

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

535. 353
535. 354ВЛИЯНИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ НА ДОППЛЕРОВСКОЕ УШИРЕНИЕ
СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

С. Г. Раутман, И. И. Соболевман

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект Допплера является одной из основных причин уширения спектральных линий. Традиционное рассмотрение уширения вследствие эффекта Допплера сводится к следующему (см., например, ¹). Если осциллятор с собственной частотой колебаний ω_0 движется относительно наблюдателя со скоростью v , то в системе координат наблюдателя его частота равна $\omega = \omega_0 + kv$, где k — волновой вектор излучения. Поэтому принимается, что форма линии испускания совокупности движущихся осцилляторов определяется их распределением по лучевым скоростям $W(v) dv$:

$$I_k(\omega) d\omega = W\left(\frac{\omega - \omega_0}{k}\right) \frac{d\omega}{k} = W\left(c \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right) \frac{c}{\omega_0} d\omega. \quad (1,1)$$

Подобный подход, строго говоря, справедлив лишь в том случае, когда скорость каждого осциллятора остается неизменной неограниченное время. Действительно, при выводе формулы (1,1) для распределения интенсивности $I(\omega) d\omega$ неявно используется предположение, что в спектре осциллятора с лучевой скоростью v содержится только одна частота $\omega_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$. Если же движение осциллятора не является свободным и его скорость остается неизменной лишь конечное время τ , то излучение осциллятора на интервале τ дает спектр с шириной $\Delta\omega \sim 1/\tau$ вокруг $\omega_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$. Для применимости формулы (1,1), очевидно, необходимо, чтобы ширина этого спектра была мала по сравнению со средним доплеровским смещением: $1/\tau \ll \omega_0 \frac{v}{c}$. Это неравенство можно переписать

в виде $2\pi l \gg \lambda$, где $l = \bar{v}\tau$ — длина свободного пробега и $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0}$ — длина световой волны. Для видимой области спектра $\lambda \simeq 5 \cdot 10^{-5}$ см, и это условие нарушается лишь при сравнительно больших давлениях, порядка атмосферного. Таким образом, для большинства астрофизических приложений и многих источников света, таких как газоразрядные лампы невысокого давления, формула (1,1) описывает доплеровское уширение с достаточной для практических целей точностью.

Можно, однако, указать и целый ряд других примеров, когда формула (1,1) неприменима. Например, в тех случаях, когда длина волны λ велика (далекая инфракрасная область спектра, миллиметровый и сантиметровый диапазоны), соотношение $2\pi l \gg \lambda$ перестает выполняться уже

при очень маленьких давлениях. Кроме того, возможны такие условия, когда длина волны λ превышает размеры сосуда, в котором заключен газ. Иными словами, если по каким-либо причинам свободное движение атома ограничивается, влияние эффекта Доплера на уширение спектральных линий может существенно измениться. Хорошо известным примером такого типа является эффект Мёссбауэра, возникающий вследствие локализации излучающей частицы в области, малой по сравнению с $\frac{\lambda}{2\pi}$ (см., например, ²). По существу, по той же причине доплеровское уширение практически не играет роли в спектрах молекул жидкости.

Как правило, взаимодействие излучающего атома с окружающими частицами учитывается только как возмущение внутреннего движения осциллятора, т. е. изменение фазы и амплитуды его колебаний. По этому вопросу имеется обширная литература (см., например, ¹). Из сказанного выше следует, однако, что роль столкновений в уширении спектральных линий в общем случае значительно сложнее, так как столкновения одновременно с возмущением колебаний осциллятора могут менять характер его поступательного движения. Оба эти эффекта столкновений тесно связаны друг с другом и должны рассматриваться совместно.

Надо отметить, что весь этот круг вопросов представляет интерес не только для атомной и молекулярной спектроскопии, но также и для понимания ряда тонких явлений физики газовых квантовых генераторов (см. § 8).

Настоящая статья посвящена детальному анализу влияния столкновений на доплеровское уширение и связи ударного уширения и эффекта Доплера.

Остановимся прежде всего на общем методе рассмотрения влияния столкновений на чисто доплеровское уширение, отвлекаясь от возможного нарушения колебаний осциллятора. В этом случае амплитуда световой волны, излучаемой движущимся осциллятором, зависит от времени следующим образом:

$$E(t) \propto e^{-i\omega_0 t + i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, \quad \mathbf{r}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{v}(t') dt'. \quad (1,2)$$

Если осциллятор испытывает столкновения, в результате которых меняется его скорость, то $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ будут случайными функциями времени. При этом спектр $E(t)$ из (1,2) будет содержать некоторый набор частот. Распределение интенсивности $I(\omega)$ в этом случае можно найти с помощью общих формул фурье-анализа (см., например, ¹):

$$I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \Phi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (1,3)$$

где $\Phi(\tau)$ — функция корреляции для амплитуды излучения $E(t)$:

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= \langle e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau)} \rangle, \\ \mathbf{r}(\tau) &= \int_t^{t+\tau} \mathbf{v}(t') dt'. \end{aligned} \quad (1,4)$$

Здесь $\mathbf{r}(\tau)$ есть смещение осциллятора за время τ , а угловыми скобками обозначено усреднение по ансамблю осцилляторов.

Если осцилляторы не испытывают столкновений и их распределение по скоростям является максвелловским

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{v}(\tau), \quad W_M(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \bar{v}} e^{-v^2/\bar{v}^2}, \quad \bar{v}^2 = \frac{2kT}{m}, \quad (1,5)$$

то

$$\Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikv\tau} W_M(v) dv = e^{-(k\bar{v}\tau)^2/4}. \quad (1,6)$$

Подставляя (1,6) в (1,3), легко получить

$$I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D} e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta\omega_D}\right)^2}, \quad \Delta\omega_D = k\bar{v} = \omega_0 \frac{\bar{v}}{c}, \quad (1,7)$$

что является частным случаем (1,4). Здесь и всюду ниже частота ω отсчитывается от положения несмещенной частоты ω_0 .

В соответствии с (1,4) ширина распределения $\Phi(\tau)$ определяется характерным временем τ_k , необходимым для смещения осциллятора на расстояние порядка $\frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$, где λ — длина волны излучения. В случае (1,6) это время порядка $1/k\bar{v}$.

Любая причина, ограничивающая или замедляющая перемещение осцилляторов, должна приводить к уширению распределения $\Phi(\tau)$ и, следовательно, к сужению контура $I(\omega)$. Столкновения атомов газа приводят, очевидно, к увеличению среднего времени, необходимого для смещения атома на расстояние $\frac{\lambda}{2\pi}$. Поэтому столкновения должны проявляться в уменьшении ширины спектра *) по сравнению с $\Delta\omega_D$. Подобный эффект должен быть особенно существен, если длина свободного пробега l много меньше $\frac{\lambda}{2\pi}$. В этом предельном случае время перемещения атома на величину $\frac{\lambda}{2\pi}$ определяется диффузионным законом и примерно равно $\tau_k \cong \frac{l}{v} \left(\frac{\lambda}{2\pi l} \right)^2$. Следовательно, для ширины линии $1/\tau_k$ получим

$$\frac{1}{\tau_k} \cong \frac{\bar{v}}{l} \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \right)^2 = \Delta\omega_D \frac{2\pi l}{\lambda} < \Delta\omega_D. \quad (1,8)$$

Таким образом, при большой плотности газа, когда число столкновений на длине $\lambda/2\pi$ велико, должно иметь место сужение доплеровского контура по сравнению с (1,7) в $2\pi l/\lambda$ раз.

Эти качественные соображения находятся в согласии с расчетом доплеровского контура $I(\omega)$, проведенным в работе ⁴. В частном случае модели броуновского движения ³ в работе ⁴ было получено следующее выражение для функции корреляции:

$$\Phi(\tau) = e^{-\frac{k^2}{2} \langle x^2 \rangle}, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{\bar{v}^2}{v_d^2} [v_d \tau - 1 + e^{-v_d \tau}], \quad (1,9)$$

*) Подчеркнем, что речь идет о таких столкновениях, в которых изменяется только скорость осциллятора, но не его фаза. О столкновениях с изменением фазы см. ниже.

где $\langle x^2 \rangle$ — среднеквадратичное смещение вдоль направления \mathbf{k} за время τ , ν_d — эффективная частота столкновений, связанная с коэффициентом диффузии D соотношением $\nu_d = \bar{v}^2/2D$.

В предельном случае $\nu_d \rightarrow 0$ формула (1,9) переходит в формулу (1,6). При $\nu_d \neq 0$ для $\nu_d \tau \gg 1$

$$\Phi(\tau) = e^{-\left(\frac{k^2 \bar{v}^2}{2\nu_d}\right)\tau} = e^{-(\Delta\omega_D^2 \tau / 2\nu_d)}, \quad (1,10)$$

и в области $\omega \ll \nu_d$

$$I(\omega) \simeq \frac{\gamma_d}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + \gamma_d^2}, \quad \gamma_d = \frac{\Delta\omega_D^2}{2\nu_d} = \frac{1}{2} \Delta\omega_D \frac{2\pi l}{\lambda}. \quad (1,11)$$

Таким образом, центральная часть линии описывается дисперсионным контуром с шириной $2\gamma_d$ (ср. (1,8)). В случае достаточно больших давлений, когда $l \ll \lambda/2\pi$, подавляющая часть интенсивности сосредоточена в области $\omega \ll \nu_d$, где справедлива формула (1,11). Впервые этот результат был получен в работе ⁵. К более детальному анализу распределения интенсивности, соответствующего функции корреляции (1,9), мы вернемся в § 2.

Рассмотрим теперь другие причины уширения — радиационное затухание и уширение из-за взаимодействия излучающего атома с окружающими частицами. Совместный учет радиационного затухания и эффекта Доплера не вызывает затруднений, так как эти причины уширения статистически независимы. Как известно ¹, в этом случае функция корреляции равна произведению функций корреляций, описывающих каждую из причин уширения в отдельности:

$$\Phi(\tau) = \Phi_1(\tau) \Phi_2(\tau), \quad (1,12)$$

а распределение интенсивности $I(\omega)$ определяется сверткой

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(\omega - \omega') I_2(\omega') d\omega'. \quad (1,13)$$

Здесь $I_1(\omega)$ и $I_2(\omega)$ выражаются через $\Phi_1(\tau)$ и $\Phi_2(\tau)$ с помощью формулы (1,3).

В противоположность этому, как отмечалось ранее, уширение из-за взаимодействия и уширение из-за доплер-эффекта в общем случае статистически зависимы. Уширение из-за взаимодействий связано со сдвигом фазы колебаний атомного осциллятора при столкновениях атома с окружающими частицами. Очевидно, что в одном и том же столкновении может меняться как фаза колебаний, так и скорость поступательного движения атома. Больше того, изменения фазы и скорости могут быть связаны между собой ¹. Сам факт статистической зависимости доплеровского уширения и уширения из-за взаимодействий отмечался и ранее ⁶⁻⁸, однако в конкретных расчетах никогда не учитывался.

Совместный учет уширений из-за взаимодействий и эффекта Доплера приводит к функции корреляции

$$\Phi(\tau) = \langle e^{-i\varphi(\tau)} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau)} \rangle, \quad (1,14)$$

где $\varphi(\tau)$ — сдвиг фазы атомного осциллятора вследствие столкновений за время τ (фаза φ в общем случае комплексна, $\varphi = \eta - i\beta$, причем величиной β определяется затухание колебаний). Обозначим через τ_ϕ характерное время, за которое фаза φ получает приращение порядка π , а через τ_v — время, за которое существенно меняется скорость атома. Роль, которую играет статистическая зависимость двух множителей

в (1,14), существенно зависит от соотношения времен τ_ϕ и τ_v . Если $\tau_\phi \ll \tau_v$, т. е. изменение фазы при столкновениях происходит с гораздо большей эффективностью, нежели изменение скорости, то влиянием столкновений на доплер-эффект вообще можно пренебречь. При этом результирующий контур в достаточно хорошем приближении дается сверткой доплеровского контура (1,1), (1,7) с контуром, описывающим эффект взаимодействия. Примером столкновений такого типа являются столкновения излучающего атома с электронами. Вследствие своей малой массы электроны практически не меняют скорость атома даже при таких столкновениях, когда фаза меняется существенно.

