а второе — при отрицательных z. Решение подобных уравнений проводится методом Винера — Хопфа — Фока [5], причем мы будем следовать способу нахождения решения, развитому в работах Л. А. Вайнштейна [6]. Представим ядро уравнения (3,11) в виде произведения двух множителей:

$$v=L_+(w)\,L_-(w)\,\frac{1}{w^2-k_z^2}, \qquad (3,13)$$

где функция $L_+(w)$ голоморфна и не имеет нулей в верхней полуплоскости комплексного переменного w ($\operatorname{Im} w>0$), а функция $L_-(w)$ обладает аналогичными свойствами в нижней полуплоскости w ($\operatorname{Im} w<0$). Для функции v, определяемой формулой (3,10), такое разбиение проводится элементарно:

$$L_+(w)=\sqrt{k+w}\,(w+k_z), \qquad L_-(w)=\sqrt{k-w}\,(w-k_z), \qquad (3,14)$$

причем подразумевается, что волновое число k имеет малую положительную мнимую часть.

Из уравнения (3,12) следует, что искомая функция $f(w)$ должна быть голоморфна в нижней полуплоскости w. Поэтому решение можно искать в виде

$$f(w)=\frac{C}{L_-(w)}, \qquad (3,15)$$

где C — постоянная, не зависящая от w.

При таком выборе решения уравнение (3,12) удовлетворяется тождественно. Для определения постоянной C подставим (3,15) в уравнение (3,11). Вычисляя интеграл в левой части уравнения с помощью вычета, получим

$$C = \frac{i\omega k_y k_z^2}{2\pi^2 L_+(k_z)} = \frac{i\omega k_y k_z}{4\pi^2 \sqrt{k - k_z}} . \tag{3,16}$$

Формулы (3,9), (3,15) и (3,16) полностью определяют рассеянное поле, возникающее при падении плоской волны (3,1) на идеально проводящую полуплоскость. Как показано в [6], найденное интегральное представление решения тождественно с известным представлением решения рассматриваемой задачи, полученным Зоммерфельдом. Отметим здесь, что задача о дифракции волнового пакета, состоящего из однородных плоских волн, рассмотренная впервые в [28], может быть решена аналогичным образом

Как видно из описанного метода решения найденной системы парных интегральных уравнений, определяющим моментом при отыскании решения является разбиение на множители известного ядра $v(w)$. Это разбиение не является однозначным. Действительно, умножив $L_+(w)$ на любую целую функцию и одновременно разделив $L_-(w)$ на ту же функцию, мы приходим к новому разбиению ядра. При этом выражение (3,15) для $f(w)$ с новой функцией $L_-(w)$ по-прежнему является решением системы уравнений (3,11)—(3,12). Однозначный выбор решения осуществляется с помощью «условий на ребре». Согласно этим условиям вблизи острого края препятствия нормальная к ребру составляющая плотности тока пропорциональна $r^{1/2}$, а касательная составляющая пропорциональна $r^{-1/2}$, где r — расстояние от ребра. Воспользовавшись известными соотношениями, связывающими асимптотику функции с асимптотикой ее преобразования Фурье, мы получим требования, налагаемые на поведение фурье-компонент плотности тока при $w \to \infty$. Для составляющей тока, нормальной к ребру, выполняется условие

$$f(w) \sim \frac{1}{w^{3/2}} \qquad \text{при} \qquad w \to \infty. \tag{3,17}$$

В рассматриваемом нами примере возбуждается лишь нормальная к ребру составляющая тока. Очевидно, полученное решение (3,15) удовлетворяет «условию на ребре» (3,17).

Если отлична от нуля касательная к ребру составляющая плотности тока, то в силу «условий на ребре» поведение на бесконечности ее фурье-компоненты определяется требованием

$$f(w) \sim \frac{1}{w^{1/2}} \qquad \text{при} \qquad w \to \infty. \tag{3,18}$$

Приведем еще без вывода решение более общей, чем рассмотренная выше, системы парных интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} vF(w)\, e^{iwz}\, dw = g_1(z) \qquad \text{при} \quad z > 0, \\ &\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwz}\, dw = g_2(z) \qquad \text{при} \quad z < 0. \end{aligned}\right\} \tag{3,19}$$

Метод решения этой системы уравнений изложен в монографии[7] и приводит к следующему окончательному виду решения:

$$F(w) = \frac{1}{2\pi^{3/2}\sqrt{k-w}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-iwz}\, dz \int_0^{\infty} g_1(z+\xi)\, e^{ik\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} + \right.$$

$$\left. + e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{0} dz\, e^{-i(w-k)z} \frac{d}{dz} \int_0^{\infty} g_2(z-\xi)\, e^{-ik(z-\xi)} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \right\} \tag{3,20}$$

Легко убедиться, что решение рассмотренной ранее системы уравнений (3,11)—(3,12) получается из выражения (3,20), если положить $g_2 = 0$, $g_1 = -\frac{\omega k_y k_z}{2\pi} e^{ik_z z}$.

§ 4. ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПРОЛЕТЕ ИСТОЧНИКА МИМО ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПРОВОДЯЩЕГО ЭКРАНА

Рассмотрение дифракционного излучения удобно начать с двумерных задач. Такие задачи в математическом отношении, очевидно, проще трехмерных, что облегчает выяснение физической картины явления. Кроме того, двумерные задачи могут иметь определенное прикладное значение. К задачам этого класса относятся задачи о возбуждении излучения плоским модулированным электронным потоком.

а) Излучение заряженной нити и нити с током, пролетающей с постоянной скоростью мимо края идеально проводящей полуплоскости[9]. Пусть бесконечно тонкая идеально проводящая полуплоскость расположена при $y = 0$, $z > 0$ (см. рис. 2). Мимо края полуплоскости движется с постоянной скоростью $\mathbf{u} = (u_z, u_y)$ равномерно заряженная нить, параллельная оси x (ребру полуплоскости). Мы рассмотрим вначале случай, когда нить при своем движении не пересекает полуплоскости. Так же как в § 1, где вычислялось поле заряженной нити, движущейся в пустоте, обозначим плотность заряда нити на единицу длины через q, расстояние от ребра до траектории нити — через a, угол между вектором скорости нити $\mathbf{u}$ и положительным направлением оси z — через $\pi - \theta$. Будем считать, что угол θ меняется в пределах от 0 до π. Заряженная нить, пролетая мимо полуплоскости, наводит на ней переменные токи, которые и являются источниками излучения. Представим полное поле в виде суперпозиции поля нити в свободном пространстве и поля наведенных токов. В соответствии с этим положим

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^0 + \mathbf{\Pi}^1, \tag{4,1}$$

где $\mathbf{\Pi}^0$ — вектор Герца, описывающий поле заряженной нити в свободном пространстве,— определяется выражением (2,15). В рассматриваемом случае очевидно, что наведенные токи имеют лишь одну отличную от нуля составляющую j_z. Поэтому поле излучения удобно описывать с помощью однокомпонентного вектора Герца Π_z^1, интегральное представление которого дается формулой (3,9)

$$\Pi_z^1 = -2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iv|y|}}{v} F(w)\, e^{iwz - i\omega t} \frac{dw\, d\omega}{\omega}. \tag{4,2}$$

Напомним, что $F(w, \omega)$ — фурье-компонента индуцированного на экране тока, которую предстоит определить из условий задачи.

В качестве граничных условий выберем условие (3,3), требующее обращение в нуль тангенциальной составляющей полного электрического поля на полуплоскости, и условие (3,12), выражающее очевидное требование отсутствия токов на продолжении полуплоскости. В результате приходим к следующей системе парных интегральных уравнений для величины $F(w, \omega)$:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(w)\, v e^{iwz}\, dw = \\ &\quad = \frac{qk}{2\pi}\left[\frac{1}{\beta}\sin\theta + i\gamma\cos\theta\right] e^{-k\gamma a - iz\left(\frac{\omega}{u}\cos\theta - ik\gamma\sin\theta\right)} \quad \text{при } z > 0, \\ &\qquad\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwz}\, dw = 0 \qquad \text{при } z < 0. \end{aligned}\right\} \tag{4,3}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать величины, относящиеся к одной определенной частоте ω и для краткости будем вместо $F(w, \omega)$ писать $F(w)$. Полученная система (4,3) схожа с системой парных интегральных уравнений (3,11) — (3,12) в задаче Зоммерфельда. Отличие состоит в том, что в правой части уравнения, справедливого при $z > 0$, стоит неоднородная плоская волна, экспоненциально затухающая с ростом абсолютной величины z. Физически это отличие соответствует отмеченному ранее обстоятельству, что поле движущегося источника представляется суперпозицией затухающих волн. Решение системы (4,3) проводится совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 3, и дает

$$F(w) = \frac{qk}{4\pi^2 i} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\beta}\sin\theta + i\gamma\cos\theta\right)e^{-k\gamma a}}{\sqrt{k - \frac{\omega}{u}\cos\theta + ik\gamma\sin\theta}\,\sqrt{k-w}\left(w + \frac{\omega}{u}\cos\theta - ik\gamma\sin\theta\right)}. \tag{4,4}$$

В этой формуле берется та ветвь выражения $\sqrt{k-w}$, которая положительна при $w \to -\infty$. Формулы (4,2) и (4,4) полностью определяют рассеянное поле, возникающее при равномерном движении заряженной нити мимо проводящей полуплоскости. Для получения полного поля следует к рассеянному полю добавить поле нити, движущейся в пустоте.

Как следует из формул (2,8), отличными от нуля составляющими рассеянного поля являются H_x^1, E_y^1, E_z^1. Приведем, например, выражение для H_x^1:

$$H_x^1 = -ik\frac{\partial\Pi^1}{\partial y} = -\frac{2\pi}{c}\operatorname{sign} y \int e^{iv|y|}F(w)\,e^{iwz}\,dw. \tag{4,5}$$

Выражения для E_y и E_z имеют аналогичную структуру, поэтому мы рассмотрим подробнее только H_x^1. Предварительно заметим следующее. Если ввести угол θ_0, определяемый равенствами

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{\beta} = \frac{c}{u}, \quad \sin\theta_0 = i\gamma = i\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}, \tag{4,6}$$

то выражение (4,4) для $F(w)$ можно переписать (при $\omega > 0$) в виде

$$F(w) = \frac{q\sqrt{2k}}{4\pi^2 i}e^{-k\gamma a}\frac{\cos\frac{\theta+\theta_0}{2}}{\sqrt{k-w}\,[w + k\cos(\theta+\theta_0)]}. \tag{4,7}$$

В таком виде $F(w)$ с точностью до множителя совпадает с решением (3,15) — (3,16) задачи о дифракции плоской волны, падающей на полуплоскость под углом $\theta + \theta_0$. Как следует из (4,6), сходство это является формальным, поскольку угол θ_0 — мнимый. Однако физический смысл такого совпадения можно понять, если рассмотреть случай, когда скорость нити превышает скорость света, как это имеет место для излучения Вавилова — Черенкова в среде с показателем преломления $n > 1$. Тогда величина $\beta = \frac{u}{c}$ переходит в $\beta' = \frac{u}{c}n$ и угол θ_0 становится реальным; такой угол составляет направление распространения излучения Вавилова — Черенкова с направлением скорости нити. Более подробно этот вопрос будет разобран ниже.

Формула (4,7) приобретает физический смысл еще в одном случае. Именно, при $\beta = 1$, как видно из (4,6), угол θ_0 обращается в нуль и формула (4,7) с точностью до множителя переходит в решение задачи Зоммерфельда (3,15) — (3,16). Это следует также из того, что при $\beta = 1$ ($\gamma = 0$) поле заряженного источника разлагается по плоским незатухающим электромагнитным волнам, направление распространения которых совпадает с направлением скорости источника (см., например, выражения (2,15) и (2,17), определяющие поле заряженной нити и нити с током). Задача о дифракции таких волн на полуплоскости — это и есть задача Зоммерфельда.

Интегральное представление (4,5) для поля H_x^1 можно, воспользовавшись формулой (4,7), переписать в виде

$$H_x^1 = -\frac{1}{c}\operatorname{sign} y\,\frac{q\sqrt{2k}}{2\pi i}\,e^{-k\gamma a}\cos\frac{\theta+\theta_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iv|y|+iwz}}{[w+k\cos(\theta+\theta_0)]\sqrt{k+w}}\,dw. \quad (4,8)$$

Это выражение справедливо лишь для положительных ω; при $\omega<0$ следует брать комплексно сопряженное выражение. Выражение (4,8) для магнитного поля излучения может быть преобразовано и выражено через интеграл Френеля от комплексного аргумента, аналогично тому, как это делается в теории дифракции плоской электромагнитной волны с «электрической» поляризацией [6].

