

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

537.71

**ЕСТЕСТВЕННАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ В КЛАССИЧЕСКОЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ**

Настоящая заметка имеет целью указать на систему единиц, которую можно назвать естественной для классической электродинамики. Основной смысл такой системы заключается во введении масштабов при численных оценках различных электронных явлений и упрощении написания формул.

Естественные, или натуральные, единицы были первоначально введены Хартри при решении задач теории атома, исходя из нерелятивистской квантовой механики (уравнение Шредингера)¹. Атомная система основана на постоянной Планка \hbar , заряде e , точнее e^2 , и массе электрона m . Масштабом длины является боровский радиус атома

$$r_B = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,53 \cdot 10^{-8} \text{ см},$$

а масштабом энергии служит ридберг — атомная единица энергии:

$$\frac{me^4}{\hbar^2} = 27 \text{ эв.}$$

Скорость света c вообще не входит в эту систему, так как она нерелятивистская, и масштабом скорости служит атомная единица скорости e^2/\hbar , в 137 раз меньшая c .

Позднее, в квантовой релятивистской электродинамике предпочтение было отдано несколько другой системе, основанной на \hbar , c и m . Тогда для квадрата заряда — константы взаимодействия — $e^2 = 1/137$ получилось значение, связывающее \hbar , e и c через постоянную тонкой структуры:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

(точнее, 1/137,0390).

Существует, однако, третья возможность для естественной системы, за основу которой следует взять e^2 , c и m .

Взаимное соответствие этих единиц хорошо видно из таблицы.

Таким образом, в предполагаемой системе масштабом длины служит классический радиус электрона r_0 , а единицей энергии — энергия покоя электрона mc^2 . Единицей массы во всех трех системах служит масса электрона.

В предлагаемой системе единиц постоянная Планка оказывается равной 137. Этим, по-существу, подчеркивается соображение о том, что классическая теория излучения делается уже неприменимой для расстояний меньше 137 r_0 (см. книгу², § 37).

Из способа образования единиц видно, что в рамках указанных теорий больше единиц образовать нельзя, поскольку в выражение для числа α входят только три размерные величины.

Новая система более всего удобна для решения задач классической электродинамики и электроники. Чтобы это продемонстрировать, целесообразно образовать единицы для напряжения, тока и мощности.

Для единицы напряжения естественно положить

$$V_0 = \frac{mc^2}{e} = 511000 \text{ в},$$

Теория	Постоянные величины					
	квант действия $\hbar=1,05 \times 10^{-37}$ эрг·сек	квад- рат заря- да e^2	скорость света $c=3 \times 10^10$ см/сек	масса элект- рона $m=9,1 \times 10^{-31}$ г	единица длины см	единица энергии эв
Квантовая механика ато- ма	1	1	137	1	Боровский радиус атома $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} =$ $= 137^2 r_0 =$ $= 0,53 \cdot 10^{-8}$ см	Атомная единица — ради- берг $\frac{mc^2}{137^2} =$ $= \frac{me^4}{\hbar^2} = 27$ эв
Квантовая электродина- мика	1	$\frac{1}{137}$	1	1	Комптонов- ская длина $\Lambda =$ $= 137 r_0 =$ $= \frac{\hbar}{mc} =$ $= 3,8 \cdot 10^{-11}$ см	Энергия по- коя электрона $mc^2 = 511$ кэв
Классиче- ская электро- динамика и электроника	137	1	1	1	Классиче- ский радиус электрона $r_0 =$ $= \frac{e^2}{mc^2} =$ $= 2,8 \cdot 10^{-13}$ см	Энергия по- коя электрона $mc^2 = 511$ кэв

соответствующее энергии покоя электрона. В качестве единицы тока возникает выражение

$$I_0 = \frac{mc^3}{e} = 17000 \text{ а},$$

известное как ток «погонного электрона».

Эту величину легко представить себе как ток цепочки из электронов, движущихся со скоростью света, с шагом r_0 .

Очевидно, что отношение $V_0/I_0 = \frac{1}{c} = R_0 = 30$ ом соответствует волновому сопротивлению, обратному скорости света.

Наконец, для мощности получается выражение

$$P_0 = \frac{m^2 c^5}{e^2} = 511000 \text{ э} \times 17000 \text{ а} = 8700 \text{ Мвт}.$$

Это значение мощности характерно для релятивистских электронных устройств и возникает в теории электронных ускорителей. Например, в расчете микротрона P_0 является масштабом реактивной мощности в резонаторе этого ускорителя³. Оценки предельного тока микротрона также выражаются через приведенные единицы тока⁴. Ток I_0 определяет и масштаб релятивистского самотягивающегося пучка, рассмотренного Будкером⁵.

Элементарный расчет показывает, что при прохождении мощности P_0 через площадь

$$S = \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2}$$

электромагнитное поле будет сообщать электронам энергию $\sim mc^2$. При распространении этой мощности по волноводу квадратичные силы от электромагнитного поля, пропорциональные $\text{grad } E^2$, будут одного порядка с силами eE , действующими на частичку, движущуюся синхронно с волной, и пропорциональными \sqrt{P} ⁶. Подчеркнем, что значение P_0 и эффекты, к нему производимые, не зависят от частоты поля, пока не следует учитывать явлений, связанных с квантовым характером взаимодействий.

