1966 г. Январь *Том 88, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ АМПЛИТУДАМИ РАССЕЯНИЯ В ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А. А. Логунов, Нгуен Ван Хьеу, И. Т. Тодоров

ВВЕДЕНИЕ

Большинство работ, посвященных исследованию асимптотических свойств матричных элементов при высоких энергиях, исходят либо из полуфеноменологических предположений либо опираются на некоторые гипотезы частного характера. Так, например, работы И. Я. Померанчука и др. [1] исходят из предположения (выдвинутого на основе анализа экспериментальных данных), что дифференциальные сечения процессов рассеяния с перезарядкой исчезают при больших энергиях. В ряде работ развивается гипотеза о дифракционном характере упругих процессов при высоких энергиях (см., например, [2]). Другие [3-4] исходят из предположения о существовании новых свойств симметрии в сильных взаимодействиях, которые должны проявляться лишь при энергиях намного превышающих массы частиц. Наконец, сюда нужно отнести работы, исходящие из гипотезы, что асимптотическое поведение амплитуды рассеяния при высоких энергиях определяется одним полюсом Редже [5-7]. Значение каждой из этих работ зависит от результатов ее опытной проверки. Экспериментальное подтверждение предсказаний, содержащихся в работе такого типа, имело бы большую ценность, так как это означало бы открытие новой закономерности в сильных взаимодействиях. Наоборот, экспериментальное опровержение этих работ означало бы неправильность лишь специальных гипотез или теоретических спекуляций и не затрагивало бы основных принципов квантовой теории. Так как в последнее время наблюдается скорее вторая тенденция — тенденция к опровержению (в особенности это касается работ по «однополюсной реджистике»), то, естественно, возрастает интерес к таким утверждениям, которые выводятся только из общих принципов локальной теории поля. Получению строгих асимптотических соотношений между амплитудами рассеяния и, следовательно, соотношений между сечениями, поляризациями и т. д. при высоких энергиях посвящена основная часть настоящей статьи. Мы уделяем особое внимание обсуждению гипотез, на основе которых можно доказать полученные соотношения.

Напомним, что среди принципов релятивистской локальной квантовой теории поля основными являются [8, 9]:

1. Инвариантность относительно неоднородной группы Лоренца.

2. Условие микропричинности, которое в форме Н. Н. Боголюбова гласит:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_1(x)}\left[\frac{\delta S}{\delta\varphi_2(y)}S^+\right]=0 \qquad \text{для } x \lessgtr y,$$

причем $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ могут быть одним и тем же полем или различными полями.

3. Условие спектральности, согласно которому существует полная система физических состояний с положительной энергией.

4. Условие унитарности

$$SS^+ = 1.$$

Если положим $S = 1 + iR$, то это условие можно переписать на основании постулата 3 в форме

$$\frac{1}{i}\langle f | R - R^+ | i\rangle = \sum_n \langle f | R | n\rangle \langle n | R^+ | i\rangle,$$

где $\sum_n$ обозначает суммирование по полной системе промежуточных состояний.

Наряду с этими принципами имеется также некоторое требование математического характера.

5. Требуется, чтобы элементы матрицы рассеяния были обобщенными функциями умеренного роста (т. е. обобщенными функциями на классе S) [8-11]. Это условие приводит к тому, что фурье-образы запаздывающих амплитуд будут полиномиально ограниченными функциями. Поскольку это требование существенно при изучении асимптотических свойств амплитуды рассеяния, мы обсудим в § 1 связь между этим предположением и принципами микропричинности и унитарности.

Если к общим принципам локальной теории поля добавить предположение, что амплитуды процессов рассеяния не осциллируют, а имеют определенный (степенно́й или логарифмический) рост, когда энергия стремится к бесконечности при фиксированной передаче импульса, то можно получить ряд экспериментально проверяемых соотношений между амплитудами различных процессов. Первое соотношение такого рода — равенство полных сечений взаимодействия частиц и античастиц при высоких энергиях — было получено И. Я. Померанчуком [12]. Различные обобщения и уточнения теоремы Померанчука были даны в работах [13-18]. В работе Сугавары и Каназавы [16] для доказательства теоремы Померанчука была переоткрыта и доказана вновь следующая теорема: если функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости и растет на бесконечности не скорее некоторой степени z^n, то она не может стремиться вдоль положительной и отрицательной полуосей к разным пределам. Мейман [18] обратил внимание на то, что это утверждение является, по существу, известной классической теоремой Фрагмена — Линделёфа в теории аналитических функций [19]. На этой основе Сугавара и др. [16, 17] и Мейман [18] дали доказательство теоремы Померанчука при довольно общих условиях.