Приведем выражение для $H_{x\omega}^1$, справедливое на больших расстояниях от края полуплоскости. Обозначив $z=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ и используя при интегрировании по w метод перевала, получим

$$H_{x\omega}^1=\frac{2q}{c}\,\frac{e^{i\left(kr+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi kr}}\,e^{-k\gamma a}\,\frac{\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\theta+\theta_0}{2}}{\cos\varphi+\cos(\theta+\theta_0)}\,. \quad (4,9)$$

Обсудим пределы применимости этой формулы. Они определяются пределами применимости метода перевала, с помощью которого было оценено интегральное выражение (4,8). Выражение под интегралом в (4,8) имеет полюс при $w=-k\cos(\theta+\theta_0)$. Точка перевала $w=k\cos\varphi$ должна быть достаточно удалена от этого полюса. В противном случае формула (4,9) дает бесконечно большие значения для $H_{x\omega}^1$ на сколь угодно больших расстояниях r, что физически бессмысленно. Это условие можно записать в виде неравенства, потребовав, чтобы знаменатель формулы (4,9) был велик по сравнению с единицей:

$$\left|\sqrt{2\pi kr}\,[\cos\varphi+\cos(\theta+\theta_0)]\right|\gg 1. \quad (4,10)$$

Это неравенство, если использовать определение (4,6), можно с помощью тождественных преобразований привести к виду

$$\sqrt{2\pi kr}\,\sqrt{\frac{1+\beta\cos(\varphi+\theta)}{2\beta}}\,\sqrt{\frac{1+\beta\cos(\varphi-\theta)}{2\beta}}\gg 1 \quad (4,11)$$

или

$$r\gg\frac{1}{2\pi k}\,\frac{2\beta}{1+\beta\cos(\varphi+\theta)}\,\frac{2\beta}{1+\beta\cos(\varphi-\theta)}\,. \quad (4,12)$$

Это неравенство определяет те расстояния, при которых справедливо асимптотическое выражение для магнитного поля (4,9). При малых скоростях нити $\beta\ll 1$ выражение (4,9), полученное методом перевала, справедливо, начиная с расстояний от края экрана порядка длины волны излучения. Пусть теперь скорость источника, движущегося мимо проводящей полуплоскости, близка к скорости света. Тогда знаменатель одного из сомножителей в формуле (4,12) может оказаться малым. Углы φ, вблизи которых это происходит, определяются равенствами

$$\left.\begin{aligned}1+\beta\cos(\varphi+\theta)&=0,\\ 1+\beta\cos(\varphi-\theta)&=0\end{aligned}\right\}\quad(\beta\approx 1), \quad (4,13)$$

откуда получаем

$$\varphi = \pi \pm \theta. \tag{4,14}$$

При этом знак плюс отвечает выполнению второго равенства (4,13), а знак минус — выполнению первого равенства. Вблизи этих значений углов один из сомножителей в правой части неравенства (4,12) велик, а другой по порядку величины равен единице. Поэтому неравенство (4,12) может быть переписано в виде двух неравенств:

$$r \gg \frac{u}{\pi\omega\,[1+\beta\cos(\varphi\pm\theta)]}\,. \tag{4,15}$$

Обозначив через $\alpha = \pi + \theta$ угол между положительным направлением оси z и направлением движения нити (рис. 3), получим

$$r \gg \frac{u}{\pi\omega\,[1-\beta\cos(\varphi\pm\alpha)]}\,. \tag{4,16}$$

Выражение, стоящее в правой части неравенства (4,16) с точностью до множителя, есть не что иное, как путь формирования излучения, определенный формулой (1,6). Таким образом, выражение (4,9) для магнитного поля заряженной нити, пролетающей мимо проводящей полуплоскости, справедливо на расстояниях от края экрана, превышающих путь формирования излучения. Отметим, что в ультрарелятивистском случае ($\beta \to 1$) расстояние от края экрана, определяемое неравенством (4,16), должно быть велико в двух направлениях: в направлении излучения вперед, $\varphi = \alpha$, и в направлении зеркально отраженного излучения, $\varphi = -\alpha$. Существенно, что при всех значениях β, меньших единицы, существуют столь большие расстояния от края экрана (определяемые неравенством (4,16)), что на этих или бо́льших расстояниях выражение (4,9) для H_x^1 (а также и асимптотические выражения для всех других отличных от нуля компонент поля) справедливо для всех значений угла φ. Отметим, что в задаче о дифракции плоской электромагнитной волны, падающей на полубесконечный проводящий экран, существуют такие значения углов, при которых асимптотическое выражение для рассеянного поля несправедливо, как бы велико ни было расстояние от точки наблюдения до края экрана. Это — направления падающего и зеркально отраженного лучей (области перехода от света к тени).

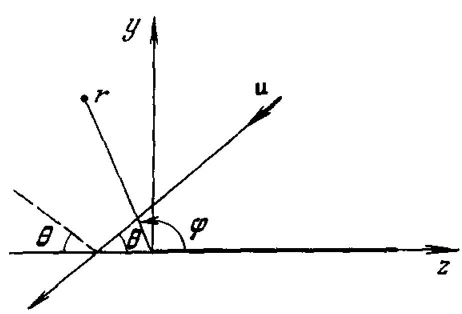

Рис. 3.

К неравенству (4,16), определяющему условия применимости метода перевала, можно прийти и другим путем, потребовав, чтобы расстояние от точки перевала до полюса превышало характерные размеры области скорейшего спуска, которые в этом случае по порядку величины не превышают $\sqrt{\frac{k}{r}}\sin^2\varphi$. Это требование дает

$$|k\cos\varphi + k\cos(\theta+\theta_0)| \gg \sqrt{\frac{k}{r}}\sin\varphi,$$

т. е. мы приходим к неравенству, которое по сути дела совпадает с (4,10).

Из интегрального представления (4,8) для составляющей магнитного поля H_x^1 видно, что магнитное поле имеет различный характер для разных пространственных областей. Это следует из поведения подынтегрального выражения (4,8) в плоскости комплексного переменного w. Для области $y > 0$, $z > 0$ (пространство над полуплоскостью) интеграл сводится к вычету в полюсе $w = -k\cos(\theta + \theta_0)$ и к интегралу по разрезу в верхней полуплоскости комплексного переменного w. Наличие разрезов вызывается тем, что функция $v = \sqrt{k^2 - w^2}$ имеет точки ветвления $w = \pm k$. В соответствии с этим функция v определяется однозначно на плоскости с разрезами, идущими из точек ветвления, как показано на рис. 4. Вычет в точке $w = -k\cos(\theta + \theta_0)$ дает так называемое «поле изображения», т. е. поле источника обратного знака, траектория которого получается путем отражения траектории исходного источника относительно плоскости $y = 0$. Интеграл по разрезу определяет поле излучения заряженной нити. При $y < 0$, $z > 0$ (область пространства под полуплоскостью) вычет в полюсе $w = -k\cos(\theta + \theta_0)$ компенсирует первичное поле, определяемое вектором Герца Π^0. Эта область соответствует области геометрической тени в задаче Зоммерфельда, где существует лишь поле излучения заряда. Наконец, при $z < 0$ (пространство слева от полуплоскости) интеграл (4,8) сводится к интегралу по берегам разреза в нижней полуплоскости. Полное поле в этом случае слагается из поля источника в пустом пространстве и поля излучения. Очевидно, что при вычислении интеграла (4,8) с помощью метода перевала мы не получаем полей изображения, так как они затухают по экспоненте по мере удаления от траектории изображения. Таким образом, выражение $H_{x\omega}^1$ (4,9), полученное методом перевала из (4,8), описывает только поле излучения.

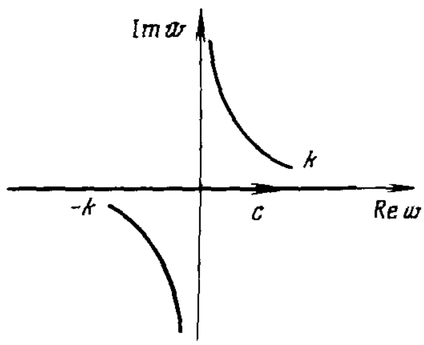

Рис. 4.

Магнитное поле H_x^1 на больших расстояниях от ребра экрана имеет вид расходящихся цилиндрических волн. Как видно из формулы (4,9), амплитуда этих волн зависит от целого ряда параметров: от скорости заряда, угла наблюдения, прицельного параметра a и т. д.

Вычислим интенсивность излучения на частоте ω в интервале углов $d\varphi$. Поток вектора Пойнтинга через элемент поверхности $r\,d\varphi$ на больших расстояниях от ребра равен

$$I(\varphi)\,d\varphi = rc\,|H_{x\omega}^1|^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{q^2}{\pi\omega} e^{-2k\gamma a} \frac{1+\beta\cos\theta}{\beta} \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\left(\cos\varphi + \frac{1}{\beta}\cos\theta\right)^2 + \gamma^2\sin^2\theta}. \quad (4,17)$$

Как видно из формулы (4,17), угловое распределение излучения существенно различно при малых и при больших скоростях источника. При малых скоростях заряженной нити ($\beta \ll 1$, $\gamma \gg 1$) излучение пропорционально $\cos^2\frac{\varphi}{2}$. При больших скоростях ($\beta \to 1$, $\gamma \to 0$) излучение имеет максимумы в направлениях $\varphi = \pm(\pi + \theta)$. Этим значениям углов соответствуют излучение в направлении движения нити (излучение вперед) и излучение в зеркально симметричном направлении относительно проводящей полуплоскости. Ширина максимумов углового распределения излучения в ультрарелятивистском случае по порядку величины равна γ.

Рассмотрим зависимость интенсивности излучения от частоты. Как видно из выражения (4,57), спектральная зависимость существенно определяется множителем

$$e^{-2k\gamma a} = e^{-2a\frac{\omega}{u}\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (4,18)$$

Спектр излучения ограничен сверху, причем предельная частота излучения по порядку величины равна

$$\omega_{\max} \approx \frac{u}{a\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (4,19)$$

В соответствии с этим можно говорить о длительности вспышки дифракционного излучения

$$\Delta t \approx \frac{1}{\omega_{\max}} = \frac{a\sqrt{1-\beta^2}}{u}. \qquad (4,20)$$

К оценке (4,20) для длительности вспышки дифракционного излучения можно прийти и другим путем. Для этого определим зависимость поля H от времени:

$$H(t) = 2\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty H_\omega e^{-i\omega t}\,d\omega.$$

Воспользовавшись приближенным выражением (4,9) для H_ω, справедливым на больших расстояниях от края экрана, найдем, что зависимость поля H от времени определяется множителем

$$H(r,\ t) \sim \frac{1}{[(r-ct)^2+\gamma^2a^2]^{1/4}}.$$

Отсюда видно, что пространственная протяженность волнового пакета дифракционного излучения равна γa, а длительность вспышки дифракционного излучения имеет порядок величины $\frac{\gamma a}{c}$. В пустом пространстве волновой пакет дифракционного излучения распространяется без расплывания.

Наличие множителя $e^{-2k\gamma a}$ (4,18) в выражении для интенсивности излучения можно объяснить следующим образом. Поле заряженной нити, как видно из выражения (2,15), экспоненциально спадает при удалении от ее пути, причем показатель спадания равен $k\gamma$. Поэтому амплитуда токов, индуцированных нитью на экране, пропорциональна $e^{-k\gamma a}$. Та же самая экспоненциальная зависимость входит и в выражение для поля излучения, определяемое токами на экране (см. формулу (4,4)). Интенсивность излучения пропорциональна квадрату этого множителя.

Как видно из (4,19), предельная частота излучения растет пропорционально энергии движущегося источника. Поэтому для ультрарелятивистских скоростей источника спектральная область может доходить до жесткого γ-излучения. Однако для столь высоких частот экран уже нельзя считать идеально отражающим. Это ограничивает область применимости проведенного выше рассмотрения.

Интегрирование формулы (4,17) по углам приводит к выражению для спектральной плотности потерь энергии на единицу длины линейного источника

$$W_\omega = 2\int_0^\pi I(\varphi)\,d\varphi = \frac{q^2}{\omega\gamma}e^{-2k\gamma a}. \tag{4,21}$$

Полученная величина не зависит от угла падения нити. Этот результат можно наглядно объяснить с помощью приближения геометрической оптики. Если скорость источника достаточно велика, поле его приближается по своим свойствам к полю плоских свободных электромагнитных волн. При этом дифракционное излучение движущегося источника приближенно можно описать как зеркальное отражение этих волн полуплоскостью. Таким образом излучение, например, в верхнее полупространство, сводится к отражению той части поля нити, которая попадает на экран. Энергия поля, падающего на экран, не зависит от угла падения нити и определяется только прицельным параметром a. Расчет энергии излучения в приближении геометрической оптики приводит к результату, отличающемуся от (4,21) лишь множителем $\left(\frac{c}{u}\right)^2$.

Независимость полной энергии излучения от угла падения нити θ получена на основе асимптотических формул, которые не всегда применимы. Так, в частном случае, когда $\theta = \pi$ и скорость нити равна скорости света ($\beta \to 1$), точное выражение для поля излучения стремится к нулю. Физически это объясняется тем, что электрический вектор падающего поля в этом случае нормален к полуплоскости, поэтому на экране отсутствуют наведенные токи.

Для получения полных потерь на излучение движущегося источника следует проинтегрировать выражение (4,21) по всей спектральной области. Очевидно, что указанный интеграл от W_ω (4,21) логарифмически расходится на малых частотах. Это объясняется характером поля движущейся нити на больших расстояниях от ее пути: поле нити убывает обратно пропорционально расстоянию от нее. Вследствие этого энергия поля движущейся нити логарифмически расходится. Точно такой же характер расходимости имеет и энергия поля излучения.

Отметим, что учет конечной проводимости и конечной толщины экрана снимает расходимость излучаемой энергии на малых частотах. В этом случае наше рассмотрение справедливо лишь для таких частот, для которых глубина скин-слоя меньше, чем толщина экрана.

Если источником дифракционного излучения является нить с током, определение поля, так же как и для случая заряженной нити, сводится к решению системы парных интегральных уравнений. Физически этот случай отличается от ранее рассмотренного лишь поляризацией поля источника, а следовательно, и поля излучения. В случае заряженной нити электрическое поле перпендикулярно к нити, а магнитное параллельно нити и ребру экрана. В случае же нити с током электрическое поле параллельно нити (ребру экрана), а магнитное поле — перпендикулярно к нити. Поэтому задача отыскания поля токовой нити, пролетающей вблизи края проводящего экрана, аналогична задаче Зоммерфельда в случае, когда магнитный вектор падающей волны параллелен краю экрана. Приведем результаты вычислений спектрального и углового распределения энергии излучения нити с током:

$$I(\varphi)\,d\varphi = \frac{j_0^2}{\pi\omega\gamma^2u^2}e^{-2k\gamma a}\frac{1-\beta\cos\theta}{\beta}\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\left(\cos\varphi+\frac{1}{\beta}\cos\theta\right)^2+\gamma^2\sin^2\theta}, \tag{4,22}$$

где j_0 — ток, проходящий по нити, а все остальные обозначения совпадают с ранее введенными.

