

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПЛАЗМЕ

В. Н. Цытович

ВВЕДЕНИЕ

а) Предмет рассмотрения

Интерес к проблемам теории нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в плазме и нелинейных эффектов в плазме возник сравнительно давно (см. ^{1, 2}). Однако лишь в последние годы теория эффектов нелинейного взаимодействия получила бурное развитие, приведшее к построению ясных физических представлений о механизмах такого взаимодействия. Такое развитие связано с попытками решения ряда проблем физики турбулентной плазмы, которые усиленно стимулировались быстро развивающимися экспериментальными исследованиями. Следует с самого начала ограничить круг вопросов физики нелинейных эффектов, которые будут предметом настоящего обзора. В дальнейшем мы ограничимся нелинейными эффектами, возникающими в плазме в отсутствие соударений. Это означает, что будут рассматриваться лишь такие достаточно быстрые процессы нелинейного взаимодействия, которые протекают за времена, намного меньшие времени соударений τ_{coll} . Обширный круг проблем нелинейных эффектов, в которых существенную роль играют соударения, в частности, зависимость эффективного числа соударений от электромагнитных полей и др., рассмотрен в обзоре В. Л. Гинзбурга и А. В. Гуревича ³. Далее мы ограничимся рассмотрением взаимодействия волн, имеющих случайные фазы. Последнее означает, что характерное время, в течение которого проявляется нелинейное взаимодействие, намного больше характерного времени смены фаз волн. В общем случае целесообразно говорить не о характерном времени смены фаз, а, более точно, о характерном времени корреляции поля τ_K . Итак, будем предполагать, что время нелинейного взаимодействия волн удовлетворяет неравенствам

$$\tau_K \ll \tau \ll \tau_{\text{coll}}. \quad (1)$$

Другое существенное ограничение будет состоять в предположении о слабой нелинейности. Для этого, вообще говоря, требуется, чтобы энергия волн в плазме не превосходила некоторого значения W_{max} , которое определяется возможностью разложения нелинейного взаимодействия по амплитудам взаимодействующих волн. В приближении слабой нелинейности следует рассматривать взаимодействие линейных колебаний и волн плазмы, спектры которых хорошо известны (см. ⁴⁻⁶). Особый интерес представляют слабозатухающие волны, так как такие волны легко возбуждаются и энергия, заключенная в них, может быть высокой. Интенсивность сильнозатухающих волн весьма мала и имеет порядок величины

интенсивности тепловых флуктуаций. Существенное предположение, ограничивающее круг вопросов, являющихся предметом дальнейшего изложения, состоит в том, что энергия взаимодействующих волн намного превосходит энергию равновесных флуктуаций W_T . Если W есть плотность энергии волн в см^3 , то требуемые условия имеют вид

$$W_T \ll W \ll W_{\max}. \quad (2)$$

Следует подчеркнуть, что значение $W_{\max}$ практически часто оказывается весьма высоким, и приближение слабой нелинейности описывает взаимодействие волн в широком диапазоне значений интенсивности W .

В условиях $W \gg W_T$, как правило, взаимодействие частиц между собой посредством волн, а также нелинейное взаимодействие волн между собой доминируют над парными соударениями. Именно в этих условиях коллективные процессы в плазме начинают играть доминирующую роль. Обычно в условиях $W \gg W_T$ плазму называют турбулентной, а при $W \ll W_{\max}$ — слабо турбулентной. Мы здесь ограничимся анализом результатов по взаимодействию волн в слабо турбулентной плазме. Здесь уместно остановиться кратко на истории исследования по теории нелинейных эффектов. Как уже отмечалось, нелинейные эффекты для поперечных волн в плазме рассматривались сравнительно давно в связи с задачами распространения радиоволн¹⁻³. Впервые проблема нелинейного взаимодействия ленгмюровских колебаний была поднята Старроком²¹, а проблема взаимодействия ленгмюровских и поперечных волн — Гинзбургом и Железняковым⁶⁵. Дальнейшее развитие теории было сделано Драмондом и Пайнсом²², Шапиро^{23 *}). Особо важную роль сыграли исследования квазилинейного приближения^{22-24, 44, 92-95}, хотя эти вопросы непосредственно к проблеме нелинейного взаимодействия не относятся. При квазилинейном подходе учитывается лишь обратное воздействие генерируемых колебаний на объект генерации (частицы пучка, например). Эти эффекты аналогичны тем, которые хорошо известны как эффекты насыщения квантовых генераторов²⁵. Исследование собственно нелинейных эффектов в плазме в рамках кинетического подхода впервые предпринято Кадомцевым и Петвиашвили²⁶ (см.¹⁶), Карпманом²⁷, Галеевым, Карпманом, Сагдеевым²⁸, Камаком²⁹ (см.³⁰), Рудаковым, Веденовым и др.^{41, 99}, Ахиезером, Даниелия, Цинцадзе^{31, 85} и др.³², Гайлитисом и Цытовичем^{18, 20}. Ряд вопросов теории нелинейных эффектов был рассмотрен Силиным⁷¹ с помощью метода корреляционных функций, развитого Боголюбовым⁹⁶. Хотя последний метод является, строго говоря, более последовательным и позволяет учесть эффекты парных соударений, большая сложность математического аппарата не позволяет широко его использовать для исследования разнообразных нелинейных взаимодействий, за исключением рассмотренного в^{71, 33} случая частиц, взаимодействующих по кулоновскому закону. При исследовании более сложных взаимодействий³⁴ приходится использовать обычный аппарат теории возмущений, аналогичный²⁶. Следует, пожалуй, заметить, что аппарат теории возмущений^{26, 28} весьма громоздок. Сложность аппарата привела к тому, что в ряде оригинальных работ допущены неточности в расчетах, в определении границ применимости результатов. Иногда такие границы вообще не указывались. Широкий круг вопросов нелинейного взаимодействия был исследован при использовании кинетического уравнения для плазмонов, учитывающего процессы индуцирован-

*) К вопросам нелинейного взаимодействия близки исследования по рассеянию электромагнитных волн плазмой И. А. Ахиезера, А. И. Ахиезера, А. Г. Ситенко⁸² (см.⁶⁷), Розенблюта, Ростокера⁸¹, Сальпетера⁸⁰.

ного рассеяния (Гайлитис, Цытович^{18,20}, Коврижных, Цытович¹⁹, Цытович^{18a, 15}, Коврижных⁷³, Липеровский, Цытович⁷⁴ (см. ^{97, 98})). Этот метод позволяет не только дать простую интерпретацию на языке вероятностей с использованием метода графиков, выявить неточности, но и несложным путем исследовать проблемы, которые кажутся сложными при использовании теории возмущений, такие, как взаимодействия поперечных и продольных волн¹⁹, волн в магнитоактивной анизотропной плазме (Цытович, Шварцбург³⁵), релятивистских эффектов¹⁸ и др.^{36, 34, 20}. В последнее время было выяснено, например, что нелинейные эффекты играют весьма существенную роль в анализе проблем происхождения космических лучей (Гинзбург³⁸, Цытович^{14, 37, 39}), когда релятивистские эффекты нельзя не учитывать.

Прежде чем переходить к подробному изложению материала, следует сделать ряд замечаний, касающихся разнообразных областей приложений и методики расчета нелинейных эффектов.

б) Н е л и н е й н ы е э ф ф е к т ы и ф и з и к а п л а з м ы

Следует в первую очередь указать на то, что теория нелинейных эффектов имеет широкие приложения при анализе неустойчивой плазмы (обзор неустойчивости плазмы⁷). Часто развитие неустойчивости приводит к возникновению интенсивных случайных турбулентных колебаний. Нелинейные эффекты определяют амплитуды колебаний и, следовательно, физические процессы, возникающие в турбулентных состояниях плазмы. Насколько существен анализ нелинейных эффектов, видно из следующего простого примера. Рассмотрим хорошо известную неустойчивость плазмы, возникающую при взаимодействии пучков с плазмой. Генерация ленгмюровских колебаний пучком частиц в определенных условиях вполне аналогична генерации волн в системах с так называемой отрицательной температурой. Механизмом излучения здесь может служить черенковское возбуждение ленгмюровской волны частицей пучка, а «инверсность заселенности» связана с наличием пучка частиц. Как правило, при этом генерируемые колебания имеют фазовые скорости порядка скорости пучка. Если нелинейные эффекты достаточно быстро отводят колебания из той области фазовых скоростей, в которой они могут порождаться пучком, то лавинообразное развитие процессов индуцированного излучения прекращается и неустойчивость стабилизируется³⁶. Так, например, благодаря указанному эффекту релятивистские пучки оказываются устойчивыми³⁹, что должно иметь важные следствия для астрофизики космических лучей.

Этот пример иллюстрирует то общее положение, что лишь исследование нелинейных эффектов может ответить на вопрос о практической значимости тех или иных неустойчивостей плазмы. Нелинейные эффекты могут определять также эффективность нагрева плазмы различными методами. Так, если нагрев сопровождается возбуждением интенсивных колебаний плазмы, то нелинейная конверсия этих колебаний в поперечные волны, покидающие плазму, может служить дополнительным источником ее охлаждения³¹. С проблемой удержания плазмы тесно связан вопрос о диффузии плазмы. При наличии в плазме интенсивных колебаний диффузия плазмы связана не с парными соударениями частиц, а главным образом с «соударениями» частиц с колебаниями. Такая диффузия часто называется аномальной¹⁶. Нелинейные эффекты, ограничивающие амплитуды колебаний, тем самым определяют так называемую аномальную диффузию. Как правило, аномальная диффузия определяется длинновол-

новыми колебаниями. Нелинейная конверсия волн, приводящая к возникновению длинноволновых колебаний из других типов волн, представляет поэтому интерес для проблем удержания плазмы.

Нелинейные эффекты играют также существенную роль при воздействии на плазму внешних полей. Например, если плазма находится в достаточно сильном постоянном электрическом поле $E > E_D$, где $E_D \sim \frac{e^2 \omega_{0e}^2}{v_{Te}^2}$ — так называемое драйсеровское поле, то парные соударения не в состоянии диссипировать энергию, приобретаемую электроном на пути свободного пробега, и возникают так называемые убегающие электроны⁸⁸. С появлением убегающих электронов возникает неустойчивость плазмы, генерируются колебания, и основными становятся не парные соударения, а «столкновения» убегающих электронов с колебаниями плазмы, которые приводят к аномальному сопротивлению плазмы, намного превосходящему обычное сопротивление, обусловленное парными соударениями^{62, 89, 59, 101}.

Если слабая электромагнитная волна посылается на плазму, в которой возбуждены колебания, то, рассеиваясь на них, она может дать ценную информацию о спектрах, интенсивностях колебаний и др. параметрах плазмы, в частности, ее температуре, плотности и т. п.^{15, 19, 66}. В последнее время широко развиваются экспериментальные исследования, использующие нелинейные эффекты для целей диагностики плазмы^{75, 77, 78, 83, 84}. Такой метод будет, по-видимому, важнейшим при исследовании турбулентности космической плазмы³⁷. Сейчас достигнуты определенные успехи также в экспериментальных исследованиях турбулентной плазмы⁶². Здесь в первую очередь нужно отметить исследование пучковых неустойчивостей плазмы, в частности, обнаруженную большую эффективность взаимодействия пучков с плазмой (Файнберг и др.⁸, Незлин⁹, Алексев и Найдай¹⁰, Завойский^{11, 62}), исследование аномальной турбулентной диффузии^{12, 16} и нелинейной связи высокочастотных и низкочастотных колебаний плазмы⁷⁵. Ряд проблем турбулентности лабораторной плазмы рассмотрен в обзоре¹⁶, а исследованию астрофизических проблем турбулентной плазмы и ускорения космических лучей посвящены обзоры^{13, 86, 87}. Наконец, большой интерес был проявлен к проблемам взаимодействия интенсивных электромагнитных волн с плазмой, в частности ВЧ-полей, лазеров^{98, 90}, ударных волн^{94, 100}.

в) Вопросы методики расчета нелинейных эффектов

Нелинейные эффекты обуславливают связи между различными волнами плазмы, различными модами колебаний, число которых в плазме весьма велико, поэтому в оригинальных статьях, как правило, рассматриваются те или иные частные типы взаимодействий. Вместе с тем необходим более или менее полный охват всех типов взаимодействий с тем, чтобы можно было бы иметь общую картину, позволяющую судить об относительной роли различных взаимодействий и возможности их разнообразных приложений. Трудности в освоении новых важных результатов, достигнутых в последнее время, отчасти связаны с весьма сложным математическим аппаратом оригинальных исследований. В настоящем обзоре была поставлена цель в простой форме, допускающей прозрачную физическую интерпретацию, изложить основные достижения в этой области. За основу изложения взята связь между спонтанными и индуцированными процессами, известная широкому кругу читателей хотя бы в связи с бур-

ным развитием физики квантовых генераторов и усилителей. По сути дела, нелинейные эффекты в плазме можно связать с рядом индуцированных процессов, аналогичных известным в нелинейной оптике^{17, 91}. Так, индуцированное комбинационное рассеяние, хорошо известное в нелинейной оптике, возникает также и в плазме. Обычно в плазме при этом такие процессы называют «распадными». Здесь целесообразно проиллюстрировать на простом примере, как нелинейные распадные взаимодействия, наиболее просто получаемые из связи спонтанных и индуцированных переходов, могут быть исследованы методом Бломбергена⁹¹, широко используемым в нелинейной оптике. Этот пример также наглядно выявит и границы применимости обычно используемого подхода. Основной величиной, фигурирующей обычно в методе Бломбергена⁹¹, является нелинейная поляризация $\mathbf{P}$ или связанный с нею нелинейный ток $\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$. Как показано в¹⁹, для высокочастотных волн такой нелинейный ток в плазме реализует взаимодействие между поперечными и продольными плазменными волнами (но не поперечными между собой). Динамика этого взаимодействия определяется уравнениями Максвелла с учетом указанного нелинейного тока ($\mathbf{j}^{(1)}$ и $\mathbf{j}^{(2)}$ соответственно линейный и нелинейный токи плазмы) ($c = 1$):

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -4\pi \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{j}^{(1)} + \mathbf{j}^{(2)}), \quad (3)$$

$$\mathbf{j}^{(2)} = \int \mathbf{j}_{\mathbf{k}, \omega}^{(2)} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\lambda,$$

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k}, \omega}^{(2)} = -\frac{\omega_{0e}^2 e}{8\pi m_e} \left[\frac{\mathbf{k}}{\omega} (\mathbf{E}_{\mathbf{k}_1, \omega_1} \mathbf{E}_{\mathbf{k}_2, \omega_2}) + 2\mathbf{E}_{\mathbf{k}_1, \omega_1} \left(\frac{\mathbf{k}_2}{\omega_2} \mathbf{E}_{\mathbf{k}_2, \omega_2} \right) \right],$$

$$d\lambda = \frac{d\omega_1 d\omega_2}{\omega_1 \omega_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2).$$

Проще всего решение (3) искать методом Боголюбова — Ван-дер-Поля¹⁰². А именно, известно, что в линейном приближении решение (3) соответствует для изотропной плазмы независимому распространению продольных и поперечных волн

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^l d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega^l(\mathbf{k})t} + \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^t d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega^t(\mathbf{k})t}. \quad (4)$$

С учетом слабой нелинейности, описываемой $\mathbf{j}^{(2)}$, можно искать решение (3) в виде (4), считая амплитуды продольных волн $E_{\mathbf{k}}^l$ и поперечных $E_{\mathbf{k}}^t$ медленно меняющимися функциями координат и времени (в сравнении с $\frac{1}{k}$ и $\frac{1}{\omega}$). Тогда подстановка (4) в (3) в простейшем случае, когда амплитуды зависят лишь от времени, приводит к уравнениям

$$\frac{\partial E_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = -\frac{e\omega_{0e}^2 k}{4m_e} \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{\omega^t(\mathbf{k}_1) \omega^t(\mathbf{k}_2)} E_{\mathbf{k}_1}^t E_{\mathbf{k}_2}^{t*} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) (e_{\mathbf{k}_1} e_{\mathbf{k}_2}^*) e^{i\Delta\omega t}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial E_{\mathbf{k}_1}^t}{\partial t} = \frac{e\omega_{0e}^2}{2\omega^t(\mathbf{k}_1)} \int \frac{(\omega^t(\mathbf{k}_2) + \omega^t(\mathbf{k})) k d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1}{m_e \omega^t(\mathbf{k}_2) (\omega^t(\mathbf{k}))^2} E_{\mathbf{k}}^l E_{\mathbf{k}_2}^t (e_{\mathbf{k}_1}^* e_{\mathbf{k}_2}) e^{-i\Delta\omega t} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad (6)$$

$$\frac{\partial E_{\mathbf{k}_2}^t}{\partial t} = -\frac{e\omega_{0e}^2}{2\omega^t(\mathbf{k}_2)} \int \frac{(\omega^t(\mathbf{k}_1) - \omega^t(\mathbf{k})) k d\mathbf{k} d\mathbf{k}_2}{m_e \omega^t(\mathbf{k}_1) (\omega^t(\mathbf{k}))^2} E_{\mathbf{k}}^l E_{\mathbf{k}_1}^{t*} (e_{\mathbf{k}_1} e_{\mathbf{k}_2}^*) e^{i\Delta\omega t} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad (7)$$

где $e_{\mathbf{k}_1}$ и $e_{\mathbf{k}_2}$ — единичные орты поляризации поперечных волн,

а $\Delta\omega = \omega^l(\mathbf{k}) - \omega^l(\mathbf{k}_1) + \omega^l(\mathbf{k}_2)$ — расстройка частот, характеризующая так называемый фазовый синхронизм взаимодействующих волн. Если фазы взаимодействующих волн не являются случайными, то интенсивного взаимодействия можно ожидать лишь, если за характерное время взаимодействия τ знак нелинейного взаимодействия не изменится существенным образом, т. е. $\Delta\omega\tau \ll 1$. Если, кроме того, взаимодействующие волны являются почти монохроматическими (т. е. $E_{\mathbf{k}} \cong E\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$), то из записанной системы (5) — (7) легко получить алгебраические уравнения Бломбергена (см. ^{103, 104}), описывающие перекачку энергии от поперечных волн к продольным и обратно, причем, как непосредственно видно из уравнений (5) и (6), характерное время такой перекачки обратно пропорционально первой степени эффективной амплитуды волн. Другие результаты получаются для случайных волн, когда $\langle E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'}^* \rangle = |E_{\mathbf{k}}|^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. Заметим, что для того, чтобы волну можно было считать случайной, необходимо, чтобы ширина ее спектра $\delta\omega$ удовлетворяла условию $\delta\omega\tau \gg 1$ и поэтому $\Delta\omega\tau \gg 1$. Таким образом, взаимодействие случайных волн соответствует предельному случаю, противоположному условию фазового синхронизма. То обстоятельство, что $e^{i\Delta\omega t}$ меняет знак многократно за время взаимодействия, в данном случае особого значения не имеет, так как случайная амплитуда $E_{\mathbf{k}}$ меняется более быстро. Из системы (5) — (7) можно теперь получить уравнение для средних значений квадратов $|E_{\mathbf{k}}|^2$, умножая, например, каждое из уравнений на $E_{\mathbf{k}}^*$. Следует учесть, что средние значения кубов полей $\langle E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2} \rangle$ не равны нулю и могут быть выражены с помощью нелинейных уравнений через $\langle E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2} E_{\mathbf{k}_3} \rangle$, а последние в первом приближении через $\langle E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}_1} \rangle \langle E_{\mathbf{k}_2} E_{\mathbf{k}_3} \rangle$, т. е. $|E_{\mathbf{k}}|^2 \times |E_{\mathbf{k}'}|^2$. Выпишем, например, получающееся уравнение для $|E_{\mathbf{k}}|^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} &= \int w_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \{N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l - N_{\mathbf{k}_2}^l N_{\mathbf{k}}^l + N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}}^l\}, \\ N_{\mathbf{k}}^l &= \frac{2}{\omega_{0e}} \pi^2 |E_{\mathbf{k}}^l|^2; \quad N_{\mathbf{k}}^t = 2 \frac{\pi^2}{\omega t} |E_{\mathbf{k}}^t|^2; \\ w_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) &= \frac{e^2 \omega_{0e} k^2}{16 \pi m_e^2 \omega_1 \omega_2} \left(1 + \frac{(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right) \delta(\omega - \omega_1 + \omega_2) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \end{aligned}$$

$w_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)$ соответствует найденной в ¹⁹ вероятности процесса индуцированного комбинационного рассеяния поперечных волн на генерируемых продольных. Мы увидим ниже, что простые вероятностные соображения и связь спонтанных и индуцированных процессов сразу приводят к уравнениям типа (8). Для вычисления же вероятностей совсем нет необходимости в выводе полного уравнения (8), а достаточно воспользоваться его предельным выражением (например, для $N_{\mathbf{k}}^l \rightarrow 0$), и все расчеты необычайно упрощаются. Следует заметить также, что поскольку для взаимодействия случайных волн используется статистическое описание, то нелинейная перекачка (8), в отличие от приближения Бломбергена ^{91, 103}, может быть необратимой. Наконец, характерные промежутки времени нелинейной перекачки (8) оказываются уже обратно пропорциональными квадрату амплитуд волн. Простые соображения, связанные с вероятностями, были использованы в работе ¹⁸. Этот метод позволяет просто и физически весьма наглядно трактовать сложные вопросы нелинейного взаимодействия. Мы будем следовать методике ¹⁸, получившей дальнейшее развитие в ^{19, 20, 15, 36, 73}.

Следует заметить, что используемый ниже подход вполне аналогичен широко известному в теории твердых тел ⁴⁰ и поэтому позволяет с единой точки зрения рассмотреть эффекты нелинейного взаимодействия волн

также в так называемой твердотельной плазме ⁴¹, интерес к которой за последнее время неизмеримо вырос в связи с новыми экспериментальными успехами. Отметим, что графический метод в теории турбулентности жидкостей был использован впервые в ⁴² применительно к системе слабо взаимодействующих частиц, какой является плазма, Гайлитисом и Цытовичем ^{18a}, для сильно турбулентной плазмы—Михайловским ⁴³. Мы будем ниже использовать графические изображения простейших процессов, позволяющих уяснить элементарные процессы, лежащие в основе нелинейного взаимодействия.

Обзор содержит две главы. Первая посвящена общей теории взаимодействия волн в пространственно диспергирующих средах, вторая — нелинейному взаимодействию волн в изотропной плазме.

1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕННО ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

§ 1. Понятие о числе волн. Связь спонтанных и индуцированных процессов

Как уже отмечалось выше, речь будет идти о взаимодействии линейных волн. В произвольной однородной анизотропной среде уравнениям Максвелла, как известно ⁴⁻⁶, удовлетворяют решения, соответствующие плоским волнам $\sim e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ лишь при определенной связи ω и $\mathbf{k}$, соответствующей различным типам σ колебаний (нормальных волн) среды. Полное электромагнитное поле будет представлять собой суперпозицию полей различных нормальных колебаний

$$\mathbf{E} = \sum_{\sigma} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\sigma} d\mathbf{k} e^{-i\omega_{\sigma}(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \omega_{\sigma}(-\mathbf{k}) = -\omega_{\sigma}(\mathbf{k}).$$

Здесь $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\sigma}$ — зависящая от $\mathbf{k}$ амплитуда волны σ . Удобно ввести единичные векторы поляризации ^{4, 5}

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\sigma} = E_{\mathbf{k}\sigma} \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \quad \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma} \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^* = 1,$$

связь между различными компонентами которых определяется уравнениями Максвелла

$$(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \omega_{\sigma}^2 \varepsilon_{ij}(\omega_{\sigma}, \mathbf{k})) a_{i\mathbf{k}\sigma} = 0, \quad (1,1)$$

где $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ — тензор диэлектрической проницаемости.