Если же $\tau_\phi \sim \tau_v$ или $\tau_\phi > \tau_v$, то считать первый и второй сомножители в (1,14) статистически независимыми нет никаких оснований. Отметим, что для проявления обсуждавшегося выше эффекта сужения наиболее благоприятен случай $\tau_\phi > \tau_v$, когда это сужение не маскируется уширением из-за взаимодействий. Действительно, в соответствии с (1,9) — (1,11) эффект сужения начинает проявляться при $v_d \sim \frac{1}{\tau_v} > \Delta\omega_D$. Однако наблюдаться этот эффект может лишь в том случае, когда уширение из-за возмущения фазы осциллятора, равное по порядку величины $1/\tau_\phi$, меньше $\Delta\omega_D$, т. е. при $\frac{1}{\tau_\phi} < \frac{1}{\tau_v}$.

Подобное соотношение между временами τ_ϕ и τ_v вполне реально. Часто столкновения тяжелых частиц не сопровождаются тушением, т. е. мнимая часть сдвига фазы $\beta = 0$. Действительная часть сдвига фазы η определяется разностью смещений комбинирующих уровней из-за взаимодействия. В тех случаях, когда смещение этих уровней почти одинаково, η мала. Другим примером такого типа является релеевское рассеяние в газе. Как известно, линия релеевского рассеяния не испытывает уширения из-за взаимодействий, так как это рассеяние определяется вынужденными, а не собственными колебаниями осциллятора.

Таким образом, влияние столкновений на чисто доплеровское уширение представляет интерес для ряда физических задач. Этот вопрос, однако, до сих пор рассматривался лишь в рамках модели броуновского движения³, причем даже это рассмотрение нельзя признать исчерпывающим, особенно в той части, которая касается распределения интенсивности в далеких крыльях линии. Кроме того, для ряда приложений скорее представляет интерес модель сильных столкновений, нежели модель броуновского движения, использованная в⁴.

Весь этот круг вопросов, касающихся влияния столкновений на чисто доплеровское уширение, рассматривается в § 2, 3 настоящей статьи. При этом оказалось чрезвычайно удобным использовать метод кинетического уравнения. Этот метод позволяет рассмотреть единым образом весьма различные модели столкновений и, что самое главное, допускает обобщение на общий случай статистической зависимости уширений из-за эффекта Доплера и взаимодействий. Этому обобщению посвящены § 4—7.

§ 2. ДОПЛЕРОВСКОЕ УШИРЕНИЕ (МОДЕЛЬ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ)

При чисто доплеровском уширении сдвиг фазы $\phi(\tau)$ атомного осциллятора, обусловленный взаимодействием, равен нулю. Поэтому задача вычисления функции корреляции сводится, согласно (1,14), к нахождению среднего значения функции $\exp[-ikr(\tau)]$, где $r(\tau)$ есть смещение атома за время τ .

Введем функцию распределения $f(r, v, t; v_0)$. Этой функцией задается относительное число атомов, которые в момент $t = 0$ находились

в точке $\mathbf{r} = 0$ и имели скорость \mathbf{v}_0 , а за время t сместились на расстояние \mathbf{r} и приобрели скорость \mathbf{v} . Эта функция распределения удовлетворяет обычному кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = S, \quad (2,1)$$

где S — интеграл столкновений. В рассматриваемой задаче решение уравнения (2,1) должно удовлетворять начальным условиям

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0; \mathbf{v}_0) = W(\mathbf{v}_0) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \delta(\mathbf{r}), \quad (2,2)$$

где $W(\mathbf{v}_0)$ — распределение атомов по скоростям при $t = 0$. С помощью функции f выражение (1,4) записывается в виде

$$\Phi(\tau) = \langle e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau)} \rangle = \int d\mathbf{v} d\mathbf{v}_0 \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau; \mathbf{v}_0) d\mathbf{r}. \quad (2,3)$$

В формулах (2,3), (2,2) предполагается, что среда пространственно однородна. Кроме того, предполагается, что действует постоянный источник возбуждения, так что задача стационарна во времени. Концентрация возбужденных атомов, очевидно, определяется мощностью источника возбуждения и затуханием возбужденных состояний. Поскольку в этом разделе пренебрегается тушением из-за столкновений, затухание определяется лишь радиационными переходами. Вследствие статистической независимости радиационного и доплеровского уширений радиационное затухание можно учесть на последнем этапе вычислений.

Изложенный метод может быть распространен на задачи, неоднородные и в пространстве, и во времени. Например, может быть рассмотрена задача об излучении атомов, заключенных в объеме, размеры которого сравнимы с длиной волны λ ⁵. В такого рода задачах необходимо изменить начальное условие (2,2) и ввести соответствующие граничные условия. Ниже, однако, мы ограничимся рассмотрением однородных задач.

В задаче уширения линий спонтанного излучения столкновением возбужденных атомов друг с другом можно пренебречь. Поэтому интеграл столкновений S является линейным интегральным оператором

$$S = - \int [A(\mathbf{v}, \mathbf{v}') f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t; \mathbf{v}_0) - A(\mathbf{v}', \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t; \mathbf{v}_0)] d\mathbf{v}', \quad (2,4)$$

где $A(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ — вероятность *) в единицу времени столкновений, сопровождающихся изменением скорости $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'$. Именно видом функции $A(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ определяется кинетика столкновений и, следовательно, характер спектра $I(\omega)$. Часто интеграл столкновений (2,4) записывается в несколько иной форме. Пусть столкновение характеризуется совокупностью параметров g . Этими параметрами могут быть прицельное расстояние, углы, задающие ориентацию сталкивающихся частиц, скорости и т. п. Обозначим через $P(g) dg$ число столкновений с параметрами g в интервале $g, g + dg$, а через $\Delta\mathbf{v}(g)$ — изменение скорости при этих столкновениях. В этих обозначениях интеграл столкновений S имеет вид

$$S = - \int P(g) [f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t; \mathbf{v}_0) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}(g), t; \mathbf{v}_0)] dg. \quad (2,4')$$

Из формул (2,1) — (2,4) видно, что усреднение по начальным скоростям \mathbf{v}_0 можно выполнить в общем виде до решения уравнения (2,1). Введем новую функцию распределения

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t; \mathbf{v}_0) d\mathbf{v}_0. \quad (2,5)$$

*) Ради краткости ниже будет использоваться термин «вероятность», хотя $A(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ является плотностью вероятности в единицу времени.

Усреднение по \mathbf{v}_0 не меняет вида кинетического уравнения (2,1). Начальные условия, однако, при этом изменятся. Поэтому окончательно получим

$$\Phi(\tau) = \int d\mathbf{v} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r}, \quad (2,6)$$

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} \Phi(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int d\mathbf{v} \int e^{i(\omega\tau - \mathbf{k}\mathbf{r})} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau) d\mathbf{r} d\tau, \quad (2,7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f = - \int [A(\mathbf{v}, \mathbf{v}') f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - A(\mathbf{v}', \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t)] d\mathbf{v}', \quad (2,8)$$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) = W(\mathbf{v}) \delta(\mathbf{r}). \quad (2,9)$$

Из (2,7) видно, что интересующий нас спектр $I(\omega)$ определяется пространственно-временной компонентой Фурье $F(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega)$ функции $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$:

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} dt, \quad (2,10)$$

$$I(\omega) = \operatorname{Re} \int F(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) d\mathbf{v}. \quad (2,11)$$

В ряде случаев функцию $F(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega)$ найти значительно проще, нежели саму функцию распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.

В отсутствие столкновений $S=0$, и из (2,8)–(2,11) можно получить обычное доплеровское распределение. Действительно, из (2,8), (2,9) в этом случае следует

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = W(\mathbf{v}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \quad (2,12)$$

Подставив (2,12) в (2,6) и считая распределение $W(\mathbf{v})$ максвелловским, получим

$$\Phi(\tau) = \int W(\mathbf{v}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}\tau} d\mathbf{v} = e^{-(k\bar{v}\tau)^2 \frac{1}{4}}, \quad (2,13)$$

что совпадает с (1,6).

Рассмотрим теперь случай броуновского движения в рамках модели, детально исследованной в ³.

Как известно, эта модель может быть использована в случае «слабых» столкновений. Примером подобных столкновений может служить рассеяние тяжелого излучающего атома на легких возмущающих частицах. Кроме того, эта модель хорошо описывает столкновения, сопровождающиеся рассеянием на малые углы. В таких случаях для интеграла столкновений (2,4) можно использовать диффузионное приближение ^{3, 9}. При этом уравнение (2,8) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f = \nu_d \operatorname{div}_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}f) + q\Delta_{\mathbf{v}}f. \quad (2,14)$$

Здесь принято, что коэффициенты ν_d , q не зависят от скорости и удовлетворяют соотношению

$$q = \frac{\bar{v}^2}{2} \nu_d, \quad \bar{v}^2 = \frac{2kT}{m}.$$

По своему физическому смыслу ν_d есть эффективная частота столкновений. Этой частотой определяется время $\tau_v = 1/\nu_d$, за которое частица теряет память о своей первоначальной скорости (см. формулу (1,61) в ³):

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}_0 e^{-\nu_d \tau}.$$

Уравнение (2,14) рассматривается в ³. Для дальнейших обобщений, однако, удобно, в отличие от ³, решать уравнение (2,14) методом преобразования Фурье. Введем функцию

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \mathbf{x}\mathbf{v})} d\mathbf{r} d\mathbf{v}. \quad (2,15)$$

В соответствии с (2,14) и (2,9) эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + (\mathbf{v}_d \mathbf{x} - \mathbf{k}) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} = -q \mathbf{x}^2 \Psi \quad (2,16)$$

и начальным условиям

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{x}, 0) = \int W(\mathbf{v}) e^{-i\mathbf{x}\mathbf{v}} d\mathbf{v}. \quad (2,17)$$

Из формул (2,6) и (2,15) следует, что

$$\Phi(\tau) = \Psi(\mathbf{k}, 0, \tau). \quad (2,18)$$

Таким образом, (2,16) по существу является уравнением для функции корреляции. С этим и связано удобство решения кинетического уравнения методом Фурье-преобразования.

Решая уравнение (2,16) при начальных условиях (2,17), находим для максвелловского распределения атомов по скоростям

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} [G \mathbf{x}^2 + 2H \mathbf{x} \mathbf{k} + P \mathbf{k}^2] \right\}, \quad (2,19)$$

где

$$G = \bar{v}^2/2, \quad H = \frac{\bar{v}^2}{2v_d} [1 - e^{-v_d t}], \quad P = \frac{\bar{v}^2}{v_d^2} [v_d t - 1 + e^{-v_d t}]. \quad (2,20)$$

Полагая в соответствии с (2,18) $\mathbf{x}=0$, получим для функции корреляции выражение работы ⁴ (см. формулу (1,9)):

$$\Phi(\tau) = \exp \left[-\frac{\Delta \omega_D^2}{2v_d^2} (v_d \tau - 1 + e^{-v_d \tau}) \right], \quad \Delta \omega_D = k \bar{v}. \quad (2,21)$$

Распределение интенсивности $I(\omega)$ можно найти с помощью (2,7). Для функции корреляции (2,21) оно выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию ¹⁰:

$$I(\omega) = \operatorname{Re} J(\omega); \quad (2,22)$$

$$\begin{aligned} J(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp \left[i\omega \tau - \frac{\Delta \omega_D^2}{2v_d^2} (v_d \tau - 1 + e^{-v_d \tau}) \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{\Delta \omega_D^2}{2v_d^2} - i\omega} \Phi \left[1, 1 + \frac{\Delta \omega_D^2}{2v_d^2} - i \frac{\omega}{v_d}; \frac{\Delta \omega_D^2}{2v_d^2} \right], \end{aligned} \quad (2,23)$$

где

$$\Phi[\alpha, \gamma; z] = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (2,24)$$

Если в (2,21), (2,23) положить $v_d=0$, то снова получим обычное доплеровское распределение интенсивности для максвелловского распределения атомов по скоростям

$$\Phi(\tau) = e^{-(\Delta \omega_D \tau)^2 \frac{1}{4}}, \quad I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta \omega_D} e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta \omega_D}\right)^2}. \quad (2,25)$$

Проследим изменения $I(\omega)$, возникающие при малых частотах столкновений, $v_d \ll \Delta \omega_D$. Для центра линии, $\omega=0$, находим

$$I(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta \omega_D} \left\{ 1 + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{v_d}{\Delta \omega_D} \right\}. \quad (2,26)$$

Для далекого крыла линии асимптотическое разложение для $I(\omega)$ имеет вид

$$I(\omega) = \frac{e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta\omega_D}\right)^2}}{\sqrt{\pi}\Delta\omega_D} \left\{ 1 - \frac{2\pi}{3} \left(\frac{v_d}{\Delta\omega_D} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\Delta\omega_D} \right)^2 \right\} + \frac{v_d \Delta\omega_D^3}{2\pi\omega^4} \left[1 + \frac{5\Delta\omega_D^2}{\omega^2} - \left(\frac{v_d}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (2.27)$$

При достаточно больших ω можно отбросить первый член, содержащий экспоненту, и, оставляя основной член, получим

$$I(\omega) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\omega_D} \frac{v_d \Delta\omega_D^3}{2\sqrt{\pi}\omega^4} \quad (\omega \gg \Delta\omega_D \gg v_d). \quad (2.28)$$

Таким образом, наличие столкновений приводит к увеличению интенсивности линии в центре и на крыльях, причем последние спадают по степенному закону ω^{-4} .

