519.941:538.3

Л. А. Дружкин. Задачи теории поля. Издание Московского института радиоэлектроники и горной электромеханики, М., 1964, 461 с., ц. 2 р. 10 к. Одобрено Ученым советом института в качестве учебного пособия.

Судя по заглавию и оглавлению, можно было бы подумать, что в книге содержатся задачи на применение различных методов решения задач электростатики и задач на нахождение магнитных полей токов. Однако это не так. Излагается исключительно изобретенный автором «параметрический метод» решения задач электростатики (и задач на магнитное поле токов). Этот метод основан на следующем утверждении автора. Линейная плотность заряда λ на тонком проводнике равна

$$\lambda = \frac{\mathrm{const}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial \varphi}\right|},$$

причем $\boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{\varrho}(\varphi)$ — параметрическое уравнение кривой тонкого проводника (стр. 13). Аналогичное утверждение делается и для поверхностной плотности σ на объемных проводниках; по автору, она равна (стр. 51)

$$\sigma = \frac{\mathrm{const}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial \varphi}\right| \left|\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial \psi}\right|},$$

где $\boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{\varrho}(\varphi, \psi)$ — параметрическое уравнение поверхности проводника.

Очевидно, что эти утверждения могли бы иметь смысл только при совершенно определенном выборе параметра φ (или φ и ψ). (Известно, например, что распределение поверхностной плотности заряда на цилиндрических проводниках произвольного сечения дается выражением, аналогичным λ, однако параметр φ определен однозначно—это действительная часть совершенно определенной функции комплексной переменной $x+iy$.)

Автор книги не дает никаких однозначных указаний для выбора параметров φ, ψ. Поэтому метод автора лишен всякого смысла. Можно убедиться, что все полученные в книге решения задач (за исключением тривиальных, например поля круглого кольца) неверны.

Вся трудность задачи электростатики заключается в определении неизвестного заранее такого распределения заряда, которое обеспечивает постоянство потенциала на проводниках. Когда вместо физического условия постоянства потенциала вводится произвольный принцип (не говоря уже о его неоднозначности в формулировке Дружкина) распределения заряда, то вся суть задачи и вся ее трудность уже выброшены.

Приходится удивляться, как столь безграмотная книга увидела свет, да еще с грифом учебного пособия!

М. А. Леонтович

Книгу Л. А. Дружкина «Задачи теории поля» выпустил Московский институт радиоэлектроники и горной электромеханики. По поводу этой книги можно сделать несколько существенных замечаний.

1. Автор пытается найти распределение зарядов на проводниках без помощи уравнений Максвелла, так сказать, непосредственно. Ход его рассуждений можно проследить на таком примере. Тонкий проводник имеет форму плоской замкнутой кривой, уравнение которой $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\varphi)$, где φ — некоторый параметр; будем считать, что обход кривой соответствует изменению φ в интервале $(0, 2\pi)$. Пусть λ — линейная плотность зарядов. Тогда полный заряд проводника

$$e=\oint \lambda\, dl, \tag{1}$$

где dl — элемент дуги контура. Так как длина дуги зависит от параметра φ, то $dl=\frac{dl}{d\varphi}\,d\varphi$, поэтому

$$e=\int\limits_0^{2\pi} \lambda(\varphi)\,\frac{dl}{d\varphi}\,d\varphi. \tag{2}$$

Как пишет автор на стр. 13, «чтобы это выражение тождественно удовлетворялось, величина $\lambda(\varphi)$ должна быть равна

$$\lambda=\frac{e}{2\pi}\,\frac{1}{\left|\frac{dl}{d\varphi}\right|}\text{»}. \tag{3}$$

Найденную функцию $\lambda(\varphi)$ автор считает решением задачи. Однако этот метод не дает однозначного результата, так как, добавляя к $\lambda(\varphi)$ величину $\boldsymbol{\tau}\nabla\psi$, где ψ — произвольная скалярная функция, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной к контуру, мы не нарушим условия (1) или (2).

Неоднозначность результата происходит еще и потому, что уравнение одной и той же кривой можно представить в разном виде. Например, если начало координат находится в центре тонкого круглого кольца радиусом R и φ — полярный угол, то $\frac{dl}{d\varphi}=R$, $\lambda=\text{const}=\lambda_0=e/2\pi R$.