Основные характерные особенности углового распределения в этом случае сходны с уже разобранными особенностями излучения заряженной нити.

Интегрируя по углу наблюдения с учетом симметрии излучения относительные плоскости экрана, получим для полных потерь на излучение на частоте ω выражение

$$W_\omega = 2\int_0^\pi I(\varphi)\,d\varphi = \frac{j_0^2}{\omega u^2\gamma^3}\,e^{-2k\gamma a}. \tag{4,23}$$

В случае токовой нити потери на излучение сильнее зависят от скорости источника, чем в случае заряженной нити. Это объясняется более сильной зависимостью падающего поля от u, в чем можно убедиться, сопоставив формулы (2,15) и (2,17).

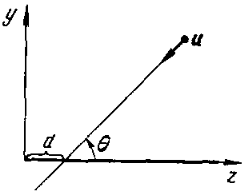

Рис. 5.

Угловое распределение излучения и потери энергии нити можно приближенно оценить, используя наглядный метод изображения. Как известно, поле источника, движущегося над плоским зеркалом, эквивалентно полю источника и его изображения, движущимся в свободном пространстве. Если зеркало имеет край, то при подлете источника к краю изображение либо пропадает, либо появляется, в зависимости от направления скорости источника. При некоторых углах наблюдения источник также может либо появиться из-за края полуплоскости, либо скрыться за ним. Исчезновение или возникновение равномерно движущегося источника сопровождается, как известно, вспышкой излучения, энергию которого можно оценить по формуле (1,1а). При этом для больших скоростей получаются результаты, отличающиеся от приведенных здесь точных результатов отсутствием множителя $\exp(-2k\gamma a)$. Этот множитель учитывает влияние дифракции на процесс появления или исчезновения источника и его изображения.

б) Излучение заряженной нити, пересекающей при своем движении полубесконечный плоский экран[10]. Пусть источник электромагнитного поля при своем движении проходит через оптическую неоднородность. При этом возникает поле сложной дифракционной структуры, в которую дает вклад как переходное, так и дифракционное излучение. Ниже мы рассмотрим простейшую задачу такого рода: пересечение полуограниченного металлического экрана линейным источником поля. Будем считать, что заряженная нить пересекает полубесконечный экран на расстоянии d от его края (рис. 5).

В этом случае задача по-прежнему сводится к системе парных интегральных уравнений для неизвестного распределения токов на экране $F(w)$:

$$\left.\begin{aligned} &\int F(w)\,v e^{iwz}\,dw = \frac{qk}{2\pi}\left[\frac{\operatorname{sign}(z-d)}{\beta}\sin\theta + i\gamma\cos\theta\right]\times \\ &\qquad\qquad \times e^{-i\frac{\omega}{u}z\cos\theta - k\gamma\sin\theta\,|z-d|} \qquad \text{при} \quad z>0, \\ &\int F(w)\,e^{iwz}\,dw = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{при} \quad z<0. \end{aligned}\right\} \tag{4,24}$$

В отличие от рассмотренных ранее задач, в которых источник не пересекал проводящий экран, правая часть в первом уравнении системы

(4,24) имеет различные аналитические выражения, в зависимости от знака разности $(z - d)$ (касательное к экрану электрическое поле экспоненциально спадает в обе стороны от точки пересечения полуплоскости источником). Поэтому применение использованного выше метода отыскания решения встречает затруднения. Более удобным оказывается использовать результаты решения системы уравнений (3,19), приведенные в конце § 3. Полагая в формуле (3,20) $g_2(z) = 0$ и приравнивая $g_1(z)$ правой части первого из уравнений (4,24), получим искомое выражение для функции $F(w)$:

$$F(w) = \frac{qke^{-i\frac{\pi}{4}}}{i4\pi^{5/2}\sqrt{k-w}}\left\{\left[\frac{i\gamma\cos\theta+\frac{1}{\beta}\sin\theta}{w+\frac{\omega}{u}\cos\theta-ik\gamma\sin\theta} - \frac{i\gamma\cos\theta-\frac{1}{\beta}\sin\theta}{w+\frac{\omega}{u}\cos\theta+ik\gamma\sin\theta}\right]\times\right.$$

$$\times e^{i\frac{\omega}{u}\cos\theta\cdot d-iwd}\int_0^d e^{i(k+w)\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} + \frac{i\gamma\cos\theta+\frac{1}{\beta}\sin\theta}{w+\frac{\omega}{u}\cos\theta-ik\gamma\sin\theta}\times$$

$$\times e^{k\gamma d\sin\theta}\int_d^\infty e^{i\left[k-\frac{\omega}{u}\cos\theta+ik\gamma\sin\theta\right]\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} + \frac{i\gamma\cos\theta-\frac{1}{\beta}\sin\theta}{w+\frac{\omega}{u}\cos\theta+ik\gamma\sin\theta}\times$$

$$\left.\times e^{-k\gamma d\sin\theta}\int_0^d e^{i\left[k-\frac{\omega}{u}\cos\theta-ik\gamma\sin\theta\right]\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}\right\}. \qquad (4,25)$$

Прежде чем анализировать полученную формулу, перепишем ее в более удобном виде, воспользовавшись определением комплексного угла падения θ_0 по формулам (4,6):

$$F(w) = \frac{qke^{-i\frac{\pi}{4}}}{4i\pi^{5/2}\sqrt{k-w}}\left\{\left[\frac{\sin(\theta+\theta_0)}{w+k\cos(\theta+\theta_0)} + \frac{\sin(\theta-\theta_0)}{w+k\cos(\theta-\theta_0)}\right]\times\right.$$

$$\times e^{i\left(\frac{\omega}{u}\cos\theta-w\right)d}\int_0^d e^{i(k+w)\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} + \frac{\sin(\theta+\theta_0)}{w+k\cos(\theta+\theta_0)}e^{k\gamma d\sin\theta}\int_d^\infty e^{2ik\sin^2\frac{\theta+\theta_0}{2}\xi}\times$$

$$\left.\times\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} + \frac{\sin(\theta-\theta_0)}{w+k\cos(\theta-\theta_0)}e^{-k\gamma d\sin\theta}\int_0^d e^{2ik\sin^2\frac{\theta-\theta_0}{2}\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}\right\}. \qquad (4,26)$$

Формулы (4,26), (3,9) и (2,30) полностью определяют поле излучения линейного источника, пересекающего экран. Сравним (4,26) с более простой формулой (4,7), определяющей поле излучения в задаче, где источник при своем движении не пересекает экран. В отличие от формулы (4,7), где углы θ и θ_0 входят лишь в комбинации $\theta + \theta_0$, токи, определяемые формулой (4,26), зависят также от $\theta - \theta_0$. Это объясняется тем, что при пересечении экрана источником дифракцию испытывают обе «черенковские» волны, сопровождающие источник. Одна из них падает на экран под углом $\theta - \theta_0$, а другая — под углом $\theta + \theta_0$. Если же источник не пересекает экран, то дифрагирует лишь одна из этих волн, падающая на экран под углом $\theta + \theta_0$. Оговоримся еще раз, что падающие волны весьма условно можно называть черенковскими, так как при равномерном движении источника в пустоте угол θ_0 — мнимый.

Рассмотрим поле в волновой зоне. При этом мы, как и в предыдущей задаче, ограничимся вычислением составляющей магнитного поля H_x

на больших расстояниях от края экрана. Применяя метод перевала, получаем

$$H_x = \frac{q\cos\frac{\varphi}{2}\, e^{ikr}}{\pi c\sqrt{r}} \left\{ \left[\frac{\sin(\theta+\theta_0)}{\cos\varphi+\cos(\theta+\theta_0)} + \frac{\sin(\theta-\theta_0)}{\cos\varphi+\cos(\theta-\theta_0)} \right] \times \right.$$
$$\times e^{i\left(\frac{\omega}{u}\cos\theta - k\cos\varphi\right)d} \int\limits_0^d e^{2ik\cos^2\frac{\varphi}{2}\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} + \frac{\sin(\theta+\theta_0)}{\cos\varphi+\cos(\theta+\theta_0)} e^{k\gamma d\sin\theta} \times$$
$$\left. \times \int\limits_d^\infty e^{2ik\sin^2\frac{\theta+\theta_0}{2}\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} + \frac{\sin(\theta-\theta_0)}{\cos\varphi+\cos(\theta-\theta_0)} e^{-k\gamma d\sin\theta} \int\limits_0^d e^{2ik\sin^2\frac{\theta-\theta_0}{2}\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \right\}. \tag{4,27}$$

Поле излучения заряженной нити, определяемое выражением (4,27), имеет сложную дифракционную структуру. В двух предельных случаях, $d \to 0$ и $d \to \infty$, полученное выражение для поля существенно упрощается и результат приобретает физическую наглядность. Если точка пересечения экрана источником приближается к краю полуплоскости ($d \to 0$), формула (4,27) переходит в выражение (4,9), определяющее поле излучения источника, пролетающего вблизи полуплоскости, не пересекая ее; при сравнении в формуле (4,9) следует положить $a = 0$. Таким образом, решение непрерывно зависит от прицельного параметра.

Рассмотрим также поведение поля, когда точка пересечения $z = d$ расположена далеко от края экрана, $d \to \infty$. В этом случае выражение (4,27) принимает вид

$$H_x = \frac{q}{c\sqrt{2\pi kr}} e^{ikr + i\frac{\pi}{4} + i\left(\frac{\omega}{u}\cos\theta - k\cos\varphi\right)d} \times$$
$$\times \left[\frac{\sin(\theta+\theta_0)}{\cos\varphi+\cos(\theta+\theta_0)} + \frac{\sin(\theta-\theta_0)}{\cos\varphi+\cos(\theta-\theta_0)} \right]. \tag{4,28}$$

Полученное выражение для поля излучения совпадает с полем переходного излучения, возникающим при падении линейного источника на идеально проводящую плоскость. Формула (4,27) позволяет определить влияние удаленного края полубесконечного экрана на переходное излучение, т. е. вычислить поправочные члены к выражению (4,28) при больших значениях d. Из асимптотики интеграла Френеля следует, что эти поправки имеют относительный порядок величины $\frac{1}{\sqrt{kd}}$. Этот результат не очевиден заранее. Поскольку поле движущегося заряда убывает экспоненциально при удалении от его траектории, можно было бы ожидать, что при удалении точки пересечения экрана от его края рассеянное на краю поле будет также убывать по экспоненциальному закону. Именно такая зависимость рассеянного поля от прицельного расстояния характерна для случая, когда источник при своем движении не пересекает экрана. Однако если траектория частицы пересекает экран, то, как показано выше, амплитуда поля, рассеянного на краю экрана, затухает гораздо медленнее, по алгебраическому закону. Причину этого различия для поля, рассеянного на краю, можно пояснить следующим наглядным рассуждением. Точка пересечения экрана заряженной нитью является источником переходного излучения. Это излучение расходится в виде цилиндрических волн, амплитуда которых убывает обратно пропорционально $\sqrt{kr}$. На краю экрана амплитуда будет относительного порядка

$\frac{1}{\sqrt{kd}}$. Такой же порядок величины имеют и поправки к переходному излучению, обусловленные рассеянием волн на краю экрана.

Аналогичные особенности характеризуют и дифракционное излучение нити с током в случае, когда траектория источника пересекает экран [10]. Мы не будем разбирать этот случай отдельно.

в) Дифракция излучения Вавилова — Черенкова при движении линейного источника вблизи полубесконечного экрана [23]. В заключение § 4 рассмотрим особенности дифракционного излучения в случае, когда источник движется в преломляющей среде. Будем считать, что скорость источника превышает фазовую скорость распространения электромагнитных волн в среде. При этом равномерное движение источника сопровождается излучением электромагнитных волн, направление распространения которых составляет с направлением движения источника угол, определяемый выражением (1,11). Поле равномерно движущегося источника в безграничной преломляющей среде определяется с помощью вектора Герца (2,31) по формулам (2,30). Ограничимся рассмотрением лишь случая, когда источник при своем движении не пересекает полубесконечный плоский экран. Пусть экран расположен в безграничной преломляющей среде с диэлектрической постоянной ε. Для случая заряженной нити (или модулированного плоского электронного пучка) будем описывать поле излучения вектором Герца Π^1, имеющим только составляющую по оси z:

$$\Pi^1 = -\frac{2\pi}{\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iv'|y|}}{v'}f(w)\,e^{iwz}\,dw, \tag{4,29}$$

где

$$v' = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - w^2} = \sqrt{k'^2 - w^2}, \qquad \operatorname{Im} v' > 0. \tag{4,30}$$

Определенная таким образом величина v' отличается от введенной ранее величины v (3,10) заменой $k=\frac{\omega}{c}$ на $k'=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}$, т. е. учетом преломляющих свойств среды. Не выписывая системы парных интегральных уравнений для функции $f(w)$, к которым сводится задача, приведем выражение *для фурье-компоненты токов, индуцированных на полуплоскости*:

$$f(w) = \frac{q\sqrt{2k'}}{4\pi^2 i}\,\frac{\cos\frac{\theta+\theta_0}{2}\,e^{i\frac{\omega}{u}\sqrt{\varepsilon\beta^2-1}\,a}}{\sqrt{k'-w}\,[w+k'\cos(\theta+\theta_0)]}. \tag{4,30'}$$

При этом мы с самого начала считаем, что скорость движения источника превосходит фазовую скорость распространения электромагнитных волн в среде, т. е. $\varepsilon\beta^2 > 1$. Тогда угол θ_0, определяемый равенством

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{\beta\sqrt{\varepsilon}}, \tag{4.31}$$

есть реальный угол между направлением распространения излучения Вавилова — Черенкова и скоростью источника.