По мере увеличения частоты столкновений интенсивность линии в центре ($\omega=0$) монотонно возрастает (рис. 1, кривая 1). В промежуточном случае $v_d \sim \Delta\omega_D$ и при $v_d \gg \Delta\omega_D$ удобно воспользоваться следующим разложением $I(\omega)$:

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\gamma_d - i\omega} \left[1 + \frac{\gamma_d}{\gamma_d + v_d - i\omega} + \frac{\gamma_d^2}{(\gamma_d + v_d - i\omega)(\gamma_d + 2v_d - i\omega)} + \dots \right] \right\} = \frac{e^{\gamma_d/v_d}}{\pi} \left\{ \frac{\gamma_d}{\gamma_d^2 + \omega^2} - \frac{v_d + \gamma_d}{\omega^2 + (v_d + \gamma_d)^2} \cdot \frac{\gamma_d}{v_d} + \frac{2v_d + \gamma_d}{\omega^2 + (2v_d + \gamma_d)^2} \cdot \frac{1}{2!} \left(\frac{\gamma_d}{v_d} \right)^2 - \dots \right\}. \quad (2.29)$$

На рис. 2 приведены графики $I(\omega)$, рассчитанные для некоторых значений $v_d/\Delta\omega_D$. Отчетливо видно сужение центральной части линии и появление крыльев, превосходящих по интенсивности чисто гауссовы. Пунктирная кривая на рис. 2 соответствует дисперсионной линии с той же шириной, что и кривая 3. Сравнение с кривой 3 показывает, что реальный контур линии обладает менее интенсивными крыльями, чем дисперсионная кривая, что является выражением более быстрого спада интенсивности с частотой (ω^{-4} , а не ω^{-2}).

В предельном случае $v_d \gg \Delta\omega_D$ в разложении (2,29) можно ограничиться первыми двумя членами. Поскольку при этом $\gamma_d = \frac{1}{2} \Delta\omega_D \times$

$\times \frac{\Delta\omega_D}{v_d} \ll \Delta\omega_D \ll v_d$, выражение для $I(\omega)$ принимает вид

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_d v_d^2}{[\omega^2 + \gamma_d^2][\omega^2 + v_d^2]}. \quad (2.30)$$

Вблизи центра линии, $\omega^2 \ll v_d^2$, можно отбросить ω^2 по сравнению с v_d^2 , и (2,30) дает

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_d}{\omega^2 + \gamma_d^2}, \quad (2.31)$$

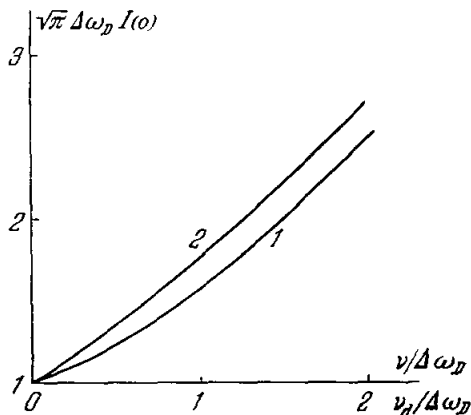


Рис. 1. Зависимость интенсивности в центре линии ($\omega = 0$) от частоты упругих столкновений.

Кривая 1 соответствует модели слабых столкновений (§ 2), кривая 2 — сильных столкновений (§ 3).

т. е. линия имеет простую дисперсионную форму с шириной

$$2\gamma_d = \frac{\Delta\omega_D^2}{v_d}. \quad (2,32)$$

Поскольку длина свободного пробега $l \simeq \frac{v}{v_d}$, то

$$2\gamma_d = \Delta\omega_D \frac{2\pi l}{\lambda}, \quad (2,33)$$

т. е. центральная часть линии в $2\pi l/\lambda$ раз уже чисто доплеровской ширины $\Delta\omega_D$, в полном соответствии с качественным рассмотрением § 1.

При больших частотах $\omega \gg v_d \gg \gamma_d$ выражение (2,30) переходит в асимптотическую формулу (2,28), которая, следовательно, оказывается верной при любых v_d .

При фиксированной частоте ω интенсивность крыла сначала нарастает с частотой столкновений, а затем уменьшается, достигая максимального значения при $v_d \simeq \omega$.

Таким образом, с увеличением v_d все большая и большая часть спектра излучения описывается формулой (2,31), а крыло, описываемое формулой (2,28), переходит в область все больших частот.

Следует отметить, что относительная интенсивность крыльев сравнительно невелика. Тем не менее в целом ряде вопросов (в частности, астрофизических) наличие крыла, пропорционального ω^{-4} , необходимо принимать во внимание, так как абсолютная интенсивность может быть достаточно большой.

Найдепное выше распределение интенсивности в крыльях линии отличается от полученного в работе ⁴ (см. также ¹):

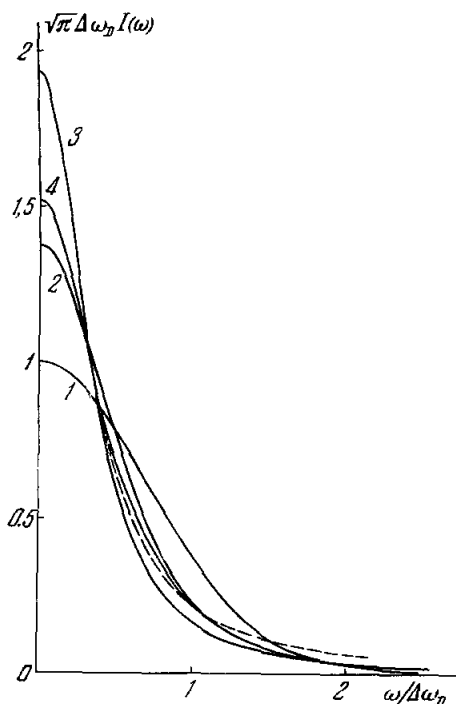
$$I(\omega) \sim \exp \left\{ -\frac{\omega^2}{\Delta\omega_D^2} \right\}, \quad \omega > v_d. \quad (2,34)$$

Соображения, приводимые в ⁴ в пользу (2,34), сводятся к следующему. Поскольку в выражении (2,7) для $I(\omega)$ подынтегральная функция содержит осциллирующий множитель $\exp[i\omega\tau]$, величина $I(\omega)$ будет определяться поведе-

Рис. 2. Контур доплеровски уширенной линии для следующих значений параметров:

Кривая 1 — $v_d = 0$; 2 — $v_d = 0,7\Delta\omega_D$; 3 — $v_d = \sqrt{2}\Delta\omega_D$, кривая 4 построена для модели сильных столкновений $v = 0,7\Delta\omega_D$; пунктирная кривая — дисперсионный контур с шириной, равной ширине кривой 3.

нием функции корреляции при малых τ . Разлагая по степеням τ показатель экспоненты в формуле (2,21) и ограничиваясь первым не исчезающим членом ($\sim \tau^2$), приходим к (3,34). Аналогичная аргументация используется и в ¹¹ при анализе предельных выражений для спектра $I(\omega)$. В то же время выше было показано, что в крыле линии $I(\omega) \sim \omega^{-4}$ независимо от соотношений между v_d и $\Delta\omega_D$. Последний результат фактически вытекает из общих теорем фурье-анализа. Дей-



ствительно, в случае стационарных случайных процессов функция корреляции является функцией от $|\tau|$ (*). С другой стороны, разложение (2,21) в ряд по $|\tau|$ при $\tau \rightarrow 0$ имеет вид

$$\Phi(\tau) = 1 - \frac{\Delta\omega_D^2}{2} \left[\frac{\tau^2}{2!} - v_d \frac{|\tau|^3}{3!} + \dots \right]. \quad (2,35)$$

Из (2,35) видно, что в точке $\tau = 0$ третья производная функции $\Phi(\tau)$ терпит разрыв. Согласно же известной теореме о порядке убывания коэффициентов разложения Фурье¹², компонента Фурье функции $\Phi(\tau)$, т. е. $I(\omega)$, должна убывать не быстрее, чем ω^{-4} . Таким образом, зависимость интенсивности при больших частотах определяется поведением (при $\tau \rightarrow 0$) не функции корреляции, а ее производных. Этот же результат нетрудно получить и непосредственно из (1,2). Если столкновения мгновенны и скорость меняется скачком, то первая производная поля излучения $E(t)$ терпит разрыв. Следовательно, фурье-компонента E_ω убывает не быстрее, чем ω^{-2} , а $I(\omega) \sim E_\omega^2$ убывает не быстрее, чем ω^{-4} .

Приведенные рассуждения показывают, что степенной закон убывания интенсивности в крыльях линии не связан с конкретной моделью, использованной при выводе формулы (2,21), а справедлив во всех случаях, когда столкновения считаются мгновенными. Естественно возникает вопрос, в какой мере предположение о мгновенности столкновений законно при анализе распределения интенсивности в крыльях линии. В действительности столкновения характеризуются конечным временем δt . Это время по порядку величины равно отношению эффективного радиуса взаимодействия и скорости. Как легко показать, конечность δt проявляется в распределении интенсивности на частотах $\omega \gtrsim 1/\delta t$. Таким образом, все вышесказанное о распределении интенсивности в крыльях линии относится к частотам $\omega \ll 1/\delta t$. Распределение интенсивности в области $\omega \gtrsim 1/\delta t$ определяется конкретным механизмом столкновений. Как правило, $\delta t \leq 10^{-13}$ сек, а $1/\delta t \gg v_d, \Delta\omega_D$. Поэтому формулы (2,28), (2,30) для крыла, применимые при $\omega \gg v_d, \Delta\omega_D$, охватывают весьма большой интервал частот.

В настоящей работе рассматривается уширение линий излучения. Интересно отметить, что столкновения вызывают появление крыла со степенным спаданием интенсивности и в доплеровском контуре линии релеевского рассеяния в газе. Это было показано в работе⁷. Однако в этом случае при больших частотах $I(\omega) \sim \omega^{-6}$. Различие в показателе степени связано со спецификой релеевского рассеяния. Поскольку суммарный импульс сталкивающихся частиц сохраняется и в рассеянии принимают участие обе частицы, то терпит разрыв не первая, а вторая производная поля рассеяния этих частиц $E(t)$.

§. 3. ДОПЛЕРОВСКОЕ УШИРЕНИЕ. МОДЕЛЬ СИЛЬНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

В рассмотренной выше модели броуновского движения предполагается, что существенное изменение скорости происходит в результате большого числа столкновений³. Заранее неясно, в какой мере это приближение применимо к случаю сильных столкновений. Вернемся поэтому к общему уравнению (2,8). Запишем первый член интеграла столкновений в (2,8) в виде $-v f$, где v — эффективная частота столкновений

$$v(v) = \int A(v, v') dv'.$$

*) При вычислении $I(\omega)$ это обстоятельство имело отражение в пределах интегрирования по t в формуле (2,7).