В работах [20-23] на основе теоремы Фрагмена — Линделёфа устанавливается ряд асимптотических соотношений не только между полными, но и между дифференциальными сечениями различных процессов, а также между различными поляризационными эффектами. Настоящая статья посвящена главным образом систематическому изложению результатов этих работ, хотя некоторые результаты публикуются здесь впервые. Наряду с этими результатами дается краткий обзор работ Гринберга и Лоу [24], Фруассара [25], Мартэна и др. [26], Меймана [18] и Намбу и Сугавары [17] по примыкающим сюда вопросам, работы [27] по изучению асимптотических соотношений при наличии высших симметрий сильных взаимодействий и работы [28], в которой рассматриваются процессы с рождением частиц. Асимптотическое равенство дифференциальных сечений рассеяния частицы и античастицы также было доказано в работе Ван-Хова [29].

§ 1. ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РОСТА СЕЧЕНИЯ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

1. Ограничения на рост амплитуды, накладываемые условием микропричинности

Как было указано во введении, в существующей локальной теории поля предполагается, что элементы матрицы рассеяния являются обобщенными функциями умеренного роста. Отсюда следует, что амплитуда рассеяния полиномиально ограничена в импульсном пространстве, в том числе и при комплексных импульсах в области аналитичности амплитуды. Предположение об умеренном росте необходимо для вывода обычных дисперсионных соотношений с конечным числом вычитаний. Возникают естественные вопросы: в какой мере это требование независимо от остальных постулатов локальной теории, и в первую очередь от постулата микропричинности? Какими свойствами должна обладать амплитуда, удовлетворяющая всем постулатам релятивистской квантовой теории, за исключением требования об умеренном росте? Эти вопросы представляют интерес с точки зрения изучения неперенормируемой теории (см., например, [30]). Поведение отдельных членов ряда теории возмущений в неперенормируемой теории показывает, что амплитуда либо неаналитична относительно константы связи, либо растет быстрее любого полинома, когда энергия стремится к бесконечности, хотя бы на некоторой последовательности точек в комплексной плоскости E.

Нетрудно заметить, что условие микропричинности несовместно с произвольным ростом амплитуды в плоскости энергии E [31]. Это обстоятельство можно проще всего проиллюстрировать на одномерной модели, в которой амплитуда зависит от одного только времени (соответственно — энергии), а зависимость от пространственных координат (пространственных составляющих импульса) опущена. В этой модели условие микропричинности имеет вид

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iEt} T(E)\, dE = 0 \qquad \text{при } t < 0. \tag{1,1}$$

Условие (1,1) эквивалентно условию аналитичности и полиномиальной ограниченности амплитуды $T(E)$ в верхней полуплоскости энергии (т. е. при $\operatorname{Im} E > 0$), если предположить, что $F(t)$ является обобщенной функцией умеренного роста (т. е. $F \in S^*$, где S — пространство быстро убывающих, бесконечно дифференцируемых функций Шварца) [11]. Если сохранить предположение об аналитичности амплитуды $T(E)$ в верхней полуплоскости, но допустить, что в каком-либо направлении в верхней полуплоскости E функция $T(E)$ растет быстрее некоторой экспоненты (даже если она при этом остается ограниченной на вещественной оси), то условие микропричинности (1,1) будет нарушаться. В этом можно убедиться на примере функций $\exp(-iaE)$ или $\exp(-a^2E^2)$. В работе [32] были приведены некоторые аргументы более общего характера в пользу утверждения, что фурье-образ причинной амплитуды должен расти медленнее любой экспоненты в комплексной плоскости энергии:

$$|T(s, t)| \leqslant A e^{\varepsilon |s|} \qquad \text{при } \frac{\operatorname{Im} s}{|s|} \geqslant \delta > 0, \tag{1,2}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число. В настоящей работе мы примем неравенство (1,2) в качестве составной части постулата микропричинности.

В п. 2 будет показано, что при некоторых дополнительных (достаточно естественных) предположениях и с использованием условия унитарности из (1,2) следует полиномиальная ограниченность амплитуды. Таким образом, указывается место возможной микропричинной теории.

2. Условие полиномиальной ограниченности причинной амплитуды упругого рассеяния

Допустим, что сечение некоторого процесса полиномиально ограничено по энергии в физической области (на самом деле наблюдаемые дифференциальные сечения даже вовсе не возрастают с энергией). Тогда амплитуда $T(s, t)$ полиномиально ограничена во всей комплексной плоскости s.