Весьма удобным является понятие о диэлектрической проницаемости для заданной нормальной волны σ , которую можно ввести равенством

$$\varepsilon^{\sigma}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}\sigma i}^* a_{\mathbf{k}\sigma j} + \frac{1}{\omega^2} (\mathbf{k} \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}^*) (\mathbf{k} \mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma}). \quad (1,2)$$

Умножая (1,1) на $\mathbf{a}_{\mathbf{k}\sigma i}^*$, легко получить

$$k^2 = \omega_{\sigma}^2(\mathbf{k}) \varepsilon^{\sigma}(\omega_{\sigma}(\mathbf{k}), \mathbf{k}),$$

т. е. $\omega_{\sigma}(\mathbf{k})$ удовлетворяет дисперсионному уравнению

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon^{\sigma}(\omega, \mathbf{k}),$$

Рассмотрим вначале область прозрачности, пренебрегая антиэрмитовой частью ε_{ij} , а также пренебрегая мнимой частью частоты ω_{σ} . В этом случае $|\mathbf{E}_{\mathbf{k}\sigma}|^2$ характеризует интенсивность волны σ . С квантовой точки зрения эта интенсивность есть сумма энергии отдельных квантов (элементарных возбуждений). Энергия электромагнитного поля

квантов σ в 1 см^3 равна энергии отдельного кванта $\hbar\omega_\sigma$, умноженной на число квантов $N_k^\sigma \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$, где N_k^σ — плотность числа квантов в единице фазового объема ($V = 1 \text{ см}^3$),

$$W = \sum_{\sigma} \int \hbar\omega_{\sigma}(\mathbf{k}) N_{\mathbf{k}}^{\sigma} d\mathbf{k} \frac{1}{(2\pi)^3}. \quad (1,3)$$

С другой стороны, энергия электромагнитного поля задается классическим выражением

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^t \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dt + \frac{B^2}{8\pi}, \quad D_i(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_{ij} E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad (1,4)$$

$$B(\omega, \mathbf{k}) = \left[\frac{\mathbf{k} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})}{\omega} \right].$$

Сопоставляя (1,3) с (1,4), можно найти связь между $N_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ и $|\mathbf{E}_{\mathbf{k}\sigma}|^2$. Заметим, что для волн со случайной фазой характеристикой являются средние квадратичные комбинации полей $E_{\mathbf{k}\sigma i}$ ^{45-47, 55}

$$\langle E_{\mathbf{k}\sigma} E_{\mathbf{k}'\sigma}^* \rangle = |\mathbf{E}_{\mathbf{k}\sigma}|^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (1,5)$$

Последнее соотношение позволяет найти среднее значение плотности энергии электромагнитного поля, если воспользоваться соотношениями (1,3), (1,4)

$$W = \frac{1}{8\pi} \sum_{\sigma} \int d\mathbf{k} \frac{1}{\omega_{\sigma}(\mathbf{k})} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon^{\sigma} \right)_{\omega=\omega_{\sigma}(\mathbf{k})} |\mathbf{E}_{\mathbf{k}\sigma}|^2. \quad (1,6)$$

Из сопоставления с (1,3) мы имеем

$$|\mathbf{E}_{\mathbf{k}\sigma}|^2 = N_{\mathbf{k}}^{\sigma} \frac{\hbar\omega_{\sigma}^2}{\pi^2} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon^{\sigma} \right)_{\omega=\omega_{\sigma}}^{-1}. \quad (1,7)$$

К примеру, для продольных волн в силу $\epsilon^l = 0$

$$|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^l|^2 = \frac{\hbar}{\pi^2} N_{\mathbf{k}}^l \left(\frac{\partial \epsilon^l}{\partial \omega} \right)^{-1}. \quad (1,8)$$

Введение числа квантов $N_{\mathbf{k}}^l$ позволяет несложно найти связь между спонтанными и индуцированными процессами.

Рассмотрим простейшую двухуровневую систему $E_2 > E_1$. Вероятность спонтанного в 1 сек перехода из E_2 в E_1 обозначим u_{21} , индуцированного из E_1 в E_2 — w_{12} , а индуцированного из E_2 в E_1 — w_{21} ⁴⁸. Из принципа детального баланса, утверждающего, что числа прямых и обратных переходов равны, имеем $N_2(u_{12} + w_{12}) = N_1 w_{21}$, где N_2 и N_1 — число частиц на уровнях E_2 и E_1 . В условиях равновесия $\frac{N_2}{N_1} = e^{\hbar\omega_{21}/T}$, $\hbar\omega_{21} = E_2 - E_1$. С другой стороны, вероятность индуцированного перехода пропорциональна $|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{\sigma}|^2$, т. е., другими словами, $w_{12} = \tilde{w}_{12} N_{\mathbf{k}}^{\sigma}$, $w_{21} = \tilde{w}_{21} N_{\mathbf{k}}^{\sigma}$. Отсюда следует

$$N_{\mathbf{k}}^{\sigma} = \frac{u_{12}}{\tilde{w}_{21} \exp\left(\frac{1}{T} \hbar\omega_{21}\right) - \tilde{w}_{12}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{T} \hbar\omega_{21}\right) - 1}. \quad (1,9)$$

Последнее равенство (1,5) написано в силу того, что $N_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ в условиях равновесия должно удовлетворять распределению Бозе — Эйнштейна ⁴⁷. Так как (1,9) должно быть верным при любых температурах T , имеем: $\tilde{w}_{12} = \tilde{w}_{21}$, $u_{12} = \tilde{w}_{21}$. Отсюда полная вероятность излучения (спонтанного

и индуцированного) равна

$$u_{12}(1 + N_k^\sigma), \quad (1,10)$$

и вероятность поглощения —

$$u_{12}N_k^\sigma, \quad (1,11)$$

т. е. для получения вероятности излучения необходимо вероятность спонтанного излучения умножить на $N_k^\sigma + 1$, а для получения вероятности поглощения — на N_k^σ . Это утверждение хорошо известно в квантовой электродинамике ⁴⁹, теории твердых тел ⁴⁰ и следует из общих соображений теории излучения при наличии сред (Гинзбург ⁵⁰, Ватсон, Яух ⁵¹, Рязанов ⁵², Цытович ⁵³).

Здесь, пожалуй, следует сделать одно замечание, касающееся учета поглощения или раскачки колебаний. Дело в том, что в неустойчивой среде $\gamma = \text{Im } \omega_\sigma > 0$ вопрос о спонтанном излучении является значительно более сложным ⁵⁴. Однако в силу быстрого нарастания интенсивности колебаний вынужденные процессы становятся определяющими. Если в отсутствие затухания или раскачки в соответствии с законом сохранения энергии

$$w_{21}^{\gamma=0} = w_{21}^0 \delta(\omega_\sigma - \omega_{21}) N_{k\sigma}, \quad (1,12)$$

то

$$w_{21}^{\gamma \neq 0} = w_{21}^0 N_{k\sigma} \frac{|\gamma_k|}{\pi [(\omega_{21} - \omega_0)^2 + \gamma_k^2]}. \quad (1,13)$$

При $\omega_{21} - \omega_\sigma$ порядка γ_k (1,13) и (1,12) фактически дают одинаковый результат. Существенно, что (1,13) может быть использовано вдали от резонанса. При этом вероятность индуцированного процесса оказывается в γ_k/ω_σ раз меньшей. Взаимодействие нерезонансных частиц с волнами, как показано в ¹⁶, может играть существенную роль.

§ 2. Процессы излучения, рассеяния и распадов

При большой интенсивности колебаний (квантов) индуцированные процессы становятся доминирующими ($N_k^\sigma \gg 1$). В этих условиях как поглощенному, так и излученному кванту соответствует в вероятности множитель N_k^σ . В случае слабой турбулентности, как отмечалось, речь идет о первых членах разложения взаимодействия по N_k^σ или $|E_{k\sigma}|^2$.

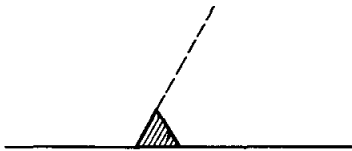


Рис. 1.

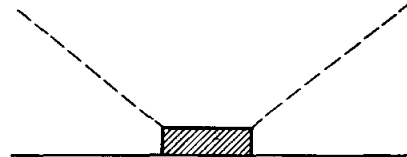


Рис. 2.

В силу изложенного разложение по $|E_{k\sigma}|^2$ соответствует разложению по числу квантов, участвующих в процессе. Простейший процесс соответствует участию одного кванта. Графически он изображен на рис. 1. Процессом следующего порядка будет такой, в котором участвуют два кванта. Это либо излучение и поглощение двух квантов, либо излучение кванта и поглощение другого, что соответствует рассеянию (рис. 2). Наконец, всякая волна, движущаяся в среде, создает поляризацию, и рассеяние

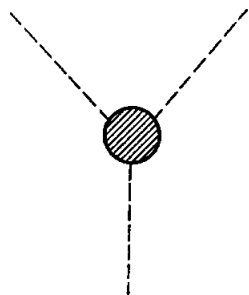


Рис. 3.

волн может происходить на этой поляризации, что схематически изображено на рис. 3. Здесь следует оговориться, что в ряде случаев строгое разделение процессов на процессы типа изображенных на рис. 2 и 3 оказывается невозможным. Это связано с тем, что частица, участвующая в процессе рис. 2, может быть любой из частиц среды, в частности и той, которая создает поляризационный ток, обуславливающий нелинейное взаимодействие рис. 3. Процессы рис. 1 будем, краткости ради, называть процессами излучения, рис. 2 — рассеяния, рис. 3 — распадными. Заштрихованные элементы рис. 1—3 могут быть в твердых телах весьма сложными. В обычной лабораторной газовой плазме из-за слабости взаимодействия между отдельными частицами эти элементы могут быть найдены в первых порядках теории возмущений. Запишем законы сохранения энергии и импульса изображенных процессов. Для рис. 1: если частица (или квазичастица) характеризуется спектром энергии ε_p , то

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p+\hbar k} + \hbar\omega_k. \quad (2,1)$$

При малых $\hbar k$ получим черенковское условие

$$\omega_k = kv, \quad (2,2)$$

где $v = \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p}$. Для рис. 2:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p-\hbar k} + \hbar\omega_k + \hbar\omega_{k'}, \quad \text{или} \quad (k - k')v = \omega_k - \omega_{k'}. \quad (2,3)$$

И наконец, для рис. 3:

$$\omega_k^\sigma = \omega_{k-k''}^{\sigma'} + \omega_{k''}^{\sigma''}. \quad (2,4)$$

Если $k'' \ll k$ и $\sigma = \sigma'$, то (2,4) дает $kv_{\text{гр}}^\sigma = \omega_\sigma$, где $v_{\text{гр}}^\sigma = \frac{d\omega^\sigma}{dk}$. Бросается в глаза аналогия процессов распадных и черенковских. В распадных процессах роль частицы играет, грубо говоря, одна из волн.

§ 3. Кинетическое уравнение для волн

1. Кинетические уравнения, описывающие изменения числа волн N_k^σ , легче всего получить из простых соображений баланса. Введем вероятность рассеяния $w_{\alpha\sigma}^{\sigma'}(p, k, k')$, описывающую процесс превращения волны σ импульса k в волну σ' импульса k' при рассеянии на частице α импульса p , и вероятность распада волны $w_{\sigma\sigma'}^{\sigma''}(k, k', k'')$, описывающую превращение волны σ импульса k в волну σ' импульса k' и волну σ'' импульса k'' . Запишем сначала выражение для изменения числа квантов N_k^σ в единицу времени из-за рассеяния. Вероятность поглощения k и излучения k' с учетом индуцированных процессов равна $w_{\alpha\sigma}^{\sigma'} N_k^\sigma (N_{k'}^{\sigma'} + 1)$. Здесь учтено, что, как было показано выше, для каждой излучаемой волны возникает множитель $N_k + 1$, а поглощаемой — N_k . Для отыскания $\partial N_k^\sigma / \partial t$ учтем, что рассеяние может происходить на частицах различных импульсов, и умножим вероятность на функцию распределения частиц f_p^α и проинтегрируем по p :

$$- \int w_{\alpha\sigma}^{\sigma'} N_k^\sigma (N_{k'}^{\sigma'} + 1) f_p^\alpha \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{dk'}{(2\pi)^3}. \quad (3,1)$$

В процессе (3,1) частица из состояния с импульсом $\mathbf{p}$ переходит в состояние с импульсом $\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k} - \hbar \mathbf{k}'$. Обратный процесс описывается в силу принципа детального баланса той же вероятностью

$$\int w_{\alpha\sigma'}^{\sigma'} (N_{\mathbf{k}}^{\sigma} + 1) N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} f_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}-\hbar\mathbf{k}'}^{\alpha} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}. \quad (3,2)$$

Из (3,1) и (3,2) получим полное изменение числа квантов из-за рассеяния

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial t} = & N_{\mathbf{k}}^{\sigma} \sum_{\alpha\sigma'} \int w_{\alpha\sigma'}^{\sigma'} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} (f_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}-\hbar\mathbf{k}'}^{\alpha} - f_{\mathbf{p}}^{\alpha}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \\ & + \sum_{\alpha\sigma'} \int w_{\alpha\sigma'}^{\sigma'} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} f_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}-\hbar\mathbf{k}'}^{\alpha} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} - N_{\mathbf{k}}^{\sigma} \int w_{\alpha\sigma'}^{\sigma'} f_{\mathbf{p}}^{\alpha} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (3,3)$$

Первый член (3,3) описывает индуцированное рассеяние, которое существенно при интенсивной турбулентности, когда $N_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ велики. В силу $\hbar |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| \ll p$ имеем для индуцированного рассеяния

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^{\sigma} \sum_{\alpha\sigma'} \int w_{\alpha\sigma'}^{\sigma'} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} \hbar (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{\partial f_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}. \quad (3,4)$$

Весьма полезным является также выражение рассеяния, возникающее при малых $N_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ и соответствующее пределу, когда существенно лишь спонтанное рассеяние

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial t} = \sum_{\alpha\sigma'} w_{\alpha\sigma'}^{\sigma'} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} f_{\mathbf{p}}^{\alpha} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}. \quad (3,5)$$

Нелинейное взаимодействие, связанное с распадными процессами, также описывается квадратичным по числу квантов выражением. Уменьшение числа квантов $N_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ из-за поглощения волн σ и излучения волн σ' и σ'' есть

$$\int u_{\sigma\sigma'}^{\sigma''} N_{\mathbf{k}}^{\sigma} (N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} + 1) (N_{\mathbf{k}''}^{\sigma''} + 1) \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3}, \quad (3,6)$$

увеличение же $N_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ из-за обратного процесса есть

$$\int u_{\sigma\sigma'}^{\sigma''} (N_{\mathbf{k}}^{\sigma} + 1) N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} N_{\mathbf{k}''}^{\sigma''} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3}. \quad (3,7)$$

Отсюда имеем, что члены $(N_{\mathbf{k}}^{\sigma})^2$ выпадают из общего выражения. Пренебрегая линейными по $N_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ взаимодействиями, получим уравнение, описывающее нелинейные эффекты (ср. (8)),

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial t} = \int u_{\sigma\sigma'}^{\sigma''} (N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} N_{\mathbf{k}''}^{\sigma''} - N_{\mathbf{k}}^{\sigma} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} - N_{\mathbf{k}}^{\sigma} N_{\mathbf{k}''}^{\sigma''}) \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3}. \quad (3,8)$$

Заметим, что спонтанный распад соответствует $N_{\mathbf{k}}^{\sigma} \rightarrow 0$. Отметим также, что уравнение для $N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}$ получится так же, как (3,8), однако интегрировать (суммировать) нужно по $\mathbf{k}'\mathbf{k}''$ и, кроме того, необходимо изменить знаки в выражениях типа (3,6), (3,7):

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}}{\partial t} = \int u_{\sigma\sigma'}^{\sigma''} (N_{\mathbf{k}}^{\sigma} N_{\mathbf{k}''}^{\sigma''} + N_{\mathbf{k}}^{\sigma} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} - N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} N_{\mathbf{k}''}^{\sigma''}) \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3}. \quad (3,9)$$

2. Остановимся на законах сохранения, имеющих место для нелинейных взаимодействий волн. Есть законы сохранения, являющиеся

следствием законов сохранения в элементарных актах (2,3), (2,4). Вводя энергию квантов сорта σ

$$W^\sigma = \int (2\pi)^{-3} \hbar \omega_\sigma(\mathbf{k}) d\mathbf{k} N_\mathbf{k}^\sigma \quad (3,10)$$

путем умножения (3,8), (3,9) на ω_σ , $\omega_{\sigma'}$ и интегрирования по соответствующим $\mathbf{k}$, легко убедиться в силу (2,4), что

$$\frac{d}{dt} (W^\sigma + W^{\sigma'} + W^{\sigma''}) = 0. \quad (3,11)$$

Этот закон сохранения показывает, что для распадных процессов энергия может лишь переходить от одних типов волн к другим. Точно так же можно убедиться в выполнении закона сохранения импульса

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}^\sigma + \mathbf{P}^{\sigma'} + \mathbf{P}^{\sigma''}) = 0, \quad \mathbf{P}^\sigma = \int \frac{\hbar \mathbf{k} d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} N_\mathbf{k}^\sigma. \quad (3,12)$$

Однако имеют место и другие законы сохранения. Так, сохраняется полное число квантов сорта σ и σ'

$$\frac{d}{dt} (N^\sigma + N^{\sigma'}) = 0, \quad N^\sigma = \int N_\mathbf{k}^\sigma \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (3,13)$$

В справедливости (3,13) легко убедиться непосредственно из (3,8), (3,9). Точно так же $\frac{d}{dt} (N^\sigma + N^{\sigma''}) = 0$. В процессах индуцированного рассеяния сохраняется полное число квантов в том случае, если рассеянные кванты того же сорта, что и рассеиваемые, т. е. $\sigma = \sigma'$. Действительно, интегрируя (3,4) по $\mathbf{k}$ и учитывая несимметричность правой части относительно замены $\mathbf{k}$ на $\mathbf{k}'$, имеем

$$\frac{d}{dt} N^\sigma = 0. \quad (3,14)$$

Легко видеть также, что в процессах индуцированного рассеяния сохраняется сумма энергий частиц и волн, в чем легко убедиться, если наряду с уравнением (3,4) воспользоваться уравнением для изменения функции распределения рассеивающихся частиц

$$\frac{\partial f_\mathbf{p}^\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij} \frac{\partial f_\mathbf{p}^\alpha}{\partial p_j}, \quad D_{ij} = \int w_{\alpha\sigma}^{\sigma'} (k_i - k'_i) (k_j - k'_j) \hbar^2 N_\mathbf{k}^\sigma N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}'}{(2\pi)^6}. \quad (3,15)$$

Уравнение (3,15) получается сходным образом из соображений баланса. Закон сохранения энергии в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(W^\sigma + W^{\sigma'} + \sum_\alpha \int \varepsilon_\mathbf{p} f_\mathbf{p}^\alpha \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \right) = 0. \quad (3,16)$$

Рассмотрим, какие следствия могут иметь выявленные законы сохранения. Во-первых, при индуцированном рассеянии ленгмюровских волн в ленгмюровские полная энергия волн не может изменяться значительно. Действительно, энергия ленгмюровских волн слабо зависит от k , и в силу сохранения N^i изменение полной энергии мало. Во-вторых, при распаде волн высокой частоты ω_σ на волны низкой $\omega_{\sigma''}$, который возможен лишь в том случае, когда при этом возникает вновь волна высокой частоты $\omega_{\sigma'}$, $\omega_\sigma \gg \omega_{\sigma'}$, полное число высокочастотных квантов сохраняется (см. (3,13)). Это приводит также к выводу, что при распаде ленгмюровских волн на низкочастотные полная энергия ленгмюровских волн не может изменяться значительно.

3. Отметим здесь аналогию между распадными процессами высокочастотных волн и черенковскими эффектами для заряженных частиц ¹⁹.

Действительно, уже график распада волны σ с превращением в волну того же сорта σ и излучением волны σ' (рис. 4, а) аналогичен черенковскому графику (рис. 4, б). Из простых соображений баланса можно записать изменение числа квантов, связанное с индуцированным черенковским

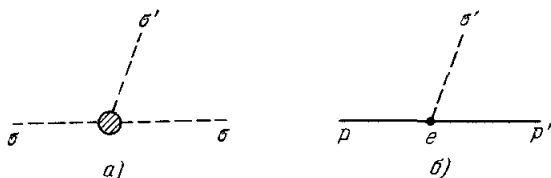


Рис. 4.

эффектом. Если w_a^σ — вероятность черенковского излучения, то имеем

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}}{\partial t} = N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} \int w_a^{\sigma'} h \mathbf{k}' \frac{\partial f_p^a}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (3,17)$$

В (3,17) предполагается, что число частиц f_p^a соответствует отсутствию вырождения. Поэтому формулы, аналогичные (3,17), для рис. 4, б получатся лишь при малых N^σ (точнее, $N^\sigma \ll N^{\sigma'}$). Тогда

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}}{\partial t} = N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} \int u_{\sigma'}^{\sigma} (N_{\mathbf{k}}^{\sigma} - N_{\mathbf{k}+(\mathbf{k}''-\mathbf{k})}^{\sigma}) \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}''}{(2\pi)^6}. \quad (3,18)$$

Учитывая, что $\mathbf{k} - \mathbf{k}'' = \mathbf{k}'$ в силу закона сохранения импульса и считая $k' \ll k$ (малая отдача), получим формулу, совершенно аналогичную черенковской (3,17):

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}}{\partial t} = N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} \int u_{\sigma'}^{\sigma} \left(\mathbf{k}' \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{k}} \right) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad u_{\sigma'}^{\sigma} = \int u_{\sigma'}^{\sigma} \frac{d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3}. \quad (3,19)$$

Заметим, что пренебрежение членами $(N^\sigma)^2$, в результате которого было получено (3,18) для волн высоких частот $\omega_\sigma \ll \omega_{\sigma'}$, часто выполняется с большой точностью¹⁵. Аналогия с черенковским эффектом естественно распространяется и на излучающие волны σ . Уравнение, описывающее изменение функции распределения частиц из-за черенковского эффекта, имеет вид

$$\frac{\partial f_p^a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij} \frac{\partial f_p^a}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_j} (A_j f_p^a), \quad (3,20)$$

$$D_{ij} = \int w_a^{\sigma'} N_{\mathbf{k}}^{\sigma'} k_i k_j \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}, \quad A_j = \int w_a^{\sigma'} (\mathbf{k}') k_j d\mathbf{k}'. \quad (3,21)$$

Первый член (3,20) описывает диффузию частиц в поле колебания и индуцированные эффекты черенковского поглощения и излучения волн. Вторым член соответствует спонтанным процессам. (Уравнение (3,20) совместно с (3,17) описывает так называемое квазилинейное приближение²⁴.)

Покажем, что аналогичные уравнения имеют место при распаде волн в случае малых $N^\sigma \ll N^{\sigma'}$ и малой отдачи. Заметим, что уравнение (3,8) в данном случае недостаточно, так как описывает не все процессы, а лишь те, которые изображены на рис. 5, а (направление стрелок указывало на излучение или поглощение), но не на рис. 5, б. В случае $\sigma'' \neq \sigma$ эти процессы соответствуют другим возможным распадам, вероятности которых непосредственно не выражаются через $u_{\sigma}^{\sigma'\sigma''}$. В случае же $\sigma'' = \sigma$ эти вероятности могут быть выражены через $u_{\sigma}^{\sigma'}$, а именно, первый из графиков рис. 5, б отличается от первого графика рис. 5, а тем, что начальное состояние плазмона σ заменено на конечное, которое для рис. 5, а есть $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$, т. е. вероятность процесса первого графика рис. 5, б есть $u_{\sigma}^{\sigma'}(\mathbf{k} + \mathbf{k}', \mathbf{k}')$.

Отсюда

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial t} = - \int \{ u_{\sigma\sigma'}^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') [(N_{\mathbf{k}}^{\sigma} + 1) N_{\mathbf{k}}^{\sigma} - N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}] + \\ + u_{\sigma\sigma'}^{\sigma'}(\mathbf{k} + \mathbf{k}', \mathbf{k}') [N_{\mathbf{k}}^{\sigma} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} - (N_{\mathbf{k}}^{\sigma} + 1) N_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}^{\sigma}] \} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}. \quad (3,22)$$

При малой отдаче получим уравнения, аналогичные (3,20):

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial k_i} D_{ij}^{\sigma\sigma'} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial k_j} + \frac{\partial}{\partial k_j} (A_j^{\sigma\sigma'} N_{\mathbf{k}}^{\sigma}), \quad (3,23)$$

$$D_{ij}^{\sigma\sigma'} = \int u_{\sigma\sigma'}^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') k_i k_j N_{\mathbf{k}}^{\sigma'} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}, \quad A_j^{\sigma\sigma'} = \int u_{\sigma\sigma'}^{\sigma'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') k_j \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}. \quad (3,24)$$

Заметим, что распадные процессы соответствуют индуцированному комбинационному рассеянию волн на волнах.

Заметим, что процессы, аналогичные индуцированному рассеянию волн на частицах, соответствуют четырехплазменным распадам. Возможны

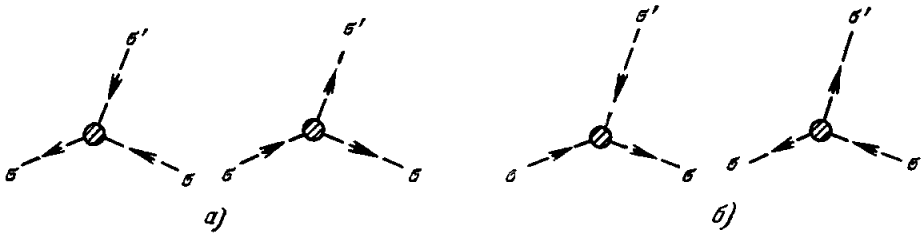


Рис. 5.

при этом процессы, когда две волны превращаются в две и одна — в три, и всевозможные обратные им процессы. В качестве примера запишем уравнение, описывающее рассеяние одного кванта на другом. Пусть $u_{\sigma\sigma'}^{\sigma\sigma'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1')$ — вероятность поглощения $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ и излучения $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1'$. В том случае, когда число квантов $N^{\sigma'} \ll N^{\sigma}$, легко получить для слабой отдачи уравнение, аналогичное (3,4):

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^{\sigma} \int u_{\sigma\sigma'}^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}_1) N_{\mathbf{k}_1}^{\sigma'} \frac{\partial N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}}{\partial \mathbf{k}'} \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^6}, \\ u_{\sigma\sigma'}^{\sigma} = \int u_{\sigma\sigma'}^{\sigma\sigma'} \frac{d\mathbf{k}_1'}{(2\pi)^3}. \quad (3,25)$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, к каким качественным следствиям могут приводить нелинейные эффекты. Ввиду аналогии распадов на одну волну с черенковским эффектом, ясно, что распадные процессы могут инициировать неустойчивости, приводящие к генерации волн. Процессы рассеяния на частицах плазмы и волнах (т. е. рассмотренные выше четырехплазменные процессы) не приводят к изменению полного числа квантов. Покажем, что в случае рассеяния на равновесных частицах и волнах возникает нелинейная перекачка по спектру в сторону меньших частот колебаний. Предполагая, что f_p^{α} в (3,4) зависит лишь от модуля энергии, имеем

$$\frac{\partial f_p^{\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v} \frac{\partial f_p^{\alpha}}{\partial \epsilon},$$

и учитывая, что в силу закона сохранения $(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{v} = \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}$, получим

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^{\sigma} \sum_{\alpha\sigma'} \int u_{\alpha\sigma}^{\sigma\sigma'} N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} (\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}) \frac{\partial f_p^{\alpha}}{\partial \epsilon} \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{k}}{(2\pi)^6}. \quad (3,26)$$

Если $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} < 0$, что имеет место для равновесного максвелловского распределения, то согласно (3,26) нарастают волны, имеющие меньшие частоты. Это верно как для одинаковых волн $\sigma = \sigma'$, так и для перекачки энергии из одного типа волн в другие. Если f изотропно и $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} > 0$ в определенной области энергий, то нужно иметь в виду, что всегда в силу $f \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow \infty$ существует также область $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} < 0$. Таким образом, вопрос о направлении перекачки определяется тем, какая из этих двух областей играет главную роль в рассеянии. Ситуация здесь несколько отличается, хотя и сходна с той, которая имеет место для линейного приближения, когда для любой изотропной f имеет место затухание^{56, 57}.