Для пространственно-временной фурье-компоненты $F(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega)$ функции распределения (см. (2,10)) можно получить из (2.8) следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = \frac{1}{v + i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)} \int A(\mathbf{v}', \mathbf{v}) F(\mathbf{k}, \mathbf{v}', \omega) d\mathbf{v}' + \frac{W(\mathbf{v})}{v + i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)}. \quad (3,1)$$

Второй член в правой части уравнения (3.1) учитывает начальные условия (2,9).

Для решения уравнения (3,1) необходимо знать конкретный вид ядра $A(\mathbf{v}', \mathbf{v})$. Мы воспользуемся сравнительно простой моделью сильных столкновений, которая позволяет найти спектр в замкнутом виде. Модель основывается на том, что предполагается независимость $A(\mathbf{v}', \mathbf{v})$ от \mathbf{v}' , т. е. $A(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = A(\mathbf{v})$. Другими словами, допускается, что скорость частицы после столкновения \mathbf{v} не зависит от ее скорости до столкновения \mathbf{v}' . В противоположность модели броуновского движения (2,14) эта модель отражает основные качественные особенности рассеяния легких частиц на тяжелых^{9, 13, 14}.

Конкретный вид функции $A(\mathbf{v})$ однозначно определяется условием $S = 0$ при статистическом равновесии. Именно, легко показать, что $A(\mathbf{v})$ должно определяться формулой

$$A(\mathbf{v}) = v W_M(\mathbf{v}), \quad W_M(\mathbf{v}) = \frac{1}{[\sqrt{\pi} v]^3} e^{-v^2/v^2}, \quad (3,2)$$

причем v не зависит от скорости. Такая форма интеграла столкновений означает, что уже после первого столкновения вероятность различных значений скорости атома определяется равновесным распределением и что произвольное начальное распределение $W(\mathbf{v})$ переходит в равновесное за время порядка $1/v$. Следовательно, величина v имеет тот же физический смысл, что и v_d , фигурирующая в § 2, — величинами $1/v$ и $1/v_d$ определяется время, за которое атом полностью забывает о своей начальной скорости.

При таком ядре $A(\mathbf{v})$ уравнения для функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ и ее фурье-компоненты $F(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega)$ принимают вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = -v \left[f - W_M(\mathbf{v}) \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' \right], \quad (3,3)$$

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = \frac{v W_M(\mathbf{v})}{v + i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)} \int F(\mathbf{k}, \mathbf{v}', \omega) d\mathbf{v}' + \frac{W(\mathbf{v})}{v + i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)}. \quad (3,1')$$

Интегрируя правую и левую части уравнения (3,1') по \mathbf{v} и используя (2,11) и (2,22), получим

$$I(\omega) = \frac{\frac{1}{\pi} \int \frac{W(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{v + i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)}}{\left[1 - v \int \frac{W_M(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{v + i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)} \right]}. \quad (3,4)$$

Формула (3,4) может быть интерпретирована следующим образом. Числитель в (3,4) соответствует тому, что излучение осциллятора разбивается на ряд некогерентных пугов длительности $1/v$, а в пределах каждого пуга излучается частота, смещенная на величину доплеровского сдвига $\mathbf{k}\mathbf{v}$. Однако реальные пуги, на которые разбивается излучение вследствие изменения скорости атома при столкновении, нельзя считать некогерентными. Как уже говорилось выше (см. § 1), когерент-

ность нарушается за времена τ_k , соответствующие смещению атома на расстояние $\lambda/2\pi$. Поэтому все излучение за время τ_k , независимо от того, на сколько цугов оно разбивается, способно интерферировать. Роль этой интерференции и отражает знаменатель в (3,4). Интерференцией между соседними цугами можно пренебречь только в том случае, когда длина цуга $l \gg \lambda/2\pi$. Но это означает, что $v < \Delta\omega_D$. При этом условии второй член в знаменателе много меньше единицы, а числитель переходит в обычное доплеровское распределение интенсивности, соответствующее начальному распределению атомов по скоростям. Если же v не мало, но сравнимо с $\Delta\omega_D$, то интерференция различных цугов существенна.

Примем, что $W(v)$ есть равновесная функция распределения. При этом из (3,4) следует

$$I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\omega_D} \operatorname{Re} \left[\frac{w\left(\frac{\omega}{\Delta\omega_D}, \frac{v}{\Delta\omega_D}\right)}{1 - \sqrt{\pi} \frac{v}{\Delta\omega_D} w\left(\frac{\omega}{\Delta\omega_D}, \frac{v}{\Delta\omega_D}\right)} \right], \quad (3,5)$$

где функция

$$w(x, y) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{x + iy - t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2 + i(x+iy)z} dz \quad (3,6)$$

может быть выражена через интеграл вероятности от комплексного аргумента *)

$$w(x, y) = e^{-(x+iy)^2} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{i(x+iy)} e^{-t^2} dt \right\}. \quad (3,7)$$

Из (3,6) и (3,5) легко видеть, что в предельном случае $v \rightarrow 0$ получается гауссово распределение интенсивности (2,25). При $v \neq 0$, но $v \ll \Delta\omega_D$ легко получить разложение $I(\omega)$ по степеням $\frac{v}{\Delta\omega_D}$, $\frac{\omega}{\Delta\omega_D}$. В центре линии, $\omega = 0$, из (3,6) и (3,5) имеем

$$I(0) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\omega_D} \left\{ 1 - \frac{\pi-2}{\sqrt{\pi}} \frac{v}{\Delta\omega_D} \right\}. \quad (3,8)$$

Это выражение отличается от (2,26) лишь численным множителем при члене $v/\Delta\omega_D$, который в формуле (3,8) примерно в два раза больше. Следовательно, при $v = v_d$ сильные столкновения примерно в два раза более эффективны в смысле сужения линии, чем слабые. Можно показать, что при увеличении $v/\Delta\omega_D$ интенсивность в точке $\omega = 0$ монотонно возрастает (кривая 2 на рис. 1).

Поведение интенсивности на крыльях линии можно выяснить, используя асимптотическое разложение интеграла вероятностей при больших значениях модуля аргумента:

$$I(\omega) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\omega_D} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{v\Delta\omega_D^3}{\omega^2 [\omega^2 + v^2] + \frac{1}{4}\Delta\omega_D^4} \quad (\omega^2 + v^2 \gg \Delta\omega_D^2). \quad (3,9)$$

При $\omega \gg v$ в знаменателе (3,9) можно опустить член $\omega^2 v^2$. Учитывая условия применимости формулы (3,9), можно опустить также и член $\frac{1}{4}\Delta\omega_D^4$. После этого (3,9) совпадает с (2,28). Следовательно, модель сильных столкновений дает такое же распределение интенсивности в крыльях линии, как и модель броуновского движения.

*) Детальный анализ свойств этой функции и ее таблицы имеется в ¹⁵.

В предельном случае $v \gg \Delta\omega_D$ формула (3,9) справедлива при любых значениях ω . В области $\omega \ll v$ контур линии имеет дисперсионную форму с шириной $2\gamma_d = \frac{\Delta\omega_D^2}{v}$. Как следует из сказанного выше, при $\omega > v$ дисперсионное распределение сменяется крылом с $I(\omega) \sim \omega^{-4}$.

Таким образом, обе модели, рассмотренные здесь и в § 2, при больших частотах столкновений ($v, v_d \gg \Delta\omega_D$) приводят к одной и той же форме линии во всей области частот. При не слишком больших значениях v, v_d крылья линии также одинаковы. Центральная же часть линии оказывается несколько отличной при одинаковых значениях параметров v и v_d . Это видно из сопоставления формул (2,26) и (3,8), о чем уже говорилось выше. Общий характер различий можно видеть из рис. 2, где кривые 2 и 4 рассчитаны для $v = v_d = 0,7\Delta\omega_D$.

Для того чтобы выяснить, с чем связана близость результатов в моделях сильных и слабых столкновений, сравним первые и вторые моменты для смещения r и скорости v . Из формулы (2,19) видно, что в модели броуновского движения r и v являются нормально распределенными случайными величинами (см., например, ¹¹, § 58) со вторыми моментами, равным

$$\begin{aligned}\langle r^2 \rangle &= 3 \frac{\bar{v}^2}{v_d^2} [v_d t - 1 + e^{-v_d t}], \\ \langle rv \rangle &= 3 \frac{\bar{v}^2}{2v_d} [1 - e^{-v_d t}], \\ \langle v^2 \rangle &= 3 \frac{\bar{v}^2}{2};\end{aligned}\quad (3,10)$$

что касается первых моментов, то мы предположили $\langle r \rangle = r_0 = 0$, а

$$\langle v \rangle = v_0 e^{-v_d t}.\quad (3,10')$$

В модели сильных столкновений величины r, v распределены, вообще говоря не по нормальному закону. Однако, как легко показать, первые и вторые моменты в этом случае также даются выражениями (3,10), (3,10'), если в них v_d заменить на v . Таким образом, две рассмотренные модели соответствуют различным распределениям для r, v , но дают одинаковые средние значения, дисперсии и корреляционный момент этих величин. Поскольку при большом числе столкновений любое распределение стремится к нормальному, то вполне понятно, что при $v \gg \Delta\omega_D = k\bar{v}$, т. е. $l \ll \lambda/2\pi$, обе модели приводят к идентичным результатам. Наоборот, наибольшего различия следует ожидать при $v \ll \Delta\omega_D$, т. е. при сравнительно редких столкновениях, что и имеет место.

Соотношение между моделями сильных и слабых столкновений можно проследить более детально, если задаться таким ядром $A(v, v')$, которое содержит в себе обе эти модели в качестве предельных случаев. Следуя ⁹, положим

$$A(v, v') = a(v' - \gamma v).\quad (3,11)$$

Из обращения в нуль интеграла столкновений при равновесном распределении вытекает явное выражение для $a(v' - \gamma v)$:

$$a(v' - \gamma v) = \frac{\mu}{[\pi(1-\gamma^2)\bar{v}^2]^{3/2}} \exp \left[-\frac{(v' - \gamma v)^2}{(1-\gamma^2)\bar{v}^2} \right].\quad (3,12)$$

Физический смысл параметра γ легко установить, если вычислить среднее значение скорости $\{v'\}$ после столкновения

$$\{v'\} = \frac{1}{\mu} \int v' a(v' - \gamma v) dv' = \gamma v.$$

Следовательно, γ есть отношение средней скорости после столкновения к скорости частицы до столкновения. Таким образом, основное допущение модели (3,12) состоит в том, что это отношение принимается не зависящим от v . Величина константы γ должна быть выбрана в соответствии со спецификой столкновений. Если легкая частица рассеивается на тяжелой, то $\gamma \approx 0$, что соответствует модели, рассмотренной в настоящем параграфе. Для столкновений тяжелой частицы с легкими γ близко

к единице. Как показано в ⁹, при $1 - \gamma \ll 1$ интеграл столкновений соответствует модели броуновского движения с точностью до членов порядка $(1 - \gamma)^2$.

Для модели (3,12) нетрудно вычислить вторые моменты для \mathbf{r} и \mathbf{v} ; они оказываются равными

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}^2 \rangle &= 3 \frac{\bar{v}^2}{\mu(1-\gamma)} \left[t - \frac{1 - e^{-\mu(1-\gamma)t}}{\mu(1-\gamma)} \right], \\ \langle \mathbf{rv} \rangle &= \frac{3}{2} \frac{\bar{v}^2}{\mu(1-\gamma)} [1 - e^{-\mu(1-\gamma)t}], \\ \langle \mathbf{v}^2 \rangle &= \frac{3}{2} \bar{v}^2.\end{aligned}\quad (3,13)$$

Следовательно, дисперсии и корреляционный момент и в этой более общей модели имеют тот же вид, что и ранее (ср. (3,10)). Отличие состоит только в том, что в качестве эффективной частоты столкновений $1/\tau_0$ в (3,13) входит величина $\mu(1-\gamma)$. Именно эта величина эквивалентна параметрам ν и ν_d в модели сильных столкновений ($\gamma = 0$) и модели броуновского движения, т. е. слабых столкновений ($1 - \gamma \ll 1$).