Действительно, если аналитическая в верхней полуплоскости функция $T(s, t)/(s+i)^n$ ограничена на вещественной оси, то согласно теореме Фрагмена—Линделёфа она либо ограничена во всей верхней полуплоскости s, либо возрастает быстрее некоторой экспоненты на какой-то последовательности точек, стремящейся к бесконечности. Вторая возможность, однако, отпадает, так как она противоречит условию (1,2). Таким образом, доказана полиномиальная ограниченность амплитуды $T(s, t)$ в верхней полуплоскости s. Полиномиальная ограниченность функции $T(s, t)$ в нижней полуплоскости следует отсюда, если принять во внимание условие вещественности амплитуды

$$T(s^*, t) = T(s, t)^*.$$

Покажем теперь, что предположение о полиномиальной ограниченности дифференциальных сечений в физической области может быть получено из более слабой и весьма естественной гипотезы. Для этого нужно применить условие унитарности амплитуды рассеяния и аналитические свойства по передаче импульса t (или по косинусу угла рассеяния $z = \cos\theta$). Напомним, что на основе общих принципов локальной теории поля и с помощью интегрального представления Иоста — Лемана — Дайсона [33, 34]. Леман [35] показал, что амплитуда πN-рассеяния, рассматриваемая как функция передачи импульса при фиксированной энергии, аналитична в некотором эллипсе (эллипс Лемана). При получении интегрального представления Иоста — Лемана — Дайсона было использовано предположение о полиномиальной ограниченности амплитуды рассеяния. Однако впоследствии в работах [36, 37] аналитичность амплитуд рассеяния по передаче импульса была доказана без каких-либо предположений о степени роста.

Предположим, что когда t пробегает эллипс Лемана и $s \to +\infty$ (вдоль вещественной оси), мы имеем

$$|T(s, t)| < Be^{as^N} \tag{1,3}$$

при некотором выборе положительных чисел B, a и N. Аргументы, которые проводились для обоснования неравенства (1,2), делают весьма вероятным предположение, что и при комплексных t в эллипсе Лемана фурье-образ запаздывающей амплитуды удовлетворяет даже более сильному неравенству (1,2). Поэтому условие (1,3), если оно вообще может считаться гипотезой, накладывает весьма слабые ограничения на амплитуду рассеяния. Покажем, что из этой гипотезы и условия унитарности следует полиномиальная ограниченность амплитуды на вещественной оси s при физических t. Отсюда в силу теоремы Фрагмена—Линделёфа и неравенства (1,2) следует полиномиальная ограниченность амплитуды при всех комплексных s.

Мы будем следовать рассуждениям Гринберга и Лоу [24]. Малый эллипс Лемана, в котором аналитична амплитуда упругого рассеяния частицы с массой m на частице с массой M (например, πN-рассеяния), при $s > (M+m)^2$ имеет центр в точке $t_0 = -2k^2$, где k—импульс в системе центра масс,

$$k^2 = \frac{[s-(M+m)^2]\,[s-(M-m)^2]}{4s}, \tag{1,4}$$

и полуоси x_0 и $\sqrt{x_0+4k^2}$, где

$$x_0 = 2k\left[k^2 + \frac{(m_1^2-m^2)(m_2^2-M^2)}{s-(m_1-m_2)^2}\right]^{1/2}. \tag{1,5}$$

Здесь m_1 и m_2—массы самых низших многочастичных состояний с квантовыми числами частиц с массой m и M соответственно (в случае πN-рассеяния $m_1 = 3m$, $m_2 = M+m$). Применим теорему Коши для некоторого меньшего эллипса D с малой полуосью

$$c = k\left[\frac{(m_1^2-m^2)(m_2^2-M^2)}{s-(m_1-m_2)^2}\right]^{1/2} \tag{1,6}$$

и с большой полуосью $\sqrt{c^2+4k^2}$ (чтобы не предполагать непрерывность амплитуды на границе эллипса Лемана). Пользуясь формулой

$$\frac{1}{z'-z} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,P_l(z)\,Q_l(z'),$$

мы получаем

$$T(s,t) = \frac{1}{\pi^2}\frac{s}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,a_l(s)\,P_l\left(1+\frac{t}{2k^2}\right), \tag{1,7}$$

где

$$a_l(s) = \frac{1}{2\pi^3 i}\oint_D T(s,t')\,Q_l\left(1+\frac{t'}{2k^2}\right)dt'. \tag{1,8}$$