Если же начало координат сместить влево от центра на величину $a<R$ и θ — новый полярный угол, то уравнение контура в полярных координатах (r, θ) примет вид

$$r=a\cos\theta+\sqrt{R^2-a^2\sin^2\theta}.$$

При этом согласно (3)

$$\lambda(\theta)=\frac{e}{2\pi R}\left(1-\frac{a}{r}\cos\theta\right)\neq\lambda_0.$$

2. Автору, видимо, неизвестно, что распределение зарядов на тонких проводниках существенно зависит от закона изменения сечения проводника по длине. Поэтому

на стр. 21 приводится формула (5.16), согласно которой погонная плотность зарядов на тонком прямом проводящем стержне длиною $2a$ равна

$$\lambda = \frac{e}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad (4)$$

где x — *расстояние от середины*, e — *полный заряд; известно, однако, что если проводник представляет собой тонкий эллипсоид вращения, то* $\lambda = \mathrm{const} = e/2a$.

3. Проверкой правильности полученных автором решений было бы обращение в нуль на поверхности проводника тангенциальной составляющей электрического поля:

$$E_\tau = 0, \qquad (5)$$

о котором упоминается на стр. 46. Однако в случае, например, цилиндрических проводников автор заменяет (5) другим условием:

$$\oint \lambda \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0, \qquad (6)$$

где интеграл берется по направляющей цилиндра. *Ясно, что это более слабое условие является необходимым, но не достаточным.*

4. Рассматривая распределение заряда на поверхности цилиндра, направляющая которого задана уравнением

$$x = a\sqrt{2\cos 2\varphi}\cos\varphi, \qquad y = b\sqrt{2\cos 2\varphi}\sin\varphi, \qquad (7)$$

автор получает на стр. 25 формулу для плотности зарядов, которую можно привести к виду

$$\sigma = \mathrm{const}\left[\frac{\cos 2\varphi}{(a\sin 3\varphi)^2 + (b\cos 3\varphi)^2}\right]^{1/2}. \qquad (8)$$

Используя логарифмический потенциал, нетрудно показать, что при таком распределении зарядов условие постоянства потенциала на всей заряженной поверхности при $a \neq b$ выполняться не будет. В частности, если $a - b \ll a$, то потенциал точек поверхности (7) равен

$$V(\varphi) = C_1 + C_2\left[(\pi\cos 2\varphi - 1)\cos 4\varphi + 2\sin 4\varphi\cdot\cos 2\varphi\cdot\ln\left(\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}\right)\right]\varepsilon + O(\varepsilon)^2, \qquad (9)$$

где $\varepsilon = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \ll 1$, а C_1, C_2 не зависят от φ.

5. На стр. 33—34 говорится, что на поверхности бесконечного проводящего цилиндра распределение зарядов будет таким же, как и на тонком замкнутом контуре, имеющем форму направляющей цилиндра. Известно, однако, что потенциалы взаимодействия двух точечных зарядов ($\sim 1/r$) и двух тонких заряженных нитей ($\sim \ln r$) существенно отличаются, поэтому перенесение результатов с одного случая на другой без специальной проверки незаконно.

6. Начиная со стр. 53, рассматривается распределение зарядов на поверхности проводящего тора. Уравнение поверхности имеет вид [см. (18.25)]

$$\begin{gathered} x = (R + r\cos\psi)\cos\varphi, \quad y = (R + r\cos\psi)\sin\varphi, \\ z = r\sin\psi, \end{gathered} \qquad (10)$$

где R — радиус осевой окружности, r — радиус сечения. Углы φ, ψ меняются в пределах $(0, 2\pi)$. Из (10) следует, что значению $\psi = 0$, $\psi = 2\pi$ соответствуют точки, наиболее удаленные от оси симметрии, значению $\psi = \pi$ — точки, наиболее близкие к оси. Элемент поверхности $dS = r(R + r\cos\psi)\, d\psi\, d\varphi$. Если σ — плотность зарядов, то полный заряд

$$e = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi\, \sigma r (R + r\cos\psi). \qquad (11)$$

Поступая так же, как при выводе (3), автор считает, что распределение зарядов должно иметь вид [см. формулу (18.40) на стр. 55]

$$\sigma = \frac{e}{4\pi^2}\frac{1}{r(R + r\cos\psi)}. \qquad (12)$$

Неоднозначность результата видна из того, что, добавляя к σ нормальную составляющую вектора $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — произвольный вектор, мы не нарушим условия (11). Из (12) следует, что на внутренней части поверхности ($\psi = \pi$) плотность будет больше, чем снаружи ($\psi = 0, \psi = 2\pi$). Это, однако, противоречит известному факту, что заряды в основном будут снаружи в силу взаимного отталкивания. Для того чтобы спасти положение. автор поступает очень просто: в формуле (12) он совершенно произвольно, в противоречии с (10), изменяет направление отсчета угла ψ, так что значению $\psi = 0$ и $\psi = 2\pi$ соответствуют внутренние, т. е. ближайшие к оси симметрии, точки поверхности, а значению $\psi = \pi$ — наружные точки.