Перекачка в сторону больших частот возникает при наличии направленных пучков частиц (этот результат для ленгмюровских волн получен впервые в³³). Действительно, считая, что $f = f(E) E = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^2}{2m}$, получим уравнение (3,26), в котором вместо $(\omega_k - \omega_{k'}) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}$ стоит $(\omega_k - \omega_{k'} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{v}_0) \frac{\partial f}{\partial E}$, и следовательно, при $(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{v}_0 > \omega_k - \omega_{k'}$ перекачка происходит в сторону больших $k v_0$.

Совершенно аналогичная картина возникает при рассеянии колебаний σ' на других σ , описываемое распадным взаимодействием (3,25). Например, можно говорить о рассеянии ленгмюровских волн на высокочастотных поперечных. Наличие пучков высокочастотных волн может привести к перекачке в сторону больших частот и линейному поглощению ленгмюровских волн.

§ 4. Нелинейный ток плазмы и вероятность распадных процессов

1. Записанные выше уравнения представляют собой разложения по числу квантов N_k^σ или по $|E_{k\sigma}|^2$ — квадрату амплитуд полей. Поэтому вероятности различных процессов могут быть найдены, если известно разложение нелинейного тока плазмы по амплитудам полей. Если $E_k(k = \{\mathbf{k}, \omega\})$ — компонента Фурье электрического поля, то в линейном приближении $j_{ki}^{(1)} = \sigma_{ij}(k) E_{kj}$. В приближении E^2

$$j_{ki}^{(2)} = \int S_{ijl}(k, k_1, k_2) E_{k_1j} E_{k_2l} d\lambda^{(2)}, \quad (4,1)$$

$$d\lambda^{(2)} = dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2), \quad dk = d\mathbf{k} d\omega, \quad \delta(\mathbf{k}) = \delta(\omega) \delta(\mathbf{k}), \quad (4,2)$$

а в приближении E^3

$$j_{ki}^{(3)} = \int \sum_{ijlm} (k, k_1, k_2, k_3) E_{k_1j} E_{k_2l} E_{k_3m} d\lambda^{(3)}, \quad (4,3)$$

$$d\lambda^{(3)} = dk_1 dk_2 dk_3 \delta(k - k_1 - k_2 - k_3). \quad (4,4)$$

Наличие δ функций в (4,1), (4,3) не выражает никаких законов сохранения, а является следствием разложения Фурье. Из принципа причинности и действительности может быть получен (так же, как для линейного тока^{56, 58}) ряд соотношений на компоненты σ_{ij} , S_{ijl} , Σ_{ijlm} ^{28, 35}.

Заметим, что записанные соотношения имеют место для любых стационарных и однородных сред. Конкретные значения компонент σ_{ij} , S_{ijl} , Σ_{ijlm} могут быть получены при использовании тех или иных

уравнений, описывающих среду. Следует, пожалуй, отметить, что хотя нас будут интересовать волны в области прозрачности, учет поглощения и, в частности, соударений в уравнениях, описывающих плазму, в ряде случаев весьма существен в выражениях для нелинейного тока. Это связано с тем, что нелинейный ток может описывать взаимодействия в тех случаях, когда

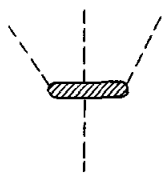


Рис. 6.

одна из волн является виртуальной и, следовательно, она может оказаться в области поглощения. Действительно, нелинейный ток (4,1) описывает вершину, изображенную на рис. 3, а (4,3) — на рис. 6. Каждая из этих вершин может быть включена в эффекты рассеяния (рис. 7). При этом возникает виртуальная линия, частоты и волновые числа которой лежат чаще всего вне области прозрачности. В случае, если виртуальная линия попадает в область прозрачности, процесс, изображенный графиками рис. 7, разбивается на два независимых процесса, а именно, вначале излучается квант, а затем происходит его распад (доказательство

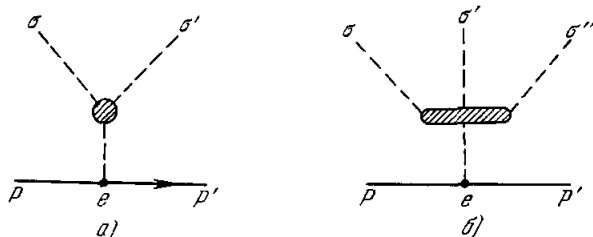


Рис. 7.

см. в ⁶⁰). Рассеяние, соответствующее рис. 7, целесообразно назвать нелинейным рассеянием, в отличие от обычного комптоновского, изображенного на рис. 8.

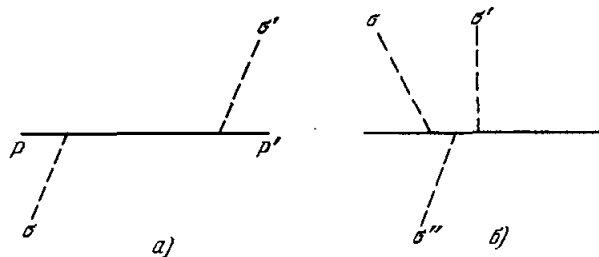


Рис. 8.

2. Для иллюстрации приведем расчет нелинейного тока для двух моделей: а) электронная изотропная плазма, описываемая гидродинамическими уравнениями ($c = 1$)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \mathbf{H}]),$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\nabla n \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -[\nabla \mathbf{E}]. \quad (4,5)$$

Эта система уравнений легко может быть переписана в компонентах Фурье ($k = \{\mathbf{k}, \omega\}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k &= -\frac{e}{m_e i \omega} \mathbf{E}_k + \frac{1}{\omega} \int \{(\mathbf{v}_{k_2} \mathbf{k}_1) (\mathbf{v}_{k_1} - \mathbf{v}_{k_1}^{(1)}) + \mathbf{k}_1 (\mathbf{v}_{k_2} \mathbf{v}_{k_1}^{(1)})\} d\lambda^{(2)}, \\ n_k &= -\frac{\mathbf{k}}{\omega} \int n_{k_2} \mathbf{v}_{k_1} d\lambda^{(2)}, \quad \mathbf{v}_k^{(1)} = -\frac{e}{m_e i \omega} \mathbf{E}_k. \end{aligned} \quad (4,6)$$

Искомая величина $\mathbf{j}_k$ имеет вид

$$\mathbf{j}_k = e \int n_{k1} \mathbf{v}_{k2} d\lambda^{(2)}. \quad (4,7)$$

Невозмущенная плотность плазмы есть n_0 ; $n_k^{(0)} = n_0 \delta(k)$. Элементарное разложение по E_k приводит к результату

$$S_{ijl} = - \frac{e \omega_{0e}^2}{8\pi m_e \omega_1 \omega_2} \left(\delta_{ij} \frac{k_{2l}}{\omega_2} + \delta_{il} \frac{k_{1j}}{\omega_1} + \delta_{jl} \frac{k_i}{\omega} \right), \quad (4,8)$$

$$\Sigma_{ijls} = \frac{e^2 \omega_{0e}^2}{8\pi m_e^2 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \left(\frac{k_i}{\omega} \cdot \frac{k_{2j} + k_{3j}}{\omega_2 + \omega_3} \delta_{ls} + \frac{k_{2i} + k_{3i}}{\omega_2 + \omega_3} \frac{k_{1j}}{\omega_1} \delta_{ls} + \frac{(k_2 + k_3)^2}{\omega_2 + \omega_3} \delta_{ij} \delta_{ls} + \right. \\ \left. + 2\delta_{ij} \frac{k_{2l}}{\omega_2} \frac{k_{2s} + k_{3s}}{\omega_2 + \omega_3} \right). \quad (4,9)$$

б) Электронная изотропная плазма, описываемая кинетическим самосогласованным уравнением. Раскладывая f по E_k ,

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i E^i,$$

получим уравнения для компонент Фурье

$$i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_{1k} = e F_k \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}, \\ i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_{2k} = e \int F_{k1} \frac{\partial f_{1k2}}{\partial \mathbf{p}} d\lambda^{(2)}, \quad F_k = E_k \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) + \frac{\mathbf{k}}{\omega} (\mathbf{v} E_k). \quad (4,10)$$

Отсюда для тока

$$\mathbf{j}_k^{(2)} = \int e \mathbf{v} f_{2k} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$$

имеем

$$S_{ijl} = -e^3 \int \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{v}}{\omega_1} \right) \frac{\partial}{\partial p_j} + \right. \\ \left. + \frac{v_j \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right)}{\omega_1} \right] \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v}} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{v}}{\omega_2} \right) \frac{\partial}{\partial p_l} + \frac{v_l}{\omega_2} \left(\mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \right] f_0 \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (4,11)$$

Из (4,11), раскладывая по параметру $\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega}$, легко получить гидродинамическое приближение (4,8).

3. Вероятности распадных процессов могут быть найдены непосредственно из нелинейного тока плазмы. Для этого воспользуемся принципом соответствия. А именно, рассмотрим уравнения, описывающие распадные процессы в пределе, когда число излучаемых квантов мало. Из (3,8) при $N_k \rightarrow 0$ нетрудно найти интенсивность излучения единицы объема плазмы

$$Q_\sigma = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\hbar \omega_\sigma N_k^\sigma d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \int \frac{\hbar \omega_\sigma u_{\sigma'\sigma''} N_k^{\sigma'} N_{k''}^{\sigma''} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\mathbf{k}''}{(2\pi)^9}. \quad (4,12)$$

С другой стороны, интенсивность Q_σ может быть найдена как энергия излучения нелинейного тока, возбуждаемого в плазме волнами σ' и σ'' . Интенсивность излучения тока $j^{(2)}$ в плазме есть работа сил поля, создаваемого током, над самим током

$$Q_\sigma = - \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (4,13)$$

Используя уравнение Максвелла с учетом линейной части тока плазмы,

чтобы выразить E через j ,

$$(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \omega^2 \varepsilon_{ij}) E_{kj} = 4\pi i \omega j_{hi}, \quad (4,14)$$

получим выражение Q^σ через ток плазмы:

$$Q^\sigma = \frac{(2\pi)^6}{TV} \int_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} d\mathbf{k} |\omega^\sigma| \frac{|a_{\sigma\mathbf{k}}^* j_{\mathbf{k}}|^2}{\left(\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^\sigma\right)_{\omega=\omega_\sigma}}. \quad (4,15)$$

Опуская подробности расчетов (см. ^{18,35}), укажем, что если в качестве тока использовать нелинейный ток (4,1) и усреднить по фазам, то из (4,13) можно получить выражение типа (4,12). Сравнение (4,15), (4,12), (1,7) позволяет найти выражение для вероятности $u_{\sigma'}^{\sigma''}$:

$$\begin{aligned} u_{\sigma'}^{\sigma''}(k, k', k'') &= 16(2\pi)^7 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \delta(\omega_{\mathbf{k}}^\sigma - \omega_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} - \omega_{\mathbf{k}''}^{\sigma''}) (\omega_{\mathbf{k}'}^{\sigma'})^2 (\omega_{\mathbf{k}''}^{\sigma''})^2 \times \\ &\times \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^{\sigma'}\right)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}'}}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^{\sigma''}\right)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}''}}^{-1} \times \\ &\times |S_{\sigma\sigma'\sigma''}(\omega_{\mathbf{k}}^\sigma, \omega_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}, \omega_{\mathbf{k}''}^{\sigma''})|^2 \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^\sigma\right)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}^{-1}, \\ S_{\sigma\sigma'\sigma''} &= a_{\sigma i}^* a_{\sigma' j} a_{\sigma'' l} S_{ijkl}. \end{aligned} \quad (4,16)$$

Сходным образом могут быть найдены вероятности четырехплазменных распадных взаимодействий ³⁸

$$\begin{aligned} u_{\sigma'}^{\sigma''\sigma'''}(k, k', k'', k''') &= 48(2\pi)^5 \delta(\omega_{\mathbf{k}}^\sigma - \omega_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} - \omega_{\mathbf{k}''}^{\sigma''} - \omega_{\mathbf{k}'''}^{\sigma'''}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' - \mathbf{k}''') \times \\ &\times |\Sigma_{\sigma\sigma'\sigma''\sigma'''}|^2 (\omega_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} \omega_{\mathbf{k}''}^{\sigma''} \omega_{\mathbf{k}'''}^{\sigma'''})^2 \prod_{i=0}^3 \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \varepsilon^{\sigma_i}\right)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}_i}^{\sigma_i}}^{-1}. \end{aligned} \quad (4,17)$$

В качестве иллюстрации получим вероятность распада для трех продольных волн, когда $\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$. Из (4,11) следует

$$S_{III} = -\frac{e^3 \omega}{kk_1 k_2} \int \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v}} \left(\mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) f_0 \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (4,18)$$

Особенно простое выражение для S_{III} имеет место в случае одномерных плазмонов, когда направления всех трех плазмонов совпадают. Симметризуя S_{III} по 1 и 2, получим

$$S_{III} = -\frac{e^3 \omega}{2} \int \frac{m^2}{\varepsilon_p^2} \frac{1}{(\omega - kv)(\omega_1 - k_1 v)(\omega_2 - k_2 v)} \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{(2\pi)^3}. \quad (4,19)$$

Для плазмы, в которой все частицы являются нерелятивистскими, выражение (4,19) вместе с (4,15) дает результат, полученный в ⁶² и ³⁰.

§ 5. Нелинейное и комptonовское рассеяния и их интерференция

Рассмотрим нелинейное рассеяние, изображаемое графиком рис. 7, а. Для нахождения вероятности рассеяния будем считать одно N_h^σ малым, когда рассеяние является спонтанным и описывается (3,5), а интенсивность излучения волны σ равна

$$Q^\sigma = \sum_{\alpha\sigma'} \int w_{\alpha\sigma'}^\sigma \omega_\sigma N_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} f_p^\alpha d\mathbf{p} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \frac{1}{(2\pi)^9}. \quad (5,1)$$

Интенсивность излучения является линейной функцией числа волн, а сле-

довательно, ток, порождающий ее, — линейная функция поля волн. Очевидно, что для получения такого тока, описывающего нелинейное рассеяние, необходимо, чтобы в одной из вершин было поставлено поле, создаваемое зарядом. Обозначим поле, создаваемое зарядом, через E^Q . Поскольку нас интересует ток, линейный как по полю волн, так и по полю заряда, то из (4,1) имеем

$$(j_{ki}^{(2)})_{п.р} = \sum_{\sigma'} \int S_{ijs}(k, k_1, k_2) (E_{jk_1}^Q E_{sk_2}^{\sigma'} + E_{jk_1}^{\sigma'} E_{sk_2}^Q) d\lambda^{(2)}. \quad (5,2)$$

Наглядно, ток $j_{п.р}^{(2)}$ описывает следующее. Заряд своим полем E_k^Q создает вокруг себя поляризационный экранирующий заряд, а поле волн E_k^σ заставляет этот экранирующий заряд колебаться. Излучение, возникающее в результате этого, и соответствует нелинейному рассеянию. Интегрируя по δ -функциям, входящим в $d\lambda^{(2)}$, легко (5,2) представить в виде

$$(j_{ki}^{(2)})_{п.р} = \sum_{\sigma'} \int \Lambda_{ij}^{п.р}(k, k_1) E_{jk_1}^{\sigma'} dk_1 \delta(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{v}), \quad (5,3)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}^{п.р}(k, k_1) \delta(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{v}) = \\ = [S_{ilj}(k, k - k_1, k_1) - S_{ijl}(k, k_1, k - k_1)] E_{l, k - k_1}^Q. \end{aligned} \quad (5,4)$$

Соотношение (5,4) весьма важно, так как оно позволяет рассчитывать нелинейное рассеяние по известному нелинейному току. Обратим внимание на то, что в (5,4) входят значения компонент S от разностных частот $\omega - \omega'$ и разностных волновых векторов $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$, которые для двух взаимодействующих волн даже весьма высоких частот могут быть весьма малыми, что в ряде случаев требует учета соударений.

Заметим,¹ что фигурирующее в (5,4) поле E^Q нужно предполагать соответствующим заряду, движущемуся в плазме равномерно и прямолинейно*), так как учет возмущения, создаваемого в движении заряда со стороны волны, привел бы в (5,3) к выражениям более высокого порядка по амплитуде волн. Поэтому поле E^Q определяется уравнениями Максвелла (4,14), где $j = j^Q$ — ток, создаваемый равномерно и прямолинейно движущимся зарядом

$$\mathbf{j}^Q = \frac{ev}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}).^1$$

Обозначив обратный максвелловский оператор через Π_{ij}

$$\Pi_{is}(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \omega^2 \varepsilon_{ij}) = \delta_{is}, \quad (5,5)$$

имеем

$$E_{jk}^Q = \frac{4\pi i \omega e}{(2\pi)^3} \Pi_{js} v_s \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (5,6)$$

Вследствие того, что при рассмотрении нелинейного рассеяния движение заряда можно считать равномерным и прямолинейным, эффект нелинейного рассеяния можно интерпретировать как излучение, возникающее, когда равномерно движущийся заряд проходит через неоднородности плотности плазмы и ее поляризации, создаваемых волнами. Такое излучение аналогично переходному излучению в периодических структурах⁶³ и излучению, создаваемому в средах, свойства которых периодически меняются во времени и в пространстве⁶⁴. Однако нелинейное рассеяние

*) Простоты ради, внешнее магнитное поле отсутствует. Об аналогичных расчетах во внешних магнитных полях см. ³⁵.

не является единственным типом рассеяния, а именно — рассеивающий заряд наряду с равномерным движением совершает малые колебания в поле волны и создает ток, величина которого пропорциональна полю E_{jk}^σ волн

$$(j_{ik})^{k,p} = \sum_{\sigma'} \int \Lambda_{ij}^{k,p}(k, k_1) E_{jk_1}^{\sigma'} dk_1 \delta(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{v}). \quad (5,7)$$

Этот ток вызывает излучение, соответствующее обычному комптоновскому рассеянию. Следует особо подчеркнуть, что при расчете интенсивности излучения необходимо вначале сложить оба выражения (5,7) и (5,3), а затем возводить в квадрат согласно (4,14), т. е. необходимо учесть интерференцию обоих типов рассеяния. На квантовом языке это просто означает, что необходимо суммировать матричные элементы, а не вероятности. Полную вероятность рассеяния можно считать равной сумме вероятностей указанных двух эффектов ⁶⁵ лишь, если речь идет об оценках *). Следует заметить, что часто (см. ниже) матричные элементы двух процессов рассеяния имеют противоположные знаки и сильно компенсируют друг друга. Поэтому без учета интерференции нельзя в ряде случаев составить себе представления о порядке величины нелинейного взаимодействия волн. Наглядно же причину того, что амплитуды двух типов рассеяния имеют разные знаки, можно понять из того, что заряд, ответственный за нелинейное рассеяние, является экранирующим и имеет знак, противоположный знаку пробного заряда. Для отыскания вероятности рассеяния нужно проделать несложную процедуру, подставить полный ток в (5,3), усреднить по фазам, и сравнить результат с (5,1). В результате имеем

$$w_{\sigma\sigma'}^{\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = 4(2\pi)^9 \frac{\delta(\omega_{\mathbf{k}}^\sigma - \omega_{\mathbf{k}'}^{\sigma'} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{v}_\alpha) (\omega_{\mathbf{k}'}^{\sigma'})^2}{\left(\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon^\sigma(\omega, \mathbf{k}) \right)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}^\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon^\sigma(\omega, \mathbf{k}') \right)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}}} \times \\ \times |\Lambda_{\sigma\sigma'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2, \quad (5,8)$$

$$\Lambda_{\sigma\sigma'} = a_{ik}^{\sigma*} (\Lambda_{ij}^{k,p} + \Lambda_{ij}^{n,p}) a_{jk'}^{\sigma'}; \quad k = \{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\sigma\}; \quad k' = \{\mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}\}.$$

Заметим, что часто нелинейное рассеяние для высоких частот происходит на экранирующих электронах плазмы. Поэтому комптоновское рассеяние на ионах, обратно пропорциональное квадрату массы иона, оказывается пренебрежимо малым. В этом случае интерференция пропадает, и рассеяние на ионах может намного превосходить рассеяние на электронах. Изложенная физическая интерпретация большой эффективности рассеяния на ионах сделана в ^{18a}. Факт большой роли ионов при рассеянии поперечных волн в поперечные был выяснен сравнительно давно ^{3,82}. Здесь следует отметить, что большая роль ионов в нелинейных эффектах обусловлена также малой величиной $\frac{df}{d\mathbf{p}}$, входящей в (3,4).

II. НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

Введение. Волны изотропной плазмы. Различные типы колебаний изотропной плазмы хорошо известны ⁴⁻⁷. Мы здесь суммируем основные моменты, касающиеся дисперсионных свойств таких волн.

*) В работе ⁶⁵ такие оценки впервые были произведены для эффектов трансформации продольных волн в поперечные. Ниже будет выяснено условие, когда один из процессов доминирует, и интерференция не существенна, что определяет область применимости оценок ⁶⁵.

а) Поперечные волны описываются спектром $\omega^t = \sqrt{k^2 + \omega_{0e}^2}$, имеют фазовые скорости v_Φ^t больше скорости света

$$v_\Phi^t = \frac{\sqrt{k^2 + \omega_{0e}^2}}{k} > 1.$$

Их групповая скорость меньше скорости света

$$v_{гр}^t = \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \omega_{0e}^2}}; \quad 0 < v_{гр}^t < 1.$$

Пространственная дисперсия для поперечных волн слабо сказывается на их дисперсионных свойствах ⁷⁰. Для релятивистской плазмы с учетом квантовых эффектов спектры найдены в ¹⁰⁵. Затухание волн обычно обусловлено соударениями. Декремент затухания

$$\gamma = \frac{\text{Im } \epsilon^t \omega^2}{\text{Re } \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon^t}$$

имеет порядок

$$\gamma \sim v_{ст} \frac{\omega_{0e}^2}{(\omega^t)^2},$$

где $v_{ст}$ — частота соударения.

б) Ленгмюровские волны имеют спектр $\omega^l \simeq \omega_{0e} + \frac{3}{2} k^2 v_{Te}^2 \frac{1}{\omega_{0e}}$.

Фазовые скорости лежат в интервале $v_{Te} < v_\Phi^l < \infty$, а групповые $0 < v_{гр}^l < v_{Te}$. Волны с $v_\Phi < v_{Te}$ сильно затухают из-за поглощения Ландау; поглощение из-за соударений имеет порядок $v_{ст}$. Спектры волн в релятивистской и квантовой плазме см. в ¹⁰⁵.

в) Ионно-звуковые колебания имеют спектр ⁷²:

$$\omega_s = \frac{k v_s}{\sqrt{1 + k^2 v_{Te}^2 / \omega_{0e}^2}} + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega_{0i}}.$$

При $k \ll \frac{\omega_{0e}}{v_{Te}} \equiv \lambda_{De}$ спектр является звуковым $\omega^s \simeq k v_s$, $v_s = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} v_{Te}$.

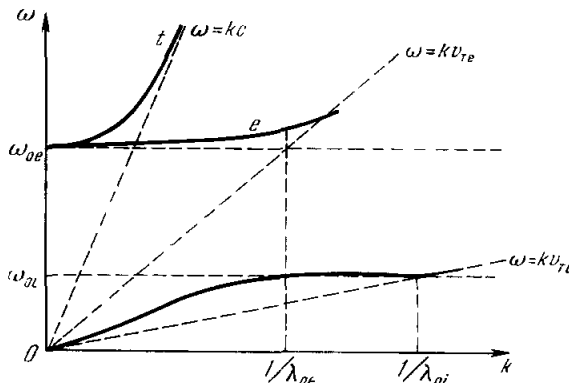


Рис. 9.

тогда как при $k \gg 1/\lambda_{De}$ частота волн близка к ω_{0i} . Фазовые скорости волн лежат в интервале $v_{Ti} < v_\Phi^s < v_s$, а групповые в интервале

$$\left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{1/4} v_{Ti} < v_{гр}^s < v_s.$$

Поглощение из-за затухания Ландау на электронах имеет порядок

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi m_e}{8m_i}} \frac{kv_s}{(1 + k^2 \lambda_{De}^2)^{3/2}}.$$

Схематически спектры возможных волн изображены на рис. 9. Нашей задачей будет сравнение различных типов нелинейных взаимодействий между указанными тремя типами волн плазмы.