В силу (1,8) и предположения (1,3)

$$|a_l(s)| \leqslant \frac{1}{\pi^{5/2}}\frac{A}{\sqrt{l}}\frac{e^{as^N}}{[c+\sqrt{1+c^2}]^l}, \tag{1,9}$$

где c задается формулой (1,6). С другой стороны, из условия унитарности и положительной определенности метрики в пространстве векторов состояний следует, что

$$|a_l(s)| \leqslant 1. \tag{1,10}$$

Фиксируя s, выберем l_0 как наибольшее целое число, не превосходящее величины

$$\frac{as^N}{\ln[c+\sqrt{1+c^2}]}.$$

Для первых l_0 слагаемых в сумме (1,7) мы воспользуемся оценкой (1,10), а для остальных—неравенством (1,9). В результате получим

$$|T(s,0)| \leqslant \text{const}\cdot s^{N+2} \tag{1,11}$$

и аналогичное условие для $t < 0$. Таким образом, полиномиальная ограниченность амплитуды доказана.

Полученные результаты могут быть резюмированы следующим образом. Если в микропричинной релятивистской теории имеет место неравенство (1,3), когда t принадлежит эллипсу Лемана, то амплитуда рассеяния полиномиально ограничена в комплексной плоскости энергии s (при $s \to \infty$).

3. Оценки на рост сечений

Теперь предположим, что при всех t в эллипсе Лемана амплитуда рассеяния полиномиально ограничена, т. е. в правой части неравенства (1,3) можно заменить экспоненту $\exp(as^N)$ степенью s^N. Тогда вместо (1,11) мы получим оценки Гринберга и Лоу [24]:

$$|T(s, 0)| \leqslant \text{const} \cdot s^2 (\ln s)^2,$$
$$|T(s, t)| \leqslant \text{const} \cdot \frac{s^{7/4} (\ln s)^{3/2}}{|t|^{1/4}}, \qquad t < 0, \tag{1,12}$$

и, следовательно,

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \leqslant \text{const} \cdot s (\ln s)^2,$$
$$\frac{d\sigma(s, t)}{dt} \leqslant \text{const} \cdot \frac{s^{3/2} (\ln s)^3}{|t|^{1/2}}, \qquad t < 0. \tag{1,13}$$

Если предполагать, например, что полуоси эллипса в плоскости t, в котором амплитуда аналитична, не меняются с ростом энергии (это имеет место в случае представления Мандельстама), то вместо (1,12) и (1,13) мы имеем результаты Фруассара [25]

$$|T(s, 0)| \leqslant \text{const} \cdot s (\ln s)^2,$$
$$|T(s, t)| \leqslant \text{const} \cdot \frac{s (\ln s)^{3/2}}{|t|^{1/4}}, \qquad t < 0, \tag{1,14}$$

и, следовательно,

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \leqslant \text{const} \cdot (\ln s)^2,$$
$$\frac{d\sigma(s, t)}{dt} \leqslant \text{const} \cdot \frac{(\ln s)^3}{|t|^{1/2}}, \qquad t < 0. \tag{1,15}$$

При этих же предположениях Киношита, Лёффель и Мартэн [26] получили другую оценку для ограничения на рост амплитуды при отличной от нуля передаче импульса:

$$|T(s, t)| \leqslant \text{const} \cdot \frac{s (\ln s)^{3/2}}{|t|}, \qquad t < 0, \tag{1,16}$$

и

$$\frac{d\sigma(s, t)}{dt} \leqslant \text{const} \cdot \frac{(\ln s)^3}{t^2}, \qquad t < 0. \tag{1,17}$$

Если рассматривать асимптотику амплитуды при фиксированном значении угла (а не при фиксированной передаче импульса), то оценка (1,16) сильнее, чем (1,14).

§ 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ

1. Теорема Фрагмена—Линделёфа и асимптотическое равенство дифференциальных сечений

Рассмотрим перекрестные процессы рассеяния скалярных частиц

$$a_1 + b_1 \to a_2 + b_2 \tag{I}$$

и

$$\bar{a}_2 + b_1 \to \bar{a}_1 + b_2. \tag{II}$$

Пусть q_1 и p_1 — импульсы частиц a_i и b_i в начальном состоянии каждого процесса, а q_2 и p_2 — те же величины в конечных состояниях. Массы частиц a_i и b_i обозначим через m_i и M_i соответственно. Для первого процесса $q_i^2 = -m_i^2$, $p_i^2 = -M_i^2$, а для второго $-q_1^2 = -m_2^2$, $q_2^2 = -m_1^2$, $p_i^2 = -M_i^2$. Положим $s = -(p_1 + q_1)^2$, $u = -(p_1 - q_2)^2$, $t = -(p_1 - p_2)^2$. Матричные элементы процессов (I) и (II) имеют вид

$$\langle f \mid R \mid i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \frac{1}{\sqrt{16 p_1^0 q_1^0 p_2^0 q_2^0}} T^J (s, t), \tag{2,1}$$