Ускорители работают в сантиметровом диапазоне волн, и для них это заведомо справедливо. Справедливо это и для оптических частот. Современные лазеры — квантовые генераторы, — работающие при модуляции добротности в режиме гигантских импульсов, развиваются мощности уже порядка P_0 . Поэтому в фокусе от таких генераторов когерентного света или в системе стоячих волн с такой плотностью энергии следует ожидать асинхронного ускорения электронов до больших скоростей. При таком механизме ускорения зависимость энергии U электронов будет пропорциональна мощности P лазера:

$$\frac{U}{mc^2} \sim \frac{P}{P_0},$$

в отличие от $U \sim \sqrt{P}$ при синхронном взаимодействии. Таким образом, в оптике P_0 указывает область явлений, которую можно было бы назвать релятивистской оптикой.

Для электронных устройств, таких, как ускорители, кластроны, магнетроны, P_0 является физическим масштабом релятивистской электроники больших мощностей. Однако при соответствующем вычислении параметров устройства, например ЛБВ, вовсе не обязательно рассматривать случай больших напряжений и токов, так как указанные величины появляются и в выражениях, описывающих перелятивистские устройства.

Применим, к примеру, эти единицы для формулы плоского диода

$$i = \frac{1}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{V^{3/2}}{l^2},$$

связывающей плотность тока i с напряжением V и межэлектродным расстоянием l . Используя выражения для V_0 и I_0 , получим

$$i = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \frac{I_0}{l^2} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{3/2} - \frac{I_0}{36\pi l^2} \beta^3,$$

где

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2V}{V_0}},$$

и v — скорость электрона. Формулы для плазмы также упрощаются. Например, для диэлектрической проницаемости получаем

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = 1 - \frac{N\lambda_2 r_0}{\pi},$$

и плазменная длина волны соответственно равна

$$\lambda_{\text{пл}} = \sqrt{\frac{\pi}{Nr_0}},$$

где N — число электронов в единице объема.

Поучительно преобразовать выражения для интенсивности излучающего заряда, выражая мощность через P_0 .

Выражение для мощности излучения заряда e , движущегося по окружности радиуса R и со скоростью v , приобретает вид

$$P = \frac{2e^2 v^4}{3c^3 R^2} \left(\frac{V^2}{1 - \frac{c^2}{v^2}} \right)^2 = \frac{2\beta^4 r_0^2}{3(1 - \beta^2)^2 R^2} P_0.$$

Аналогично получим выражение для интенсивности в спектральном интервале $d\omega$ или $d\lambda$ излучения Черенкова — Вавилова:

$$P = \frac{e^2}{c} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2} \right) \omega d\omega = \frac{r_0^2}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \frac{d\lambda}{\lambda} P_0.$$

Таким образом, мы видим, что от применения предлагаемой системы формулы существенно упрощаются, из них исчезают громоздкие сочетания из e , m и c ; ряд соотношений, число которых легко умножить, получают более прозрачный вид.

Естественно, что новых физических результатов при этом никаких не возникает. Однако достигнутое упрощение удобно как при оценках тех или иных явлений, так и при объяснении и преподавании электродинамики.

По-существу, указанная процедура преобразования единиц аналогична идее о рационализации единиц в электродинамике. При так называемой рационализации достигается перемещение геометрического множителя 4π из одной части формул в другую, где его присутствие считается более удобным. Число a , будучи внутренней характеристикой квантовой теории и электродинамики, входит таким же образом в вычисления, и мы можем, в зависимости от рода задач, распорядиться его местонахождением так, чтобы оно менее всего мешало. Занятно отметить, что $a \sim 4\pi^{-2}$.

Поэтому для задач классической электродинамики, теории излучения и электроники, в которых не рассматриваются квантовые явления, предлагаемая система и обладает своими преимуществами. Можно все же предположить, что более фундаментальный характер имеет система единиц квантовой электродинамики. В ней участвуют все величины h , e и c , а само число a является тем малым параметром, по которому строятся решения. Это предположение стало бы более обоснованным, если бы развитие теории указало путь расчета a , и было бы поэтому ясно, в чем именно заключается нарушение электродинамики, приводящее к появлению квантовых явлений.

Всякому обучающему и обучающемуся теории электричества хорошо известны споры и трудности, которые возникают из-за веры в преимущества одной системы единиц перед другой. Единственное, чего нельзя забывать, — это соответствие системы единиц потребностям всей физики, а следовательно, и современной техники в целом и тому, что система должна удовлетворять наиболее фундаментальным известным нам законам природы. Поэтому нужно всецело согласиться с критикой интернациональной системы единиц (СИ) М. А. Леоновичем, указавшим, что принятые в ней единицы индукции и поля не сообразуются с принципом релятивистской инвариантности и что одна и та же величина, магнитное поле в вакууме, может выражаться в разных единицах⁷. С другой стороны, следует также подчеркнуть, что трудно рассчитывать на введение единой системы, так как приведенные выше рассуждения показывают, что и среди натуральных систем также нет желаемого единообразия и выбор систем определяется кругом рассматриваемых задач.

В заключение автор хотел бы выразить свою благодарность проф. Х. Альвену. Обсуждение рассмотренных здесь вопросов на семинаре в Институте плазменной и электронной физики в Стокгольме (Швеция) и побудило автора написать эту статью.

С. П. Капица

Институт физических проблем
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. H a r t g e e, Proc. Cambridge Phil. Soc. 24, 89 (1928).
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, 4-е изд., М.—Л., Физматгиз, 1962.
3. С. П. Капица, В. Н. Мелехин, И. Г. Круткова, Г. П. Прудковский, ЖЭТФ 41, 376 (1961).
4. С. П. Капица, Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ 42, 821 (1962).
5. Г. И. Будкер, Атомная энергия 1, 9 (1956).
6. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ 35, 299 (1958).
7. М. А. Леонович, Вестн. АН СССР, № 6, 89 (1964).