§ 6. Индуцированное рассеяние ленгмюровских волн с превращением в ленгмюровские на электронах плазмы

1. В данном параграфе для иллюстрации приведен последовательный вывод нелинейного взаимодействия ленгмюровских волн согласно изложенной выше общей теории. В последующих параграфах приводятся лишь результаты подобного расчета и основное внимание уделяется анализу и сравнению различных нелинейных взаимодействий.

Рассмотрим в первую очередь комptonовское рассеяние. Колебания заряда в поле волн, определяющие комptonовское рассеяние, описываются уравнением ($\epsilon=1$)

$$\frac{d}{dt} \frac{v_i}{\sqrt{1-v_i^2}} = \frac{e}{m} \int F_{ik_1} e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - i\omega_1 t} dk_1; \quad \mathbf{F}_k = \mathbf{E}_k \left(1 - \frac{\mathbf{k} \mathbf{v}}{\omega}\right) + \frac{\mathbf{k} (\mathbf{v} \mathbf{E}_k)}{\omega}. \quad (6.1)$$

С учетом лишь членов первого порядка по напряженности поля $\mathbf{E}_k$ решение уравнения (6.1) имеет вид

$$r_i(t) = v_{0i} t - \frac{e \sqrt{1-v_0^2}}{m} (\delta_{ij} - v_{0i} v_{0j}) \int F_{jk_1} \frac{e^{i(\mathbf{k} \mathbf{v}_0 - \omega)t}}{(\mathbf{k} \mathbf{v}_0 - \omega)^2} dk_1. \quad (6.2)$$

Линейная по полю часть тока, обусловленная колебаниями заряда, есть

$$j_{ih} = \frac{ie^2}{(2\pi)^3 m} \sqrt{1-v_0^2} \int \frac{dk_1}{(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_0)^2} [v_{0i} k_j (\delta_{js} - v_{0j} v_{0s}) - (\mathbf{k} \mathbf{v}_0 - \omega) (\delta_{is} - v_{0i} v_{0s})] \times \\ \times F_{k_1 s} \delta(\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{v}_0). \quad (6.3)$$

Сопоставляя (6.3) с (5.7), легко находим Λ_{ij} , определяющее комptonовское рассеяние

$$\Lambda_{ij}^{k, p}(k, k_1) = \frac{ie^2}{(2\pi)^3 m} \frac{\sqrt{1-v^2}}{(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v})^2} [v_i k_l (\delta_{ls} - v_l v_s) - \\ - (\mathbf{k} \mathbf{v} - \omega) (\delta_{is} - v_i v_s)] \left[\delta_{sj} \left(1 - \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{v}}{\omega_1}\right) + \frac{k_{1s} v_j}{\omega_1} \right]. \quad (6.4)$$

Комptonовское рассеяние продольных волн определяется из

$$\Lambda_{ll}^{k, p} = \Lambda_{ij}^{k, p} \frac{k_i k_j}{k k_1} = \frac{ie^2 \sqrt{1-v^2} \omega [(\mathbf{k} \mathbf{k}_1) - (\mathbf{k} \mathbf{v})(\mathbf{k}_1 \mathbf{v})]}{k k_1 m (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v})^2 (2\pi)^3}. \quad (6.5)$$

Для отыскания нелинейного рассеяния воспользуемся (5.4), подставив в это выражение поле заряда (5.6) и нелинейный ток (4.11).

Заметим, что обратный максвелловский оператор Π_{ij} , входящий в (5.4),

$$\Pi_{ij} = -\frac{1}{k^2} \left\{ \frac{k_i k_j}{\omega^2 \epsilon^l(\omega, \mathbf{k})} - \frac{k^2 \delta_{ij} - k_i k_j}{k^2 - \omega^2 \epsilon^t(\omega, \mathbf{k})} \right\} \quad (6.6)$$

в изотропной плазме описывает два типа нелинейного рассеяния, а именно, первый член (6.6), содержащий функцию Грина продольного поля (ϵ^l — продольная диэлектрическая проницаемость, ϵ^t — поперечная), описывает процесс рассеяния через виртуальную продольную волну, а второй член — через виртуальную поперечную

волну. Получаем

$$\Lambda_{ll}^{\pi p} = -\frac{ie^2\omega}{kk_1} 4\pi e^2 \sum_{\alpha} \int \frac{d\mathbf{p}'}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}'} \left[\left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right) \frac{1}{\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{v}'} \left(\tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right) + \right. \\ \left. + \left(\tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right) \frac{1}{\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v}'} \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right) \right] f_{\mathbf{p}'}^{\alpha}; \quad \tilde{\alpha} = \left(1 - \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{v}'}{\omega - \omega_1} \right) \alpha + \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)(\alpha\mathbf{v}')}{\omega - \omega_1}; \quad (6,7)$$

$$\alpha = \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}_1}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 \varepsilon^l(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1)} - \frac{(\omega - \omega_1) \left(\mathbf{v} - \frac{(\omega - \omega_1)(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2} \right)}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 (\omega - \omega_1)^2 \varepsilon^l(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1)} \quad (6,8)$$

Полное сечение рассеяния определяется величиной $|\Lambda_{ll}^{\pi p}|^2$ и, следовательно, имеет вид [18б, 20]

$$w_{al}^l(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = \frac{32\pi^3 e^4 |\Lambda_{ll}^{\alpha}|^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{v})}{\left. \frac{\partial \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}_1)}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_{\mathbf{k}_1}} \cdot \left. \frac{\partial \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_{\mathbf{k}}}}. \quad (6,9)$$

где

$$\Lambda_{ll}^{\alpha} = \frac{((\mathbf{k}\mathbf{k}_1) - (\mathbf{k}\mathbf{v})(\mathbf{k}_1\mathbf{v})) \sqrt{1 - v^2}}{m_{\alpha}(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 k k_1} - \sum_{\alpha'} \frac{4\pi e^2}{kk_1} \int \frac{d\mathbf{p}'}{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\mathbf{v}'} \times \\ \times \left[\left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right) \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{v}'} \left(\tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right) + \left(\tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right) \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_1} - \mathbf{k}_1\mathbf{v}'} \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right) \right] f_{\mathbf{p}'}^{\alpha'} \frac{1}{(2\pi)^3}. \quad (6,10)$$

В правой части (6,10) учтено, что нелинейное рассеяние, описываемое вторым членом (6,10), может происходить как на электронах, так и на ионах плазмы. Для ленгмюровских волн, которыми мы здесь будем интересоваться, существенную роль играет лишь нелинейное рассеяние, в котором нелинейный элемент определяется электронами. Выпишем здесь также уравнение, описывающее нелинейное взаимодействие ленгмюровских волн

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^l \sum_{\alpha} \int N_{\mathbf{k}_1}^l \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} w_{al}^l(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \frac{\partial f_{\mathbf{p}}^{\alpha}}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (6,11)$$

2. Перейдем теперь к анализу уравнений (6,10) — (6,11). Во-первых, следует отметить, что в рассеянии ленгмюровских волн принимают участие тепловые частицы плазмы. Действительно, для того чтобы рассеяние было возможным, необходимо, чтобы скорость рассеивающей частицы удовлетворяла закону сохранения энергии в отдельном акте рассеяния

$$\omega - \omega_1 = \frac{3}{2} \frac{v_{Te}^2}{\omega_{0e}} (k^2 - k_1^2) = (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{v}$$

или для проекции скорости v на $\mathbf{k} - \mathbf{k}_1$ имеем

$$v_{\mathbf{k} - \mathbf{k}_1} \sim \frac{v_{Te}^2}{v_{\Phi}} - v_{Te}.$$

Остальные две проекции скорости могут быть произвольными. Использование этих неравенств наряду с $k v \sim \omega$ и $k_1 v \sim \omega_1$ позволяет получить приближенный вид нелинейного взаимодействия, содержащего лишь значение диэлектрической проницаемости от аргументов $\omega - \omega_1$ и $\mathbf{k} - \mathbf{k}_1$. При этом очень существенным является компенсация двух типов рассеяния, обусловленная тем, что нелинейное рассеяние (на экранирующем заряде) в первом приближении по $\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega}$ полностью компенсирует комптоновское рассеяние. Действительно, рассмотрим плазму нерелятивистских

температур, когда $v \ll 1$, и учтем лишь рассеяние через виртуальную продольную волну. Тогда имеем

$$\Lambda_{li}^e \simeq \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{kk_1} \frac{1}{\omega^2 m_e} \left(1 + \frac{2(\mathbf{k}\mathbf{v})}{\omega} \right) - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{kk_1} \frac{\varepsilon_e^l(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) - 1}{\varepsilon^l(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1)} \frac{1}{\omega^2 m_e} \quad (6,12)$$

$\varepsilon^l = \varepsilon_e^l + \varepsilon_i^l - 1$, ε_e и ε_i , соответственно электронная и ионная части проницаемости плазмы. В первом члене (6,12), описывающем комптоновское рассеяние, мы учли в первом приближении малую поправку $\sim \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega}$, связанную с доплеровским изменением частоты, воспринимаемой рассеивающим зарядом. Это необходимо в силу того, что нелинейное рассеяние почти полностью компенсирует комптоновское. Доплер-эффект в комптоновском рассеянии определяет эффект рассеяния в электронной плазме ($m_i \rightarrow \infty$):

$$\varepsilon_e^l(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \simeq \varepsilon^l(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \gg 1,$$

$$\Lambda_{li}^l |_{m_i \rightarrow \infty} = \frac{2(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{kk_1} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})}{\omega^2 m_e}. \quad (6,13)$$

В результате, подставляя (6,13) в (6,11), получим, что нелинейное взаимодействие при рассеянии на тепловых электронах плазмы ($m_i \rightarrow \infty$) имеет вид

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = \frac{3v_{Te}N_{\mathbf{k}}^l}{2m_e n \omega_{0e}} \int \frac{N_{\mathbf{k}_1}^l}{(2\pi)^{5/2}} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}_1]^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^3} (k_1^2 - k^2) d\mathbf{k}_1. \quad (6,14)$$

Такой вид нелинейного взаимодействия был найден впервые в ^{33, 16}. Следует отметить характерные черты такого взаимодействия: а) обращение в нуль взаимодействия волн с взаимно перпендикулярными и параллельными направлениями; б) следующую из общих соотношений перекачку энергии в сторону меньших волновых чисел (меньших частот). Последнее означает, что если распределение волн таково, что они, например, сосредоточены около $k = k_0$, то нелинейные эффекты приводят к генерации волн с $k < k_0$ и уменьшению волн с $k \approx k_0$. Ясно при этом, что если «затравочные» волны с $k < k_0$ имеются для всех углов, то возрастать будут волны, имеющие направления, отличные от исходного спектра, т. е. процесс перекачки сопровождается изотропизацией распределения плазменных волн. Характерное время указанных процессов перекачки и изотропизация оказываются разными в зависимости от того, каково характерное волновое число волн, в которое перекачивается энергия. Если k — порядка k_0 и $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|$ порядка k_0 , угол $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$ порядка 1, то характерное время имеет порядок ^{33, 20}

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_{0e} \frac{W^l}{nm_e v_{Te}^2} \left(\frac{v_{Te}}{v_{\Phi}^0} \right)^3, \quad v_{\Phi}^0 \simeq \frac{\omega_{0e}}{k_0}, \quad (6,14')$$

W^l — энергия исходных колебаний в см^3 . Характерное время перекачки может достигать относительно больших значений, намного превышающих частоту кулоновских соударений частиц. Характерное время перекачки в колебания, длины волн которых намного превосходят длину волны исходных колебаний

$$\frac{1}{\tau'} \sim \omega_{0e} \frac{W^l}{nm_e v_{Te}^2} \left(\frac{v_{Te}}{v_{\Phi}^0} \right)^3 \left(\frac{v_{\Phi}^0}{v_{\Phi}} \right)^2: \quad v_{\Phi} = \frac{\omega_{0e}}{k},$$

больше τ в $\left(\frac{v_{\Phi}}{v_{\Phi}^0} \right)^2 \gg 1$ раз. Это показывает, что перекачка должна осуществляться «эстафетным» образом или, грубо говоря, среднее значение v_{Φ} линейно растет во времени. Более строго это может быть выявлено при

решении интегрального уравнения (6,14) (см. ⁷³). Следует также отметить, что обращение в нуль взаимодействия при $k \parallel k_1$ и $k \perp k_1$ есть следствие приближенного характера (6,14). Взаимодействие волн $k \parallel k_1$, $k \perp k_1$ оказывается значительно более слабым, так как описывается членами следующего порядка по малому параметру $\left(\frac{v_{Te}}{v_\Phi}\right)^2$. Естественно, имеет смысл учитывать такие эффекты лишь при строго параллельных или строго перпендикулярных волновых векторах. При этом для электронной плазмы ($m_i \rightarrow \infty$) имеем $k \parallel k_1$, ^{21, 26, 23, 33}

$$\frac{\partial N_k^l}{\partial t} = N_k^l \int N_{k_1}^l dk_1 \frac{27}{8(2\pi)^{5/2}} \frac{(k_1^2 - k^2)}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}|} \frac{v_{Te}}{n\omega_0 e m_e} \frac{k^2 k_1^2 v_{Te}^2}{\omega_{0e}^3}, \quad (6,15)$$

а для $k \perp k_1$ взаимодействие отличается от (6,15) множителем $1/9$ ³³.

Характерное время перекачки меньше (6,14) примерно в $\frac{v_{Te}^2}{v_\Phi^2}$ раз. Условие параллельности векторов, для которых взаимодействие описывается (6,15), имеет вид $\theta \ll \theta_0 = \frac{v_{Te}}{v_\Phi}$, где θ — угол между k и k_1 , или разность угла и $\frac{\pi}{2}$. В силу того, что взаимодействие одномерных спектров относительно слабо, для одномерных спектров более вероятным будет процесс изотропизации с перекачкой волн в области углов $\theta > \theta_0$.

Следует, однако, подчеркнуть, что в практически интересных случаях учет ионной части диэлектрической проницаемости в нелинейном рассеянии может быть существен и заметно ограничивает возможность использования (6,14). Действительно, учитывая $\epsilon^l = \epsilon_e^l + \epsilon_i^l - 1$, имеем из (6,12)

$$\Lambda^{ll} = \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}{kk_1} \frac{1}{\omega^2 m_e} \left(\frac{2(\mathbf{k}\mathbf{v})}{\omega} + \frac{\epsilon_i^l(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1)}{\epsilon^l(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1)} \right). \quad (6,16)$$

Следует подчеркнуть, что указанные поправки не описывают рассеяния на ионах, речь идет об эффектах рассеяния на экранирующем заряде, создаваемом электронами и ионами. Ионы сказываются на экранировании лишь благодаря компенсации в первом приближении комптоновского и нелинейного рассеяния. Оценим, при каких условиях влияние ионов на экранировке рассеяния на электронах начинает доминировать над доплеровскими поправками к комптоновскому рассеянию. Следует заметить, что такую оценку целесообразно делать в условиях, когда рассеяние на ионах невозможно, ибо, как будет следовать из следующего параграфа, в условиях, когда возможно рассеяние на ионах, рассматриваемое здесь рассеяние на электронах представляет, как правило, малый эффект. Для возможности рассеяния на ионах необходимо, чтобы скорость иона, участвующего в рассеянии $v_i = \frac{\omega - \omega_1}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|}$, была меньше v_{Ti} (в противном случае число рассеивающих ионов для максвелловского распределения экспоненциально мало). Итак, в условиях $\omega - \omega_1 \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| v_{Ti}$ и $\omega - \omega_1 \ll |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| v_{Te}$ имеем

$$\epsilon_i^l \simeq -\frac{\omega_{0i}^2}{(\omega - \omega_1)^2}, \quad \epsilon_e^l \simeq \frac{\omega_{0e}^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 v_{Te}^2}.$$

Для $k_1 \sim k$, $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \sim k$, ϵ_i^l имеет порядок $\frac{m_e}{m_i} \left(\frac{v_\Phi}{v_{Te}}\right)^4$, а ϵ^l при

$$\frac{v_\Phi}{v_{Te}} \ll \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2}$$

имеет порядок $\frac{v_\Phi^3}{v_{Te}^3}$, т. е.

$$\frac{\varepsilon_i^l}{\varepsilon^l} \sim \frac{m_e}{m_i} \frac{v_\Phi^3}{v_{Te}^3},$$

а первый член (6,16) порядка $\frac{v_{Te}}{v_\Phi}$. Таким образом, ионы существенно сказываются на рассеянии уже при

$$\frac{v_\Phi}{v_{Te}} \gg \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/3}.$$

Учитывая, кроме того, что $\frac{v_\Phi}{v_{Te}} \gg 1$, мы видим, что для водородной плазмы $\frac{m_i}{m_e} \sim 2 \cdot 10^3$ результаты (6,14) имеют узкую область применимости: $1 \ll \frac{v_\Phi}{v_{Te}} \ll 10$. Для плазмы тяжелых газов, например, цезиевой плазмы, границы применимости результатов ³³ расширяются. Если пренебречь доплеровскими поправками в (6,15), то нелинейное взаимодействие в условиях

$$\left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/3} \ll \frac{v_\Phi}{v_{Te}} \ll \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}$$

описывается приближенной формулой ³⁶

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^l \int N_{\mathbf{k}_1}^l d\mathbf{k}_1 \frac{2}{27} \frac{m_e^2}{m_i^2} \frac{\omega_{0e}^5}{v_{Te}^5} \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^4 (\mathbf{k} \mathbf{k}_1)^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| (k_1^2 - k^2)^3 k^2 k_1^2 (2\pi)^{5/2} n m_e v_{Te}}, \quad (6,17)$$

а при $\frac{v_\Phi}{v_{Te}} \gg \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}$:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^l \int N_{\mathbf{k}_1}^l \frac{3 \omega_{0e} (k_1^2 - k^2) (\mathbf{k} \mathbf{k}_1)^2 d\mathbf{k}_1}{8 (2\pi)^{5/2} n m_e v_{Te} |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| k_1^2 k^2}. \quad (6,18)$$

Роль ионов в экранировке рассеяния на электронах была выявлена в ³⁶, где получено нелинейное взаимодействие (6,17) для одномерного спектра ($k \parallel k_1$), а в неоднмерном случае в ⁷³. Следует заметить, что взаимодействие (6,18), в отличие от (6,14), слабо зависит от углов взаимодействующих волн при $\theta \ll 1$.

Порядок характерного времени в условиях (6,18) и $\mathbf{k} - \mathbf{k}_1$ порядка k есть

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_{0e} \frac{W^l}{n m_e v_{Te}^3} \frac{v_{Te}}{v_\Phi},$$

что намного (в $\left(\frac{v_\Phi}{v_{Te}} \right)^2$ раз) превосходит (6,14). Обратим внимание на то, что поляризационные эффекты ионов особенно существенны при рассмотрении одномерных спектров. Общее выражение для нелинейного взаимодействия одномерных спектров, пригодное также для волн, фазовая скорость которых может быть порядка и больше скорости света, получено в ¹⁵,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^l \int N_{\mathbf{k}_1}^l d\mathbf{k}_1 \frac{3 \omega_{0e}}{8 (2\pi)^{5/2}} \frac{k_1^2 - k^2}{|k - k_1| n m_e v_{Te}} \left\{ v_{Te}^4 + \right. \\ \left. + \left| v_{Te}^2 + \frac{1 - \varepsilon_i^l (\omega - \omega_1, k - k_1)}{\varepsilon^l (\omega - \omega_1, k - k_1)} + \frac{3 k k_1}{(k - k_1)^2 \varepsilon^l (\omega - \omega_1, k - k_1)} \right|^2 \right\}. \quad (6,19) \end{aligned}$$

Заметим, что результат (6,15) следует из (6,19) для волн нерелятивистских фазовых скоростей лишь при

$$\frac{v_{\Phi}}{v_{Te}} \ll \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/4}.$$

Для волн, фазовые скорости которых близки к скорости света, нелинейное взаимодействие может определяться формулой, отличающейся от (6,15) численным коэффициентом $\frac{17}{9}$ (см. ¹⁵) лишь при весьма больших температурах плазмы

$$v_{Te} \gg \left(\frac{m_e}{9m_i} \right)^{1/4}.$$

При невыполнении одного из последних неравенств нелинейное взаимодействие одномерных волн имеет тот же порядок, что и неодномерных (6,18). Отметим, что в (6,19) учитывалось лишь нелинейное рассеяние через виртуальную продольную волну, так же, как и во всех предыдущих формулах. Рассеяние через виртуальную поперечную волну в одномерном случае строго запрещено и (6,19) описывает взаимодействие произвольных одномерных спектров.

§ 7. Нелинейное рассеяние через виртуальные поперечные волны

Переходя к анализу нелинейного рассеяния через виртуальную поперечную волну, следует отметить, что существенная роль такого нелинейного взаимодействия впервые обсуждалась для рассеяния продольных волн в поперечные в ^{18a}. Что касается нелинейного взаимодействия ленгмюровских волн между собой, то на роль рассеяния через виртуальную поперечную волну было обращено внимание в ³⁴. Однако при этом была преувеличена роль такого взаимодействия из-за того, что эффекты, связанные с ним, сравнивались с формулой (6, 14), несправедливой в области больших фазовых скоростей, при которых рассеяние через виртуальную поперечную волну может сказаться (как правило, это $v_{\Phi} \gg 1$). В этих условиях рассеяние через продольную волну описывается взаимодействием (6,18), не учтенным в ³⁴. Поляризационные эффекты ионов также могут сказаться на рассеянии через виртуальную поперечную волну ¹⁵. Приведем поэтому результат ¹⁵, описывающий все три типа взаимодействия (комптоновское рассеяние, рассеяние через продольную волну и рассеяние через поперечную волну), полученный в приближении, когда не учитываются слабые взаимодействия, соответствующие одномерным спектрам (типа (6,19))

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^l \int N_{\mathbf{k}_1}^l d\mathbf{k}_1 & \frac{3\omega_{0e} (k_1^2 - k^2)}{8(2\pi)^{3/2} |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| nm_e v_{Te}} \left\{ \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}_1]^2 \varepsilon_{li}^l}{k^2 k_1^2 \omega_{0e}^2 |\mathbf{k}_-|^2} + 2(\mathbf{k}\mathbf{k}_1) + \right. \\ & \left. - \frac{\omega_-^2 (\varepsilon_l^l(\omega_-, \mathbf{k}_-) - 1) 2(\mathbf{k}\mathbf{k}_1) - k_-^2 \omega_{0e}^2}{k_-^2 - \omega_-^2 \varepsilon^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)} \right\} \cdot \\ & \left. \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \left| \frac{\varepsilon_i^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)}{\varepsilon^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)} \right|^2 \right\}, \quad \omega_- = \omega - \omega_1, \mathbf{k}_- = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1. \quad (7,1) \end{aligned}$$

Член, содержащий знаменатель $k_-^2 - \omega_-^2 \varepsilon^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)$, учитывает вклад рассеяния через виртуальную поперечную волну. Из приведенного выражения видно также, что рассеяние через виртуальную поперечную волну возможно лишь для волн, волновые векторы которых не строго параллельны. Выявим поэтому, когда рассеяние через поперечную волну будет определяющим, считая, что угол k, k_1 порядка единицы. Сумма доплеровской поправки к комптоновскому рассеянию и нелинейного рассеяния через поперечную волну согласно (7,1) определяется квадратом модуля величины

$$\Lambda = \frac{\omega_{0e}^2 k_-^2 - 2(\mathbf{k}_1\mathbf{k})(k_-^2 - \omega_-^2 \varepsilon_i^l(\omega_-, \mathbf{k}_-))}{k_-^2 - \omega_-^2 \varepsilon^l(\omega_-, \mathbf{k})}. \quad (7,2)$$

Большое значение Δ возможно лишь из-за малых знаменателей (7.2). Если k_1 и k величины одинакового порядка, то $|k_-|$ при

$$\theta \sim 1 \left(\cos \theta = \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{kk_1} \right)$$

имеет порядок k , тогда как $\omega \sim \frac{3k \Delta k v_{Te}^2}{\omega_{0e}}$, $\Delta k = |\mathbf{k}_1| - |\mathbf{k}|$, вообще говоря, может быть весьма малой величиной. Далее, так как рассеяние на ионах не учитывается, то $\omega_- \gg |\mathbf{k}_-| v_{Ti}$ или

$$\Delta k \gg \frac{v_{Ti}}{v_{Te}} \frac{v_{\Phi}}{v_{Te}} k,$$

$$\varepsilon^t(\omega_-, \mathbf{k}_-) \simeq -\frac{m_e}{9m_i} \frac{v_{\Phi}^4}{v_{Te}^4} \frac{k^2}{(\Delta k)^2} + \frac{i}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{v_{\Phi}^3}{v_{Te}^3} \frac{k}{\Delta k},$$

причем первый член ε^t соответствует вкладу ионов, а второй — электронов. В условиях

$$\frac{\Delta k}{k} \gg \frac{v_{\Phi}}{v_{Te}} \frac{m_e}{9m_i} \quad (7,3)$$

основной вклад в ε^t вносят электроны. Тогда можно получить приближенный вид нелинейного взаимодействия, в частных случаях $k_-^2 \gg \omega_-^2 \varepsilon^t(\omega_-, k_-)$, что эквивалентно в данных условиях $\frac{\Delta k}{k} \ll \frac{1}{v_{\Phi} v_{Te}}$. При выполнении $\frac{\Delta k}{k} \gg \frac{1}{v_{\Phi} v_{Te}}$ и (7,3) получаем взаимодействие в виде, указанном в ³⁴ (очень существенное условие (7,3), так же как и ряд нижеследующих, в ³⁴ не выявлено),

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^l \int \frac{2}{3} \frac{\omega_{0e}}{(2\pi)^{7/2}} \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}_1]^2}{(k_1^2 - k^2)} \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^3}{nm_e v_{Te}} \frac{N_{\mathbf{k}_1}^l d\mathbf{k}_1}{k^2 k_1^2}. \quad (7,4)$$

В (7,4) предполагалось $v_{\Phi}^l \gg 1$, так как лишь в этих условиях (7,4) может происходить рассеяние через продольную волну. Действительно, характерное время спектральной перекачки (7,4) имеет порядок

$$\frac{1}{\tau} \simeq \frac{k}{\Delta k} \frac{W^l}{nm_e v_{Te}^2} \frac{v_{Te}}{v_{\Phi}} \omega_{0e}.$$

Тогда как при рассеянии через продольную волну при $\varepsilon_i^l \ll \varepsilon_e^l$, т. е.

$$\frac{\Delta k}{k} \gg \frac{v_{\Phi}}{v_{Te}} \sqrt{\frac{m_e}{9m_i}},$$

имеем оценку

$$\frac{1}{\tau} \sim \left(\frac{k}{\Delta k} \right)^3 \omega_{0e} \cdot \left(\frac{m_e}{9m_i} \right)^2 \left(\frac{v_{\Phi}}{v_{Te}} \right)^3 \frac{W^l}{nm_e v_{Te}^2}$$

Из сравнения получим условия преобладания (7,4)

$$\frac{\Delta k}{k} \gg \frac{v_{\Phi}^2}{v_{Te}^2} \frac{m_e}{9m_i}.$$

В силу $\Delta k/k < 1$ имеем

$$\frac{v_{\Phi}}{v_{Te}} \ll \sqrt{\frac{9m_i}{m_e}}$$

и в силу

$$\frac{\Delta k}{k} \gg \frac{1}{v_{\Phi} v_{Te}}$$

из $\Delta k/k < 1$ имеем $v_{\Phi} \gg 1/v_{Te}$, т. е.

$$v_{Te} \gg \left(\frac{m_e}{9m_i} \right)^{1/4}.$$

Это условие показывает, что взаимодействие (7,4) может быть определяющим лишь в плазме очень больших электронных температур (для водородной плазмы $> 100 \text{ кэВ}$), причем $v_{Ti} \ll v_{Te}^3$. В условиях неравенства

$$\frac{\Delta k}{k} \ll \frac{v_\phi}{v_{Te}} \sqrt{\frac{m_e}{9m_i}}$$

взаимодействие через продольную волну имеет порядок

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_{0e} \frac{\Delta k}{k} \frac{v_{Te}}{v_\phi} \frac{W^l}{nT_e}$$

и условие доминирования рассеяния через поперечную волну приобретает вид ¹⁵ $\Delta k \ll k$. Условие на электронную температуру вновь возникает, если учесть, что в силу $\Delta k < k$ и

$$\frac{\Delta k}{k} \gg \frac{v_\phi m_e}{9v_{Te} m_i}$$

имеем $v_\phi \ll v_{Te} \frac{9m_i}{m_e}$ и в силу $v_\phi \gg \frac{1}{v_{Te}} v_{Te} \gg \left(\frac{m_e}{9m_i}\right)^{1/2}$. Нужно при этом иметь в виду, что каждое из указанных неравенств должно быть выполнено по крайней мере с запасом в 2—3 порядка, что для водородной плазмы нерелятивистских температур вряд ли возможно.