а дифференциальные сечения равны

$$\frac{d\sigma^J (s, t)}{dt} = \frac{1}{64\pi s k_J^2} \mid T^J (s, t) \mid^2, \tag{2,2}$$

где $J = \mathrm{I}, \mathrm{II}$ обозначает одну из рассматриваемых реакций, а k_J — величина трехмерного импульса в начальном состоянии процесса J в системе центра масс. Амплитуды процессов (I) и (II) при вещественных s и t связаны соотношением перекрестной симметрии

$$T^{\mathrm{I}} (u, t) = T^{\mathrm{II}} (s, t)^*, \qquad s + t + u = M_1^2 + M_2^2 - m_1^2 + m_2^2 \tag{2,3}$$

(звездочка означает комплексное сопряжение). Соотношение (2,3) получается из равенства

$$T^{\mathrm{I}} (u, t) = T^{\mathrm{II}} (s, t), \tag{2,4}$$

справедливого при комплексных s и u из области аналитичности функций T^J, при помощи предельного перехода.

Предположим, что массы m_i и M_i и взаимодействия частиц a_i и b_i таковы, что из принципов локальной теории следует аналитичность амплитуды $T^J (s, t)$ при фиксированном t в комплексной плоскости s с разрезами вдоль вещественной оси. Кроме разрезов, амплитуда T^J имеет, как правило, конечное число полюсов на вещественной оси s. При исследовании асимптотики амплитуды при $s \to \infty$ удобно заранее вычесть из амплитуды ее полюсные члены, которые имеют известную асимптотику $1/s$, и изучать асимптотику функции, ограниченной в конечных точках вещественной оси. В дальнейшем через T^J будем обозначать амплитуду после вычитания полюсных членов.

Для того чтобы охватить класс амплитуд с достаточно общим асимптотическим поведением, введем одно вспомогательное понятие. Назовем функцию $\varphi (s, t)$ допустимой, если при фиксированном t (из некоторого интервала) функция $1/\varphi (s, t)$ аналитична и меньше любой экспоненты $\exp (\varepsilon \mid s \mid)$, $\varepsilon > 0$, при $s \to \infty$ в верхней полуплоскости, непрерывна на вещественной оси и, кроме того, если

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\varphi (s, t)}{\varphi (-s, t)} = e^{-i\pi\alpha(t)}, \tag{2,5}$$

где $\alpha (t)$ — произвольная вещественная функция. Примером допустимой функции может служить функция вида

$$\varphi (s, t) = (s + i)^{\alpha(t)} [\ln (s + i)]^{\beta(t)} [\ln \ln (s + i)]^{\gamma(t)},$$

где $\alpha (t)$, $\beta (t)$ и $\gamma (t)$ вещественны.

Справедлива следующая теорема:

Теорема I. Пусть для некоторой допустимой функции существуют конечные пределы:

$$V^{\mathrm{I}} (t) = \lim_{s \to \infty} \frac{T^{\mathrm{I}} (s, t)}{\varphi (s, t)}, \qquad V^{\mathrm{II}} (t) = \lim_{s \to \infty} \frac{T^{\mathrm{II}} (s, t)^*}{\varphi (-s, t)}. \tag{2,6}$$

Тогда в локальной теории эти пределы равны друг другу:

$$V^{\mathrm{I}}(t) = V^{\mathrm{II}}(t). \tag{2,7}$$

Отсюда следует также асимптотическое равенство дифференциальных сечений процессов (I) и (II):

$$\lim_{s\to\infty} \frac{d\sigma^{\mathrm{I}}(s,\, t)/dt}{d\sigma^{\mathrm{II}}(s,\, t)/dt} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{d\sigma^{\mathrm{I}}(s,\, t)}{dt} \sim \frac{d\sigma^{\mathrm{II}}(s,\, t)}{dt}. \tag{2,8}$$

Доказательство. В силу сделанных предположений относительно амплитуды $T^J(s, t)$ функция

$$V(s,\, t) = \frac{T^{\mathrm{I}}(s,\, t)}{\varphi(s,\, t)} \tag{2,9}$$

аналитична и не превосходит $e^{\varepsilon|s|}$ в верхней полуплоскости s и ограничена на вещественной оси. Кроме того, из (2,3) и (2,6) следует, что

$$\lim_{s\to+\infty} V(s,\, t) = V^{\mathrm{I}}(t), \qquad \lim_{s\to-\infty} V(s,\, t) = V^{\mathrm{II}}(t). \tag{2,10}$$

Поэтому к функции $V(s, t)$ можно применить следующую теорему Фрагмена—Линделёфа [19].