Рассмотрим теперь тот случай, когда одновременно имеют место и сильные, и слабые столкновения. Поскольку мы ограничиваемся учетом одних лишь парных столкновений, интеграл столкновений S можно записать в виде

$$S = \nu_d \left[\operatorname{div}_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}f) + \frac{\bar{v}^2}{2} \Delta_{\mathbf{v}} f \right] - \nu \left[f - W_M(\mathbf{v}) \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' \right]. \quad (3,14)$$

Решение кинетического уравнения с интегралом столкновений (3,14) можно найти с помощью тех же приемов, которые были использованы выше. Окончательный результат для функции $I(\omega)$ имеет вид

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{\nu + \gamma_d - i\omega} \Phi \left[1, 1 + \frac{\nu + \gamma_d - i\omega}{\nu_d}; \frac{\gamma_d}{\nu_d} \right]}{1 - \frac{\nu}{\nu + \gamma_d - i\omega} \Phi \left[1, 1 + \frac{\nu - \gamma_d - i\omega}{\nu_d}; \frac{\gamma_d}{\nu_d} \right]}. \quad (3,15)$$

Это общее выражение содержит как частные предельные случаи (2,23) и (3,4), получающиеся из (3,15) при $\nu \rightarrow 0$ и $\nu_d \rightarrow 0$ соответственно *).

Если $\nu, \nu_d \ll \Delta\omega_D$, то первая не исчезающая поправка к интенсивности в центре линии ($\omega = 0$) имеет вид

$$I(0) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D} \left\{ 1 + \frac{\pi - 2}{\sqrt{\pi}} \frac{\nu}{\Delta\omega_D} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{\nu_d}{\Delta\omega_D} \right\}. \quad (3,16)$$

Из сравнения (3,16) с формулами (2,26) и (3,8) видно, что сильные и слабые столкновения дают аддитивный вклад с теми же коэффициентами, что и в случае их раздельного рассмотрения. В далеком крыле интенсивность определяется суммой $\nu + \nu_d$:

$$I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{(\nu + \nu_d) \Delta\omega_D^3}{\omega^4}. \quad (3,17)$$

То же самое имеет место, если $\nu^2 + \omega^2 \gg \Delta\omega_D^2$, либо $\nu_d \gg \Delta\omega_D$. В первом случае, например, $I(\omega)$ дается формулой

$$I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{(\nu + \nu_d) \Delta\omega_D^3}{\omega^2 [\omega^2 + (\nu + \nu_d)^2] + \Delta\omega_D^4/4}, \quad (3,18)$$

*) Из (3,15) вытекает следующее асимптотическое представление гипергеометрической функции через интеграл вероятности:

$$\frac{1}{\gamma - 1} \Phi(1, \gamma; z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} w \left(\frac{\gamma - 1 - z}{\sqrt{2z}} \right),$$

если $\gamma, z \rightarrow \infty$, причем $(\gamma - 1 - z)/\sqrt{2z}$ остается конечным. Функция w определена формулой (3,6) или (3,7).

аналогичной формуле (3,9). Как и следовало ожидать на основании общих соображений о статистике переменных g и v , в этих предельных случаях существенна суммарная эффективная частота столкновений.

Таким образом, обе модели сильных и слабых столкновений, а также совместное рассмотрение слабых и сильных столкновений приводят к очень близким результатам. Решающим фактором для правильного описания сужения доплеровского контура является выбор характерной величины τ_v . Чем определяется величина τ_v — слабыми или сильными столкновениями, или теми и другими вместе, — это обстоятельство играет второстепенную роль. В случае сильных столкновений τ_v есть время пробега между двумя последующими столкновениями. В случае слабых столкновений за время τ_v атом испытывает большое число столкновений, в результате каждого из которых скорость меняется незначительно (на величину $(1 - \gamma)v$, причем $(1 - \gamma) \ll 1$). В обоих случаях, однако, существенно время, необходимое для значительного изменения скорости.

§ 4. УШИРЕНИЕ ИЗ-ЗА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Прежде чем перейти к обобщению полученных выше результатов на случай уширения из-за взаимодействия и эффекта Доплера, представляется целесообразным сформулировать теорию ударного уширения на языке кинетического уравнения.

Будем считать, что излучающий атом покоится. Тогда в соответствии с (1,14) необходимо вычислить функцию корреляции

$$\Phi(\tau) = \langle e^{-i\varphi(\tau)} \rangle, \quad \varphi = \eta - i\beta. \quad (4,1)$$

Здесь $\varphi(\tau)$ — сдвиг фазы атомного осциллятора, возникающий за время τ вследствие столкновений. Вычисление (4,1) в приближении ударной теории дает следующие результаты^{1,16}:

$$\Phi(\tau) = e^{-(\Gamma + i\Delta)\tau}, \quad (4,2)$$

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(\omega - \Delta)^2 + \Gamma^2}. \quad (4,3)$$

Здесь Γ и Δ — ширина и сдвиг линии, определяемые формулой

$$\Gamma + i\Delta = \int P(g) [1 - e^{-i\psi(g)}] dg, \quad (4,4)$$

где g обозначает совокупность параметров столкновений, $P(g) dg$ — число столкновений сорта g в единицу времени, $\psi(g)$ — сдвиг фазы при столкновении с параметрами g .

Покажем теперь, каким образом формулы (4,2) — (4,4) можно получить, используя метод кинетического уравнения. Будем для простоты исходить из модели одномерного гармонического осциллятора с собственной частотой ω_0 . Обозначим через q, p обобщенные координаты и импульс осциллятора. Функцию корреляции (4,1) можно записать в виде

$$\langle e^{-i\varphi(\tau)} \rangle = \int e^{-i\varphi} f(q, p, \tau) dq dp, \quad (4,5)$$

где $f(q, p, \tau)$ — функция распределения, удовлетворяющая кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} \right\} = S. \quad (4,6)$$

Величиной $f(q, p, t) dq dp$ определяется относительное число осцилляторов, координата и импульс которых в момент времени t заключены

в интервалах $q, q + dq, p, p + dp$; $H(q, p)$ — функция Гамильтона для осциллятора; S — интеграл столкновений.

Подобный подход в теории ударного уширения был использован в работе ¹³, причем в качестве переменных q, p были приняты декартова координата и соответствующий ей импульс. При таком выборе обобщенных координат, однако, возникает трудность, связанная с тем, что в процессе столкновения в общем случае меняются и q , и p . В случае поступательного движения, рассмотренного в предыдущих параграфах, за время столкновения δt ($\delta t \sim 10^{-13}$ сек) координата атома меняется на величину, значительно меньшую длины волны (10^{-8} см). Поэтому в интеграле столкновений можно было ограничиться учетом изменения одной только скорости поступательного движения. При рассмотрении движения атомного осциллятора положение иное. Оптической области спектра соответствуют периоды колебания атомных электронов (10^{-15} сек), значительно меньшие длительности столкновений δt . Поэтому необходимо учитывать как изменение скорости, так и изменение координаты осциллятора. Это обстоятельство приводит к большому усложнению расчетов.

В цитированной выше работе ¹³ задача была упрощена, так как изменением координаты в течение столкновения пренебрегалось. Тем самым полученные в ¹³ результаты могут быть использованы лишь в далекой инфракрасной области и радиодиапазоне, где период колебаний осциллятора становится больше длительности столкновений.

Отмеченные трудности в использовании метода кинетического уравнения связаны с неудачным выбором переменных в ¹³. В данной задаче в качестве переменных естественно выбрать действие J и канонически сопряженный действию угол w . Через эти переменные наиболее просто выражается сдвиг фазы $\psi = \eta - i\beta$. Именно, η есть просто изменение переменной w за время столкновения, $\Delta w = w - w_0$, а β определяет изменение переменной J : $J = J_0 e^{-\beta}$. Записав уравнение (4,6) в переменных J, w и затем совершив в нем, а также в (4,5) переход к переменным η, β , можно получить

$$\Phi(\tau) = \langle e^{-i\varphi(\tau)} \rangle = \int e^{-i\varphi} f(\varphi, \tau) d\varphi, \quad (4,7)$$

где функция распределения $f(\varphi, \tau)$, задающая относительное число осцилляторов с данным значением фазы φ , удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \int P(g) [f(\varphi, t) - f(\varphi - \psi(g), t)] dg. \quad (4,8)$$

Как это всегда делается в теории ударного уширения, в (4,8) принимается, что каждому столкновению сорта g соответствует приращение фазы осциллятора $\psi(g)$, не зависящее от значения фазы φ до столкновения. Поэтому

$$P(g) dg = A(\varphi - \varphi') d\varphi', \quad \Gamma + i\Delta = \int A(\psi) [1 - e^{-i\psi}] d\psi, \quad (4,9)$$

где $A(\varphi - \varphi')$ есть вероятность в единицу времени изменения фазы φ' (фаза до столкновения) на φ (фаза после столкновения). После этого уравнение (4,8) можно также записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \int [A(\varphi' - \varphi) f(\varphi, t) - A(\varphi - \varphi') f(\varphi', t)] d\varphi'. \quad (4,10)$$

Функция $f(\varphi, t)$ должна удовлетворять начальному условию

$$f(\varphi, 0) = \delta(\varphi) \quad (4,11)$$

(ср. с (2,9)).

Умножив (4,8) на $e^{-i\Phi}$, проинтегрировав по Φ и используя (4,4), получим следующее уравнение для функции корреляции:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\Phi \int P(g) [1 - e^{-i\Phi(g)}] dg = -(\Gamma + i\Delta) \Phi. \quad (4,12)$$

Интегрируя (4,12), получим формулу (4,2) для функции корреляции.

Таким образом, метод кинетического уравнения позволяет весьма просто получить общие выражения ударной теории уширения спектральных линий. При этом предположение о механизме столкновения, использованное в ¹³ и ограничивающее область применимости результатов этой работы, оказывается излишним.

§ 5. СОВМЕСТНЫЙ УЧЕТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ДОПЛЕР-ЭФФЕКТА

Введем функцию распределения осцилляторов по скоростям, координатам и фазам $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \Phi, t)$. Эта функция удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = S \quad (5,1)$$

и начальным условиям

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \Phi, 0) = W(\mathbf{v}) \delta(\mathbf{r}) \delta(\Phi). \quad (5,2)$$

С помощью функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \Phi, t)$ общее выражение для функции корреляции (1,14) может быть записано в виде

$$\Phi(\tau) = \langle e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau) - i\Phi(\tau)} \rangle = \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\Phi} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \Phi, \tau) d\mathbf{r} d\mathbf{v} d\Phi. \quad (5,3)$$

Введем обозначение

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int e^{-i\Phi} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \Phi, t) d\Phi \quad (5,4)$$

и выразим функцию корреляции $\Phi(\tau)$ через \tilde{f} :

$$\Phi(\tau) = \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau) d\mathbf{r} d\mathbf{v}. \quad (5,5)$$

Это выражение имеет точно такой же вид, как и (2,6). Отличие состоит лишь в том, что вместо функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau)$ входит $\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau)$ из (5,4).

Начнем с рассмотрения наиболее простой модели, которая, однако, позволяет выяснить все качественные особенности явления. Будем характеризовать столкновение одним параметром — прицельным расстоянием ρ . Пусть при пролете возмущающей частицы на прицельном расстоянии $\rho \leq \rho_0$ фаза осциллятора испытывает одно и то же приращение Φ_0 , а его скорость изменяется таким образом, что распределение по скоростям после столкновения оказывается равновесным независимо от значения скорости до столкновения. Положим также, что при $\rho > \rho_0$ ни фаза, ни скорость осциллятора не меняются.