Из формул (4,29) и (4,30) получим следующее выражение для магнитного поля излучения:

$$H'_x = -\frac{q\sqrt{2k'}}{2\pi c i}\cos\frac{\theta+\theta_0}{2}\,e^{i\frac{\omega}{u}a\sqrt{\varepsilon\beta^2-1}}\operatorname{sign}y\int\frac{e^{iv'|y|+iwz}}{\sqrt{k'-w}\,[w+k'\cos(\theta+\theta_0)]}\,dw. \tag{4,32}$$

Сравним полученное выражение с формулой (4,8) для магнитного поля излучения при движении источника в пустоте ($\varepsilon = 1$). Наличие преломляющей среды приводит к появлению ряда новых физических особенностей задачи о дифракционном излучении. Одну из них мы уже отметили: угол θ_0, определяемый равенством (4,31), при сверхсветовом движении становится действительным. Второе отличие заключается в том, что при сверхсветовом движении источника пропадает экспоненциальное спадание величины излученного поля с ростом прицельного параметра. Это связано с тем, что поле сверхсветового источника имеет волновой характер, т. е. не затухает по мере удаления от его пути. Поэтому интенсивность дифракционного излучения, пропорциональная $|H^1|^2$, не зависит от прицельного параметра a.

Рассеянное поле H^1 (4,32) можно выразить через интегралы Френеля, хорошо известные в математической теории дифракции:

$$H_x^1 = -\frac{q}{\sqrt{\pi i c}}\, e^{i\frac{\omega}{u}a\sqrt{\varepsilon\beta^2-1}} \left\{ e^{-ik'r\cos(\varphi-\theta-\theta_0)} \int\limits_{\infty}^{-\sqrt{2k'r}\cos\frac{\varphi-\theta-\theta_0}{2}} e^{it^2}\,dt - \right.$$

$$\left. - e^{-ik'r\cos(\varphi+\theta+\theta_0)} \int\limits_{\infty}^{\sqrt{2k'r}\cos\frac{\varphi+\theta+\theta_0}{2}} e^{it^2}\,dt \right\}. \quad (4,33)$$

Заметим, что если в формуле (4,33) в первом интеграле в фигурных скобках взять в качестве нижнего предела не ∞, а $-\infty$, эта формула будет описывать уже полное поле, равное сумме поля источника и рассеянного поля. Выражение (4,33) с точностью до множителя перед фигурной скобкой совпадает с решением разобранной выше задачи Зоммерфельда о дифракции плоской электромагнитной волны, магнитный вектор которой параллелен краю экрана и которая падает на экран под углом $\theta + \theta_0$. Таким образом, в случае сверхсветового движения источника рассеянное поле есть результат дифракции излучения Вавилова — Черенкова, сопровождающего движение заряда.

Отметим еще, что потери энергии линейного источника на излучение при наличии экрана остаются такими же, как и в безграничной преломляющей среде, потому что источник опережает рассеянное поле Вавилова — Черенкова и не взаимодействует с ним.

Совершенно аналогично решается задача о дифракции на полуплоскости излучения Вавилова — Черенкова в случае равномерно движущегося линейного источника с током. Приведем выражение для рассеянного электрического поля в этом случае:

$$E_x^1 = -\frac{j_0 e^{i\frac{\omega}{u}a\sqrt{\varepsilon\beta^2-1}}}{\sqrt{\pi i}\, c^2\sqrt{\varepsilon\beta^2-1}} \left\{ e^{-ik'r\cos(\varphi-\theta-\theta_0)} \int\limits_{\infty}^{-\sqrt{k'r}\cos\frac{\varphi-\theta-\theta_0}{2}} e^{it^2}\,dt + \right.$$

$$\left. + e^{-ik'r\cos(\varphi+\theta+\theta_0)} \int\limits_{\infty}^{\sqrt{k'r}\cos\frac{\varphi+\theta+\theta_0}{2}} e^{it^2}\,dt \right\}. \quad (4,34)$$

Формулы (4,33) для рассеянного поля H^1 заряженного двумерного источника и (4,34) для рассеянного поля E^1 источника с током являются точными. Как видно из этих формул, рассеянные поля зависят от аргументов $\sqrt{k'r}\cos\left\{\frac{1}{2}[\varphi \pm (\theta+\theta_0)]\right\}$. При больших значениях этих аргументов можно воспользоваться асимптотическими выражениями для интеграла Френеля

$$\int\limits_{\infty}^{s} e^{it^2}\,dt \approx \frac{e^{is^2}}{2is}, \tag{4,35}$$

что дает приближенные зависимости для E и H в дальней зоне.

§ 5. ИЗЛУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА, ПРОЛЕТАЮЩЕГО ВБЛИЗИ ОТКРЫТОГО КОНЦА ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДА

Представляет интерес рассмотреть свойства дифракционного излучения в том случае, когда рассеивающие тела образуют резонансную систему, в которой могут возбуждаться собственные волны. При этих условиях пролетающий источник возбуждает внутри рассеивающей системы дискретный набор собственных гармоник, а вне ее излучение характеризуется непрерывным спектром частот. Ниже мы рассмотрим возбуждение простейшей рассеивающей структуры такого рода — плоского волновода с открытым концом [11]. Это рассмотрение представляет интерес еще и в том отношении, что здесь мы имеем дело с одной из немногих решаемых точно задач о возбуждении электромагнитных колебаний в открытом резонаторе. Геометрия задачи ясна из рис. 6.

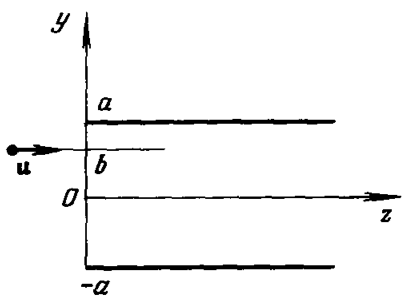

Рис. 6.

Плоский волновод образован двумя полубесконечными тонкими пластинами ($y = \pm a$, $z > 0$). Рассмотрим вначале случай, когда нить, параллельная оси x и несущая ток с линейной плотностью $j_x = j_0$, влетает в волновод с постоянной скоростью $u_z = u$. Расстояние траектории нити с током от оси волновода обозначим через b ($b < a$). Однокомпонентный вектор-потенциал $\mathbf{A} = \{A_x, 0, 0\}$, описывающий полное электромагнитное поле, в рассматриваемой задаче удобно записать в виде суммы

$$A_\omega(y, z) = A_\omega^0(y, z) + A_\omega^1(y, z), \tag{5,1}$$

где

$$A_\omega^0(y, z) = \frac{j_0}{u\gamma\omega}\, e^{i\frac{\omega}{u}z} \left\{ e^{-|y-b|k\gamma} - e^{-k\gamma a}\left[\frac{\operatorname{ch}(k\gamma y)\operatorname{ch}(k\gamma b)}{\operatorname{ch}(k\gamma a)} + \frac{\operatorname{sh}(k\gamma y)\operatorname{sh}(k\gamma b)}{\operatorname{sh}(k\gamma a)}\right]\right\} \tag{5,2}$$

— вектор-потенциал, описывающий поле нити с током, движущейся в неограниченном плоском волноводе. Такой выбор вектор-потенциала A_ω^0 не является обязательным. В качестве A_ω^0 можно было бы взять любое другое решение неоднородной задачи, например, вектор-потенциал (2,17) нити с током, движущейся в свободном пространстве. Вектор-потенциал A_ω^1 описывает искомое свободное поле, которое надо добавить к A_ω^0, чтобы удовлетворить граничным условиям на стенках полубесконечного волновода. Вектор-потенциал свободного поля A_ω^1 можно выразить через токи $j_\omega^1(z)$, текущие на стенках волновода и обусловленные наличием открытого конца:

$$A_\omega^1(y, z) = \frac{1}{c}\int \frac{e^{ikR}}{R}\, j_\omega^1(z)\, ds. \tag{5,3}$$

Формула (5,3) позволяет свести определение вектор-потенциала A^1 к определению токов, наведенных на пластинах волновода движущимся источником.

Токи $j^1(z)$ убывают с ростом z и поэтому могут быть разложены в интегралы Фурье. Токи на верхней ($y = +a$) пластине $j_a^1(z)$ и на нижней пластине ($y = -a$) $j_{-a}^1(z)$ можно записать в виде

$$j_a^1(z) = j_+(z) + j_-(z), \qquad j_{-a}^1(z) = j_+(z) - j_-(z),$$

где

$$j_\pm(z) = \int F_\pm(w)\, e^{iwz}\, dw. \tag{5,4}$$

Индексами $+$ и $-$ мы обозначили соответственно четную и нечетную части токов и их изображений Фурье.

Условие обращения в нуль касательного электрического поля E_z на пластинах волновода и требование отсутствия полного тока на продолжении стенок волновода приводят к следующим независимым системам уравнений для определения $F_+(w)$ и $F_-(w)$:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_\pm(w)\, L_\pm(w)\, e^{iwz}\, dw = 0 \qquad \text{при} \quad z > 0, \\ &\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_\pm(w)\, e^{iwz}\, dw = B_\pm e^{i\frac{\omega}{u}z} \qquad \text{при} \quad z < 0, \end{aligned}\right\} \tag{5,5}$$

где

$$L_\pm(w) = \frac{1 \pm e^{i2av}}{v}, \qquad B_+ = \frac{j_0}{4\pi u}\frac{\operatorname{ch}(k\gamma b)}{\operatorname{ch}(k\gamma a)}, \qquad B_- = \frac{j_0}{4\pi u}\frac{\operatorname{sh}(k\gamma b)}{\operatorname{sh}(k\gamma a)}, \tag{5,6}$$

$$v = \sqrt{k^2 - w^2} \qquad (\operatorname{Im} v > 0).$$

Решение систем парных интегральных уравнений (5,5) находится совершенно аналогично тому, как было получено решение системы (4,3). Полученное решение имеет вид

$$F_+(w) = -\frac{j_0}{8\pi^2 ui}\frac{\psi_2\left(\frac{\omega}{u}\right)}{\psi_2(w)}\frac{\sqrt{k-w}}{\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}}\frac{\operatorname{ch}(k\gamma b)}{\operatorname{ch}(k\gamma a)}\frac{1}{w-\frac{\omega}{u}}, \tag{5,7}$$

$$F_-(w) = -\frac{j_0}{8\pi^2 ui}\frac{\varphi_2\left(\frac{\omega}{u}\right)}{\varphi_2(w)}\frac{\sqrt{k-w}}{\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}}\frac{\operatorname{sh}(k\gamma b)}{\operatorname{sh}(k\gamma a)}\frac{1}{w-\frac{\omega}{u}}. \tag{5,8}$$

Входящие в решение функции φ и ψ определяются из разбиения ядра $L_\pm(w)$ системы уравнений (5,5) на множители, аналитические в верхней (φ_1 и ψ_1) и нижней (φ_2 и ψ_2) полуплоскостях комплексного переменного w:

$$\begin{aligned} L_+(w) &= \frac{1 + e^{i2av}}{v} = \frac{\psi_1(w)\,\psi_2(w)}{v}, \\ L_-(w) &= \frac{1 - e^{i2av}}{v} = \frac{\varphi_1(w)\,\varphi_2(w)}{v}. \end{aligned} \tag{5,9}$$

Явные выражения для функций φ и ψ довольно громоздки, но поскольку свойства этих функций определяют характер дифракционного излучения, мы их приведем:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1(w)=\sqrt{-2i\frac{\sin ka}{k}}\,\sqrt{k+w}\,e^{-\frac{wa}{2}+i\frac{ka}{\pi}M_1(\tau)}\times\\
&\qquad\qquad\times\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{w}{k\sin\sigma_m}\right),\\
&M_1(\tau)=\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)\cos\tau+\sin\tau,\\
&\quad\tau=\arcsin\left(\frac{w}{k}\right),\qquad \sigma_m=\arccos\left(\frac{\pi m}{ka}\right);\\
&\varphi_2(w)=\varphi_1(-w),
\end{aligned}\right\}\tag{5,10}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_1(w)=\sqrt{2\cos(ka)}\,e^{-\frac{wa}{2}+i\frac{ka}{\pi}M_1(\tau)}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{w}{k\sin\tau_m}\right),\\
&\tau_m=\arccos\left[\frac{\pi}{ka}\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]\qquad(m=1,\,2,\,\ldots),\\
&\psi_2(w)=\psi_1(-w).
\end{aligned}\right\}\tag{5,11}$$

Формулы (5,7) и (5,8) дают выражения для фурье-компонент четной и нечетной частей токов, наведенных на пластинах волновода. При переходе от фурье-компонент $F_+(w)$ и $F_-(w)$ к токам $j_\pm(z)$ контур интегрирования в (5,4) следует выбирать так, чтобы он обходил полюс $w=\omega/u$ сверху. Если бы мы выбрали A^0 в виде (2,17), а не (5,2), выражение для $F_\pm(w)$ осталось бы прежним, а контур интегрирования в (5, 4) должен был бы обходить полюс $w=\omega/u$ снизу.