Теорема II. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция от $t = re^{i\theta}$, регулярная в области D, заключенной между двумя полупрямыми L_1 и L_2, которые образуют угол π/τ с вершиной в начале координат, и ограниченная на этих полупрямых ($|f(z)| \leqslant C$ вдоль L_1 и L_2). Тогда имеет место следующая альтернатива: либо $|f(z)| \leqslant C$ во всех точках области D, либо существует такая последовательность $z_n \to \infty$, что

$$\max_{|z_n|=r_n} |f(z_n)| \geqslant e^{\nu r_n^{\tau}}, \qquad \nu > 0. \tag{2,11}$$

Если же функция $f(z)$ меньше по модулю любой экспоненты $e^{\varepsilon r^{\tau}}$ в угле D, то должна осуществляться первая возможность, т. е. $f(z)$ ограничена во всей области D постоянной.

Пусть функция $w = f(z)$ регулярна и ограничена в угле D. Обозначим через E_i ($i = 1, 2$) множество предельных значений w при $z \to \infty$ вдоль полупрямой L_i. Тогда либо множества E_1 и E_2 имеют общую точку, либо одно из них окружает другое, отделяя его от окружности $|w| = C$. В частности, если существуют конечные пределы a^{I} и a^{II}, когда $z \to \infty$ вдоль L_1 и L_2, то $a^{\mathrm{I}} = a^{\mathrm{II}} = a$, и тогда $f(z) \to a$ при $z \to \infty$ равномерно в D.

Функция $V(s, t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы II (в нашем случае D есть верхняя полуплоскость, $\tau = 1$). Так как эта функция полиномиально ограничена, ее предельные значения при $s \to \pm\infty$ должны совпадать. Таким образом, равенство (2,7) доказано.

Если отброшенные полюсные члены убывают при $s \to \infty$ быстрее, чем сама функция $T^J(s, t)$, то при $s \to \infty$ формула (2,1) остается справедливой и для этой части амплитуды, и мы получаем асимптотическое равенство (2,8) между дифференциальными сечениями. Если же амплитуда ведет себя на бесконечности как $1/s$, то непосредственный учет полюсных членов показывает, что равенство (2,8) остается в силе и в этом случае. Теорема I доказана.

2. Случай упругого рассеяния. Равенство полных сечений

В частном случае упругого рассеяния (в этом случае $m_1 = m_2 = m$, $M_1 = M_2 = M$) следствие теоремы I об асимптотическом равенстве дифференциальных сечений может быть получено при более слабых

требованиях. Предположим, что существуют лишь пределы

$$\lim_{s\to\infty} \frac{64\pi s k^2}{|\varphi(s,t)|^2} \frac{d\sigma^J(s,t)}{dt} = [a^J(t)]^2, \qquad J = \mathrm{I},\ \mathrm{II}, \tag{2,12}$$

и что мнимая часть отношения $T^J(s,t)/\varphi(s,t)$ неотрицательна при фиксированном t и $s \to \infty$. Это второе предположение является естественным, так как в разложении мнимой части $V(s,t)$ по полиномам Лежандра

$$\operatorname{Im} V(s,t) = 4\pi \frac{\sqrt{s}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\operatorname{Im} a_l(s)}{\varphi(s,t)} P_l(z) \tag{2,13}$$

в силу условия унитарности и условия положительной определенности метрики в пространстве векторов состояний все коэффициенты $\operatorname{Im} a_l(s)/\varphi(s,t)$ неотрицательны. Кроме того, при $s \to \infty$ $z \to 1$, а $P(1) = 1$, так что каждый член ряда (2,13) при достаточно больших s становится неотрицательным. Отсюда, однако, не следует, что $\operatorname{Im} V(s,t)$ становится неотрицательной при больших энергиях, поскольку ряд (2,13) сходится неравномерно относительно s, и неотрицательность $\operatorname{Im} V(s,t)$ при $s \to \infty$ является гипотетической.