Интеграл столкновений в (5,1) имеет вид

$$S = - \int P(\rho) d\rho [f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \Phi, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}(\rho), \Phi - \Delta\Phi(\rho), t)], \quad (5,6)$$

где $\Delta\mathbf{v}(\rho)$, $\Delta\Phi(\rho)$ — изменение скорости и приращение фазы в результате столкновения с прицельным расстоянием ρ . Это выражение является естественным обобщением (2,4') и (4,8) на случай одновременного изменения и скорости, и фазы осциллятора при столкновении. В рамках принятой модели $\Delta\mathbf{v}(\rho) = 0$, $\Delta\Phi(\rho) = 0$ при $\rho > \rho_0$, и выражение, заключенное в квадратные скобки в (5,6), обращается в нуль. Поэтому интегрирование в (5,6) распространяется на область $0 \leq \rho \leq \rho_0$. Первый член в (5,6) можно записать в виде $-\mathbf{v}f$, где

$$\mathbf{v} = \int_0^{\rho_0} P(\rho) d\rho$$

есть число столкновений с прицельным расстоянием $\rho \leq \rho_0$. Второй член в формуле (5,6) можно представить в виде

$$v W_M(v) \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', \varphi - \psi_0, t) d\mathbf{v}',$$

поскольку в рассматриваемой модели принято, что каждое столкновение, независимо от значения скорости и прицельного расстояния, приводит к приращению фазы ψ_0 и установлению максвелловского распределения $W_M(v)$ атомов по скоростям. Таким образом, интеграл столкновений (5,6) оказывается равным

$$S = -v \left[f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \varphi, t) - W_M(v) \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', \varphi - \psi_0, t) d\mathbf{v}' \right]. \quad (5,7)$$

Умножив (5,1), (5,2) и (5,7) на $e^{-i\varphi}$ и проинтегрировав по φ , можно получить следующее уравнение для функции \tilde{f} :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \tilde{f} = -v \left[\tilde{f} - W_M(v) \int \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' e^{-i\psi_0} \right],$$

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) = W(v) \delta(\mathbf{r}). \quad (5,8)$$

Уравнение (5,8) отличается от кинетического уравнения (3,3) в модели сильных столкновений лишь множителем $e^{-i\psi_0}$ во втором члене интеграла столкновений. Величиной $e^{-i\psi_0}$ определялось бы уширение вследствие изменения фазы осциллятора при столкновениях, если бы они не сопровождалось изменением скорости. Действительно, в принятой модели ширина Γ и сдвиг Δ из (4,4) связаны с $e^{-i\psi_0}$ соотношением

$$\Gamma + i\Delta = v(1 - e^{-i\psi_0}). \quad (5,9)$$

Поэтому правую часть (5,8) удобно записать в несколько ином виде, добавляя и вычитая член $v \tilde{f} e^{-i\psi_0}$:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \tilde{f} = -(\Gamma + i\Delta) \tilde{f} - v e^{-i\psi_0} \left[\tilde{f} - W_M(v) \int \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' \right]. \quad (5,10)$$

Если за изменения фазы и изменения скорости были бы ответственны различные столкновения, то функция \tilde{f} удовлетворяла бы уравнению

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \tilde{f} = -(\Gamma + i\Delta) \tilde{f} - v \left[\tilde{f} - W_M(v) \int \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' \right], \quad (5,11)$$

где интеграл столкновений S есть сумма двух независимых членов того же вида, что входят в уравнения (3,3) и (4,12).

Из сопоставления уравнений (5,10) и (5,11) видно, что введение скачка фазы, происходящего одновременно с изменением скорости, приводит, с формальной точки зрения, к тому, что частота упругих столкновений v в (5,10) заменяется комплексной величиной $v e^{-i\psi_0}$, причем $|v e^{-i\psi_0}| = v e^{-\beta} < v$. Из (5,9) следует

$$v e^{-i\psi_0} = v - \Gamma - i\Delta.$$

Таким образом, в противоположность (5,11) правую часть в (5,10) не удастся представить в виде двух независимых членов, каждый из которых описывал бы различные эффекты уширения; это является непосредственным отражением статистической зависимости изменения скорости и фазы. Как будет видно из дальнейшего, это обстоятельство может привести не только к количественным, но и к некоторым качественным изменениям в спектре. В частности, контур линии может оказаться асимметричным (см. § 7).

Особенности интеграла столкновений, связанные со статистической зависимостью изменения фазы и скорости, можно выявить и не прибегая к упрощениям, использованным выше. В общем случае интеграл столкновений, в котором учитываются и приращение фазы, и изменение скорости, можно записать в виде

$$S = - \int [A(v, v', \varphi' - \varphi) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \varphi, t) -$$

$$- A(v', v, \varphi - \varphi') f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', \varphi', t)] d\mathbf{v}' d\varphi'. \quad (5,12)$$

Если изменения фазы $\varphi \rightarrow \varphi'$ и скорости $v \rightarrow v'$ происходят во время разных столкновений, то

$$A(v, v', \varphi' - \varphi) = A_1(v, v') \delta(\varphi' - \varphi) + A_2(v, \varphi' - \varphi) \delta(v' - v). \quad (5,13)$$

При этом для функции \tilde{f} нетрудно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + v \nabla \tilde{f} = -(\Gamma + i\Delta) \tilde{f} - \int [A_1(v, v') \tilde{f} - A_1(v', v) \tilde{f}(r, v', t)] dv', \quad (5,14)$$

$$\Gamma + i\Delta = \int A_2(v, \psi) e^{-i\psi} d\psi. \quad (5,15)$$

В правой части уравнения (5,14) содержатся члены, аналогичные тем, которые были при описании чисто доплеровского уширения и уширения из-за взаимодействия (ср. с (3,3) и (4,12), а также с (5,11)).

Если изменения фазы и скорости возникают в одних и тех же столкновениях, то в интеграле столкновений \tilde{S} также можно выделить член $-(\Gamma + i\Delta)\tilde{f}$, аналогично тому, как это было сделано в (5,10). Однако при этом оставшаяся часть \tilde{S} оказывается зависящей не только от изменения скорости, но и от изменения фазы. Именно, для функции \tilde{f} нетрудно получить уравнение

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + v \nabla \tilde{f} = -(\Gamma + i\Delta) \tilde{f} - \int [\tilde{A}(v, v') \tilde{f}(r, v, t) - \tilde{A}(v', v) \tilde{f}(r, v', t)] dv', \quad (5,16)$$

где

$$\tilde{A}(v, v') = \int A(v, v', \psi) e^{-i\psi} d\psi, \quad \Gamma + i\Delta = \int A(v, v', \psi) [1 - e^{-i\psi}] d\psi dv'. \quad (5,17)$$

Уравнения (5,16) и (5,14) имеют одинаковую структуру, однако ядром интегрального члена в (5,16) является комплексная функция $\tilde{A}(v, v')$, вид которой, вообще говоря, зависит от распределения скачков фазы ψ .

В (5,14) входит вещественная вероятность изменения скорости $v \rightarrow v'$, никак не связанная с характером изменения фазы. Как видно из определения функции $\tilde{A}(v, v')$, это отличие аналогично возникновению множителя $e^{-i\psi_0}$ в (5,10). Различие состоит лишь в том, что в простейшей модели, для которой написано уравнение (5,10), сдвиг фазы ψ_0 предполагался одинаковым для всех столкновений, а в (5,16) допускаются произвольные приращения фаз. Вследствие этого в интеграл столкновений входит некоторая усредненная характеристика, а именно, фурье-трансформация от $A(v, v', \psi)$ по ψ .

Выше были рассмотрены два типа столкновений. В столкновениях первого типа меняются одновременно и фаза, и скорость. В столкновениях второго типа меняется или одна фаза, или одна скорость. В тех случаях, когда имеют место столкновения обоих типов, интеграл столкновений S будет линейной комбинацией правых частей уравнений (5,14) и (5,16).

Ввиду очевидности соответствующего обобщения кинетического уравнения мы не будем его выписывать.

§ 6. УШИРЕНИЕ ИЗ-ЗА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ЭФФЕКТА ДОПплера (СТАТИСТИЧЕСКАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ)

Рассмотрим сначала модель сильных столкновений (т. е. для функции $A_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ в уравнении (5,14) примем выражение (3,2)). Тогда уравнение (5,14) принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \tilde{f} = -(\Gamma + i\Delta) \tilde{f} - \mathbf{v} \left\{ \tilde{f} - W_M(\mathbf{v}) \int \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' \right\}. \quad (6,1)$$

Тем же способом, что и в § 3, из (6,1) легко найти распределение интенсивности $I(\omega)$ в спектральной линии:

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\int \frac{W(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\mathbf{v} + \Gamma - i(\omega - \Delta - \mathbf{k}\mathbf{v})}}{1 - \mathbf{v} \int \frac{W_M(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\mathbf{v} + \Gamma - i(\omega - \Delta - \mathbf{k}\mathbf{v})}} \right\}. \quad (6,2)$$

Это выражение отличается от формулы (3,4) (чисто доплеровское уширение) членами $\Gamma + i\Delta$ в резонансных знаменателях. Если Γ и Δ не зависят от скорости излучающего атома, то (6,2) можно представить в виде свертки дисперсионной кривой и функции (3,4), определяющей контур линии при $\Gamma = \Delta = 0$:

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma/\pi d\omega'}{\Gamma^2 + (\omega - \Delta - \omega')^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{\int \frac{W(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\mathbf{v} - i(\omega' - \mathbf{k}\mathbf{v})}}{1 - \mathbf{v} \int \frac{W(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\mathbf{v} - i(\omega' - \mathbf{k}\mathbf{v})}} \right\}. \quad (6,3)$$

Действительно, подынтегральная функция интеграла по ω' имеет единственный полюс в верхней полуплоскости комплексной частоты: $\omega' = \omega - \Delta + i\Gamma$. Используя теорему о вычетах, убеждаемся в тождественности (6,3) и (6,2).

Подчеркнем, что приведенные рассуждения существенно используют независимость Γ и Δ от \mathbf{v} . В противном случае контур линии не выражается в виде свертки. Таким образом, уширения из-за взаимодействия и доплер-эффекта статистически независимы (даже в случае (5,13)) лишь при условии, что Γ и Δ не зависят от скорости излучающего атома. Это легко понять из простых физических соображений. Если $\Gamma = \Gamma(\mathbf{v})$, $\Delta = \Delta(\mathbf{v})$, то приращение фазы при столкновении зависит от того, какую скорость приобрел атом в результате предыдущего упругого столкновения. Из соображений симметрии ясно, что $\Gamma(\mathbf{v})$, $\Delta(\mathbf{v})$ могут быть только четными функциями \mathbf{v} . Поэтому, как это нетрудно показать, контур линии (6,2) будет, вообще говоря, асимметричным.