Вектор-потенциал $A^1_\omega(y,\,z)$ поля излучения выражается через $F_+(w)$ и $F_-(w)$ следующим образом:

$$A^1_\omega(y,\,z)=\frac{2\pi i}{c}\int e^{iwz}\,[F_+(w)\,(e^{iv|y-a|}+e^{iv|y+a|})+$$

$$+F_-(w)\,(e^{iv|y-a|}-e^{iv|y+a|})]\,\frac{dw}{v}.\tag{5,12}$$

Отличные от нуля компоненты полей излучения выражаются через A^1_ω по формулам

$$E^1_x=ikA^1_\omega,\qquad H^1_y=\frac{\partial A^1_\omega}{\partial z}=\frac{1}{ik}\frac{\partial E^1_x}{\partial z},\qquad H^1_z=-\frac{\partial A^1_\omega}{\partial y}=-\frac{1}{ik}\frac{\partial E^1_x}{\partial y}.\tag{5,13}$$

Как видно из (5,13), все составляющие поля излучения для рассматриваемой задачи («электрическая поляризация») могут быть выражены через E^1_x. Поэтому мы ограничимся исследованием только этой компоненты электрического поля. Начнем с исследования поля внутри волновода $|y|<a$, $z>0$. В этом случае формулы (5,12) и (5,13) дают

$$E^1_x=-\frac{4\pi k}{c}\int e^{iwz+iva}\,[F_+(w)\cos(vy)-iF_-(w)\sin(vy)]\,\frac{dw}{v}.\tag{5,14}$$

Это выражение справедливо и вне волновода ($z<0$), если только $|y|<a$.

Поле внутри волновода определяется аналитическими свойствами подынтегрального выражения в верхней полуплоскости комплексного переменного w. Оказывается, что единственными особенностями подынтегрального выражения (5,14) в верхней полуплоскости являются полюсы. При этом $F_+(w)$ имеет полюсы в точках $w_m=k\sin\tau_m$ (нули функции $\psi_2(w)$), а $F_-(w)$ имеет полюсы в точках $w_m=k\sin\sigma_m$ (нули функции $\varphi_2(w)$). Величины σ_m и τ_m определяются согласно формулам (5,10) и (5,11) и имеют смысл углов, которые составляют волновые векторы несимметричной и симметричной собственных волноводных волн с осью y. Выражение для поля (5,14) сводится, таким образом, к сумме вычетов в указанных полюсах. Физически это соответствует возбуждению дискретного спектра собственных волноводных гармоник при пролете источника через открытый конец волновода. Вычисляя интеграл (5,14) с помощью вычетов, получим поле излучения внутри волновода в виде

$$E_x^1(y,\ z)=\sum_m\left[R_{+m}e^{ik\sin(\tau_m z)}\cos(k\cos\tau_m y)+R_{-m}e^{ik\sin(\sigma_m z)}\sin(k\cos\sigma_m y)\right], \tag{5,15}$$

где соответственно коэффициенты возбуждения симметричных магнитных волн R_{+m} и несимметричных магнитных волн R_{-m} равны

$$\begin{aligned} R_{+m}&=\frac{j_0}{uc}\,\frac{(-1)^{m-1}\psi_1(k\sin\tau_m)\,\psi_2\left(\frac{\omega}{u}\right)}{2a\sin\tau_m}\,\frac{\sqrt{k-k\sin\tau_m}}{\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}\left(k\sin\tau_m-\frac{\omega}{u}\right)}\,\frac{\operatorname{ch}(k\gamma b)}{\operatorname{ch}(k\gamma a)},\\ R_{-m}&=\frac{j_0}{uc}\,\frac{(-1)^{m-1}\varphi_1(k\sin\sigma_m)\,\varphi_2\left(\frac{\omega}{u}\right)}{2a\sin\sigma_m}\,\frac{\sqrt{k-k\sin\sigma_m}}{\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}\left(k\sin\sigma_m-\frac{\omega}{u}\right)}\,\frac{\operatorname{sh}(k\gamma b)}{\operatorname{sh}(k\gamma a)}. \end{aligned} \tag{5,16}$$

Из формулы (5,15) видно, что дифракционное поле внутри волновода является суперпозицией собственных волн, уходящих от открытого конца вглубь волновода. Полный поток излучаемой в волновод энергии можно определить, интегрируя продольную компоненту вектора Умова — Пойнтинга по сечению волновода. В результате получим

$$W_\omega=c\int_{-a}^{a}E_{\omega x}H_{-\omega y}\,dy=ac\sum_m\{|R_{-m}|^2\sin\tau_m+|R_{-m}|^2\sin\sigma_m\}. \tag{5,17}$$

Последнее выражение справедливо лишь при удалении от открытого конца волновода на расстояние, превышающее зону формирования излучения для низших гармоник (т. е. волноводных волн с наименьшим значением m). С ростом номера гармоники размер зоны формирования уменьшается. Таким образом, если расстояние от открытого конца волновода превышает размер зоны формирования низшей гармоники, для гармоник с бóльшими значениями m это условие также выполняется. Характерный линейный размер зоны формирования, определяемый соотношением (1,4), для симметричных волноводных волн равен по порядку величины

$$l_{\text{форм}}\sim\frac{u}{\omega(1-\beta\sin\tau_m)}; \tag{5,18}$$

для несимметричных волн следует заменить τ_m на σ_m. Суммирование в выражении (5,17) надо распространять лишь на те значения m, для которых $\sin\tau_m$ или $\sin\sigma_m$ действительны для данной частоты. Физически это означает, что вклад в потери на излучение внутри волновода вносят лишь волны, распространяющиеся без затухания.

Формула (5,17) определяет потери энергии токового источника на возбуждение плоского волновода в зависимости от знака и абсолютной величины скорости источника. Зависимость потери энергии от скорости источника мы разберем на примере возбуждения симметричной гармоники номера m (волна H_m). Потери на возбуждение этой гармоники описываются в выражении (5,17) членом, пропорциональным $|R_m|^2$. Опуская множители, не зависящие от скорости источника, получаем

$$W_m(\beta) \approx \frac{|\beta|}{(1-\beta)(1-\beta\sin\tau_m)^2}\left|\psi_2\left(\frac{\omega}{u}\right)\right|^2 \frac{\operatorname{ch}^2(k\gamma b)}{\operatorname{ch}^2(k\gamma a)}. \tag{5,19}$$

При $u \to 0$ функция $\psi_2\left(\frac{\omega}{u}\right)$ стремится к единице [6] и мы получаем

$$W_m(\beta) \approx |\beta| e^{-\frac{2k}{|\beta|}(a-b)} \qquad (\beta \to 0), \tag{5,20}$$

т. е. при малой скорости потери на излучение m-й симметричной гармоники оказываются экспоненциально малыми. Зависимость от скорости оказывается такой же, как при пролете нити с током на расстояние $(a - b)$ от идеально проводящей полуплоскости. Как видно из (5,20), энергия излучения в этом случае не зависит от того, влетает источник в волновод или вылетает из волновода.

С ростом скорости источника появляется зависимость от знака u. При $|\beta| \to 1$ энергия излучения в волновод существенно определяется знаком u. Если скорость нити близка к скорости света и нить вылетает из волновода, то

$$W_m \approx |\psi_2(-k)|^2 \frac{\operatorname{ch}^2(k\gamma b)}{\operatorname{ch}^2(k\gamma a)}. \tag{5,21}$$

Если $\beta \approx 1$ и нить влетает в волновод, то

$$W_m \approx \frac{|\psi_2(k)|^2}{(1-\beta)(1-\beta\sin\tau_m)^2} \frac{\operatorname{ch}^2(k\gamma b)}{\operatorname{ch}^2(k\gamma a)}. \tag{5,22}$$

Отсюда видно, что возбуждение волновода больше при влете источника, чем при вылете.

Функции $|\psi_1(w)|^2$ и $|\psi_2(w)|^2$ могут быть выражены в замкнутом виде, не содержащем бесконечных произведений. Для тех частот, при которых в волноводе возбуждаются лишь первые гармоники, выражения для $|R_{+1}|^2$ и $|R_{-1}|^2$ принимают простой вид. Например, квадрат модуля коэффициента возбуждения R_{+1} для основной симметричной гармоники равен

$$|R_{+1}|^2 = \frac{4j_0^2|\beta|a}{\pi c} \frac{(1-\sin\tau_1)}{(1-\beta)(1-\beta^2\sin^2\tau_1)} \frac{\operatorname{ch}^2(k\gamma b)}{\operatorname{ch}^2(k\gamma a)} e^{\frac{-\omega}{u}a(1-\beta\sin\tau_1)-k\gamma a(1-\operatorname{sign} u)}. \tag{5,22'}$$

Таким образом, пролет равномерно движущегося источника через открытый конец волновода сопровождается возбуждением собственных волноводных гармоник, которые уходят от открытого конца вглубь волновода. При малых скоростях источника амплитуды возбуждаемых волн экспоненциально малы и не зависят от знака скорости источника. При релятивистских скоростях появляется резкая асимметрия в зависимости от знака скорости источника. Возбуждение волновода при влете источника оказывается больше, чем при вылете. Во всех случаях интенсивность излучения экспоненциально падает при больших частотах по закону

$$W_\omega \sim e^{-2k\gamma(a-b)} \qquad (k\gamma(a-b) \gg 1). \tag{5,23}$$

Асимметрия интенсивности излучения в зависимости от знака скорости источника аналогична соответствующей асимметрии переходного излучения.

Рассмотрим теперь поле, возбуждаемое летящей нитью с током, вне волновода. Из формулы (5,12), считая $y > a$, получим поле в пространстве над волноводом в виде

$$E'_x = -\frac{4\pi k}{c}\int e^{iwz+ivy}\left[F_+(w)\cos(va) - iF_-(w)\sin(va)\right]\frac{dw}{v}. \tag{5,24}$$

Поле в пространстве под волноводом $y < -a$ определяется формулой, которая получается из (5,24) изменением знаков перед y и $F_-(w)$. Вычислим поле излучения на больших расстояниях от открытого конца волновода. Для этого перейдем к полярным координатам r, φ по формулам $z = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Оценивая интеграл (5,24) методом перевала, приходим к следующему выражению для поля излучения в дальней зоне:

$$E_x = H_\varphi = -\frac{4\pi k}{c}\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\,e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}[F_+(k\cos\varphi)\cos(ka\sin\varphi) - \\ - iF_-(k\cos\varphi)\sin(ka\sin\varphi)]. \qquad (5,25)$$

Полученная формула справедлива во всем внешнем по отношению к волноводу пространстве на расстояниях от открытого конца, превышающих путь формирования излучения (1,4).

Энергия, излученная в интервал углов φ, $\varphi + d\varphi$, записывается в виде

$$W(\varphi)\,d\varphi = c\,|E_x|^2 r\,d\varphi, \qquad (5,26)$$

где E_x определяется выражением (5,25).

В частном случае, когда нить с током влетает или вылетает по оси волновода ($b = 0$) и возбуждаемое поле симметрично относительно плоскости $y = 0$, имеем

$$W(\varphi) = \frac{j_0^2\,\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\left|\psi_2\left(\frac{\omega}{u}\right)\right|^2|\psi_1(k\cos\varphi)|^2}{4c^2\pi\omega(1-\beta)(1-\beta\cos\varphi)^2\,\mathrm{ch}^2(k\gamma a)}. \qquad (5,27)$$

При больших частотах $\omega \to \infty$ функции ψ_2 обращаются в единицу и выражение (5,27) совпадает с формулой (4,22), определяющей потери на дифракционное излучение для случая полубесконечного экрана. Для малых частот, когда длина волны излучения сравнима с высотой волновода, угловое распределение излучения определяется типом волны, возбуждаемой в волноводе. Например, при $\frac{\pi}{2} < ka < \frac{3\pi}{2}$, что соответствует условию распространения без затухания лишь основной симметричной волны H_{01}, имеем

$$|\psi_1(k\cos\varphi)|^2 = 2e^{-ka\cos\varphi}\,\frac{\cos\varphi+\sin\tau_1}{\cos\varphi-\sin\tau_1}\cos(ka\sin\varphi). \qquad (5,28)$$

Подставляя это значение в формулу (5,27), получим угловое распределение излучения в указанном диапазоне частот.

Как видно из выражения (5,27), излучение нити с током во внешнее пространство зависит от знака u, т. е. направления движения источника.

Дифракционное излучение возникает не только при пролете источника через открытый конец волновода, но и при движении источника в свободном пространстве мимо открытого конца волновода [12, 13]. Пусть, например, нить с током движется по прямолинейной траектории, характеризуемой прицельным параметром $\mathbf{b}$ и углом θ (рис. 7). Считаем, что траектория нити не пересекает стенок волновода. Отыскание токов, наводимых на пластинах волновода движущейся токовой нитью, проводится так же, как и в рассмотренной выше задаче о влете и вылете нити из волновода. Приведем выражения для компонент Фурье четной и нечетной

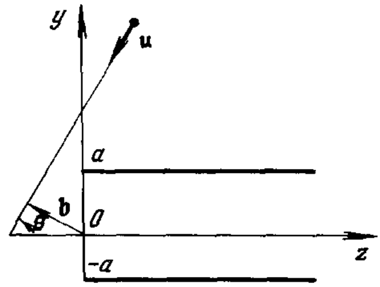

Рис. 7.

составляющих наведенного тока $F_+(w)$ и $F_-(w)$:

$$
\begin{aligned}
F_+(w) &= \frac{j_0 v_0}{8\pi^2\beta\omega\gamma} e^{-k\gamma b + i a v_0} \frac{\sqrt{k-w}}{\sqrt{k-w_0}} \frac{\psi_2(w_0)}{\psi_2(w)} \frac{1}{w-w_0}, \\
F_-(w) &= \frac{j_0 v_0}{8\pi^2\beta\omega\gamma} e^{-k\gamma b + i a v_0} \frac{\sqrt{k-w}}{\sqrt{k-w_0}} \frac{\varphi_2(w_0)}{\varphi_2(w)} \frac{1}{w-w_0},
\end{aligned} \tag{5,29}
$$

где обозначено $w_0 = -\frac{k}{\beta}\cos\theta + ik\gamma\sin\theta$, $v_0 = v(w_0) = -\frac{k}{\beta}\sin\theta - ik\gamma\cos\theta$. Величины w_0 и v_0 являются составляющими волнового вектора (вдоль оси z и y соответственно) связанной с источником неоднородной плоской волны, падающей на пластины волновода. Векторный потенциал рассеянного поля по-прежнему определяется согласно формуле (5,12). Однако на этот раз следует считать, что контур интегрирования обходит полюс $w = w_0$ снизу. Это объясняется тем, что в качестве A^0_ω в формуле (5,1) выбрано поле движущейся нити в свободном пространстве (2,17). Анализ выражений для поля излучения в дальней зоне и коэффициентов возбуждения собственных волноводных гармоник в области между пластинами приводит к тем же качественным заключениям, что и в рассмотренной выше задаче о пролете через открытый конец волновода.