Отметим также, что это предположение о неотрицательности $\operatorname{Im} V(s,t)$ эквивалентно предположению, что при $s \to \infty$ в ряде (2,13) дают главный вклад парциальные волны с моментом $l \sim ck$. Действительно, для больших k и $l \sim ck$ мы имеем

$$P_l\left(1 + \frac{t}{2k^2}\right) \approx J_0\left(\frac{l}{k}\sqrt{-t}\right).$$

Первый корень $J_0(x)$ равен $x_0 = 2{,}4048$. В области $\frac{l}{k}\sqrt{-t}\, x_0$ функция $J_0\left(\frac{l}{k}\sqrt{-t}\right)$ и, следовательно, $P_l(z)$ положительны. Если мы предположим, что основной вклад в (2,13) дают члены с $l \sim ck$, то при $|t| < x_0^2/c^2$, т. е. при достаточно малых t, эти главные члены будут неотрицательными *).

Покажем, что при сделанных предположениях пределы $a^{\mathrm{I}}(t)$ и $a^{\mathrm{II}}(t)$ совпадают. Действительно, предположение о существовании пределов (2,12) означает, что модуль функции (2,9) стремится к определенным пределам при $s \to \pm\infty$. Предельные множества E_1 и E_2 для самой функции $V(s,t)$ лежат поэтому на двух концентрических окружностях: $|V(s,t)| = a^{\mathrm{I}}(t)$ и $|V(s,t)| = a^{\mathrm{II}}(t)$. В силу второй части теоремы II либо множества E_1 и E_2 пересекаются, что возможно лишь при $a^{\mathrm{I}}(t) = a^{\mathrm{II}}(t)$, либо одно из них окружает второе, т. е. состоит из всех точек окружности $|V(s,t)| = \max(a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}})$. Однако в рассматриваемом случае вторая возможность не осуществляется, так как в силу неотрицательности $\operatorname{Im} V(s,t)$ при $s \to \infty$ каждое из множеств E_i может занимать не более чем полуокружность и, значит, не может окружать второе множество. Отсюда следует, что $a^{\mathrm{I}}(t) = a^{\mathrm{II}}(t)$, и поэтому имеет место асимптотическое равенство дифференциальных сечений (2,8).

Другие условия, при которых справедливы асимптотические равенства между дифференциальными сечениями, даны в работе Меймана [38]. Результаты этой работы могут быть сформулированы следующим образом. Пусть амплитуды упругого рассеяния $T^J(s,t)$ не имеют вещественных нулей, и пусть сходятся интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ln|T^J(s,t)|| \frac{ds}{1+s^2} < \infty, \qquad J = \mathrm{I},\ \mathrm{II}.$$

*) Полезно отметить, что поскольку $P_l(x) \geqslant 1$ при вещественных $x \geqslant 1$, то в той части нефизической области, где ряд (2,13) сходится и $t \geqslant 0$, мнимая часть амплитуды неотрицательна.

Отсюда следует сходимость произведений

$$\pi^J(s, t) = \prod_k \left[\left(1-\frac{s}{s_k^J(t)}\right)\Big/\left(1-\frac{s}{s_k^J(t)^*}\right)\right],$$

где $s_k^J(t)$—нули амплитуды $T^J(s, t)$ в верхней полуплоскости s. Пусть, далее, существует предел отношения модулей амплитуд процессов (I) и (II) при $s \to \infty$:

$$\lim_{s\to\infty}\left|\frac{T^{\mathrm{I}}(s, t)}{T^{\mathrm{II}}(s, t)}\right| = \gamma.$$

Предполагается, что это отношение ограничено сверху и снизу на всей вещественной оси s положительными функциями от t. Тогда $\gamma = 1$, если аргумент (фаза) отношения

$$\frac{T^{\mathrm{I}}(s, t)/\pi^{\mathrm{I}}(s, t)}{T^{\mathrm{II}}(s, t)/\pi^{\mathrm{II}}(s, t)}$$

растет (или убывает) медленнее $\ln s$ (соответственно $-\ln s$) при $s \to \infty$; γ имеет конечное положительное значение, отличное от 1, если фаза этого отношения растет (убывает) как $\ln s$ ($-\ln s$), $\gamma = 0$ или ∞, если фаза указанного отношения растет (убывает) быстрее $\ln s$ ($-\ln s$).