Рассеяние через виртуальную поперечную волну в условиях

$$\frac{v_\phi m_e}{9v_{Te} m_i} \ll \frac{\Delta k}{k} \ll \frac{1}{v_\phi v_{Te}}$$

соответствует результату ³⁴, получаемому из (7,1):

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^l \int \frac{3\omega_{0e}^2 (k_1^2 - k^2) [\mathbf{k}\mathbf{k}_1]^2 v_{Te} N_{\mathbf{k}_1} d\mathbf{k}_1}{8(2\pi)^{5/2} |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^3 n m_e k^2 k_1^2} \quad (7,5)$$

Характерное время перекачки есть $\frac{1}{\tau} \approx \omega_{0e} \frac{\Delta k}{k} \frac{W^l}{nT_e} \frac{v_{Te}^3}{v_\phi}$. Из сравнения с рассеянием через продольную волну получим условие доминирования рассеяния через поперечную волну $v_\phi \gg \frac{1}{v_{Te}}$. С другой стороны, из сопоставления (7,3) и

$$\frac{\Delta k}{k} \gg \frac{v_\phi}{v_{Te}} \frac{m_e}{9m_i}$$

имеем $v_\phi \ll \sqrt{\frac{9m_i}{m_e}}$, что вместе с $v_\phi \gg \frac{1}{v_{Te}}$ дает $v_{Te} \gg \left(\frac{m_e}{9m_i}\right)^{1/2}$ (неравенство с запасом в 2—3 порядка). Сравнение (7,5) с рассеянием через продольную волну при

$$\frac{\Delta k}{k} \gg \frac{v_\phi}{v_{Te}} \left(\frac{m_e}{9m_i}\right)^{1/2}$$

дает условие доминирования рассеяния через поперечную волну

$$\frac{\Delta k}{k} \gg \frac{1}{v_{Te}} \left(\frac{v_\phi m_e}{9v_{Te} m_i}\right)^{1/2}$$

Из $\Delta k/k < 1$ и $v_\phi \gg 1$ следует $v_{Te} \gg \left(\frac{m_e}{9m_i}\right)^{1/3}$. Кроме того, из неравенств, предшествующих (7,5), следует, что

$$1 \ll v_\phi \ll \left(\frac{9m_i}{m_e}\right)^{1/4}$$

что является для водородной плазмы жестким условием. Приведенный анализ показывает, что найденные в работе ³⁴ частные виды взаимодействий (7,4) и (7,5), во всяком случае для легких газов, имеют узкие области применимости. Остановимся теперь на следующих из (10,1) частных видах нелинейного взаимодействия, связанного с рассеянием через виртуальную поперечную волну, в случае, когда

ионы определяют поляризационные эффекты, т. е. при

$$\frac{\Delta k}{k} \ll \frac{v_{\Phi}}{v_{Te}} \frac{m_e}{9m_i}.$$

Если при этом $v_{\Phi} \gg \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2}$ и $\frac{\Delta k}{k} < \frac{v_{\Phi}}{v_{Te}^2}$, то нелинейное взаимодействие приобретает вид

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^l \int N_{\mathbf{k}_1}^l d\mathbf{k}_1 \frac{3(k_1^2 - k^2) [\mathbf{k} \mathbf{k}_1]^2 v_{Te} |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| m_i^2}{8(2\pi)^{5/2} n m_e k^2 k_1^2 \omega_0 m_e^2}. \quad (7,6)$$

Характерное время нелинейного взаимодействия имеет порядок

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_0 \frac{W^l}{n T_e} \frac{v_{Te}^3}{v_{\Phi}^3} \frac{\Delta k}{k} \frac{m_i^2}{m_e^2}.$$

Анализ показывает, что взаимодействие (7,6) не может доминировать над рассеянием через продольную волну. Если же $1 \ll v_{\Phi} \ll \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$, то взаимодействие приобретает вид (7,5), и при сравнении с рассеянием через продольную волну следует $v_{\Phi} \gg \frac{1}{v_{Te}}$, т. е. $v_{Te} \gg \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$. Проведенный анализ показывает, что учет ионов в экранировке рассеяния через поперечную волну может несколько смягчить условия, требуемые для того, чтобы нелинейное взаимодействие определялось рассеянием через виртуальную поперечную волну, и особенно для тяжелых газов с большими m_i : взаимодействие может описываться (7,5) при условии выполнения выведенных неравенств.

§ 8. Индуцированное рассеяние ленгмюровских волн на ионах

Для того чтобы ионы плазмы могли рассеивать ленгмюровские волны, необходимо, чтобы было выполнено неравенство

$$\frac{3\Delta k}{k} < \frac{v_{Ti}}{v_{Te}} \frac{v_{\Phi}}{v_{Te}}. \quad (8,1)$$

Это неравенство является простым следствием закона сохранения энергии при рассеянии. При $\Delta k \sim k$ оно сводится к ³⁶

$$T_i > T_e 9 \frac{m_i}{m_e} \frac{v_{\Phi}^2}{v_{Te}^2}. \quad (8,2)$$

Для неизотермической плазмы с сильно нагретыми электронами $T_e \gg T_i$ можно всегда указать такие малые T_i , когда условия (8,1) и (8,2) не выполняются, и рассеяние на ионах роли не играет. Однако уже при $T_i \sim T_e$ волны больших фазовых скоростей (для (8,2) $\frac{v_{\Phi}}{v_{Te}} \sim \sqrt{\frac{9m_i}{m_e}}$) и малых $\frac{\Delta k}{k}$ (см. (8,1)) в основном взаимодействуют при рассеянии на ионах.

Дело в том, что индуцированное рассеяние на ионах, если оно разрешено законами сохранения, обычно превосходит рассеяние на электронах. Для этого имеются две причины. Одна из них была указана в ^{18а}, а именно: вероятность рассеяния высокочастотных волн на ионах является весьма большой из-за того, что комптоновское рассеяние из-за большой массы иона мало и не может компенсировать нелинейное рассеяние, определяемое m_e . Вторая причина большой роли нелинейных эффектов при рассеянии на ионах состоит в том, что при выполнении (8,1) и (8,2) число ионов, способных рассеивать волны, в $\frac{v_{Te}}{v_{Ti}}$ раз больше числа рассеивающих электронов.

В соответствии со сказанным, рассеянием на ионах является чисто нелинейным и определяется вторым членом (6.12), который в силу (8.1) и (8.2) $\omega \ll |\mathbf{k}| v_{Ti}$ и $v_{Ti} \ll v_{Te}$ имеет вид

$$A_n = \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}{kk_1} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^{-1} \frac{1}{\omega^2 m_e}.$$

Нелинейное взаимодействие описывается формулой ^{33, 34, 36, 28, 15}

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^l \frac{3}{8} \frac{\omega_{0e} T_e}{nm_e v_{Ti} T_i} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^{-2} \int \frac{N_{\mathbf{k}_1}^l d\mathbf{k}_1 (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{(2\pi)^{5/2} k^2 k_1^2} \frac{k_1^2 - k^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|}. \quad (8.3)$$

Порядок величины характерного времени перекачки составит

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_{0e} \frac{\lambda k}{l} \frac{W^l}{nm_e v_{Te}^2} \frac{v_{Te} v_{Te} T_e}{v_{Ti} v_{\Phi} T_i} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^{-2}.$$

При сравнении нелинейного взаимодействия (8.3) с нелинейным рассеянием на электронах необходимо учесть, что последнее в условиях (8.1) и (8.2) имеет вид ³⁶

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^l \int V_{\mathbf{k}_1}^l d\mathbf{k}_1 \frac{3\omega_{0e} (k_1^2 - k^2) \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2 (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{\left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2 8 (2\pi)^{5/2} |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| k^2 k_1^2 nm_e v_{Te}}. \quad (8.4)$$

Характерное время этого взаимодействия больше (8.3) при $\frac{T_e}{T_i} < \frac{m_i}{m_e}$. При этом рассеяние на ионах в этих условиях доминирует над нелинейным взаимодействием, связанным с доплеровскими поправками к комптоновскому рассеянию на электронах (6.14), при выполнении критерия

$$\frac{v_{\Phi}}{v_{Te}} \geq \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{-3/4}, \quad (8.5)$$

который автоматически выполняется при $T_e \geq T_i$, $T_e \leq T_i \frac{m_i}{m_e}$ в силу $v_{\Phi} \gg v_{Te}$. В случае $T_e \leq T_i$ записанное условие не накладывает никаких ограничений лишь при $T_i \leq T_e \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/3}$. При больших же T_i взаимодействие волн с малыми v_{Φ} , близкими к v_{Te} , может не определяться рассеянием на ионах. Нужно иметь в виду при этом, что для волн с $\Delta k \sim k$ при $T_i \geq T_e$ (8.5) и (8.2) несовместны, поэтому речь может идти о малых Δk , когда (8.1) не нарушено.

До сих пор речь шла о сравнении спектральной перекачки на электронах и ионах при одинаковых Δk . Сравнение, однако, целесообразно проводить по-иному, а именно, рассмотрим такие $\Delta k_0 \ll k$, для которых рассеяние на ионах невозможно, предполагая, что (8.2) нарушено. Но тогда все же возможно «эстафетное» рассеяние на ионах. На каждом шаге $\Delta k \ll \Delta k_0$ и удовлетворяет условию (8.1). Такое рассеяние следует сравнить с разрешением однократной перекачки на электронах. Из (8.1) следует, что даже при малых T_i найдутся такие малые Δk , для которых нелинейное взаимодействие будет определяться ионами. Однако характерное время спектральной перекачки растет с падением Δk . Поэтому максимальное нелинейное взаимодействие возникает для максимальных Δk , допустимых неравенством (8.4):

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{\omega_{0e} W^l}{3 n T_e T_i} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^{-2}.$$

Это время соответствует перекачке на $\Delta k \leq \Delta k_0$, тогда как время

перекачки на Δk порядка Δk_0 в $\Delta k_0/\Delta k$ раз больше, т. е. имеет порядок

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_{0e} \frac{W^l}{nT_e} \frac{v_{Ti} v_\Phi}{v_{Te}^2} \frac{\Delta k_0}{k} \frac{T_e}{T_i} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^{-2}.$$

При

$$\frac{v_\Phi}{v_{Te}} \ll \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/3}$$

это время следует сравнивать с (6,14), что дает критерий доминирования рассеяния на ионах

$$\frac{v_\Phi}{v_{Te}} \gg \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2} \left(\frac{T_i}{T_e} \frac{m_i}{m_e}\right)^{1/3}. \quad (8,6)$$

Аналогичный критерий при

$$\frac{v_\Phi}{v_{Te}} \gg \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2}$$

есть

$$\frac{v_\Phi}{v_{Te}} \gg \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \left(\frac{T_e m_i}{T_i m_e}\right)^{1/4}. \quad (8,7)$$

Следует также обратить внимание на то, что в случае одномерных спектров, если все взаимодействующие волны имеют одинаковые направления, критерием возможности рассеяния на ионах служит (8,2). При этом характерное время перекачки

$$\frac{1}{\tau} \simeq \omega_{0e} \frac{W^l}{nT_e} \frac{v_{Te}^2}{v_{Ti} v_\Phi} \frac{T_e}{T_i} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^{-2} \quad (8,8)$$

не возрастает с падением Δk . Процесс же, аналогичный «эстафетной» перекачке на малые Δk , в одномерном случае происходит таким образом, что на каждом этапе изменяется направление волн на противоположное³⁶.

§ 9. И н д у ц и р о в а н н о е р а с с е я н и е и о н н о - з в у к о в ы х в о л н

Взаимодействие ионно-звуковых волн существенно отличается от взаимодействия ленгмюровских. Во-первых, фазовые скорости волн ограничены сверху величиной $v_s = v_{Te} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$, а перекачка в сторону меньших ω переводит энергию колебаний в ту область, где поглощение из-за соударений становится все более существенным. Поэтому такая перекачка может служить механизмом поглощения колебаний, генерируемых из-за неустойчивостей плазмы. Во-вторых, существенная зависимость частоты колебаний от волнового числа на звуковой части ветви приводит к тому, что сам процесс перекачки, в котором сохраняется число квантов, сопровождается, в отличие от случая ленгмюровских волн, существенным уменьшением энергии ионно-звуковых колебаний. В-третьих, основную роль в рассеянии играют лишь ионы плазмы, причем на звуковой части ветви перекачка может носить лишь «эстафетный» характер, т. е. другими словами, может быть приближенно описана дифференциальными уравнениями (перекачка в соседние по модулю значения волновых чисел). Последнее следует непосредственно из закона сохранения

энергии при рассеянии

$$(k - k') v_s = (k - k') v_{Ti} \sqrt{\frac{T_e}{T_i}} < |k - k'| v_{Ti}, \text{ т. е. } \frac{\Delta k}{|k - k'|} \ll \sqrt{\frac{T_i}{T_e}}.$$

В случае малых углов θ между взаимодействующими волнами Δk должно быть особенно малым

$$\frac{\Delta k}{k} \ll \theta \sqrt{\frac{T_i}{T_e}}.$$

Вместе с тем, для коротковолновых ионно-звуковых колебаний $k^2 \lambda_{De}^2 \gg 1$, частоты которых близки к ω_{oi} , взаимодействие может носить интегральный характер (перекачка на Δk порядка k). Это следует из вида спектра таких колебаний. Так, при

$$1 \ll k^2 \lambda_{De}^2 \ll \sqrt{\frac{T_e}{T_i}}, \quad \omega - \omega' \simeq \frac{\Delta k}{k^2 \lambda_{De}^3} \omega_{oi} < |k - k'| v_{Ti}$$

и Δk порядка k это возможно при

$$k^2 \lambda_{De}^2 > \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{1/3}.$$

а при

$$\left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{1/2} \ll k^2 \lambda_{De}^2 < \frac{T_e}{T_i}$$

перекачка всегда может быть интегральной.

Дифференциальный вид нелинейного взаимодействия для звуковой части спектра был впервые получен в ²⁶ и впоследствии в работах ^{61, 74}. Из изложенного следует, что по углам перекачка носит интегральный характер, что было наиболее отчетливо выявлено в ⁶¹. Вместе с тем, следует особо подчеркнуть приближенный характер дифференциального вида нелинейного взаимодействия. Это видно уже из того, что получающиеся уравнения нелинейного взаимодействия начинают зависеть от граничных условий в пространстве волновых чисел и могут быть в соответствии с этим многозначными ⁶¹. В действительности дифференциальный характер уравнений возможен лишь в ограниченной области волновых чисел, а вне этой области перекачка является интегральной и, грубо говоря, определяет единственное граничное условие, связанное с распределением колебаний в области интегральной перекачки колебаний.

Так как фазовые скорости ионно-звуковых колебаний превосходят среднюю тепловую скорость ионов, то рассеяние их на ионах весьма сходно с рассеянием ленгмюровских волн на электронах. Для получения вероятности рассеяния можно поэтому просто использовать (6,9), учтя в нелинейном рассеянии лишь вклад ионов

$$\Lambda_{ss} = \frac{k k_1}{k k_1} \frac{1}{\omega^2} \left(1 - \frac{2(kv)}{\omega} \right) \frac{1}{m_i} - \frac{(k k_1)}{k k_1} \frac{\epsilon_i^l(\omega_-, k_-)}{\epsilon^l(\omega_-, k_-)} \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{m_i} \simeq \frac{(k k_1)}{k k_1} \frac{2(kv)}{\omega^2} \frac{1}{m_i}.$$

Здесь оставлены лишь доплеровские поправки к комптоновскому рассеянию, имеющие порядок $\frac{k v_{Ti}}{\omega}$, т. е. $\frac{v_{Ti}}{v_s} \sim \sqrt{\frac{T_i}{T_e}}$ в звуковой части спектра

и $\frac{v_{Ti}}{v_{\phi}} > \sqrt{\frac{T_i}{T_e}}$ в области ионных колебаний. Пренебреженные поправки

при $v_{Ti} \ll v_{Te}$ имеют порядок $\sqrt{\frac{T_i}{T_e}}$. В звуковой части спектра вероятность пропорциональна $\delta(\omega_-)$ ($\omega_- > |k_-| v_{Ti}$), поэтому часть доплеровского эффекта, обусловленная движением ионов вдоль $k - k_1$,

несущественна *). Вместе с тем, в области ионных колебаний параллельная составляющая доплер-эффекта также несущественна в силу $\omega \ll |\mathbf{k}_-| v_{Ti}$. Итак, вероятность рассеяния описывается приближенным выражением

$$w_{is}^s(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = \pi (2\pi)^3 \frac{|\mathbf{k}\mathbf{k}_1|^2 (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{|\mathbf{k}_-|^2 k^2 k_1^2} \delta(\omega_- - \mathbf{k}_- \mathbf{v}). \quad (9,1)$$

Вероятность (9,1) легко позволяет из (6,11) получить выражение для нелинейного взаимодействия для всей области существования ионно-звуковых колебаний

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^s}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^s \int N_{\mathbf{k}_1}^s \frac{d\mathbf{k}_1}{4\pi^2} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \frac{T_i}{m_i^2 n} \frac{|\mathbf{k}\mathbf{k}_1|^2}{\sqrt{2\pi} v_{Ti}^3 |\mathbf{k}_-|^3} e^{-\frac{\omega_-^2}{2v_{Ti}^2 k^2}}. \quad (9,2)$$

В звуковой части спектра при использовании

$$-\frac{\omega}{\sqrt{2\pi} v_{Ti}^3 k^3} e^{-\frac{\omega^2}{2v_{Ti}^2 k^2}} \rightarrow \delta'(\omega)$$

из (9,2) возникает результат²⁶ (см.^{68,74})

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^s}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^s \int N_{\mathbf{k}_1}^s \frac{d\mathbf{k}_1}{4\pi^2} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \frac{T_i}{m_i n} |\mathbf{k}\mathbf{k}_1|^2 \delta'(\omega - \omega_1), \quad (9,3)$$

что эквивалентно дифференциальной форме

$$\frac{\partial N_{k\Omega}^s}{\partial t} = N_{k\Omega}^s k^2 \frac{\partial}{\partial k} \int \frac{T_i \sin^2 2\theta}{T_e 16\pi^2 m_i n} N_{k\Omega_1}^s k^4 d\Omega_1; \quad (9,4)$$

θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$, $d\Omega_1$ — телесный угол $\mathbf{k}_1$. Последнее уравнение при $\theta \ll 1$ переходит в уравнение (4) работы⁶⁸. Следует подчеркнуть, что в области малых углов, где (9,4) стремится к нулю, а также в области $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, становятся существенными следующие члены разложения по параметру $\frac{T_i}{T_e}$. При этом (9,4) справедливо лишь при $\theta \gg \frac{T_i}{T_e}$ ⁷⁴. Характерное время перекачки для (9,4) при $\theta \sim 1$ имеет порядок

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_s \frac{W^s}{n T_e} \frac{k}{\Delta k} \frac{T_i}{T_e}.$$

Следует подчеркнуть то обстоятельство, что аналитические свойства приближенного ядра интегрального уравнения (9,3) существенно отличны от свойств более точного ядра (9,2), что должно учитываться при решении уравнений (см.⁶⁸). В области спектра, соответствующего ионным колебаниям,

$$\exp \left\{ -\frac{\omega_-^2}{2v_{Ti}^2 k^2} \right\} \simeq 1,$$

и взаимодействие оказывается сходным с тем, которое характеризует

*)

$$k_{||} v_{||} = \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_-)(\mathbf{v}\mathbf{k}_-)}{k^2} = \omega_- \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_-}{k^2} \rightarrow 0$$

в силу $\delta(\omega_-)$. Более строго, нелинейное взаимодействие не вносит вклада из-за нечетности подынтегрального выражения по $v_{||}$. Результат пропорционален следующему члену разложения $\delta(\omega_- - \mathbf{k}_- \mathbf{v})$, а именно, $\delta'(\omega_-)$. Однако в коэффициент перед δ -функцией параллельная составляющая скорости даст вклад $\omega_-^2 \delta'(\omega_-)$, что строго равно нулю.

нелинейное взаимодействие ленгмюровских волн

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^s}{\partial t} = N_{\mathbf{k}_1}^s \int \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{5/2}} \frac{\omega_- [\mathbf{k}\mathbf{k}_1]^2}{v_{Te} n m_i |\mathbf{k}_-|^3} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2}. \quad (9,5)$$

Поправки в нелинейном рассеянии, обязанные поляризационным эффектам электронов, весьма малы *).

§ 10. Нелинейное взаимодействие ленгмюровских и ионно-звуковых волн

а) Процессы распадов. Интерес к этим взаимодействиям определяется тем, что имеются экспериментальные исследования взаимодействия высокочастотных и низкочастотных волн ⁷⁵. При этом, по-видимому, основную роль при этих взаимодействиях играют распадные взаимодействия. Следует подчеркнуть, что в изотропной плазме распадные процессы однотипных волн типа *sss*, *lll*, *ttt* запрещены законами сохранения энергии и импульса в отдельном акте распада, что нетрудно усмотреть непосредственно из дисперсионных свойств этих волн. Легко понять также, что процессы элиния двух ионно-звуковых волн в ленгмюровскую также запрещены в силу того, что сумма энергий двух ионно-звуковых волн не превосходит $2\omega_{oi}$, а частота ленгмюровских волн больше ω_{oe} . Поэтому остается единственный распадный процесс, описывающий взаимодействие ленгмюровских и ионно-звуковых волн, соответствующий тому, что ленгмюровская волна излучает или поглощает ионно-звуковую.