Если расстояние между пластинами волновода стремится к нулю, нечетная составляющая $F_-(w)$ плотности тока на пластинах обращается в нуль, а $F_-(w)$ дает фурье-компоненту плотности тока, наведенного на полубесконечном экране.

Случай, когда источником поля является заряженная нить (или плоская модулированная волна плотности заряда), отличается от рассмотренной здесь задачи тем, что возбужденные волны имеют другую поляризацию (возбуждаются не «магнитные», а «электрические» волны, у которых магнитный вектор параллелен ребрам пластин, составляющих волновод). Поскольку методы решения и физические особенности возникающего излучения близки к ранее рассмотренным, мы не будем здесь излагать соответствующих результатов, отсылая интересующихся к работам [12, 13].

Заметим в заключение, что дифракционное излучение, возникающее при пролете источника мимо открытого конца волновода, можно использовать для детектирования пучков заряженных частиц.

§ 6. ИЗЛУЧЕНИЕ ИСТОЧНИКА, РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ВБЛИЗИ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ, ОБРАЗОВАННОЙ СИСТЕМОЙ РАВНООТСТОЯЩИХ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ

Если оптические неоднородности периодически расположены в пространстве, то дифракционное излучение характеризуется определенными резонансными свойствами. Мы выясним эти свойства на примере дифракционной решетки, состоящей из равноотстоящих идеально проводящих параллельных полуплоскостей. В этом случае, в отличие от большинства рассмотренных ранее примеров излучения равномерно движущихся источников в линейных периодических средах [14–18], задача допускает точное решение [19, 20]. Рассмотрение такой задачи представляет также интерес с точки зрения возможностей генерации электромагнитного излучения пучками заряженных частиц.

Рассмотрим систему параллельных идеально проводящих полуплоскостей, описываемых уравнениями $z = na$, $y > 0$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (рис. 8). Пусть вдоль этой системы движется с постоянной скоростью u однородно заряженная нить с линейной плотностью заряда q. Расстояние от траектории нити до системы обозначим через b, поэтому уравнение траектории нити имеет вид $y = -b$, $z = ut$. Задача состоит в определении полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, возбуждаемых заданным источником и удовлетворяющих граничным условиям на пластинах системы (иногда такую систему называют «гребенкой»).

Поле в рассматриваемой задаче удобно описывать вектором Герца Π_ω. Представим Π_ω в виде суммы

$$\mathbf{\Pi}_\omega = \mathbf{\Pi}^0_\omega + \mathbf{\Pi}^1_\omega, \tag{6,1}$$

где в соответствии с (2,15) поле нити в пустоте описывается вектором Герца

$$\Pi^0_\omega = \Pi^0_{\omega z} = -\frac{q}{i\omega k\gamma}\,e^{-k\gamma\,|y+b|+i\frac{\omega}{u}z}. \tag{6,2}$$

Вектор Π^1_ω описывает свободное поле, которое следует добавить к Π^0_ω для удовлетворения граничным условиям на металлических пластинах. Вектор Π^1_ω можно выразить через токи, наведенные источником на пластинах. Из геометрии задачи видно, что наведенные токи будут иметь только составляющую по оси y; поэтому

$$\Pi^1_{\omega y}(y, z) = \frac{i}{\omega}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\,\frac{e^{ikR_m}}{R_m}\,j_m(\eta), \tag{6,2'}$$

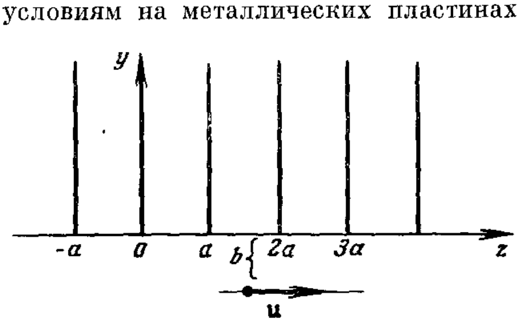

Рис. 8.

где R_m — расстояние от точки наблюдения (x, y, z) до точки (ξ, η) на поверхности пластины номера m

$$R_m = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-am)^2}, \tag{6,3}$$

а $j_m(\eta)$ — спектральная компонента тока на той же пластине. Эти формулы отличаются от формулы (3,4) в задаче о полуплоскости тем, что поле определяется токами, наведенными на всех пластинах.

Так как токи на пластинах наводятся источником, скорость которого равна u, имеет место соотношение

$$j_m(t) = j_0\left(t - \frac{ma}{u}\right). \tag{6,4}$$

Это соотношение позволяет выразить токи, наведенные на любой пластине, через ток на одной из них, скажем, на нулевой. Равенство (6,4) в фурье-компонентах имеет вид

$$j_{m\omega}(y) = e^{i\frac{\omega}{u}am}\,j_{0\omega}(y). \tag{6,5}$$

Учитывая это соотношение, а также представляя $j_{0\omega}(y)$ в виде разложения в интеграл Фурье по y (см., например, формулу (3,8)), мы можем выражение (6,2) для вектора Герца рассеянного поля привести к виду

$$\Pi^1_{\omega y} = -\frac{2\pi}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\,\frac{e^{iwy}}{v}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{iv\,|z-am|+i\frac{\omega}{u}am}\,dw. \tag{6,6}$$

Сумма по m под знаком интеграла может быть вычислена, если ограничиться исследованием поля на каком-нибудь одном фиксированном периоде. Выберем $(n+1)$-й пространственный период, т. е. будем рассматривать область значений z, ограниченную неравенствами

$$na \leqslant z \leqslant (n+1)\,a. \tag{6,7}$$

Тогда суммирование по m дает

$$\Pi^1_{\omega y}(y,\,z) = -\frac{2\pi i}{\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(w)\,\frac{\sin\{v\,[z-a(n+1)]\} - e^{i\frac{\omega}{u}a}\sin[v\,(z-an)]}{\cos(av) - \cos\left(a\frac{\omega}{u}\right)}\,e^{i\frac{\omega}{u}an + iwy}\,\frac{dw}{v}. \tag{6,8}$$

Требуя обращения в нуль тангенциальной составляющей полного электрического поля на пластинах (при $z = an$, $y > 0$) и отсутствия тока на продолжении пластин ($y < 0$), приходим к системе парных интегральных уравнений для фурье-амплитуды $F(w)$ тока, наведенного на нулевой пластине:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(w)\,e^{iwy}\,dw = 0 && \text{при} \quad y < 0, \\ &\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(w)\,L(w)\,e^{iwy}\,dw = \frac{q\omega}{2\pi i u}\,e^{-k\gamma(y+b)} && \text{при} \quad y > 0, \end{aligned}\right\} \tag{6,9}$$

где

$$L(w) = \frac{v\sin va}{\cos av - \cos a\frac{\omega}{u}} \equiv \frac{2}{a}\,v^2\frac{\sin va}{va}\,\frac{\frac{a}{2}\left(v-\frac{\omega}{u}\right)}{\sin\left[\frac{a}{2}\left(v-\frac{\omega}{u}\right)\right]}\,\frac{\frac{a}{2}\left(v+\frac{\omega}{u}\right)}{\sin\frac{a}{2}\left[\left(v+\frac{\omega}{u}\right)\right]}\,\frac{1}{w^2+k^2\gamma^2}. \tag{6,10}$$

Решение системы уравнений (6,9) может быть получено тем же методом, что и в ранее рассмотренных задачах. Представим ядро $L(w)$ в (6,9) в виде

$$L(w) = \frac{2}{a}\,v^2\,\frac{L_1(w)\,L_2(w)}{w^2+k^2\gamma^2}, \tag{6,11}$$

где $L_1(w)$, как обычно, голоморфно в верхней полуплоскости комплексного переменного w и не имеет там нулей, а $L_2(w)$ обладает теми же свойствами в нижней полуплоскости w. Тогда решение системы (6,9) может быть представлено в виде

$$F(w) = \frac{aq\omega\gamma}{4\pi^2 iu\,(1+i\gamma)\,L_1(ik\gamma)}\,e^{-k\gamma b}\,\frac{1}{(k-w)\,L_2(w)}. \tag{6,12}$$

Заметим, что, в отличие от ранее рассмотренных задач, ядро (6,10) имеет полюсы при $w = \pm\, ik\gamma$, а выражение (6,12) для фурье-компоненты $F(w)$ наведенного тока регулярно в этих точках. Напомним, что в предыдущих задачах полюс функции $F(w)$ соответствовал изображению движущегося источника.

Функции $L_1(w)$ и $L_2(w)$, входящие в разбиение (6,11), можно представить в виде бесконечных произведений:

$$\begin{aligned} L_{1,2}(w) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{wa}{n\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{ka}{n\pi}\right)^2 - 1}\right)e^{\pm i\frac{wa}{n\pi}} \times \\ \times\left\{\left[\frac{wa}{2n\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{ka}{2n\pi}\right)^2 - \left(1+\frac{a\omega}{2n\pi u}\right)^2}\right]e^{\pm i\frac{a}{2n\pi}\left(w-\frac{\omega}{u}\right)} \times \right. \\ \left. \times\left[\frac{wa}{2n\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{ka}{2n\pi}\right)^2 - \left(1-\frac{a\omega}{2n\pi u}\right)^2}\right]e^{\pm i\frac{a}{2n\pi}\left(w+\frac{\omega}{u}\right)}\right\}^{-1}, \end{aligned} \tag{6,13}$$

где для L_1 следует брать верхние знаки, для L_2 — нижние. В представлении (6,13) считается, что значения радикалов выбраны так, чтобы выполнялись условия

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Im}\sqrt{\left(\frac{ka}{n\pi}\right)^2-1}>0,\\ \operatorname{Im}\sqrt{\left(\frac{ka}{2n\pi}\right)^2-\left(1\pm\frac{a\omega}{2n\pi u}\right)^2}>0 \end{aligned}\right\} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (6,14)$$

Соотношения (6,12) и (6,13) полностью определяют искомую функцию $F(w)$, а следовательно, и поле излучения заряженной нити. Компоненты поля излучения выражаются через $\Pi^1_{y\omega}(y,\ z)$ по формулам

$$H^1_{\omega x}=ik\frac{\partial\Pi^1_y}{\partial z},\qquad E^1_{\omega z}=\frac{\partial^2\Pi^1_y}{\partial z\,\partial y},\qquad E^1_{\omega y}=\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Pi^1_y. \qquad (6,15)$$

Далее мы ограничимся вычислением лишь единственной отличной от нуля составляющей излучаемого магнитного поля H^1_x. Для полосы $an\leqslant z\leqslant a(n+1)$ согласно формулам (6,8), (6,12) и (6,15) получаем выражение

$$H^1_x(y,\ z)=-\frac{qk\gamma e^{-k\gamma b+i\frac{\omega}{u}an}}{\pi iu(1+i\gamma)L_1(ik\gamma)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{\cos\{v[z-a(n+1)]\}-$$

$$-e^{i\frac{\omega}{u}a}\cos[v(z-an)]\}\sqrt{\frac{k+w}{k-w}}\,\frac{L_1(w)}{\sin(va)\cdot(w^2+k^2\gamma^2)}\,e^{iwy}\,dw. \qquad (6,16)$$

Интегральное представление поля излучения (6,16) можно свести к представлению в виде ряда вычетов в особенностях подынтегрального выражения. При этом различным системам полюсов в верхней и нижней полуплоскостях комплексного переменного w отвечает различный характер поля в области между металлическими пластинами ($y>0$) и в свободном полупространстве ($y<0$).

При $y>0$ величина H^1_x определяется полюсами первого порядка подынтегрального выражения (6,16) в верхней полуплоскости переменного w:

$$w=ik\gamma$$

и

$$w_m=\sqrt{k^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}\qquad(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (6,17)$$

Вычет в полюсе $w=ik\gamma$ гасит вклад H^0_x в выражении для полного поля, которое, таким образом, представляется суперпозицией симметричных электрических волноводных волн, уходящих от открытого конца ячейки:

$$H_{x\omega}(y,\ z)=\sum_{m=0}^{\infty}R_m\cos\frac{m\pi}{a}z\,e^{iw_my}. \qquad (6,18)$$

Коэффициенты возбуждения собственных волноводных волн равны

$$\left.\begin{aligned} R_m&=(-1)^{mn}\alpha_m\frac{2qk\gamma e^{-k\gamma b+i\frac{\omega}{u}an}(k+w_m)L_1(w_m)\left[1-(-1)^me^{i\frac{\omega}{u}a}\right]}{ua(1+i\gamma)w_m(w_m^2+k^2\gamma^2)L_1(ik\gamma)},\\ \alpha_m&=\begin{cases}-\dfrac{1}{2} & \text{при}\quad m=0,\\ 1 & \text{при}\quad m\neq 0.\end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (6,19)$$

Отметим здесь, что среди возбуждаемых волноводных волн присутствует основная волна типа ТЕМ, распространяющаяся между пластинами со скоростью света. Поле этой волны (соответствующее слагаемому с $m = 0$ в сумме (6,18)) не зависит от координаты z. Волна типа ТЕМ возбуждается и распространяется без затухания в глубь каждой волноводной ячейки при сколь угодно малых значениях частот. Отметим, что коэффициент возбуждения R_m содержит множитель $1-(-1)^m e^{i\frac{\omega}{u}a}$, который может изменяться от нуля до максимального значения, равного двум, в зависимости от величины $\omega a/u$. Величина $\omega a/u$ имеет простой физический смысл. Действительно, a/u есть время, за которое источник проходит один период структуры. Поэтому величина $\frac{a}{u}\omega$ пропорциональна отношению времени прохождения одного периода гребенки к периоду излученной волны. Очевидно, величина этого отношения определяет работу, совершаемую возбуждаемой волной над источником поля на периоде структуры. Эта работа максимальна, если выполняется соотношение

$$\frac{\omega}{u}a+m\pi=(2k+1)\pi, \tag{6,20}$$

где k — любое целое число, и обращается в нуль при выполнении условия

$$\frac{\omega a}{u}+m\pi=2k\pi. \tag{6,21}$$

В частности, основная волна ($m = 0$) не будет возбуждаться, если время прохождения источником одного периода равно или кратно периоду излучаемой волны.