С помощью аналогичных действий автор получил формулу для емкости уеди ненного тора

$$C = \frac{R}{\ln\left(\frac{R+r}{r}\right)}, \tag{13}$$

которую он считает точной. Отсюда емкость тонкого кругового кольца ($R \gg r$) получается равной

$$C = \frac{R}{\ln(R/r)}. \tag{14}$$

На стр. 409 автор сравнивает эту формулу с известным результатом (см., например: Л. Д. Ландау, и Е. М Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1959, стр. 21)

$$C = \frac{\pi R}{\ln(8R/r)}. \tag{15}$$

В пределе, когда $R/r \to \infty$, формула Л. А. Дружкина (14) дает результат, который в три с лишним раза меньше того, что следует из (15). Несмотря на это, автор отдает предпочтение своей формуле (13), не понимая, видимо, того, что асимптотическая формула (15) становится точной, когда отношение $R/r \to \infty$. Задача о торе относится к классическим, поэтому, предлагая для нее свое решение, автору следовало бы сравнить свои результаты с тем, что есть в известных книгах по математической физике (см., например, Ф. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. 2, М., ИЛ, 1960, стр. 284).

7. Тем же способом автор рассмотрел тор с эллиптическим сечением, частным случаем которого является проводящий цилиндр радиусом R и высотою $2a$ с бесконечно тонкими стенками. На стр. 68 приводится формула (20.1)

$$\sigma = \frac{e}{4\pi^2 R\sqrt{a^2 - z^2}}, \tag{16}$$

где координата z отсчитывается от середины высоты цилиндра. Отсюда следует, что плотность зарядов на обеих сторонах поверхности одинакова. Однако при увеличении длины цилиндра по крайней мере вблизи его середины плотность зарядов на внутренней стороне должна стать значительно меньше плотности зарядов снаружи, что никак не следует из формулы (16).

8. Для плотности зарядов на прямоугольной пластинке размером $2a \times 2b$ автор дает на стр. 114 формулу (34.12)

$$\sigma = \frac{e}{2\pi^2}\,\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{b^2 - y^2}}. \tag{17}$$

Начало координат выбрано в центре пластинки, а оси параллельны краям. Нетрудно доказать, что при таком распределении зарядов потенциал в центре ограничен, а в вершинах — бесконечно велик Поэтому формула (17) неверна.

9 На стр. 143 используется соотношение: если S — эквипотенциальная поверхность, R_1 и R_2 — ее главные радиусы кривизны, E — напряженность поля, то

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial n} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{18}$$

На поверхности проводника $E = 4\pi\sigma$, причем плотность зарядов определена только на поверхности проводника, тогда как E определена во всем пространстве. Забывая об этом, автор «преобразует» соотношение (18) к виду

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)dn = -\frac{dR_1}{R_1} - \frac{dR_2}{R_2}; \tag{19}$$

последний переход понять невозможно. Отсюда «получается» формула (46.9), приведенная на стр. 144:

$$\sigma = \frac{\text{const}}{R_1 R_2}. \tag{20}$$

Если верить этой формуле, то в тех точках поверхности, где по крайней мере один из радиусов кривизны равен бесконечности (например, на цилиндре), плотность зарядов должна обращаться в нуль.

10. На стр. 343 автор приводит формулы для напряженности магнитного поля полубесконечного соленоида, неправильность которых видна уже из того, что для точек внутри соленоида на больших расстояниях от его конца поле получается равным нулю. Ошибка в рассуждениях (на стр. 339) состоит в том, что, складывая поля от токов, расположенных на одной образующей, автор не учитывает изменения угла между током и радиусом-вектором, проведенным в точку наблюдения. По этой причине ошибочен и расчет поля в зазоре между двумя длинными соленоидами на стр. 343.

11. Пусть функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t)$ задает временно́й закон движения точки по некоторой пространственной кривой. Скорость этого движения $\mathbf{v}\,(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Для «независимого вывода» формулы (3) автору потребовалось вычислить $\operatorname{div} \mathbf{v}$; однако он, видимо, не знал, что операция div имеет смысл лишь по отношению к векторному полю. Заменив $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ на $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ (как будто координаты точки x, y, z, кроме времени, зависят еще от каких-то переменных), автор на стр. 10 пишет:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial z} = 0.$$

Комментарии здесь излишни.

Мы перечислили почти все из того, что можно было бы назвать оригинальными результатами автора, если бы среди них нашелся хоть один правильный!

Р. М. Зайдель