Анализ ^{74a} показывает, что основной вклад в нелинейный ток, определяющий указанный распад, вносят электроны. Учитывая, что средняя тепловая скорость электронов намного больше фазовой скорости ионно-звуковых волн, получим из (4,14), (4,11) ^{74a, 73b **}

$$u_{\mathbf{p}}^{ls} = \frac{e^2 \omega_{se}^3 m_i (2\pi)^6}{16\pi m_e^3 v_{Te} k_s^2} \frac{(\mathbf{k}_1^l \mathbf{k}_2^l)^2}{(k_1^l k_2^l)^2} \delta(\mathbf{k}_1^l - \mathbf{k}_2^l - \mathbf{k}_s) \delta(\omega_1^l - \omega_2^l - \omega_s). \quad (10,1)$$

Здесь $\mathbf{k}_1^l$, $\mathbf{k}_2^l$, ω_1^l , ω_2^l — волновые векторы и частоты ленгмюровских волн, а $\mathbf{k}_s$, ω_s — ионно-звуковых. В тех случаях, когда импульс излучений *s*-волны мал по сравнению с импульсом волны ленгмюровской, законы сохранения при распаде вполне аналогичны черенковским $\mathbf{k}_s \mathbf{v}_{\text{гр}} = \omega_s$. Следует, впрочем, заметить, что часто при распадах $\mathbf{k}_s$ может быть сравнимо с $\mathbf{k}^l$ и нужно пользоваться точными законами сохранения. Они приводят к выводам, что излучение *s*-волны возможно не всегда. Действительно, обозначив через θ_+ угол между начальной *l*-волной и излучаемой *s*-волной, имеем

$$\cos \theta_+ = \frac{|\mathbf{k}_s| + 2k_0}{2|\mathbf{k}_1^l|}; \quad k_0 = \frac{\omega_{oe}}{3v_{Te}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}.$$

*) Рассеяние на электронах часто нужно считать малым. Это легко понять, если учесть, что с электронами ионно-звуковые колебания взаимодействуют в первом линейном приближении и поэтому нелинейные эффекты являются поправками. Кроме того, в условиях, когда квазилинейные эффекты сильны, вообще говоря, нельзя распределение электронов предполагать максвелловским. Квазилинейные эффекты, уменьшая $\frac{\partial f_e}{\partial p}$, которым пропорционально нелинейное взаимодействие, уменьшают рассеяние на электронах.

**) См. также ^{76, 93a}, где вероятность процесса отлична от ^{74a, 73b} на множитель

$$\frac{k_s^2 \lambda_{De}^2}{2} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \epsilon^s}{\partial \omega}.$$

Из $-1 < \cos \theta < 1$ и $|k_s| > 0$ следует $|k_1^l| > k_0$, т. е.

$$v_\Phi^l < 3v_{Te} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}. \quad (10.2)$$

Следует заметить, что максимальный импульс, который может получить излучаемая s -волна, есть $2|k_1^l|$ при $k_1^l \gg k_0$, а так как $k_1 \ll \frac{1}{\lambda_{De}}$, то $(k_s)_{\max} \ll \frac{1}{\lambda_{De}}$, т. е. при распаде излучается волна в звуковой части спектра.

Для одномерного распада осуществляется равенство $|k_s| + 2k_0 = 2|k_1^l|$, а при $k_1^l \gg k_0$ имеем $k_s \simeq 2k_1^l$. Это показывает, что в результате излучения звуковой волны направление распространения ленгмюровской волны меняется на обратное. При $k_1 < 3k_0$ ($k_1 > k_0$) возможен лишь однократный одномерный распад, при $k_1 < 5k_0$ двукратный и т. д. Общее число распадов поэтому конечно и примерно составляет $\sqrt{m_i/m_e}$. Это обстоятельство легко понять, если учесть, что в распадах энергия ленгмюровских волн падает, т. е. уменьшается k , и фазовая скорость волн растет. Конечный результат состоит в увеличении фазовых скоростей l -волн до $3v_{Te} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$. Следует заметить, что в случае узких спектров ленгмюровских волн излучение ими звуковых волн может привести к образованию ленгмюровского спектра-спутника, не перекрывающегося с исходным спектром. Это возможно, если ширина спектра ленгмюровских волн $\Delta\omega^l < \omega^s$. Для одномерного спектра это сводится к

$$\Delta k^l < \frac{2k_0}{k_1^l} (k_1^l - k_0),$$

что при $k_1 \gg k_0$ дает $\Delta k^l < 2k_0$. Следует подчеркнуть, что число ленгмюровских волн как при распаде, так и при слиянии сохраняется. Поэтому распадные процессы приводят лишь к перекачке в спектре ленгмюровских волн, т. е. к тем же эффектам, что и индуцированное рассеяние, рассмотренное выше. При этом такая перекачка при распаде не происходит неограниченно, как в случае индуцированного рассеяния, а ограничена максимальной фазовой скоростью $3v_{Te} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$. Направление перекачки в рассматриваемом здесь случае зависит от соотношения интенсивностей ионно-звуковых волн и ленгмюровских. Последнее легко понять, если учесть, что процессы поглощения ионно-звуковых колебаний приводят к уменьшению фазовых скоростей, а излучения — к их росту. Ясно, например, что при большой энергии ионно-звуковых волн будет доминировать процесс поглощения и перекачка будет происходить в сторону меньших v_Φ^l . Проиллюстрируем это на простейшем примере. Пусть, например, имеется одномерный узкий спектр ленгмюровских волн, который имеет лишь один не распадающийся спектр-спутник ($k_0 < k_1 < 3k_0$) (см. выше). Волны первого пакета могут излучать звуковую волну, превращаясь в волны второго пакета. Волны же второго пакета могут лишь поглощать звуковые волны (рис. 10)*. Предположим, что в начальный момент времени вся энергия ленгмюровских волн была сосредоточена в волнах первого пакета. Тогда возникнет индуцированное излучение звуковых волн, т. е. волны, излученные в последующем, будут иницированы ранее излученными волнами. Такая система аналогична двухуровневой системе с отрицательной температурой, рассматриваемой в теории квантовых

*) Звуковые волны могут поглощаться и первым пакетом, но, как правило, эти волны имеют другие длины и направления распространения.

генераторов. При появлении заметного числа волн второго пакета возникает поглощение, которое становится равным излучению при примерно одинаковых по порядку величины интенсивностях первого и второго пакета *). Это означает, что число волн первого пакета уменьшилось на величину порядка исходного числа волн; этого же порядка составляет число излученных волн. Так как энергия каждого из s -квантов меньше энергии l -квантов в $\frac{\omega_s}{\omega_{0e}}$ раз, то полная энергия W^s , генерированных s -квантов составит

$$\frac{W^s}{W^l} \simeq \frac{\omega_s}{\omega_{0e}},$$

где W^l — энергия l -квантов. В рассмотренном процессе растет число квантов второго пакета, т. е. фазовые скорости возрастают. Это возникло благодаря тому, что в начальный момент W^s было мало. Что будет происходить, если W^s будет большим?

Ясно, что если W^s меньше $W^l \frac{\omega_s}{\omega_{0e}}$, то картина мало изменится. Если же в начальном состоянии число квантов второго пакета превосходит число квантов первого, то происходит поглощение s -волн и перекачка в первый пакет. Для заметной перекачки необходимо, чтобы W^s превосходила

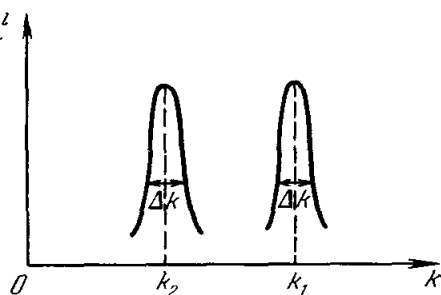


Рис. 10.

$W^l \frac{\omega_s}{\omega_{0e}}$. Легко оценить характерное время процесса перекачки для обоих случаев. В первом можно считать интенсивность первого пакета заданной, второго малой, звуковых волн — малой и характерное время τ_1 , равным времени нарастания волн второго пакета

$$\frac{\partial N_{k_2}^l}{\partial t} = N_{k_2}^l \int N_{k_1}^l u_l^s \frac{dk_1^l dk_s}{(2\pi)^6}.$$

Во втором случае, когда имеются интенсивные звуковые волны, можно считать заданным интенсивность звуковых волн, а характерное время τ_2 считать равным времени убыли интенсивности волн второго пакета **).

$$\frac{\partial N_{k_1}^l}{\partial t} = -N_{k_1}^l \int N_{k_s}^s u_l^s \frac{dk_2^l dk_s}{(2\pi)^6}.$$

Легко сравнить указанные характерные времена ***)

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \simeq \frac{W^l \omega_s}{W^s \omega^l}.$$

Если энергия звуковых волн превосходит $W^l \frac{\omega_s}{\omega_{0e}}$, то второй из рассмотрен-

*) Более точный расчет ^{74a} показывает, что это происходит в случае, когда интенсивность второго пакета примерно в три раза больше интенсивности первого пакета.

**) Расчет ^{74a} показывает, что характерные времена перекачки отличаются от оцениваемых логарифмическим множителем, зависящим от начальных интенсивностей.

***) Последнее из записанных порядковых равенств следует из того, что фазовые объемы s - и l -волны примерно равны $\Delta k^s \simeq 2\Delta k^l$.

ных процессов идет быстрее в $\frac{W^s \omega_{0e}}{W^l \omega_s}$ раз. Величина τ_1 имеет оценку

$$\frac{1}{\tau_1} \simeq \frac{k_0}{k_1 \cos \theta_+} \omega_{0e} \frac{W^l}{nT_e} \frac{k_1^l}{\Delta k_1^l}. \quad (10,3)$$

Из (10,3) следует, что при $k_1 \gg k_0$ наиболее вероятно излучение s -плазмона почти перпендикулярно к импульсу l -плазмона. В силу (10,2) целесообразно время (10,3) сравнить с характерным временем перекачки при рассеянии на электронах (6,14). Это сравнение показывает, что время появления одного сателлита может быть меньшим времени индуцированного рассеяния. Однако целесообразно также знать, к какой перекачке по фазовым скоростям l -волн приводят распады. Рассеяние (6,14) эффективно для перекачки на Δk^l порядка k^l , тогда как при перекачке (10,3) в первом приближении для одномерного случая меняется лишь направление $\mathbf{k}$ на противоположное; при повторном же процессе получается l -волна, идущая по первоначальному направлению, но с импульсом на $2k_0$ меньшим. Поэтому для перекачки на $\Delta k^l \sim k^l$ при $k^l \gg k_0$ необходимо $\sim k^l/2k_0$ распадов. Так как при этом энергия W^l перераспределяется между $k^l/2k_0$ пакетами, то характерное время перекачки примерно в $k^l/2k_0$ раз больше (10,3). Вместе с тем из (10,3) следует, что более вероятным является излучение s -плазмона под большим углом, когда передаваемый импульс k_s , а следовательно, и угол рассеяния l -плазмона мал. Картина распадов будет поэтому, как правило, неоднородной. При этом s -плазмон может уже излучаться и поглощаться волнами одного и того же пакета, а результирующий эффект генерации s -плазмонов будет разностным. Такая генерация будет весьма сходной с черенковской генерацией,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{N_s^s} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^s}{\partial t} \simeq \int u_l^s \mathbf{k}_s \frac{dN_{\mathbf{k}}^l}{dk^l} \frac{dk^l}{(2\pi)^3}; \\ u_l^s &= \int u_l^s \frac{dk_2^l}{(2\pi)^3} = \frac{e^2 \omega_s^3 m_i (2\pi)^3}{16\pi m_e^3 v_{Te}^4 k_s^2} \delta(\omega_s - \mathbf{k}_s \mathbf{v}_{Tp}^l). \end{aligned} \quad (10,4)$$

Приближение (10,4) пригодно лишь при $k_s \ll k_0$, $k_1^l > k_0$, $k_s < \frac{k^l}{k_0} \Delta k^l$. Если пакет l -волн имеет раствор углов $\Delta\theta \sim 1$, то

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_{0e} \frac{W^l}{nT_e} \frac{k_s k_0}{k_1^l \Delta k^l}, \quad (10,5)$$

что в k_s/k_0 раз меньше (10,3). Однако время перекачки падает с ростом k_s ; более вероятным является излучение k_s , максимально допустимых данным приближением, т. е. порядка k_0 . Таким образом, если мы рассматриваем перекачку на Δk^l порядка k^l спектра, ширина которого $\Delta k^l \sim k^l$, то (10,5) дает $\left(k_s \sim \frac{k_0}{3}\right)$:

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_{0e} \frac{W^l}{nm_e v_{Te}^4} \left(\frac{v_\Phi}{v_{Te}}\right)^3 \left(\frac{m_e}{3m_i}\right)^{3/2}, \quad (10,6)$$

а для предельно допустимых (10,5) малых Δk :

$$\frac{1}{\tau} \approx \omega_{0e} \frac{W^l}{nT_e} \frac{v_\Phi}{v_{Te}} \left(\frac{m_e}{3m_i}\right)^{1/2}.$$

Заметим, что эффективность перекачки в данном случае, в отличие от рассеяния на электронах, растет с ростом фазовых скоростей волн.

Перекачка (10,6) доминирует над рассеянием на электронах при

$$\frac{v_{\Phi}}{v_{Te}} > \left(\frac{3m_i}{m_e} \right)^{1/4}.$$

Таким образом, при $T_e \gg T_i$ и особенно узких пакетов (малых Δk) перекачка l -волн из-за распадов на s -волны может стать определяющей.

Ясно далее, что при большом уровне турбулентности ионно-звуковых волн поглощение последних приводит к уменьшению фазовых скоростей ленгмюровских волн. Поглощение звуковых волн ленгмюровскими так же, как излучение, не всегда допустимо законами сохранения. Так, ленгмюровские волны не могут поглотить ионные колебания $\omega_s \simeq \omega_{oi}$, так как импульс последних значительно превосходит $\frac{1}{\lambda_{De}}$ и получающаяся в результате поглощения ленгмюровская волна должна была бы иметь $v_{\Phi} \ll v_{Te}$, что невозможно. Поглощение звуковых волн возможно лишь, если $2(k_0 - k_1^l) < k_s < (k_0 + k_1^l)$, если $k_1^l < k_0$. При $k_1^l > k_0$ область, где допустимо лишь поглощение, есть $2(k_1^l - k_0) < k_s < 2(k_0 + k_1^l)$. При $k_s < 2(k_1^l - k_0)$ возможно и поглощение, и излучение. Анализ³⁷ показал, что в случае изотропной звуковой турбулентности в широком классе спектральных распределений колебаний при $k_s < 2(k_1 - k_0)$ может доминировать индуцированное излучение звуковых волн, т. е., другими словами, проходит перекачка l -волн в сторону больших v_{Φ} . При $k_1 \gg k_0$ область, где допустимо лишь поглощение, весьма узка, и для того, чтобы доминировало поглощение, необходимо, чтобы большая часть энергии звуковых колебаний была сосредоточена в этой области. Возникающие при нелинейном взаимодействии процессы перекачки будут быстро выводить s -колебания из этой области. С ростом k_1^l относительная ширина указанной области возрастает, однако абсолютная остается равной $2k_0$ при $k_1^l < k_0$. При $k_1^l > k_0$ абсолютная ширина области падает с падением k_1^l , а следовательно, падает и энергия ΔW^s в этой области, определяющая интенсивность перекачки l -волн.

б) П р о ц е с с ы р а с с е я н и я. Перейдем теперь к рассмотрению процессов рассеяния, в которых l -волна превращается в s -волну. Примером такого процесса является поглощение l -волны частицей плазмы с излучением s -волны, или излучение двух волн (l - и s -волны) и, естественно, обратные им процессы. Указанные процессы, в отличие от всех рассмотренных выше, приводят к изменению числа l -волн и, следовательно, их целесообразно считать ответственным за эффекты «истинного» нелинейного поглощения.

Законы сохранения энергии и импульса при рассеянии позволяют легко установить, что взаимодействие l -волн со звуковыми ($\omega_s = \mathbf{k}_s \mathbf{v}_s$) является экспоненциально малым в плазме, в которой отсутствуют пучки частиц. Действительно, из

$$\omega^l \pm \omega^s = (\mathbf{k}^l \pm \mathbf{k}^s) \mathbf{v}$$

следует, что проекция скорости на $\mathbf{k}^l \pm \mathbf{k}^s$, равная

$$v_{||} \simeq \frac{\omega_{0e}}{|\mathbf{k}^l \pm \mathbf{k}^s|} \gg v_{Te}$$

при

$$k^l \ll \frac{1}{\lambda_{De}}, \quad k^s \ll \frac{1}{\lambda_{De}},$$

т. е. частицы, которые могут принять участие в указанном рассеянии, должны иметь скорость, намного превышающую среднюю тепловую

порядка $\frac{kv}{\omega} < v_{Te} \ll 1$, т. е. не больше релятивистских поправок к тепловому движению и могут не учитываться. Таким образом, комптоновское рассеяние описывается выражением (см. (6,4))

$$\Lambda_{it}^{k,p} = \frac{ie^2 (\mathbf{e}_k^t \mathbf{e}_{k_1}^t)}{m_\alpha \omega (2\pi)^3},$$

где $\mathbf{e}_k^t$ — единичные векторы поляризации двух взаимодействующих поперечных волн. Нелинейное рассеяние при

$$\omega_- \ll |\mathbf{k}_-| v_{T\alpha} (\omega_- = \omega^t - \omega_1^t, \mathbf{k}_- = \mathbf{k}^t - \mathbf{k}_1^t)$$

для рассеяния через продольную волну определяется

$$\Lambda_{it}^{k,p} = - \frac{ie^2}{m_\alpha \omega} \frac{\varepsilon_i^t(\omega_-, \mathbf{k}_-) - 1}{\varepsilon^t(\omega_-, \mathbf{k}_-)} \frac{(\mathbf{e}_k^t \mathbf{e}_{k_1}^t)}{(2\pi)^3},$$

что направлениями векторов $\mathbf{e}_k^t$ отличается от соответствующего выражения для продольных волн. При усреднении по поляризациям

$$\overline{(\mathbf{e}_k^t \mathbf{e}_{k_1}^t)^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \right).$$

Нетрудно найти выражение для вероятности рассеяния на электронах ^{73б}, которое приводит к следующему выражению для нелинейного взаимодействия:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^t}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^t \int N_{\mathbf{k}_1}^t \frac{\omega_- \omega_{0e}^4 \left(1 + \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \right)}{8 (2\pi)^{5/2} |\mathbf{k}_-| v_{Te} \omega^t \omega_1^t n T_e} \left| \frac{\varepsilon_i^t(\omega_-, \mathbf{k}_-)}{\varepsilon^t(\omega_-, \mathbf{k}_-)} \right|^2 d\mathbf{k}_1. \quad (11,1)$$

Максимальный эффект перекачки поперечных волн характеризуется временем ¹⁵

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{W^t}{nm_e v_{Ti}^2} \left(\frac{\omega_{0e}}{\omega^t} \right)^3 \omega_{0e} \frac{\Delta \omega}{|\mathbf{k}_-| v_{Te}}.$$

В случае, когда $\omega_- < |\mathbf{k}_-| v_{Ti}$, взаимодействие волн определяется лишь нелинейным рассеянием на ионах

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^t}{\partial t} = N_{\mathbf{k}}^t \int N_{\mathbf{k}_1}^t \frac{\omega_- \left(1 + \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \right) \omega_{0e}^4}{8 (2\pi)^{5/2} |\mathbf{k}_-| v_{Ti} \omega^t \omega_1^t n m_i v_{Ti}^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)^2}. \quad (11,2)$$

Характерное время процесса (11,2) в этих условиях меньше, нежели (11,1) при $T_e < T_i \frac{m_i}{m_e}$. Следует заметить, что условие $\omega_- < |\mathbf{k}_-| v_{T\alpha}$ может выполняться для больших частот $\omega > \omega_{0e}$, где оно указывает на то, что рассмотренное взаимодействие описывает перекачку на малые $\Delta \omega^t$; $\frac{\Delta \omega^t}{\omega^t} \lesssim \Delta \theta v_{T\alpha}$. При $\Delta \theta \sim 1$ время перекачки на $\Delta \omega^t$ порядка ω^t примерно в $\frac{1}{v_{T\alpha}}$ раз больше (11,1) и (11,2). При выполнении обратных неравенств $\omega_- \gtrsim |\mathbf{k}_-| v_{T\alpha}$ для нелинейного тока, описывающего нелинейное рассеяние, следует использовать гидродинамическое приближение (4,8); первый и последний член (4,8) не вносят вклада из-за $(\mathbf{e}_k^t \mathbf{k}) = 0$, второй же член направлен по $\mathbf{k} - \mathbf{k}_1$ и, следовательно, в рассматриваемом приближении возможно лишь рассеяние через продольную волну, а рассеяние через поперечную невозможно. Отсюда можно сразу указать на критерий, когда

нелинейное рассеяние становится пренебрежимо малым эффектом. В данном случае

$$\frac{\varepsilon_e^l(\omega_-, \mathbf{k}_-) - 1}{\varepsilon^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)} \simeq \frac{-\frac{\omega_{0e}^2}{\omega_-^2}}{1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_-^2}} \ll 1$$

при $\omega_- = \omega^l - \omega_1^l \gg \omega_{0e}$. Естественно, при этом хотя бы одна из взаимодействующих волн должна быть высокочастотной $\omega \gg \omega_{0e}$. Поэтому при $\omega_- \gg \omega_{0e}$ рассеяние можно считать комptonовским. Перекачка в этих условиях становится дифференциальной и определяется записанным выше $\Lambda_{it}^{k,p}$ *)

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^t}{\partial t} = \frac{\omega_{0e}^4 N_{\mathbf{k}}^t}{8(2\pi)^2 n m_e} \int N_{\mathbf{k}_1}^t \left(1 + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \right) \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2}{\omega \omega_1} \delta'(\omega - \omega_1) d\mathbf{k}_1. \quad (11,3)$$

Характерное время перекачки имеет оценку

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{W^t}{n m_e c^2} \omega_{0e} \frac{\omega_{0e}^3}{\omega_1^3} \frac{\omega^t}{\Delta \omega^t}.$$

Дифференциальный характер перекачки (14,12), так же как и для звуковых колебаний, есть приближенное выражение для перекачки в условиях, когда физически бесконечно малое $\Delta\omega$ удовлетворяет требованию $\Delta\omega \gg \omega_{0e}$ **). Из сравнения (11,3) и (11,1) легко видеть, что при $\Delta\theta \sim 1$ перекачка на $\Delta\omega$ порядка ω путем «эстафетной» перекачки каждый раз на малые $\Delta\omega$, удовлетворяющие $\omega_- \ll |\mathbf{k}_-| v_{Te}$, в $\frac{1}{v_{Te}}$ раз более эффективно, нежели «эстафетная» перекачка каждый раз на $\Delta\omega$, удовлетворяющие неравенству $\omega_- \gg |\mathbf{k}_-| v_{Te}$ и $\Delta\omega \gg \omega_{0e}$.

Рассмотрим теперь рассеяние на электронах через виртуальную поперечную волну. Такой процесс может быть существенным при выполнении $\omega_- \ll k_- v_{Te}$ для длинноволновых поперечных волн, частоты которых мало отличаются от ω_{0e} ³⁴. Из (5,4) можно получить в этом случае

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^t}{\partial t} = \frac{N_{\mathbf{k}}^t}{8(2\pi)^{5/2}} \int \frac{N_{\mathbf{k}_1}^t \omega_- (k_-^2 + (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)) [\mathbf{k}\mathbf{k}_1]^2 d\mathbf{k}_1 \omega_{0e}^4}{n m_e v_{Te} |\mathbf{k}_-| k^2 k_1^2 |k_-^2 - \omega_-^2 \varepsilon^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)|^2}. \quad (11,4)$$

При пренебрежении вкладом ионов в $\varepsilon^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)$ (11,4) переходит в результат, найденный в ³⁴. Характерное время перекачки при рассеянии на угол θ порядка единицы может быть оценено из (11,4) в двух предельных случаях. Если $k_-^2 \gg |\omega_-^2 \varepsilon^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)|$, т. е. при k_- порядка k , если $\omega_- \simeq \frac{k\Delta k}{\omega_{0e}}$, при выполнении нера-

венств

$$\frac{\Delta k}{k} \ll \frac{k v_{Te}}{\omega_{0e}}; \quad \omega_{0i} \ll k \ll \omega_{0e}$$

имеем оценку

$$\frac{1}{\tau} \simeq \frac{W^t}{n m_e c^2} \omega_{0e} \left(\frac{\Delta k}{k} \frac{\omega_{0e}}{k v_{Te}} \right).$$

*) В действительности в нелинейные уравнения первое приближение, пропорциональное $\delta(\omega - \omega_1)$, вклада не дает, а существен лишь член, соответствующий разложению δ -функции по $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) v / \omega - \omega_1$, а именно, $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) v \delta'(\omega - \omega_1)$. Поэтому имеется вопрос о роли доплеровских поправок, которые в вероятности имеют тот же порядок, что и учитываемые члены. Расчет с помощью (6,4) показывает, что для изотропного распределения частиц они несущественны (пропорциональны $(\omega - \omega') \delta(\omega - \omega') \rightarrow 0$).

**) Заметим, в связи с этим, что например, рассеяние на ионах нельзя аналитически представить в дифференциальной форме даже приближенно.