Из формул (6,18) и (6,19) легко видеть, что поля в соседних плоских волноводах, так же как и токи на соседних пластинах, отличаются на фазовый множитель $e^{i\frac{\omega a}{u}}$. Полный поток энергии, излучаемой в «волновод», можно получить, вычислив интеграл

$$W_\omega=c\int\limits_{na}^{(n+1)a}H_{\omega x}E_{-\omega z}\,dz=\frac{ac}{2k}\sum_m w_m|R_m|^2, \tag{6,22}$$

где суммирование распространяется лишь на такие значения m, для которых продольное волновое число w_m действительно на данной частоте ω.

Рассмотрим теперь поле излучения заряженной нити в свободном полупространстве ($y<0$). В этом случае излучаемое поле определяется полюсами подынтегрального выражения, лежащими в нижней полуплоскости комплексного переменного w:

$$w=-ik\gamma,\quad \hat{w}_m=\sqrt{k^2-\left(\frac{2\pi m}{a}-\frac{\omega}{u}\right)^2}\quad (m=\pm1,\ \pm2,\ \ldots). \tag{6,23}$$

Вычисляя интеграл в (6,16) с помощью вычетов в указанных особенностях, получаем для поля излучения в свободном полупространстве выражение

$$H_x^1=-\frac{qce^{-k\gamma b}}{u^2(1+i\gamma)^2}\frac{L_1(-ik\gamma)}{L_1(ik\gamma)}e^{k\gamma y+i\frac{\omega}{u}z}-$$
$$-\frac{2iqk\gamma e^{-k\gamma b}}{u(1+i\gamma)L_1(ik\gamma)}\sum_m\frac{\operatorname{Res}L_1(\hat{w}_m)}{\hat{w}_m^2+k^2\gamma^2}\,\frac{\frac{\omega}{u}-\frac{2\pi m}{a}}{k-\hat{w}_m}\,e^{i\hat{w}_m y+i\left(\frac{\omega}{u}-\frac{2\pi m}{a}\right)z}, \tag{6,24}$$

где $\operatorname{Res} L_1(\hat{w}_m)$ — вычет функции $L_1(w)$ в полюсе $w=\hat{w}_m$. Эта величина может быть представлена в виде

$$\operatorname{Res} L_1(\hat{w}_m)=\lim_{w\to\hat{w}_m}[(w-\hat{w}_m)L_1(w)]=\frac{\hat{w}_m^2+k^2\gamma^2}{2\hat{w}_m L_2(\hat{w}_m)}\,. \tag{6,25}$$

Выражение (6,25) оказывается более удобным при вычислении интенсивности излучения, так как квадрат модуля выражения (6,25) может быть представлен в замкнутом виде.

В формулу (6,24) не входит номер пластин, и, таким образом, оно представляет поле в нижнем полупространстве для любых значений z. Первое слагаемое, соответствующее полюсу $w=-ik\gamma$, определяет поверхностную волну, электромагнитное поле которой распространяется со скоростью источника и затухает по экспоненте при удалении от краев пластин. Слагаемые в сумме по m отвечают полюсам $\hat{w}_m$ (6,23). Для действительных значений $\hat{w}_m$ они описывают плоские электромагнитные волны, излучаемые источником при движении вдоль «гребенки». У каждой из таких волн проекция волнового вектора на ось z определяется равенством

$$k_{zm}=\frac{\omega}{u}-\frac{2\pi m}{a}=k\cos\theta_m, \tag{6,26}$$

где θ_m — угол, который волновой вектор излучаемой волны составляет с осью z. Из последнего равенства можно получить следующее выражение для излучаемой частоты ω при наблюдении под заданным углом θ_m:

$$\omega=\frac{2\pi m\dfrac{u}{a}}{1-\dfrac{u}{c}\cos\theta_m}\,. \tag{6,27}$$

Это выражение имеет простой физический смысл. Время прохождения источником одного пространственного периода структуры равно $T=a/u$. Введем «частоту прохождения» $\Omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\frac{u}{a}$. Легко видеть, что в числителе формулы (6,27) стоит целое кратное частоте прохождения. В знаменателе же стоит характерный множитель, дающий допплеровское смещение частоты движущегося источника. При равномерном прохождении источника мимо системы равноотстоящих пластин происходит периодическое наведение токов на ближайших к источнику пластинах. Наведенные токи и являются источником периодически изменяющейся яркости, причем частота изменения яркости равна частоте прохождения $2\pi\frac{u}{a}$ и целым кратным этой величине, а скорость совпадает со скоростью движения заряженной нити.

Из проведенного рассмотрения следует, что на заданной частоте ω излучается конечное число волн, направление распространения которых составляет различные углы θ_m со скоростью источника. Число изучаемых волн можно оценить с помощью простого требования

$$-1<\cos\theta_m=\left(\frac{1}{\beta}-\frac{2\pi m}{ka}\right)<1, \tag{6,28}$$

откуда получаем

$$\frac{ka}{2\pi}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)>m>\frac{ka}{2\pi}\left(\frac{1}{\beta}-1\right). \tag{6,29}$$

Таким образом, число Δm линий, излучаемых на частоте ω, определяется целой частью величины

$$\frac{ka}{\pi}=2\frac{a}{\lambda}, \tag{6,30}$$

где $\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}$ — длина излучаемой на частоте ω волны. Интересно отметить, что на данной частоте ω число пространственных гармоник, излучаемых в свободное пространство, равно числу волноводных волн, возбуждаемых в резонансной области между пластинами. Если задать «порядок» спектральной линии m, то из формул (6,27) — (6,29) вытекает неравенство, определяющее полосу частот для заданного значения скорости источника:

$$\frac{\beta m}{1-\beta}\geqslant\frac{ka}{2\pi}\geqslant\frac{\beta m}{1+\beta}. \tag{6,31}$$

Это неравенство допускает простое графическое истолкование. На рис. 9 по оси ординат отложены значения $\beta=u/c$, а по оси абсцисс — значения

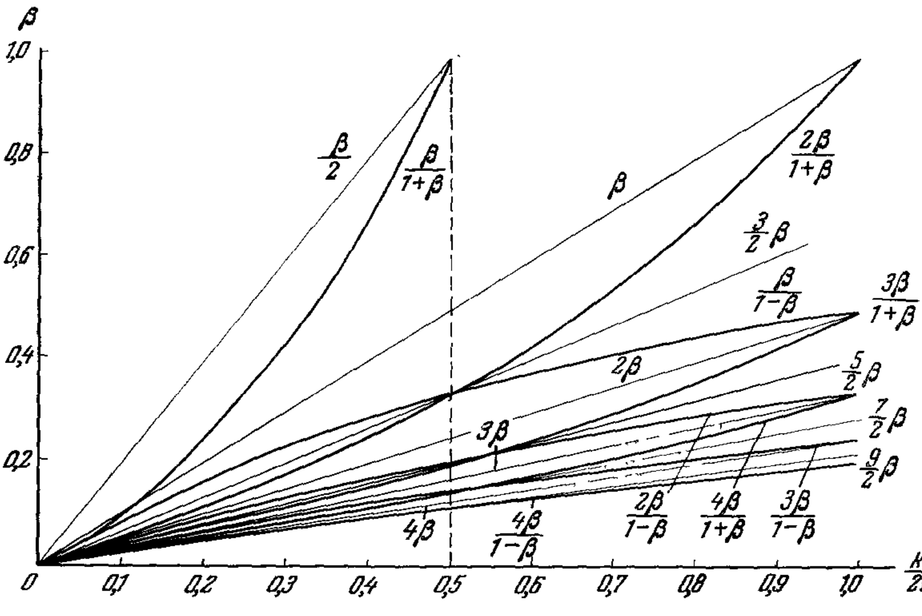

Рис. 9.

$ka/2\pi$. Область значений этих параметров, при которых возможно излучение спектральной линии номера m, ограничена двумя кривыми, отмеченными этим номером. Из графика видно, что точка, соответствующая фиксированным значениям β и $ka/2\pi$, может оказаться общей для областей излучения с разными значениями m.

Приведенные выше простые соотношения, определяющие частоту излучения, число спектральных линий и характерную зависимость свойств излучения от скорости источника (формула (6,27) и следующие за ней) не зависят от конкретного вида рассматриваемой модели, а являются общими для всех линейных периодических сред, т. е. таких сред, свойства которых периодически меняются при изменении какой-нибудь одной координаты, например z. Рассмотрим излучение заряда в такой среде. Пусть заряд, движущийся в периодической среде, излучает квант света с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и энергией $\hbar\omega$. В процессе излучения периодическая среда может принимать на себя целое кратное от элементарного импульса $\hbar\mathbf{k}_0$, где $\mathbf{k}_0$ — вектор обратной решетки

$$\mathbf{k}_0 = \frac{2\pi}{a}\mathbf{z}_0, \tag{6,32}$$

a — период решетки, $\mathbf{z}_0$ — единичный вектор, направленный по оси z. В процессе излучения выполняются законы сохранения энергии и импульса

$$\begin{gathered} \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \Delta\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} + n\hbar\mathbf{k}, \\ E_1 - E_2 = \Delta E = \hbar\omega. \end{gathered} \tag{6,33}$$

Умножим первое из равенств (6,33) на $\mathbf{u}$. Воспользовавшись соотношением $\mathbf{u}\Delta\mathbf{p} = \Delta E$, справедливым, если скорость частицы при излучении мало меняется, получим

$$\mathbf{u}\Delta\mathbf{p} = \Delta\mathrm{E} = \hbar\mathbf{k}\mathbf{u} + n\hbar\mathbf{k}_0\mathbf{u} = \hbar\omega. \tag{6,34}$$

Если распространение излученного света в периодической среде можно охарактеризовать средним по периоду значением диэлектрической постоянной ε, то

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}, \tag{6.35}$$

и мы получаем

$$\omega = \frac{n(\mathbf{k}_0\mathbf{u})}{1 - \frac{u}{c}\sqrt{\varepsilon}\cos\theta}. \tag{6,36}$$

Если вектор скорости частицы $\mathbf{u}$ параллелен вектору обратной решетки $\mathbf{k}_0$ а $\varepsilon = 1$, мы получаем формулу (6,27). Несмотря на квантовый вывод, для излучаемой частоты получается чисто классическое выражение.

При $\omega a/u \ll 1$ все члены в сумме по m в выражении (6,27) затухают быстрее, чем первое слагаемое, определяющее поверхностную волну. В этом случае применимо так называемое «импедансное приближение», при котором поле в свободном пространстве можно определить, заменив «гребенку» на плоскую поверхность $y = 0$ с заданным на ней значением импеданса (отношение тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей). Точная формула (6,24) позволяет оценить пределы справедливости такого приближения. Из выражения (6,24) нетрудно вычислить интенсивность излучения в свободное пространство.

Мы рассмотрели излучение заряженной нити (или плоской модулированной электронной волны), движущейся вдоль «гребенки». Задача об излучении линейного тока (или плоской модулированной волны тока) решается аналогично. Физические отличия этих двух случаев заключаются в различной поляризации поля источников (и поля излучения) [19, 20].

В заключение рассмотрим еще задачу об излучении линейного источника, влетающего или вылетающего из гребенки по оси одного из полуограниченных волноводов, образующих периодическую структуру [21]. В этом случае поле источника не обладает периодичностью вдоль структуры и поэтому резонансное излучение в свободном пространстве отсутствует. Переход источника из области, занимаемой гребенкой, в свободное пространство сопровождается характерной вспышкой излучения, имеющего много общего с переходным излучением. В предельном случае, когда период структуры становится много меньше длины волны излучаемого поля, мы получаем решение задачи о переходном излучении для плоской поверхности с анизотропной проводимостью.

Геометрия задачи изображена на рис. 10. Уравнениями пластин, образующих гребенку, являются $y > 0$, $z = a\left(n - \frac{1}{2}\right)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Источник влетает в систему пластин вдоль оси y; положение его определяется уравнением $y = ut$. Ограничимся рассмотрением лишь случая заряженной нити.

В силу периодичности структуры вдоль оси z все величины, характеризующие поле, могут быть представлены в виде суперпозиции функций вида

$$f_{n\mu}(y,\ z) = e^{i\mu n} f_{\mu}(y,\ z), \tag{6,37}$$

где величина μ заключена в пределах от $-\pi$ до π, $f_{\mu}(y,\ z)$ — периодически зависит от z с периодом структуры a, n — номер ячейки структуры, соответствующей изменению z в пределах

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) a < z < \left(n + \frac{1}{2}\right) a. \tag{6,38}$$

Функция $f_{n,\mu}$ удовлетворяет соотношению

$$f_{n+1,\mu}(y,\ z) = e^{i\mu} f_{n,\mu}(y,\ z). \tag{6,39}$$

Аналогичным соотношениям удовлетворяют и токи j, наводимые на пластинах при влете или вылете источника. Исходя из сказанного, ток, наведенный на пластине номера n, будем искать в виде

$$j_n(y) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu n} j_{0\mu}(y)\, d\mu. \tag{6,40}$$

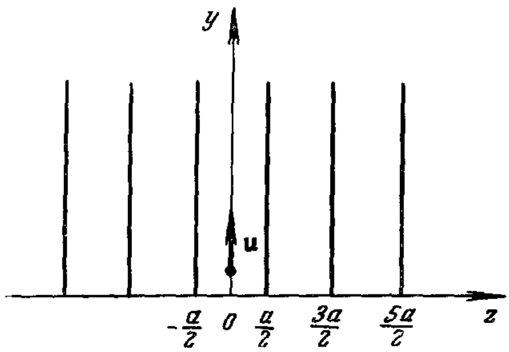

Рис. 10.