Рассмотрим более подробно выражение (6,2) при постоянных Γ и Δ . В этом случае контур линии будет симметричным относительно точки $\omega = \Delta$, т. е. величиной Δ определяется сдвиг максимума линии. В дальнейшем будем считать, что частота отсчитывается от этой точки, т. е. положим $\Delta = 0$. Из формулы (6,2) видно, что изменения фазы при столкновениях уменьшают эффект сужения линии, обусловленный упругими столкновениями (см. § 2, 3). Формально это следует из того, что при данной величине суммы $\mathbf{v} + \Gamma$ интегральный член в знаменателе формулы (6,2) уменьшается в $1 + \frac{\Gamma}{v}$ раз по сравнению с (3,4). В предельном случае $\Gamma \gg v$ его можно совсем отбросить, и формула (6,2) переходит в обычную свертку гауссового и дисперсионного распределений:

$$I(\omega) = \frac{\Gamma}{\pi^{3/2} v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-v^2/v'^2} dv'}{\Gamma^2 + (\omega - kv)^2}. \quad (6,4)$$

Для анализа случая $\Gamma \ll \nu$ рассмотрим выражения для $I(\omega)$ при $\omega = 0$, $\nu, \Gamma \ll \Delta\omega_D$, и при $\omega^2 + (\Gamma + \nu)^2 \gg \Delta\omega_D^2$:

$$I(0) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D} [(\pi - 2)\nu - 2\Gamma] \right\} \quad (\nu, \Gamma \ll \Delta\omega_D), \quad (6.5)$$

$$I(\omega) \cong \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{2} \frac{\Delta\omega_D^2 (\nu + \Gamma)}{\omega^2 + (\nu + \Gamma)^2} + \Gamma}{\left[\frac{1}{2} \frac{\Delta\omega_D^2 (\nu + \Gamma)}{\omega^2 + (\nu + \Gamma)^2} + \Gamma \right]^2 + \omega^2} \quad (\omega^2 + (\nu + \Gamma)^2 \gg \Delta\omega_D^2). \quad (6.6)$$

Из формул (6.5), (6.6) легко усмотреть следующее: при малых частотах столкновений, $\nu, \Gamma \ll \Delta\omega_D$, центр линии сохраняет примерно гауссову форму, но несколько сужается, если $\Gamma < \frac{\pi-2}{2} \nu$, и уширяется в противном случае. При $\omega \rightarrow \infty$ интенсивность уменьшается как ω^{-2} независимо от величин $\nu, \Gamma, \Delta\omega_D$. Однако граница области, в которой $I(\omega) \sim \omega^{-2}$, определяется соотношением между этими параметрами. Именно,

$$I(\omega) \cong \frac{\Gamma}{\pi} \frac{1}{\omega^2}, \quad (6.7)$$

если

$$\omega^2 + (\nu + \Gamma)^2 \gg \frac{\nu + \Gamma}{\Gamma} \Delta\omega_D^2. \quad (6.8)$$

Если $\nu \ll \Gamma \ll \Delta\omega_D$, то крыло линии с $I(\omega) \sim \omega^{-2}$ начинается при $\omega \gg \Delta\omega_D$. Если же $\nu \gg \Gamma$, то эта область отодвигается в сторону больших частот, а в интервале частот $\nu \ll \omega \ll \sqrt{\frac{\nu}{\Gamma}} \Delta\omega_D$ распределение интенсивности подчиняется закону

$$I(\omega) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D} \frac{\nu \Delta\omega_D^3}{2 \sqrt{\pi} \omega^4}, \quad (6.9)$$

как и в отсутствие скачков фаз (ср. (2,28)).

При больших частотах столкновений, $\nu + \Gamma \gg \Delta\omega_D$, центральная часть линии имеет дисперсионную форму, аналогичную (2,31), но с иной шириной:

$$I(\omega) \cong \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{2} \frac{\Delta\omega_D^2}{\nu + \Gamma} + \Gamma}{\left[\frac{1}{2} \frac{\Delta\omega_D^2}{\nu + \Gamma} + \Gamma \right]^2 + \omega^2}. \quad (6.10)$$

При $\nu + \Gamma \gg \frac{\Delta\omega_D^2}{\Gamma}$ ширина линии определяется только изменениями фазы при столкновениях. Физически это вполне понятно, ибо написанное условие означает, что за время $1/\Gamma$, соответствующее существенному изменению фазы, атом проходит расстояние значительно меньше $\lambda/2\pi$:

$$\frac{\bar{v}}{\Gamma} \ll \frac{\nu + \Gamma}{\Delta\omega_D} \frac{1}{k} \ll \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (6.11)$$

При этом эффект Доплера, естественно, не оказывает влияния на контур линии.

Если ν и Γ пропорциональны друг другу, то при увеличении Γ член $\Delta\omega_D^2/(\nu + \Gamma)$ уменьшается. Минимальное значение ширины в (6.10) равно 2Γ и достигается при $\Gamma(\Gamma + \nu) = \frac{\Delta\omega_D^2}{2}$.

На рис. 3, 4 приведены результаты численных расчетов контура линии, интенсивности в максимуме и ширины линии для промежуточных значений параметров. Из этих рисунков видно, что при $v \geq \Delta\omega_D$

интенсивность в максимуме линии быстро уменьшается при увеличении Γ , даже если Γ составляет малую долю v (порядка нескольких десятых). Таким образом, уширение из-за взаимодействий

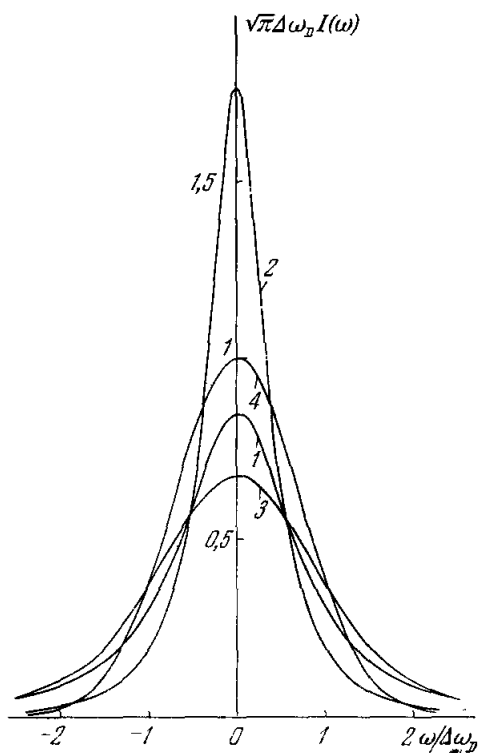


Рис. 3. Контур линии, уширенной из-за взаимодействия и эффекта Доплера (случай статистической независимости).

Кривая 1 — $v = \Delta\omega_D$, $\Gamma = 0,4\Delta\omega_D$; 2 — $v = \Delta\omega_D$, $\Gamma = 0$; 3 — $v = 0$, $\Gamma = 0,4\Delta\omega_D$; 4 — $v = \Gamma = 0$.

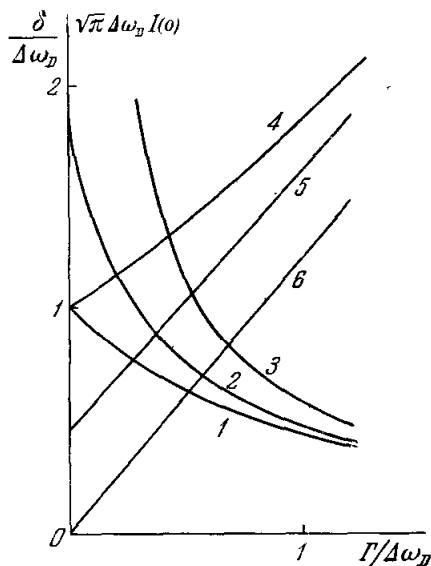


Рис. 4. Зависимость интенсивности в максимуме (кривые 1—3) и ширины δ (4—6) линии от $\Gamma/\Delta\omega_D$ при статистически независимом уширении из-за взаимодействия и эффекта Доплера.

1, 4 — $v = 0$; 2, 5 — $v = \Delta\omega_D$; 3, 6 — $v = \infty$.

весьма эффективно маскирует эффект сужения доплеровского контура. Тем не менее при $v \sim \Gamma$ эффект сужения еще вполне заметен (ср. кривые 1 и 3 на рис. 3).

Очень близкие результаты получаются и в модели слабых столкновений. Здесь уравнение (5,14) для функции \tilde{f} имеет вид

$$-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \tilde{f} = -(\Gamma + i\Delta) \tilde{f} + v_d \operatorname{div}_{\mathbf{v}} (\mathbf{v} \tilde{f}) + q \Delta_{\mathbf{v}} \tilde{f}. \quad (6,12)$$

Решая это уравнение и используя (5,5), находим функцию корреляции (при постоянных Γ , Δ , v_d , q)

$$\Phi(\tau) = \exp \left\{ -(\Gamma + i\Delta) \tau - \frac{\Delta \omega_D^2}{2v_d^2} [\tau v_d - 1 + e^{-v_d \tau}] \right\}. \quad (6,13)$$

Таким образом, $\Phi(\tau)$ является произведением функций корреляций, возникающих при анализе уширения из-за взаимодействия и эффекта Доплера по отдельности (ср. формулы (4,2) и (2,21)). Поскольку чисто доплеровское уширение в моделях сильных и слабых столкновений весьма близко, то близкими будут и результирующие контуры. Вследствие этого мы не будем проводить детального анализа формулы (6,13).

§ 7. УШИРЕНИЕ ИЗ-ЗА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ЭФФЕКТА ДОППЛЕРА (СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ)

Анализ уравнения (5,16) и соответствующего контура линии будет проводиться для ядра $A(v, v', \psi)$ следующего вида:

$$A(v, v', \psi) = A(v, v') B(\psi). \quad (7,1)$$

Это выражение означает, что изменения скорости и фазы возникают в одном и том же столкновении, но величины этих изменений никак не связаны друг с другом. Не ограничивая общности, можно положить, что

$$\int B(\psi) d\psi = 1. \quad (7,2)$$

При этом функция $A(v, v')$ имеет смысл вероятности в единицу времени изменения скорости $v \rightarrow v'$ безотносительно к изменению фазы. Об этой функции мы сделаем те же предположения, что и в § 2, 3. Тогда уравнение (5,16) для \tilde{f} в модели сильных столкновений будет

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + v \nabla \tilde{f} = -(\Gamma + i\Delta) \tilde{f} - v \tilde{B} \left[\tilde{f} - W_M(v) \int \tilde{f}(r, v', t) dv' \right], \quad (7,3)$$

где, согласно (5,17), (7,1) и (7,2),

$$v \tilde{B} = v \int B(\psi) e^{-i\psi} d\psi = v - \Gamma - i\Delta, \quad (7,4)$$

а в модели слабых столкновений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + v \nabla \tilde{f} &= -(\Gamma + i\Delta) \tilde{f} + v_d \tilde{B} \left[\operatorname{div}_v (v \tilde{f}) + \frac{v^2}{2} \Delta_v \tilde{f} \right], \\ v_d \tilde{B} &= v_d \left[1 - \frac{\Gamma + i\Delta}{v} \right]. \end{aligned} \quad (7,5)$$

Таким образом, в обеих моделях влияние фазовых сдвигов при столкновениях сводится к замене эффективной частоты столкновений v, v_d на комплексные величины $v \tilde{B}, v_d \tilde{B}$. В этом отношении (7,3) и (7,5) аналогичны уравнению (5,10).

Рассмотрим сначала модель сильных столкновений. Повторяя выкладки § 3, найдем

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\int \frac{W(v) dv}{v - i(\omega - kv)}}{1 - v \tilde{B} \int \frac{W_M(v) dv}{v - i(\omega - kv)}} \right\}. \quad (7,6)$$

В отличие от формулы (6,2), резонансные знаменатели в выражении (7,6) содержат только v , но не $v + \Gamma$ и Δ . Это вполне понятно, так как вещественная часть резонансных множителей определяется, грубо говоря, средней длительностью пугов волн, на которые излучение осциллятора разбивается столкновениями (см. обсуждение формулы (3,4)). В случае § 6 отдельные пуги возникают как за счет фазовых скачков, так и за счет изменения скорости. В данном же случае изменения фазы и скорости происходят в одном столкновении, так что среднее число пугов в единицу времени равно v , как и в отсутствие скачков фаз. Поэтому резонансные множители в (7,6) такие же, как и в (3,4). Влияние изменений фазы при столкновениях проявлялось в множителе \tilde{B} в (7,6). Напомним, что знаменатель формулы (7,6) отражает роль интерференции пугов, приводящей к сужению контура доплеровски уширенной линии. С другой стороны, из (7,2) и (7,4) нетрудно видеть, что $|\tilde{B}| < 1$. Поэтому появле-

ние \tilde{B} в (7,6) можно интерпретировать как уменьшение когерентности между различными путями.

Предположим, что \tilde{B} — величина вещественная. Это имеет место, например, при резонансном уширении. Тогда простым переопределением параметров формула (7,6) сводится к (6,2). Действительно, согласно (7,4), при $\Delta = 0$ (7,6) совпадает с (6,2) с точностью до замены в (6,2) $v \rightarrow v - \Gamma$.