Если же $\Delta k \ll v_{Te} \omega_{0i}^*$), то характерное время рассеяния через продольную волну имеет порядок

$$\frac{1}{\tau} \simeq \frac{W^t}{nm_e c^2} \omega_{0e} \left(\frac{\Delta k}{k} \frac{\omega_0}{kv_{Te}} \right) \frac{k^2}{\omega_{0e}^2 v_{Te}^2}.$$

Следовательно, рассеяние через поперечную волну может быть преобладающим лишь при $k \ll \omega_{0e} v_{Te}$, что в силу неравенства $\omega_{0i} \ll k \ll \omega_{0e}$ возможно лишь при $v_{Te} \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$. Таким образом, рассеяние через поперечную волну возможно лишь в условиях весьма больших температур плазмы **). Если $k_-^2 \ll |\omega_-^2 \epsilon^t|$, но $|\epsilon_e^t| \gg |\epsilon_i^t|$, т. е. $\Delta k \gg \frac{k^2 v_{Te}}{\omega_{0e}}$; $\Delta k \gg \frac{m_e}{m_i} \omega_{0e} v_{Te}$, то характерное время перекачки через поперечную волну

$$\frac{1}{\tau} \simeq \frac{W^t}{nm_e c^2} \omega_{0e} \left(\frac{k^2 v_{Te}}{\Delta k \omega_{0e}} \right).$$

В данном случае рассеяние через поперечную волну является преобладающим лишь при $\Delta k \ll kv_{Te}^2$, что совместимо с ранее записанными неравенствами при

$$\frac{m_e}{m_i} \omega_{0e} v_{Te} \ll k \ll \omega_{0e} v_{Te}.$$

Наконец, при $k_-^2 \ll |\omega_-^2 \epsilon^t|$ и $|\epsilon_e^t| \ll |\epsilon_i^t|$, т. е.

$$\frac{k^2 v_{Te}}{\omega_{0e}} \ll \Delta k \ll \frac{m_e}{m_i} \omega_{0e} v_{Te} \text{ и } k \ll \omega_{0i},$$

характерное время перекачки имеет оценку

$$\frac{1}{\tau} \simeq \frac{W^t}{nm_e c^2} \omega_{0e} \frac{k^2}{\omega_{0i}^2} \frac{\Delta k m_i}{m_e v_{Te} \omega_{0e}},$$

и меньше рассеяния через продольную волну лишь при

$$k \gg \omega_{0i} \frac{1}{v_{Te}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2},$$

что совместимо с записанными выше неравенствами лишь при выполнении $v_{Te} \gg \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}$.

§ 12. Нелинейное взаимодействие поперечных и ленгмюровских волн

Взаимодействие поперечных и ленгмюровских волн в плазме играет особую роль. Дело в том, что, как правило, в плазме наиболее эффективно при определенных условиях возбуждаются ленгмюровские волны, например, это имеет место для важного в приложениях случая прохождения пучков через плазму и для других способов турбулизации плазмы. Вместе с тем, продольные колебания не могут существовать вне плазмы. Нелинейные взаимодействия осуществляют конверсию ленгмюровских колебаний в поперечные, которые обычно несложно наблюдать. Вопрос о конверсии продольных волн в поперечные приобретает особую

*) Область $\Delta k \gg v_{Te} \omega_0$, но $\Delta k \ll \frac{k^2 v_{Te}}{\omega_{0e}}$ весьма узка, так как требует еще неравенств $\omega_{0e}^2 \gg k^2 \gg \omega_{0i} \omega_{0e}$.

**) Вывод ³⁴ о том, что рассеяние через поперечную волну всегда доминирует в условиях $\frac{\Delta k}{k} \ll \frac{kv_{Te}}{\omega_{0e}}$, неточен в силу того, что в ³⁴ не принималась во внимание роль ионов в экранированное рассеяние через продольную волну (см. (11,4)) и не учитывались ионы в экранировке рассеяния через поперечную волну.

остроту для астрофизических проблем, поскольку основная получаемая нами информация о происходящих процессах доставляется в форме излучения. Вопрос о конверсии продольных волн в поперечные благодаря спонтанному рассеянию впервые рассматривался Гинзбургом и Железняковым в ⁶⁵. Ниже подробно анализируется вопрос о конверсии благодаря индуцированному рассеянию с учетом выявленных эффектов компенсации комптоновского рассеяния и нелинейного рассеяния, роли ионов в экранировке рассеяния на электронах, рассеяния на ионах и рассеяния через виртуальную поперечную волну.

а) Э ф ф е к т ы в з а и м о д е й с т в и я п р и и н д у ц и р о в а н н о м р а с с е я н и и н а ч а с т и ц а х п л а з м ы. Нетрудно видеть, что при рассеянии на частицах плазмы ленгмюровские волны могут превращаться в поперечные, частоты которых близки к электронной плазменной частоте. Это непосредственно следует из закона сохранения энергии при рассеянии

$$\omega^t - \omega^l = (\mathbf{k}^t - \mathbf{k}^l) \mathbf{v} = \frac{(k^l)^2}{2\omega_{0e}} - \frac{3(k^l v_{Te})^2}{2\omega_{0e}}.$$

Перекачка происходит всегда в сторону меньших частот. При наличии интенсивных ленгмюровских колебаний и слабых поперечных, основную роль играет перекачка в поперечные волны, при этом в силу $\omega^t < \omega^l$ имеем $k^t < \omega_{0e} \sqrt{3} \frac{v_{Te}}{v_{\Phi}}$. В случае же интенсивных поперечных волн с частотами $\omega \sim \omega_{0e}$ возможно возбуждение плазменных волн, фазовые скорости которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{v_{\Phi}}{v_{Te}} > \left(\frac{2(\omega^t - \omega_{0e})}{\omega_{0e}} \right)^{1/2}.$$

Общее выражение для вероятности рассеяния было получено в работе ²⁰, а общая формула для нелинейного взаимодействия в ¹⁵. При пренебрежении рассеянием через виртуальную поперечную волну имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}_2}^t}{\partial t} = & -N_{\mathbf{k}_2}^t \int d\mathbf{k}_1 N_{\mathbf{k}_1}^l \frac{\omega_{0e}^2 \omega_-}{4m_e n v_{Te}^3 (2\pi)^{5/2} |\mathbf{k}_-|} \left\{ \frac{[\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2]^2}{k_1^2 k_2^2} \left[\left| \frac{\varepsilon_i^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)}{\varepsilon^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)} \right|^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{v_{Te}^2 k_1^2 k_2^2}{\omega_{0e}^2 |\mathbf{k}_-|^2} + \frac{2v_{Te}^2 (\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_-) (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)}{\omega_{0e}^2 |\mathbf{k}_-|^2} - \frac{2v_{Te}^2 (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)^2}{\omega_{0e}^2 |\mathbf{k}_-|^2} \right] + \frac{2v_{Te}^2}{k_1^2 \omega_{0e}^2} (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)^2 \right\}; \quad (12,1) \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_- = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1, \quad \omega_- = \omega^t(\mathbf{k}_2) - \omega^l(\mathbf{k}_1).$$

Первый член (12,1) описывает поляризационный эффект, связанный с рассеянием на экранирующем облаке. Так же как и для ленгмюровских волн, роль ионов в такой экранировке весьма существенна. Остальные члены (12,1) описывают доплеровские поправки к комптоновскому рассеянию. При $m_i \rightarrow \infty$ и $k^t \ll k^l$ из (12,1) следует результат ^{20*})

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}_2}^t}{\partial t} = \frac{N_{\mathbf{k}_2}^t}{4m_e n v_{Te}} \int \frac{N_{\mathbf{k}_1}^l \omega_- d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{5/2} |\mathbf{k}_1|^5 k_2^2} \{ [\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2]^2 (k_1^2 k_2^2 - 4(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)^2) + 2k_2^2 k_1^2 (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)^2 \}. \quad (12,2)$$

*) В работе ³⁴ получена формула для $k^t \gtrsim k^l$. Такое уточнение дает лишь пренебрежимо малые поправки к (12,2) для нерелятивистских температур плазмы $v_{Te} \ll 1$, если речь идет о перекачке продольных волн в поперечные $k^t < k^l \sqrt{3} v_{Te}$, для генерации же плазменных волн поперечными в силу $k^t > k^l \sqrt{3} v_{Te}$ и $\omega^t - \omega^l \approx k_2^2 / 2\omega_{0e} < |\mathbf{k}^t - \mathbf{k}^l| v_{Te}$ имеем $k^t \ll \omega_{0e} v_{Te}$, что возможно лишь для генерации плазменных волн, фазовая скорость которых намного превосходит скорость света, когда, как правило, существенна экранировка на ионах (первый член (12,1)).

Оценка характерного времени перекачки из (12,2) есть

$$\frac{1}{\tau_{l \rightarrow t}} \simeq \frac{W^l}{nT_e} \cdot \omega_{0e} \cdot \left(\frac{v_{Te}}{v_{\Phi}^l} \right) \frac{k_2^2}{k_1^2} \frac{\omega_-}{\omega_{0e}}.$$

В силу

$$\omega_- < k^l v_{Te} \approx \omega_{0e} \frac{v_{Te}}{v_{\Phi}^l}$$

имеем

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{W^l}{nT_e} \omega_{0e} \left(\frac{v_{Te}}{v_{\Phi}^l} \right)^2 \frac{v_{Te}^2}{c^2},$$

т. е. существенно больше времени нелинейного взаимодействия продольных волн. Перекачка из поперечных волн в продольные характеризуется временем

$$\frac{1}{\tau_{l \rightarrow t}} \simeq \frac{W^l}{nT_e} \omega_{0e} \frac{|\mathbf{k}_-|^2}{k_1^2} v_{Te}^2 \frac{v_{Te}}{v_{\Phi}^l} (\omega_- \simeq |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| v_{Te}, k_2 \gg k_1 v_{Te}),$$

которое больше времени нелинейного взаимодействия поперечных волн. Вклад ионов в поляризацию (12,1) начинает сказываться для $l \rightarrow t$ трансформации при

$$\frac{v_{\Phi}^l}{v_{Te}} > \left(\frac{9m_i}{4m_e} \right)^{1/3} v_{Ic}^{1/3}.$$

При получении этой оценки предполагалось, что k_2 имеем порядок $k_1 v_{Te}$. Если такое же предположение делается при $t \rightarrow l$ трансформации, возникает тот же критерий.

Таким образом, поляризационные эффекты, обусловленные ионами, сказываются для взаимодействий поперечных и продольных волн при значительно меньших фазовых скоростях v_{Φ}^l , нежели во взаимодействии ленгмюровских волн $\left(\frac{v_{\Phi}^l}{v_{Ic}} > \left(\frac{9m_i}{m_e} \right)^{1/3} \right)$. Поэтому (12,2) справедливо лишь в плазме либо с очень тяжелыми ионами либо с большой электронной температурой. Вторым следствием, вытекающим из полученных неравенств, является более широкая, нежели для ll взаимодействия, область применимости приближенных формул, соответствующих $|\epsilon_i^t| > |\epsilon_i^l|$, а именно, при

$$\frac{v_{\Phi}^l}{v_{Te}} \ll \sqrt{\frac{9m_i}{m_e}}$$

и пренебрежении (12,2) имеем

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}_2}^t}{\partial t} = N_{\mathbf{k}_2}^l \int N_{\mathbf{k}_1}^l d\mathbf{k}_1 - \frac{\omega_{0e}^2 |\mathbf{k}_-|^3 v_{Te}}{4\omega_{pe}^3 m_e n (2\pi)^{5/2}} \frac{[\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2]^2}{k_1^2 k_2^2} \frac{m_e^2}{m_i^2}. \quad (12,3)$$

Характерное время $l \rightarrow t$ трансформации из (12,3) при $k_2 \sim k_1 v_{Te}$ есть

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{W^l}{nT_e} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2 \left(\frac{v_{\Phi}}{v_{Te}} \right)^3.$$

Сравнение (12,3) с характерным взаимодействием продольных волн в области $\frac{v_{\Phi}}{v_{Te}} < \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/3}$ показывает, что (12,3) может достигать величины порядка времени перекачки продольных волн лишь на границе области применимости (6,14) и в области применимости (6,17), т. е. при

$\frac{v_\phi^l}{v_{Te}} \gg \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/3}$. При выполнении неравенства $\frac{v_\phi^l}{v_{Te}} \gg \sqrt{\frac{9m_i}{m_e}}$, $l \rightarrow i$

конверсия описывается формулой

$$\frac{\partial N_{k_2}^l}{\partial t} = -N_{k_2}^l \int d\mathbf{k}_1 N_{k_1}^l \frac{\omega_{0e}^2 \omega_- [\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2]^2}{4m_e n v_{Te}^3 (2\pi)^{5/2} |\mathbf{k}_-| k_1^2 k_2^2} \quad (12,4)$$

с характерным временем (при $k_2 \sim k_1 v_{Te}$)

$$\frac{1}{\tau} \sim \omega_{0e} \frac{v_{Te}}{v_\phi^l} \frac{W^l}{n T_e},$$

что соответствует порядку нелинейного взаимодействия (6,18) ленгмюровских волн. Таким образом, мы получаем существенный вывод, состоящий в том, что примерно при

$$\frac{v_\phi^l}{v_{Te}} > \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/3}$$

нелинейная конверсия ленгмюровских волн в поперечные оказывается одинакового порядка с нелинейной перекачкой ленгмюровских волн при их взаимодействии между собой. Указанная конверсия приводит к сравнительно интенсивному выходу поперечного излучения из турбулентной плазмы на частотах, больших ω_{0e} . Нужно при этом иметь в виду, что показатели преломления для генерированных поперечных волн тем меньше, чем выше фазовая скорость ленгмюровских волн, их возбуждающих.

Рассмотрим теперь эффекты нелинейного взаимодействия через виртуальную поперечную волну. Согласно ¹⁵ получим при $(\mathbf{k}_- \mathbf{k}_1) \omega_{0e}^2 \gg 2(\mathbf{k} \mathbf{k}_1) \omega^2 \epsilon^l$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{k_2}^l}{\partial t} = & -N_{k_2}^l \int d\mathbf{k}_1 N_{k_1}^l \frac{\omega_-}{4m_e n v_{Te} |\mathbf{k}_-| (2\pi)^{5/2}} |k_-^2 - \omega_-^2 \epsilon^l (\omega_-, \mathbf{k}_-)|^{-2}, \\ & \left\{ \frac{[\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2]^2}{|\mathbf{k}_-|^2 k_1^2 k_2^2} [(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)^2 \omega_{0e}^4 + 2\omega_{0e}^4 (\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_-) (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_-) - \right. \\ & \left. - \omega_{0e}^4 (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_-)^2] + \frac{2}{k_1^2} \omega_{0e}^4 (\mathbf{k}_- \mathbf{k}_1)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (12,5)$$

В частном случае, когда роль ионов в ϵ^l пренебрежимо мала, (12,5) дает результат ³⁴. При

$$v_\phi^l \ll \min \left\{ \frac{1}{v_{Te}}, \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \right\} \text{ или } v_\phi^l \gg \max \left\{ \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}, v_{Te} \frac{m_i}{m_e} \right\}$$

и $k_2 \sim k_1 v_{Te}$ характерное время (12,5) не может превосходить (6,18), а при $\frac{1}{v_{Te}} \ll v_\phi \ll v_{Te} \frac{m_i}{m_e}$, т. е. в относительно узком интервале фазовых скоростей волн в случае, когда электронная температура плазмы достаточно высока $v_{Te} \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$, нелинейное рассеяние через виртуальную поперечную волну может достигать величины порядка рассеяния через продольную волну.

Как правило, при больших фазовых скоростях, когда возможно рассеяние через поперечную волну, рассеяние на ионах является преобладающим. В условиях $\omega_- \ll |\mathbf{k}_-| v_{Ti}$ нелинейное рассеяние на ионах

описывается формулой ^{15,34*)}

$$\frac{\partial N_{k_2}^t}{\partial t} = -N_{k_2}^t \int N_{k_1}^l dk_1 \frac{\omega_{0e}^2 \omega_{-T_e} [k_1 k_2]^2}{4m_e n v_{Te}^2 v_{Ti} (2\pi)^{5/2} T_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2 |k_-| k_1^2 k_2^2}. \quad (12,6)$$

В условиях $l \rightarrow t$ конверсии, когда $k_2 \ll k_1$, и при $\omega_- \sim \frac{k_1^2 v_{Te}^2}{\omega_{0e}}$ получаем оценку характерного времени процесса

$$\frac{1}{\tau} \simeq \omega_{0e} \frac{W^l}{n T_e} \frac{v_{Te}^2}{v_{\Phi} v_{Ti}} \frac{T_e}{T_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2}.$$

Условие $\omega_- \ll |k_-| v_{Ti}$ соответствует $v_{\Phi}^l \gg \frac{v_{Te}^2}{v_{Ti}}$. Как видно из (12,6), для того чтобы рассеяние на ионах было преобладающим, необходимо наряду с этим выполнение неравенства

$$\frac{m_i}{m_e} \gg \frac{T_e}{T_i} \gg \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3}.$$

б) Нелинейное взаимодействие при распаде поперечной волны на ленгмюровскую и ионно-звуковую. Процессы распада и слияния $t + s \rightleftharpoons l$, $l \rightarrow t + s$ наиболее близки к рассмотренным выше, так как осуществляют взаимодействие поперечных волн частот, близких к ω_{0e} . Первый из записанных процессов играет роль в конверсии $l \rightarrow t$, а второй — в $t \rightarrow l$ конверсии. Указанный процесс конверсии рассматривался в ⁶⁸ (вероятности см. также в ^{73в}). В силу $\omega_s > 0$ из закона сохранения энергии для $l \rightarrow t + s$ следует, что $k^l < \sqrt{3} v_{Te} k^l \ll k^l$, а так как $k^l \ll \frac{1}{\lambda_{De}}$, то $k_s \ll \frac{1}{\lambda_{De}}$, и может возникнуть лишь звуковое колебание $\omega_s = k_s v_s$. Из $(k^l)^2 > 0$ следует, что распад возможен лишь если

$$\frac{v_{\Phi}^l}{v_{Te}} < \sqrt{\frac{9m_i}{4m_e}},$$

т. е. $k^l > 2k_0$. Рассмотрим начальную стадию распада, когда числа N^l и N^s малы, и характерное время генерации t волн можно оценить из

$$\frac{1}{N^l} \frac{\partial N^l}{\partial t} \simeq \int u^{ts} N^l \frac{dk^l dk_s}{(2\pi)^6} \simeq \frac{W^l}{n T_e} \left(\frac{4m_e}{9m_i}\right)^{1/2} \omega_{0e} \frac{v_{\Phi}^l}{v_{Te}} \frac{k^l}{\Delta k^l}. \quad (12,7)$$

Здесь $\Delta k^l < k^l$ — ширина спектра l -волн, u^{ts} — вероятность распада. Конверсия волн в поперечные наиболее эффективна при $k^l \sim 2k_0$, т. е. на границе, разрешаемой законами сохранения, где указанная конверсия намного может превосходить нелинейное рассеяние на электронах (12,4), однако конверсия на ионах может быть сравнимой с (12,7).

Рассмотрим далее процесс, в котором поперечная волна с частотой, близкой к ω_{0e} , распадается на ленгмюровскую и ионно-звуковую. При этом $k^l > \sqrt{3} k^l v_{Te}$. Если считать $k^l \ll k^l$, то имеем для импульса

*) Эта формула учитывает лишь нелинейное рассеяние, так как комптоновское пренебрежимо мало, а алогично ll -рассеянию.

возбуждаемой l -волны

$$k^l = \sqrt{k_0^2 + \frac{(k_t)^2}{2v_{Te}^2}} - k_0,$$

а характерное время генерации l -волн имеет порядок

$$\frac{1}{N^l} \frac{dN^l}{dt} \simeq \int u_t^{ls} N_{\mathbf{k}^l}^t \frac{d\mathbf{k}^t d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^6} \simeq \frac{W^l}{nm_e c^2} \omega_{0e} \frac{k^l k_0}{k^l \Delta k^l}. \quad (12,8)$$

Оценка интенсивности генерации l -волн для процесса $t + s \rightarrow l$ может быть получена из

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N^l}{\partial t} &\simeq \int u_{ts}^l N^t N^s d\mathbf{k}^t d\mathbf{k}_s (2\pi)^{-6}, \\ \frac{dW^l}{dt} &\simeq \frac{W^l W^s \omega_{0e}}{nT_e} \frac{\omega_{0e}^2}{k^l \Delta k^l}; \quad \omega_{0e} \gg k^t; \Delta k^t \ll k^t. \end{aligned} \right\} \quad (12,9)$$

При значительной низкочастотной звуковой турбулентности (12,9) соответствует более эффективной генерации l -волн, нежели (12,8). Однако для (12,9) рост W^l не является экспоненциальным, как для (12,8).

в) Генерация поперечных волн при слиянии ленгмюровских волн и ленгмюровских и ионно-звуковых. Здесь мы рассмотрим два процесса, $l + s \rightarrow t$ и $l + l \rightarrow t$. Указанные процессы идут в турбулентной плазме и их интенсивность пропорциональна энергии турбулентности. Процесс $l + s \rightarrow t$ может служить источником поперечных волн в плазме, в которой возбуждены как l -, так и s -волны и имеет оценку

$$\frac{dW^l}{dt} \simeq \frac{W^l W^s}{nT_e} \omega_{0e} \frac{\omega_{0e}^2}{k^l \Delta k^l}. \quad (12,10)$$

Процесс слияния $l + l \rightarrow t$ приводит к генерации поперечных волн, частоты которых близки к $2\omega_{0e}$. Вероятность этого процесса нетрудно найти из гидродинамического нелинейного тока (4,8)^{31a}

$$u_t^{ll} = (2\pi)^6 \frac{e^2}{16\pi m_e^2} \frac{1}{k^2 \omega_{0e}} (k_1^2 - k_2^2)^2 \frac{[\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2]^2}{k_1^2 k_2^2} \delta(\omega^t - \omega_1^l - \omega_2^l) \delta(\mathbf{k}^t - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (12,11)$$

В случае малого числа N^l изменение числа продольных волн из-за распада имеет вид³⁴

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}_1}^l}{\partial t} = - \frac{N_{\mathbf{k}_1}^l}{12(2\pi)^2 \omega_{0e}^3 n m_e} \int N_{\mathbf{k}_2}^l \frac{[\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2]^2}{k_1^2 k_2^2} (k_1^2 - k_2^2)^2 \delta\left(3 - \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2}{\omega_{0e}^2}\right) d\mathbf{k}_2. \quad (12,12)$$

Благодаря тому, что сумма $|\mathbf{k}_1|$ и $|\mathbf{k}_2|$ порядка ω_{0e} , то для $v_{\Phi}^l \gg 1$ $k_1^2 - k_2^2$ порядка ω_{0e}^2 , а $\frac{[\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2]^2}{k_1^2 k_2^2} \sim \frac{\omega_{0e}^2}{k_1^2}$ и характерное время убывания из-за процесса (12,22) имеет оценку

$$\frac{1}{\tau} \simeq \omega_{0e} \frac{W^l}{nT_e} v_{\Phi}^l.$$

При $v_{\Phi} \sim 1$ эта оценка соответствует той, которая получена в работе³⁴. Время (12,12) мало в сравнении с характерным временем перекачки из-за рассеяния и распадов, рассмотренных выше. Нужно иметь в виду, что она приводит к эффекту, который может быть зарегистрирован экспериментально, а именно, излучению плазмы на частоте $2\omega_{0e}$. На возможность указанного спонтанного свечения турбулентной плазмы обращалось внимание в^{31a}. (Об астрофизических приложениях для излучений Солнца

см. ⁸⁷.) При малом N^l можно оценить мощность генерации поперечных волн из-за процесса $l + l \rightarrow t$

$$\frac{dW^t}{dt} \simeq \frac{W^l}{nm_e c^2} W^l \omega_{0e} \quad (12,13)$$

для наиболее эффективного случая $v_{\Phi}^l \simeq 1$.

г) Нелинейные взаимодействия поперечных и ленгмюровских волн при индуцированном рассеянии на надтепловых частицах плазмы. Интерес к этому вопросу определяется тем, что для турбулентной плазмы характерно наличие надтепловых частиц в хвостах распределений. Появление таких частиц обязано ускорительным механизмам, возникающим при взаимодействии частиц с турбулентными пульсациями плазмы ⁸⁸. Почти во всякой турбулентной плазме экспериментально обнаруживаются ускоренные частицы ⁸⁸. Естественной системой с надтепловыми частицами являются также пучки заряженных частиц, взаимодействующих с плазмой. Мы здесь ограничимся рассмотрением эффектов нелинейного взаимодействия для изотропно распределенных надтепловых частиц *). Следует заметить, что, как правило, число надтепловых частиц мало. Их вклад в эффекты, которые идут на тепловых частицах, мал **). Взаимодействие же поперечных и ленгмюровских волн при рассеянии на надтепловых частицах приводит к новому качественному эффекту — возможному нелинейному взаимодействию для поперечных волн больших частот $\omega^t > \omega_{0e}$ (до сих пор частоты волн, участвующие во взаимодействии, имели порядок ω_{0e}).

Для того чтобы доказать сделанное утверждение, достаточно рассмотреть законы сохранения энергии при рассеянии

$$\omega^t - \omega^l \simeq \omega^t = (\mathbf{k}^t - \mathbf{k}^l) \mathbf{v},$$

так как $k^t \sim \omega^t$, то

$$\frac{\omega^t}{\omega_{0e}} \sim \frac{|\mathbf{k}^t| v}{\omega_{0e}} > \frac{v}{v_{Te}} \gg 1.$$

Рассеяние поперечных волн в продольные на надтепловых частицах примечательно также тем, что основной вклад вносит нелинейное рассеяние через виртуальную поперечную волну, в отличие от рассеяния на тепловых частицах, когда рассеяние через поперечную волну может быть существенным лишь в исключительных условиях при выполнении весьма жестких требований (что было подробно выявлено выше). Сечение $l \rightarrow t$ рассеяния для надтепловых частиц и $\omega^t \gg \omega_{0e}$ нетрудно получить из приведенных выше общих выражений ¹⁸⁵:

$$w_e^t = (2\pi)^3 \frac{e^4 \omega_{0e} k_1^2}{m_e^2 k_2^3} |\beta \mathbf{k}_2|^2 \delta(|\mathbf{k}_2| - \omega - \mathbf{k}_2 \mathbf{v} + \mathbf{k}_1 \mathbf{v}), \quad (12,14)$$

$$\beta = \frac{\mathbf{k}_1}{|\mathbf{k}_2|} \frac{\sqrt{1-v^2}}{k_1^2 \left(1 - \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{v}}{|\mathbf{k}_2|}\right)} + \frac{\mathbf{v} \sqrt{1-v^2}}{(k_1 \mathbf{v})^2 k_1^2} ((\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) - |\mathbf{k}_2| (\mathbf{k}_1 \mathbf{v})) - \\ - \frac{\mathbf{k}_1}{|\mathbf{k}_2|} \frac{1}{(k_1 - \mathbf{k}_2)^2 - k_2^2} - \frac{\mathbf{v}}{(k_2 - \mathbf{k}_1)^2 - k_2^2}.$$

*) Рассмотрение нелинейных эффектов при наличии пучков частиц выходит за рамки настоящего обзора. Однако качественные оценки эффективности нелинейных взаимодействий одинаковы для изотропно и неизотропно распределенных надтепловых частиц.