Полное поле будем описывать с помощью вектора Герца

$$\Pi_{\mu,n} = \Pi^0_{\mu,n} + \Pi^1_{\mu,n}, \tag{6,41}$$

причем симметрия задачи позволяет выбрать все векторы направленными по оси y; здесь *)

$$\Pi^0_{\mu,n}(y,z) = \frac{1}{2\pi} e^{i\mu n} \Pi^0(y,\ z - an), \tag{6,42}$$

а $\Pi^0(y,\ z)$ — вектор Герца, описывающий поле заряженной нити в свободном пространстве:

$$\Pi^0 = \frac{iq}{k\gamma\omega} e^{-k\gamma|z| + i\frac{\omega}{u}y}. \tag{6,43}$$

При таком выборе «падающей волны» поле в центральном волноводе $-\frac{a}{2} \leqslant z \leqslant \frac{a}{2}$ совпадает с полем источника в свободном пространстве, а поле в остальных волноводах получается периодическим продолжением Π^0 по координате z. Поскольку функция $\Pi^0_n(y,\ z)$, определяющая «падающую» волну в ячейке номера n, удовлетворяет соотношению

$$\Pi^0_n(y,\ z) = \int_{-\pi}^{\pi} \Pi^0_{\mu n}(y,\ z)\, d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu n} \Pi^0(y,\ z - an)\, d\mu, \tag{6,44}$$

аналогичному формуле (6,40), эта функция отлична от нуля лишь для центрального волновода. Поэтому принятый вид падающей волны следует рассматривать как удобный математический прием, позволяющий единообразно записать падающее и рассеянное поля.

Вектор Герца поля излучения выражается в виде интеграла от наведенных токов, причем соотношение (6,40) позволяет выразить вектор Герца Π^1 через ток, наведенный на нулевой пластине:

$$\Pi^1_{\mu,n} = -\frac{2\pi i}{\omega} e^{i\mu n} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} F_{\mu,0}(w) \frac{\sin\left\{v\left[z - a\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]\right\} - e^{i\mu} \sin\left\{v\left[z - a\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\cos av - \cos \mu} e^{iwy} \frac{dw}{v} \tag{6,45}$$

$$\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) a \leqslant z \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right) a\right),$$

*) Запись нулевого поля в виде (6,42) допустима, так как после суммирования по μ в пределах $(-\pi,\ \pi)$ мы получаем выражение (6,43).

где $F_{\mu,0}$ — компонента Фурье тока, наведенного па пластине номера нуль, а контур интегрирования по переменной w огибает точку $w = \omega/u$ снизу.

Требования равенства нулю тангенциальной компоненты полного электрического поля на пластинах и отсутствие тока на их продолжении приводят, как обычно, к системе парных интегральных уравнений для функции $F_{\mu,0}(w)$. Решение этой системы уравнений получается обычным образом и имеет вид

$$F_{\mu,0}(w) = -\frac{q}{8\pi^3 i}\,\frac{M_2\left(\frac{\omega}{u}\right)}{M_2(w)}\,\frac{\operatorname{ch}(k\gamma a)-\cos\mu}{\operatorname{sh}(k\gamma a)}\,\frac{1}{w-\frac{\omega}{u}}\,e^{-k\gamma\frac{a}{2}}. \tag{6,46}$$

В этой формуле функция $M_{1,2}(w)$ удовлетворяет соотношениям

$$M_{1,2}(w) = \frac{L_{1,2}(w)}{w \pm \frac{\omega}{u}}, \tag{6,47}$$

а функции $L_{1,2}(w)$ определяются равенством

$$\frac{1}{\frac{\mu^2}{a^2}-v^2}\,\frac{\sin(va)}{va}\,\frac{\frac{1}{2}(\mu+va)}{\sin\left[\frac{1}{2}(\mu+va)\right]}\,\frac{\frac{1}{2}(\mu-va)}{\sin\left[\frac{1}{2}(\mu-va)\right]} = \frac{L_1(w)\,L_2(w)}{w^2-\frac{\omega^2}{u^2}}. \tag{6,48}$$

При этом функция L_1 голоморфна и не обращается в нуль в верхней полуплоскости комплексного переменного w, а функция L_2 обладает теми же свойствами в нижней полуплоскости w. Разбиение (6,48) на множители $L_{1,2}$ во многом напоминает разбиение на множители ядра $L(w)$ (6,10) в задаче о параллельном пролете источника под гребенкой. В этом легко убедиться, сделав в (6,10) замену $\frac{a\omega}{u} \to \mu$. Поэтому мы не приводим здесь явного выражения для факторизованных функций L_1 и L_2, удовлетворяющих соотношению (6,48).

Полученное интегральное представление решения (6,45)—(6,48) полностью определяет поле излучения, возникающего при влете или вылете линейного источника из рассматриваемой периодической структуры. Укажем основные особенности излучаемого поля. В области между пластинами ($y > 0$) поле в каждом из волноводов представляет собой суперпозицию собственных волноводных гармоник, распространяющихся от открытого конца в глубь волновода. Так, в волноводе номера n составляющая магнитного поля H_x может быть записана в виде

$$H_{xn} = \sum_{m=1}^{\infty}\left\{P_{nm}\sin\left[\frac{\pi(2m-1)}{a}(z-an)\right]e^{iw_{2m-1}y} + Q_{mn}\cos\left[\frac{2\pi m}{a}(z-an)\right]e^{iw_{2m}y}\right\}, \tag{6,49}$$

где продольные волновые числа

$$w_m = \sqrt{k^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2},$$

а P_{nm} и Q_{nm} — коэффициенты возбуждения собственных волн. Отметим также, что амплитуды возбуждаемых волн содержат экспоненциальные множители $\exp\left(-k\gamma\frac{a}{2}\right)$, характерные для всех задач дифракционного излучения.

Поле излучения в свободном пространстве $y < 0$ на больших расстояниях от периодической структуры имеет вид цилиндрической волны, расходящейся от открытого конца центрального волновода.

Приведем выражение для интенсивности излучения, сопровождающего влет заряженной нити в периодическую структуру, в предельном случае $a \to 0$. Такой предельный случай интересен в том отношении, что рассматриваемая структура при этом становится эквивалентной некоторой проводящей поверхности $y = 0$. Проводимость этой поверхности анизотропна; она равна бесконечности в направлении оси x и равна нулю вдоль оси z:

$$I_\omega(\theta) = \frac{2q^2\beta^2}{\pi\omega}\,\frac{(1-\beta^2)\operatorname{ctg}^2\theta\,(1-\cos\theta)^2}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}. \tag{6,50}$$

Здесь угол θ отсчитывается от оси y. Выражение (6,50) дает интенсивность переходного излучения заряженной нити при пересечении анизотропно проводящей плоскости. При $\beta \to 1$ интенсивность переходного излучения (6,50) обращается в нуль, в отличие от интенсивности излучения при влете в изотропный металл. Это объясняется тем, что электрическое поле заряженной нити, движущейся с релятивистской скоростью по нормали к поверхности, имеет составляющую только в том направлении, по которому проводимость поверхности равна нулю. Поэтому на поверхности не возбуждается никаких токов и, следовательно, отсутствует излучение. Отметим, что формула (6,50) описывает излучение и при вылете источника, если произвести в ней замену β на $-\beta$. Случай, когда источником излучения является токовая нить, рассматривается аналогично. При этом в предельном случае $a \to 0$ выражение для интенсивного излучения во внешнее пространство определяется формулой

$$I_\omega(\theta) = \frac{2I^2\beta^2c^2}{\pi\omega}\frac{\cos^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}. \tag{6,51}$$

Это выражение совпадает с формулой для интенсивности переходного излучения, сопровождающего влет или вылет нити с током из однородной металлической среды в вакуум. Совпадение обусловлено тем, что электрическое поле нити с током имеет единственную отличную от нуля составляющую E_x, направленную по оси с бесконечной проводимостью.

* * *

Мы рассмотрели различные двумерные задачи дифракционного излучения, допускающие точные решения. Это излучение возникает при равномерном движении источника поля мимо оптической неоднородности. В качестве источников поля мы рассматривали однородно заряженные нити или линейные токи (или, что то же самое, плоские модулированные по гармоническому закону распределения токов). В качестве оптических неоднородностей рассматривались идеально проводящие поверхности различной формы (плоские экраны, волноводы и периодические структуры). Перечислим общие для всех рассмотренных случаев характерные свойства дифракционного излучения.

1. Энергия излучения не зависит от массы частицы, а определяется ее скоростью и зарядом. Это свойство излучения является общим для всех задач, где рассматривается излучение частиц, движущихся по заданному закону, например для излучения Вавилова — Черенкова и переходного излучения.

2. Характер дифракционного излучения зависит от вида рассеивающего препятствия. Электромагнитное поле излучения в свободном пространстве на расстояниях, превышающих размер зоны формирования излучения, представляет собой цилиндрические волны, расходящиеся от края рассеивающего тела. Если препятствия периодически расположены по направлению движения источника, то интерференция цилиндрических волн, расходящихся от отдельных неоднородностей, приводит к образованию плоских волн излучения.

Если рассеивающие тела образуют резонансную систему, в которой могут возбуждаться собственные волны, пролетающий источник возбуждает внутри рассеивающей системы дискретный набор собственных гармоник.

3. Угловое и частотное распределения излучения определяются скоростью источника и формой рассеивающего препятствия. В ультрарелятивистском случае излучаются в основном высокие частоты. Излучение происходит в узких угловых интервалах, определяемых направлением движения быстрого источника, а также направлением движения его зеркального изображения.

4. Интенсивность излучения на больших частотах спадает по закону $\exp\left(-2\frac{\omega}{u}\sqrt{1-\beta^2}a\right)$, где a — характерный прицельный параметр.

Этот множитель определяет как границу спектра излучения, так и зависимость излучения от прицельного параметра.

5. Потери энергии линейных источников на дифракционное излучение при малых скоростях пропорциональны первой степени скорости. В релятивистском предельном случае потери энергии на излучение зависят от вида линейного источника и от формы препятствия.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., Физматгиз, 1960.
2. И. Е. Тамм, И. М. Франк, ДАН СССР **14**, 107 (1937).
3. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ **16**, 15 (1946).
4. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ **33**, 1403 (1957); **37**, 527 (1959).
5. В. А. Фок, Матем. сборник **14**, 3 (1944); N. Wiener, E. Hopf, Sitzb. Preuss. Acad. Wiss., 696 (1931).
6. Л. А. Вайнштейн, Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода, М., Изд-во «Сов. радио», 1953.
7. В. Нобл, Метод Винера — Хопфа, М., ИЛ, 1962.
8. А. Зоммерфельд, Mathem. Ann. **47**, 317 (1896).
9. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, ЖТФ **34**, 11 (1964). Дифракционное излучение линейного источника, пролетающего вблизи края идеально проводящей полуплоскости.
10. Д. М. Седракян, ЖТФ **34**, 718 (1964). Излучение линейного источника, пересекающего при своем движении плоский полубесконечный экран.
11. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, ЖТФ **34**, 704 (1964). Излучение линейного источника при пролете через открытый конец плоского волновода.
12. Е. В. Авдеев, Дипломная работа (МФТИ, 1965).
13. Ю. М. Айвазян, Изв. АН Арм. ССР **17**, 81 (1964). Возбуждение плоского полубесконечного волновода линейным источником, пролетающим мимо открытого конца.
14. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, Я. Б. Файнберг, ДАН СССР **73**, 55 (1950).
15. Я. Б. Файнберг, Н. А. Хижняк, ЖЭТФ **32**, 883 (1957).
16. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ **35**, 1435 (1958).
17. М. Л. Тер-Микаэлян, ДАН СССР **134**, 318 (1960); Изв. АН Арм. ССР **14**, 103 (1961).
18. Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина, Изв. высш. учебн. завед. (Радиофизика) **6**, 407 (1963).
19. Г. В. Воскресенский, Б. М. Болотовский, ДАН СССР **156**, 770 (1964). Поле заряженной нити, равномерно движущейся вблизи от системы идеально проводящих полуплоскостей.
20. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, ЖТФ **34**, 1856 (1964). Излучение линейного тока при пролете вблизи от системы полуплоскостей.
21. Ю. М. Айвазян, Д. М. Седракян, Изв. АН Арм. ССР **18** (1), 117 (1965). Излучение линейного источника при влете и вылете из системы идеально проводящих полуплоскостей.
22. Е. В. Бакланов, ДАН СССР **153**, 570 (1963).
23. Д. М. Седракян, Дифракционное излучение линейных и точечных источников, Диссертация (ФИАН, 1964).
24. Ю. М. Айвазян, Дифракционное излучение источников, движущихся с постоянными и переменными скоростями, Диссертация (ФИАН, 1965).
25. А. Н. Казанцев, Г. И. Сурдутович, ДАН СССР **147**, 574 (1963).
26. Д. М. Седракян, Изв. АН Арм. ССР **16**, 115 (1963). Та же тема, что и в работе [9].
27. Д. М. Седракян, Оптика и спектроскопия **18**, 360 (1965). Дифракция излучения Вавилова—Черенкова на полуплоскости.
28. Э. Л. Бурштейн, Л. С. Соловьев, ДАН СССР **109** (3), 473 (1956).