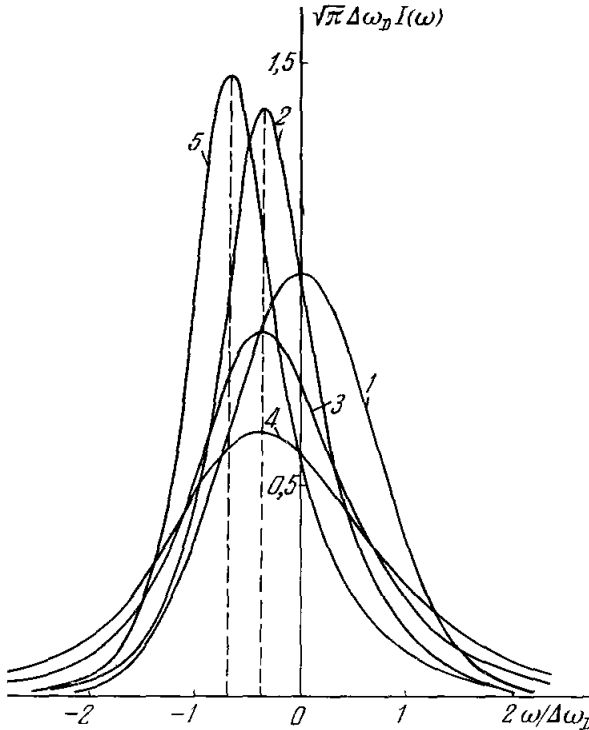


Рис. 5. Контур линии при статистической зависимости уширения из-за взаимодействия и эффекта Доплера.

$$\begin{aligned}
 1 - v = \Gamma = 0; \quad 2 - v = \frac{1}{2} \Delta \omega_D, \quad \Gamma = 0, \quad \Delta = -\frac{1}{4} \Delta \omega_D; \\
 3 - v = \frac{1}{2} \Delta \omega_D, \quad \Gamma = -\Delta = +\frac{1}{4} \Delta \omega_D; \quad 4 - v = \Gamma = \\
 = \frac{1}{2} \Delta \omega_D, \quad \Delta = -\frac{1}{4} \Delta \omega_D; \quad 5 - v = -\Delta = \frac{1}{2} \Delta \omega_D, \quad \Gamma = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, при $\Delta = -v \operatorname{Im} \tilde{B} = 0$ контур линии оказывается качественно одинаковым, независимо от того, возникают ли изменения фазы и скорости одновременно или в разных столкновениях.

Значительно более интересная ситуация возникает, если $\Delta \neq 0$. При этом контур линии оказывается не просто смещенным (как это было для случая одновременных скачков фазы и скорости, см. формулу (6,2)), но и асимметричным. Это хорошо видно из рис. 5, где даны распределения интенсивности для различных значений параметров $v/\Delta \omega_D$, Δ/v и Γ/v .

Из общей теории спектральной интенсивности случайных стационарных процессов известно, что центр тяжести распределения интенсивности $I(\omega)$ связан с производной функции корреляции (см., например, ¹⁶⁾

$$\langle \omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \omega I(\omega) d\omega = i \left(\frac{d\Phi}{d\tau} \right)_{\tau=0}. \quad (7,7)$$

Используя общее выражение (1,14) для $\Phi(\tau)$, получаем

$$\langle \omega \rangle = \left\{ \frac{d}{d\tau} \langle \varphi + \mathbf{k}\mathbf{r} \rangle \right\}_{\tau=0}. \quad (7,8)$$

Поскольку

$$\frac{d}{d\tau} \langle \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \frac{d}{d\tau} \langle \varphi \rangle = \Delta, \quad (7,9)$$

то формула (7,8) дает

$$\langle \omega \rangle = \Delta. \quad (7,10)$$

Следовательно, смещение центра тяжести линии никак не зависит от модели упругого рассеяния и определяется исключительно теми процессами, которые приводят к уширению из-за взаимодействия. С другой стороны, для случая $v \ll \Delta \omega_D$ нетрудно показать, что смещение максимума контура, определяемого формулой (7,6), равно

$$\omega_{\max} = 2\Delta. \quad (7,11)$$

Таким образом, асимметрия линии возникает вследствие того, что максимум сдвигается больше, чем центр тяжести контура.

Покажем, что асимметрия контура линии связана с тем, что распределение случайных величин \mathbf{r} и φ не является нормальным. Предположим противное; тогда по определению нормально распределенных случайных величин имеем ¹¹

$$\Phi(\tau) = \langle \exp[-i(\varphi + \mathbf{k}\mathbf{r})] \rangle = \exp \left\{ -i\langle \varphi \rangle - \frac{1}{2} [\langle (\mathbf{k}\mathbf{r})^2 \rangle + 2\langle \mathbf{k}\mathbf{r}\varphi \rangle + \langle \varphi^2 \rangle] \right\}. \quad (7,12)$$

Очевидно, что в нашей задаче $\langle \mathbf{k}\mathbf{r}\varphi \rangle = 0$, ибо противоположным смещениям атома \mathbf{r} будут соответствовать одинаковые сдвиги фазы. Таким образом, предположение о нормальном законе распределения \mathbf{r} и φ автоматически означает статистическую независимость уширения из-за взаимодействия и эффекта Доплера и, следовательно, симметрию контура линии относительно частоты $\omega = \Delta$. Из сказанного вытекает, что асимметрия линии может возникнуть только из-за отличия статистики \mathbf{r} и φ от нормальной.

Высказанное утверждение находит хорошую иллюстрацию на модели слабых столкновений. Выше было показано (см. формулу (2,19) и обсуждение формул (3,10)), что в этой модели смещение \mathbf{r} является нормально распределенной величиной. Это останется в силе и при учете сдвигов фаз. Однако двумерное распределение вероятности для \mathbf{r} и φ уже не будет нормальным. Это видно из выражения для функции корреляции, которую можно найти из уравнения (7,5) и формулы (5,5):

$$\Phi(\tau) = \exp \left\{ -(\Gamma + i\Delta)\tau - \frac{\Delta \omega_D^2}{2\tilde{v}_d^2} [\tilde{v}_d \tau - 1 + e^{-\tilde{v}_d \tau}] \right\}, \quad (7,13)$$

$$\tilde{v}_d \equiv v_d \tilde{B} = v_d \left[1 - \frac{\Gamma + i\Delta}{v} \right].$$

Из определения (1,3) функции $I(\omega)$ видно, что $I(\omega)$ будет симметричной функцией $\omega - \Delta$, если функция корреляции комплексна только из-за множителя $\exp(-i\Delta\tau)$. Для выражения (7,13) это не выполняется, если $\Delta \neq 0$, так как \tilde{v}_d есть комплексное число. Следовательно, контур линии будет асимметричным, а это означает отличие распределения для \mathbf{r} , φ от нормального.

При большом числе столкновений статистика для \mathbf{r} и ϕ должна стремиться к нормальной. Поэтому контур линии должен становиться симметричным при $\nu \rightarrow \infty$. Полагая $\nu \gg \Delta\omega_D$ и ограничиваясь областью не очень больших частот, $\nu > \omega$, где сосредоточена большая часть энергии, получим для $I(\omega)$ следующее выражение:

$$I(\omega) \cong \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\Delta\omega_D^2}{2\nu} + \Gamma}{\left[\frac{\Delta\omega_D^2}{2\nu} + \Gamma \right]^2 + (\omega - \Lambda)^2}. \quad (7,14)$$

Таким образом, в этом случае линия действительно симметрична.

§ 8. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ТЕОРИИ

Остановимся в заключение на вопросе об экспериментальной проверке развитой выше теории. Что касается эффекта сужения линий вследствие упругих столкновений, то речь должна идти, конечно, не об установлении эффекта самого по себе (он наблюдался во многих работах), а о выяснении его роли в различных условиях, характерных для оптической области спектра, где он никогда не принимался во внимание. Как было показано выше, эффект сужения может проявляться и при $\nu \sim \Gamma$, а в ряде случаев такое положение может иметь место.

Однако наиболее интересным следствием теории нам представляется возникновение асимметрии контура линии при учете статистической зависимости уширения из-за взаимодействия и эффекта Доплера. В некоторых экспериментах наблюдалась асимметрия линии при таких давлениях, когда еще нет оснований ожидать большой интенсивности статистического крыла. Мы имеем в виду работу¹⁷, где установлена асимметрия линии неона $\lambda = 3,3913 \mu$, $5s' \left[\frac{1}{2} \right]_1^0 - 4p' \left[\frac{3}{2} \right]_2$ при давлениях порядка 1 мм рт. ст. Возможно, что обнаруженная в¹⁷ асимметрия линий обусловлена рассмотренным выше эффектом, хотя без дополнительного исследования этого нельзя утверждать с полной определенностью.

Кроме того, согласно сообщениям^{18, 19}, обнаружена асимметричная зависимость мощности газовых квантовых генераторов от частоты. Этот эффект тесно связан с вопросом о симметрии контура спектральных линий, однако его детальное обсуждение требует анализа нелинейных явлений в квантовых генераторах и поэтому не может быть выполнено в рамках настоящей работы, посвященной линейной теории уширения спектральных линий.

Уместно все-таки отметить следующее. Как и в тех случаях, которые обсуждались выше, рассмотрение нелинейных явлений может быть расчленено на две задачи — на получение выражения, которое необходимо усреднить по столкновениям, и на само усреднение. В нелинейной теории нужно усреднять выражение, отличное, разумеется, от функции корреляции (1,14). Однако вся процедура усреднения по столкновениям, изложенная в настоящей статье, без каких-либо принципиальных изменений может быть распространена на широкий класс нелинейных задач. На этой основе в²⁰ выполнены расчеты мощности генерации $P(\omega)$ газовых квантовых генераторов и показано следующее: если предполагать статистическую независимость доплеровского и ударного уширения, то $P(\omega)$ является четной функцией от $\omega - \Lambda$ независимо от модели упругого рассеяния. Если же принимать во внимание статистическую зависимость этих механизмов уширения, то и в модели

сильных столкновений, и в модели слабых столкновений $P(\omega)$ оказывается асимметричной функцией частоты. Таким образом, результаты работ ^{18, 19} можно рассматривать как экспериментальное подтверждение развитой выше концепции в теории уширения спектральных линий.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. С о б е л ь м а н, Введение в теорию атомных спектров, М., Физматгиз, 1963.
2. «Эффект Мёссбауэра», сб. статей, М., ИЛ, 1962; Ф. Л. Ш а п и р о, УФН **72**, 686 (1960).
3. С. Ч а н д р а с е к а р, Стохастические проблемы в физике и астрономии, М., ИЛ, 1947.
4. М. И. П о д г о р е ц к и й, А. В. С т е п а н о в, Препринт ОИЯИ, 1960; ЖЭТФ **40**, 561 (1961).
5. R. D i c k e, Phys. Rev. **89**, 472 (1953); P. W i t t k e, R. H. D i c k e, Phys. Rev. **103**, 620 (1956).
6. И. И. С о б е л ь м а н, УФН **54**, 552 (1954).
7. В. Л. Г и н з б у р г, ДАН СССР **30**, 397 (1941).
8. В. В а й с к о п ф, УФН **13**, 552 (1933).
9. J. K e i l s o n, J. E. S t o z e r, Quart. Appl. Math. **10**, 243 (1952).
10. И. С. Г р а д ш т е й н, И. М. Р ы ж и к, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1962.
11. Л. А. В а й н ш т е й н, В. Д. З у б а к о в, Выделение сигнала на фоне случайных помех, М., «Сов. радио», 1960.
12. И. И. П р и в а л о в, Ряды Фурье, М., Гостехиздат, 1934.
13. E. P. G r o s s, Phys. Rev. **97**, 395 (1955).
14. С. Ч е п м е н, Т. К а у л и н г, Математическая теория неоднородных газов, М., ИЛ, 1961.
15. В. Н. Ф а д д е е в а, Н. М. Т е р е н т ь е в, Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента, М., Гостехиздат, 1954.
16. H. M a r g e n a u, M. L e w i s, Rev. Mod. Phys. **31**, 569 (1959).
17. W. R. B e n n e t t, Jr., S. F. J a c o b s, J. T. L a T o u r e t t e, P. R a b i n o w i t z, Appl. Phys. Letts. **5**, 56 (1964).
18. R. C o r d o v e r, A. J a v a n, J. P a r k s, A. S z ö k e, Доклад на конференции по физическим вопросам квантовой электроники, Сан Хуан, 1965.
19. A. J a v a n, A. S z ö k e, Phys. Rev. Letts. **A16** (5), 12 (1966).
20. С. Г. Р а у т и а н, И. И. С о б е л ь м а н, Доклад на 4-й конференции по квантовой электронике, Феникс (США), 1966.