**) Это имеет место, например, для взаимодействия ленгмюровских волн между собой (расчет сечений рассеяния для надтепловых резонансных частиц и поправок к черенковскому излучению содержится в ¹⁸⁶).

Второй член β описывает нелинейное рассеяние через виртуальную поперечную волну. Впервые (12,14) было получено для $\omega^l \gg \omega_{0e}$ в ^{18a} при использовании наглядных представлений о природе нелинейного рассеяния, как переходного излучения на неоднородностях плотности, создаваемых плазменной волной. Этот расчет ^{18a} близок к работам, в которых рассматривается переходное излучение в среде, с периодической структурой ^{63, 64}. В данном случае плазменная волна создает переменную концентрацию электронов и, следовательно, модулирует диэлектрическую проницаемость в пространстве и времени

$$\varepsilon^l = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} \frac{\delta n}{n} \simeq 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} - A e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.$$

Такая наглядная интерпретация допустима лишь в силу $\omega^l \gg \omega_{0e}$ (см. ^{18b}). Анализ (12,14) (см. ^{18b}) показывает, что рассеяние через виртуальную поперечную волну компенсирует в первом приближении комптоновское рассеяние, если $v_{\phi}^l \ll 1$ и $v \ll 1$; для $v_{\phi}^l \sim 1$ компенсация исчезает, если при этом $v \ll 1$; для релятивистских частиц $v \rightarrow 1$ основную роль играет лишь комптоновское рассеяние. Подробный численный анализ спонтанного рассеяния, возникающего при рассеянии быстрых частиц на изотропно распределенных плазменных волнах, выполнен в ^{18a}. Здесь мы рассмотрим нелинейные эффекты, возникающие при достаточно большой интенсивности поперечных волн $\omega \ll \omega_{0e}$, когда роль играет индуцированное рассеяние. Нетрудно получить, что индуцированное рассеяние поперечных волн для изотропно распределенных надтепловых частиц приводит к дополнительному поглощению поперечных волн ^{19a}. Для $\omega \gg \omega_{0e}$, $v_{\phi}^l \ll 1$ и $v \ll 1$ получим

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}_2}^t}{\partial t} = -\frac{1}{4(2\pi)^2} N_{\mathbf{k}_2}^t \int \frac{\omega_{0e}^5}{k_2^2 |\mathbf{k}_1|} N_{\mathbf{k}_1}^l \frac{d\mathbf{k}_1}{n_0 m_e} \left(\frac{n_1}{n_0} \right) \overline{v^{-1}} \times \\ \times \left\{ \left(1 - 2 \frac{(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right)^2 + \frac{(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right\}, \quad (12,15)$$

где n_1 — полное число надтепловых частиц, могущих принимать участие в рассеянии

$$\overline{v^{-1}} = n_1^{-1} \int_{v > \frac{\omega^l}{k_l}} f_{\mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} v^{-1}.$$

Характерный декремент γ для такого нелинейного поглощения имеет оценку

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \simeq \pi \frac{W^l}{n_0 m_e c^2} \frac{v_{\phi}^l}{v} \left(\frac{\omega_{0e}}{\omega^l} \right)^2 \frac{n_1}{n_0}.$$

Сходным образом можно найти изменение числа продольных волн. При этом возможна раскачка продольных волн ^{19a}.

д) Распады поперечных волн на поперечные и ленгмюровские. Этот тип взаимодействия также возможен для поперечных высокочастотных волн $\omega^l \gg \omega_{0e}$. Легко понять, что в указанных процессах сохраняется полное число поперечных волн, следовательно, рассматриваемый процесс приводит к перекачке t волн по спектру. Вероятность этого процесса найдена в ^{19b}:

$$u_t^{tl} = (2\pi)^6 \frac{e^2 (k^l)^2 \omega^l}{16\pi m_e \omega_1^t \omega_2^t} \left(1 + \frac{(\mathbf{k}_1^t \mathbf{k}_2^t)^2}{(k_1^t k_2^t)^2} \right) \delta(\omega_1^t - \omega_2^t - \omega^l) \delta(\mathbf{k}_1^t - \mathbf{k}_2^t - \mathbf{k}^l). \quad (12,16)$$

Рассматриваемый процесс аналогичен по структуре $l \rightarrow s + l$ -распаду, и многое из того, что было выявлено для этого распада, может быть качественно перенесено на распад $t \rightarrow t + l$.

Существенно, что этот распад также не может идти неограниченно, так как в результате распада появляются две волны, частоты которых больше ω_{0e} . Следовательно, частота распадающейся волны должна быть больше $2\omega_{0e}$. Это ограничивает возможные фазовые скорости t -волн при перекачке сверху $v_{\phi}^t < \frac{2}{\sqrt{3}}$. Существенно, что распадный процесс осуществляет перекачку поперечных волн в той области частот, где индуцированное рассеяние не эффективно. В результате перекачки генерируются плазменные волны, что подробно исследовалось в ¹⁵, ^{74в}, ⁹⁸. Энергия, генерируемая плазменными волнами, будет порядка энергии исходных поперечных волн, т. е. поперечные волны заметно диссипируют в плазме из-за нелинейных процессов, если частоты ω^t при перекачке уменьшаются на величину порядка ω^t . В случае узких спектров t -волн ($\Delta\omega^t \ll \omega_{0e}$) перекачка приводит к появлению сателлитов. При этом характерное время перекачки на один сателлит при ⁹⁸ $\Delta\theta^t \ll \left(\frac{\omega_{0e}}{\omega^t}\right)^{3/2}$ имеет порядок $\frac{1}{\tau} \simeq \frac{\pi}{2} \omega_{0e} \frac{\omega_{0e}}{\Delta\omega^t} \frac{W^t}{nm_e c^2}$. Для широкого спектра волн $\Delta\omega^t \gg \omega_{0e}$ характерное время генерации имеет оценку

$$\frac{1}{\tau} \simeq \frac{\pi}{4} \omega_{0e} \left(\frac{\omega_{0e}}{\Delta\omega^t}\right)^2 \frac{W^t}{nm_e c^2}. \quad (12,17)$$

Аналогично $l \rightarrow s + l$ -распаду, в данном случае при большой энергии l -волн перекачка происходит в сторону увеличения частот поперечных волн.

§ 13. Нелинейные взаимодействия поперечных и ионно-звуковых волн

Существуют два типа взаимодействий t - и s -волн.

а) Индуцированное рассеяние поперечных волн на электронах с превращением в ионно-звуковые. Это взаимодействие приводит к поглощению поперечных волн и во многом аналогично поглощению l -волн при $l \rightarrow s$ рассеянии. Если $\omega^t \ll |\mathbf{k}^s| v_{Te}$, $\omega^t \gg \omega_{0e}$, что соответствует превращению поперечных волн в ионные колебания $\omega_s \sim \omega_{0i}$, то вероятность процесса рассеяния имеет вид

$$w_l^{ts} = (2\pi)^3 \frac{e^4}{m_e^2} \frac{\omega_{0i}}{(\omega^t)^3} \frac{[\mathbf{k}_s \mathbf{k}^t]^2}{(k_s k^t)^2} \delta(\omega^t - \omega_s - (\mathbf{k}^t - \mathbf{k}_s) v),$$

нелинейное поглощение описывается формулой

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}_2}^t}{\partial t} = - N_{\mathbf{k}_2}^t \int \frac{N_{\mathbf{k}_1}^s \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \omega_{0e}^3 d\mathbf{k}_1}{2(2\pi)^{5/2} n_0 m_e v_{Te} |\mathbf{k}_s| v_{Te}} \left(\frac{\omega_{0e}}{\omega^t}\right)^2 \frac{[\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2]^2}{k_1^2 k_2^2}. \quad (13,1)$$

б) Распад поперечных волн на ионно-звуковые, описываемый вероятностью ^{19г}

$$u_l^{ts} = (2\pi)^6 \frac{1}{64\pi} \frac{e^4}{m_e^2 v_{Te}^2} \frac{|\omega_s|^3 \omega_{0e}^4}{\omega_1^t \omega_2^t k_s^2 \omega_{0i}^2} \times \\ \times \left(1 + \frac{(\mathbf{k}_1^t \mathbf{k}_2^t)^2}{(k_1^t k_2^t)^2}\right) \delta(\omega_1^t - \omega_2^t - \omega^s) \delta(\mathbf{k}_1^t - \mathbf{k}_2^t - \mathbf{k}_s). \quad (13,2)$$

Анализ показывает, что более вероятным по сравнению с непосредственным распадом поперечных волн на звуковые является многоступенчатый распад, когда поперечная волна вначале распадается на ленгмюровскую, а затем ленгмюровские волны распадаются на ионно-звуковые ^{74в}.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следует в заключение сказать несколько слов о нерешенных проблемах теории нелинейного взаимодействия. Решение системы нелинейных уравнений даже в простейшем случае весьма сложно, однако нужно надеяться, что именно решение таких задач позволяет получить важные сведения о спектрах стационарной турбулентности. Следует отметить работы ^{26, 61, 85}, как одни из первых, в которых делается попытка решения подобных задач. Другой проблемой, не менее важной, является исследование роли нелинейных эффектов при развитии пучковой неустойчивости. Здесь следует отметить работу ³⁶, в которой показано, что нелинейные эффекты могут приводить к срыву пучковой неустойчивости. Далее, не менее важным является вопрос об излучении турбулентной плазмы, возникающей при конверсии продольных волн в поперечные, которое может быть источником потерь энергии и охлаждения плазмы ³¹. С другой стороны, различные перекачки могут переводить колебания в область поглощения и тем самым увеличивать температуру плазмы. Это особенно существенно для плазмы, находящейся в магнитных полях ³⁵. Исследование этих вопросов может дать картину динамики турбулентной плазмы. Поэтому исследование нелинейностей магнитоактивной плазмы представляет значительный интерес. В настоящее время исследование этих вопросов нельзя еще считать завершенным.

Нелинейные эффекты существенно влияют на спектры частиц, ускоряющихся в турбулентной плазме, на изотропизацию космических лучей ^{38, 39}, на генерацию турбулентности космической плазмы из-за гравитационной неустойчивости и т. п.

Наконец, нелинейные эффекты неоднородностей плазмы определяют процессы диффузии частиц, знание которых существенно для проблемы удержания плазмы.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, М., Гостехиздат, 1949.
2. а) V. A. Bailey, D. F. Martin, Phil. Mag. **18**, 369 (1934);
б) В. Л. Гинзбург, Изв. АН СССР, сер. физ., **12**, 293 (1948).
3. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН **70**, 20 (1960).
4. В. Л. Гинзбург, Электромагнитные волны в плазме, М., Физматгиз, 1961.
5. В. Д. Шафранов, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3, М., Атомиздат, 1964.
6. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., Атомиздат, 1961.
7. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез **1**, 802 (1961).
8. а) Я. Б. Файнберг, А. К. Березин и др., Атомная энергия **11**, 493 (1961);
б) А. К. Березин, Г. Н. Березина, Л. Н. Болотин, Я. Б. Файнберг, Атомная энергия **14**, 249 (1963);
в) И. Ф. Харченко и др., Ядерный синтез. Приложение 3, 1101 (1962).
9. М. В. Незлин, А. М. Солнцев, ЖЭТФ **45**, 840 (1963).

10. а) I. Alexeff, R. V. Neidigh, Phys. Rev. **129**, 516 (1963);
 б) I. Alexeff, R. V. Neidigh, W. F. Reid, E. D. Shiple, Phys. Rev. Letts **10**, 273 (1963).
11. Е. К. Завойский, Атомная энергия **14**, 57 (1963).
12. D. Bohm, E. Vignor et al., The characteristics of Electr. Discharges in Magnetic Fields, New York, 1949.
13. В. Л. Гинзбург, С. Н. Сыроватский, Происхождение космических лучей, М., Изд-во АН СССР, 1963.
14. В. Н. Цытович, Астрон. ж. **40**, 612 (1963); **41**, 7 (1964).
15. а) В. Н. Цытович, ЖТФ **35**, 773 (1965);
 б) Л. М. Коврижных, В. А. Липеровский, В. Н. Цытович, ЖТФ **36**, 1339 (1966).
16. Б. Б. Кадомцев, Турбулентность плазмы, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4, М., Атомиздат, 1964.
17. А. Л. Ахманов и Р. В. Хохлов, Нелинейная оптика, М., Изд-во ВИНТИ, 1964.
18. а) А. Гайлитис, В. Н. Цытович, ЖЭТФ **46**, 1726 (1964);
 б) А. Гайлитис, В. Н. Цытович, ЖЭТФ **47**, 1468 (1964);
 в) В. Н. Цытович, ДАН СССР **154** (1), 76 (1964).
19. а) Л. М. Коврижных, В. Н. Цытович, ЖЭТФ **46** (5), 2214 (1964);
 б) Л. М. Коврижных, В. Н. Цытович, ЖЭТФ **47** (4), 1454 (1964);
 в) Л. М. Коврижных, В. Н. Цытович, ЖТФ **35** (1), 14 (1965);
 г) Л. М. Коврижных, В. Н. Цытович, ДАН СССР **158**, 1306 (1964).
20. А. Гайлитис, В. Н. Цытович, Изв. вузов (Радиофизика) **6**, 1190 (1964).
21. P. A. Stungrock, Proc. Roy. Soc. A **242**, 277 (1957).
22. W. E. Drummond, P. Pines, Nucl. Fusion Suppl., Part 3, 1049 (1962).
23. В. Д. Шапиро, ЖЭТФ **44**, 613 (1963).
24. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Приложение 2, 465 (1962).
25. а) R. Karplus, J. Schwinger, Phys. Rev. **73**, 1020 (1948);
 б) Н. Г. Басов и А. М. Прохоров, УФН **57**, 485 (1955).
26. а) Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ЖЭТФ **43**, 2234 (1962);
 б) Б. Б. Кадомцев, ЖЭТФ **45**, 1231 (1963);
 в) В. И. Петвиашвили, ДАН СССР **153**, 1295 (1963).
27. а) В. И. Карпман, ДАН СССР **152** (3), 587 (1963);
 б) А. Альтшуль и В. И. Карпман, ЖЭТФ, **46**, 1552 (1964);
 в) В. И. Карпман, ПМТФ N 6, 34 (1963).
28. А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез **5**, 20 (1965).
29. M. Camac, A. R. Kantrowitz, M. M. Sitwak, R. M. Patrick, Nucl. Fusion, Part 2, 423 (1962).
30. А. А. Галеев, В. И. Карпман, ЖЭТФ **44**, 592 (1963).
31. а) И. А. Ахизер, И. Л. Данелия, Н. Л. Цинцадзе, ЖЭТФ **46**, 300 (1964);
 б) И. Л. Данелия, Н. Л. Цинцадзе, Изв. вузов (Радиофизика) **7**, 94 (1964);
 в) Н. Л. Цинцадзе, ЖТФ **34**, 1807 (1964).
32. Ф. Г. Басс, А. Я. Бланк, ЖЭТФ **43**, 1479 (1962).
33. Л. М. Горбунов, В. П. Сплин, ЖЭТФ **47**, 200 (1964).
34. Л. М. Горбунов, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, ЖЭТФ **47**, 1437 (1964).
35. а) В. Н. Цытович, А. Б. Шварцбург, ЖЭТФ, **49**, 797 (1965);
 б) В. П. Цытович, А. Б. Шварцбург, ЖТФ **36**, № 11 (1966).
36. В. Н. Цытович, В. Д. Шапиро, Ядерный синтез **5**, 228 (1965).
37. В. Н. Цытович, Астрон. ж. **42**, 33 (1965).
38. В. Л. Гинзбург, Астрон. ж. **42**, 1129 (1965); Препринт ФИАН А-32 (1965).
39. В. Н. Цытович, Препринт ФИАН, А-87 (1965); Астрон. ж. **43**, 528 (1966).
40. Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, М., ИЛ, 1965.
41. А. А. Веденов, Л. И. Рудаков, ДАН СССР **159**, 767 (1964).
42. R. Wild, Ann. Phys. **14**, 143 (1961).
43. А. Б. Михайловский, Ядерный синтез **4**, 321 (1964).
44. В. Н. Цытович, В. Д. Шапиро, ЖТФ **35**, 1925 (1965).
45. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Физматгиз, 1962.
46. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, М., Изд-во АН СССР, 1953.
47. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, 2-е изд., М., Изд-во «Наука» (1965).

48. Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, М. — Л., Гостехиздат, 1949.
49. А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, М., Физматгиз, 1962.
50. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **10**, 589 (1940).
51. E. Watson, J. H. Jauch, Phys. Rev. **74**, 95 (1948).
52. М. И. Рязанов, в сб. «Некоторые вопросы теоретической физики», М., Атомиздат, 1958, стр. 75.
53. В. Н. Цытович, ЖЭТФ **42**, 457 (1962).
54. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйрман, ЖЭТФ **36**, 1823 (1959).
55. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Физматгиз, 1962.
56. В. Л. Гинзбург УФН **69**, 537 (1959).
57. А. А. Рухадзе, Л. М. Коврижных, ЖЭТФ **38**, 850 (1960).
58. М. А. Леонтович, ЖЭТФ **40**, 907 (1961).
59. Б. А. Демидов, Н. И. Елагин, Д. Д. Рютов, С. Д. Фанченко, ЖЭТФ **46**, 497 (1964); **48**, 454 (1965).
60. А. Гайлитис, Диссертация (ФИАН, 1964).
61. И. А. Ахиезер, ЖЭТФ **47**, 2269 (1964).
62. М. В. Бабыкин, П. П. Гаврин, Е. К. Завойский, Л. И. Рудаков, В. А. Скорюпин, Г. В. Шолин, ЖЭТФ **46**, 514 (1964); **45**, 405 (1963); **43**, 411, 1547 (1962).
63. а) Я. Б. Файнберг, Н. А. Хижняк, ЖЭТФ **32**, 883 (1957).
б) М. Л. Тер-Микаелян и А. Д. Газазян, ЖЭТФ **39**, 1693 (1960).
64. а) Б. М. Болотовский. Диссертация (ФИАН, 1965);
б) К. А. Барсуков, Б. М. Болотовский, ЖЭТФ **45**, 303 (1963).
65. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Астрон. ж. **35**, 699 (1958).
66. А. А. Иванов, Д. Д. Рютов, ЖЭТФ **48**, 684 (1965).
67. А. И. Ахиезер, А. Г. Ситенко, И. Г. Прохода, ЖЭТФ **33**, 750 (1957).
68. И. А. Ахиезер, ЖЭТФ **47**, 952 (1964).
69. K. L. Bowles, Phys. Rev. Letts. **1**, 464 (1958).
70. В. П. Силин, ЖЭТФ **38**, 1577 (1960).
71. В. П. Силин, ПМТФ № **1**, 31 (1964).
72. Г. В. Гордеев, ЖЭТФ **23**, 660 (1952).
73. а) Л. М. Коврижных, Rapport Interne E.V.R. C.E.A.F.C.—258 Fontenay-aux-Roses (Scin) France 1964; ЖЭТФ **48**, 1114 (1965);
б) Л. М. Коврижных, Труды ФИАН **32**, «Физика плазмы», М., изд-во «Наука», 1966.
в) Л. М. Коврижных, ЖЭТФ **49**, 1332 (1965).
74. а) В. А. Липеровский, В. Н. Цытович, ПМТФ № **5**, 15 (1965);
б) В. А. Липеровский, В. Н. Цытович, ЖТФ **36**, 576 (1966);
в) В. А. Липеровский, В. Н. Цытович, ПМТФ № **2**, 116 (1966).
75. а) В. Д. Федорченко, В. Н. Муратов, Б. Н. Руткевич, Ядерный синтез **4**, 300 (1964);
б) В. Д. Федорченко и др., ЖТФ **32**, 958 (1962).
76. Г. И. Сурамлишвили, ДАН СССР **153**, 317 (1963).
77. Б. А. Демидов, С. Д. Фанченко, Письма ЖЭТФ **2** (12), 533 (1965).
78. R. W. Vaniev, D. G. Swason, R. T. Granpon, Phys. Rev. Letts. **15**, 444 (1965).
79. J. P. Dogherty, D. T. Farley, Proc. Roy. Soc. **A259**, 79 (1960); **A263**, 238 (1961).
80. а) E. E. Salpeter, Phys. Rev. **120**, 1528 (1960); б) E. E. Salpeter, J. Geophys. Res. **66**, 928 (1961); в) E. E. Salpeter, J. Geophys. Res. **69**, 869 (1964).
81. M. N. Rosenbluth, N. Rostocker, Phys. Fluids **5**, 776 (1962).
82. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ **41**, 644 (1961).
83. Y. G. Chen, R. F. Leheny, T. C. Marshall, Phys. Rev. Letts. **15**, 184 (1965).
84. R. A. Stern, N. Troar, Phys. Rev. Letts. **15**, 485 (1965).
85. И. А. Ахиезер, ЖЭТФ **48**, 1159 (1965).
86. а) В. Н. Цытович, УФН **89** (1), 89 (1965);
б) В. Н. Цытович, Некоторые вопросы статистического ускорения частиц в турбулентной плазме, Доклад на VII конференции по ионизационным явлениям в газах (Белград, август 1965 г.), Препринт ФИАН, 1965.
87. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, М., Изд-во «Наука», 1964.
88. А. В. Гуревич, ЖЭТФ **38**, 1597, **39**, 1296 (1960).
89. В. А. Супруненко и др., Атомная энергия **17**, 83 (1964).
90. Ю. П. Райзер, УФН **87**, 29 (1965).
91. N. Bloembergen et al., Phys. Rev. **127**, 1918 (1962).

92. Ю. А. Романов, Г. Ф. Филиппов, ЖЭТФ 40, 123 (1961).
93. а) А. А. Веденов, в сб. «Вопросы теории плазмы» т. 3, М., Атомиздат, 1964;
 б) А. А. Веденов, Атомная энергия 13, 5 (1962);
 в) А. А. Веденов, ДАН СССР 147, 334 (1962);
 г) А. А. Веденов, Е. П. Велихов, ЖЭТФ 43, 964 (1962).
94. Р. З. Сагдеев, в сб. «Вопросы теории плазмы», т. 4, М., Атомиздат, 1964.
95. а) Ю. Л. Климонтович, ДАН СССР 144, 1022 (1962);
 б) Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, ЖЭТФ 42, 286 (1962);
 в) Ю. Л. Климонтович, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, М., Изд-во МГУ, 1964.
96. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, М.-Л., Гостехиздат, 1946.
97. А. Гайлитис, Л. М. Горбунов, Л. М. Коврижных, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, В. П. Цытович, Элементарные процессы нелинейного взаимодействия заряженных частиц с плазмой и уравнения слаботурбулентной плазмы, Доклад на VII конференции по ионизационным явлениям в газах (Белград, август 1965).
98. В. П. Липеровский и В. Н. Цытович, О взаимодействии с плазмой излучения квантовых оптических генераторов, Доклад на VII конференции по ионизационным явлениям в газах (Белград, август, 1965).
99. В. М. Дикасов, Л. И. Рудаков, Д. Д. Рютов, ЖЭТФ 48, 913 (1965).
100. Р. В. Половин, Ядерный синтез 4, 10 (1964).
101. А. А. Плютто, ЖЭТФ 39, 1589 (1960).
102. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы теории нелинейных колебаний, М., Гостехиздат, 1955.
103. А. Н. Ораевский, Ядерный синтез 4, 263 (1964).
104. а) И. С. Данилкин, ЖТФ 35, 667 (1965); Препринт ФИАН А-64, 1964;
 б) И. С. Данилкин, Препринт ФИАН А-66, 1965; ЖТФ 36, 813 (1966).
105. В. Н. Цытович, ЖЭТФ 40, 1775 (1961)

Примечание при корректуре. В гл. II рассмотрены нелинейные взаимодействия волн при рассеянии на частицах плазмы, распределение которых является максвелловским. Общие уравнения гл. I учитывают также обратное влияние индуцированного рассеяния на функцию распределения частиц, которое может снизить нелинейное взаимодействие интенсивных волн в плазме с малым отношением ν/ω_{0e} (ν — средняя частота электрон-электронных соударений). Для одномерного взаимодействия ленгмюровских волн, согласно оценкам А. С. Чихачева и автора, снижение происходит в η^{-2} раз, лишь если $\eta < 1$:

$$\eta_e \approx \frac{nT_e}{Wl} \left(\frac{\nu}{\omega_{0e}} \right)^{1/2}; \quad \eta_i \approx \frac{nT_e}{Wl} \left(\frac{\nu l T_e}{\omega_{0e} l T_i} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right).$$