Перейдем теперь к изучению рассеяния вперед. Если $\alpha(t)$ в (2,5) удовлетворяет условию

$$\alpha(0) = 1 \tag{2,14}$$

и вещественная часть амплитуды растет не быстрее ее мнимой части, то из теоремы I следует утверждение об асимптотическом равенстве полных сечений взаимодействия частиц и античастиц. Для этого достаточно заметить, что в силу оптической теоремы полные сечения $\sigma_{\mathrm{tot}}^J(s)$, соответствующие процессам (I) и (II), выражаются через мнимые части амплитуд этих процессов по формуле

$$\sigma_{\mathrm{tot}}^J(s) = \frac{1}{2k\sqrt{s}}\operatorname{Im} T^J(s, 0), \qquad J = \mathrm{I},\ \mathrm{II}. \tag{2,15}$$

Намбу и Сугавара [17] доказали асимптотическое равенство полных сечений взаимодействия частицы и античастицы без предположения о существовании пределов этих сечений. При этом, однако, они предположили, что амплитуды упругого рассеяния вперед становятся чисто мнимыми при высоких энергиях. Другое доказательство теоремы Померанчука дано в работе [18] в предположении, что при $s \to \infty$ полные сечения стремятся к постоянным пределам, а дифференциальные сечения вперед ограничены. Асимптотическое равенство полных сечений взаимодействия частицы и античастицы было доказано также в случае, когда эти сечения растут логарифмически [15, 18].

Если a — нейтральная, скалярная (или псевдоскалярная) частица, совпадающая со своей античастицей, то амплитуды процессов (I) и (II) совпадают:

$$T^{\mathrm{I}}(s, t) = T^{\mathrm{II}}(s, t) = T(s, t). \tag{2,16}$$

С другой стороны, в случае рассеяния вперед (при $\alpha(0) = 1$) теорема I приводит к соотношению

$$\lim_{s\to\infty}\frac{T(s, 0)}{T(s, 0)^*} = -1. \tag{2,17}$$

Отсюда следует, что в асимптотике (при $s \to \infty$) амплитуда чисто мнимая:

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\operatorname{Re} T(s, 0)}{\operatorname{Im} T(s, 0)} = 0. \tag{2,18}$$

Из (2,1), (2,15) и (2,18) вытекает следующая асимптотическая связь между дифференциальным и полным сечениями рассматриваемого процесса:

$$\left.\frac{d\sigma(s,\ t)}{dt}\right|_{t=0} \sim \frac{1}{16\pi}\,[\sigma_{\text{tot}}(s)]^2. \tag{2,19}$$

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД МЕЗОН-БАРИОННОГО РАССЕЯНИЯ

1. Свойства симметрии амплитуды

Рассмотрим процессы (I) и (II) в случае, когда частицы a_i имеют спин 0, а частицы b_i — спин 1/2. Тогда амплитуды этих процессов могут быть записаны в виде

$$T^J(p_1,\ q_1;\ p_2,\ q_2) = \bar{u}_b(p_2)\,[F_1^J(s,\ t) + i\,\frac{\hat{q}_1 - \hat{q}_2}{2}\,F_2^J(s,\ t)]\,u_b(p_1), \tag{3,1}$$

если относительная четность частиц в начальном состоянии I_i совпадает с относительной четностью частиц в конечном состоянии I_f, $I_i = I_f$, или в виде

$$T^J(p_1,\ q_1;\ p_2,\ q_2) = \bar{u}_b(p_2)\,[F_1^J(s,\ t) + i\,\frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{2}\,F_2^J(s,\ t)]\,\gamma_5 u_b(p_1), \tag{3,2}$$

если $I_i = -I_f$. В выражениях (3,1) и (3,2) p_1 и q_1—4-импульсы фермиона и бозона в начальном состоянии (b_1 и a_1 для процесса (I) и b_1 и a_2 для процесса (II)), а p_2 и q_2—4-импульсы в конечном состоянии.

Инвариантные амплитуды $F_1^J(s,\ t)$ и $F_2^J(s,\ t)$ процессов (I) и (II) связаны между собой соотношениями типа перекрестной симметрии.

Перейдем к выводу этих соотношений. Амплитуды T^J выражаются через вариационные производные от S-матрицы равенствами

$$T^{\text{I}}(p_1,\ q_1;\ p_2,\ q_2) = \int d^4x \left\langle b_2(p_2)\left|\frac{\delta j_{a_1}\left(-\frac{x}{2}\right)}{\delta\varphi_{a_2}\left(\frac{x}{2}\right)}\right| b_1(p_1)\right\rangle e^{-i\frac{q_1+q_2}{2}x}, \tag{3,3}$$

$$T^{\text{II}}(p_1,\ q_1;\ p_2,\ q_2) = \int d^4x \left\langle b_2(p_2)\left|\frac{\delta j^+_{a_2}\left(-\frac{x}{2}\right)}{\delta\varphi^-_{a_1}\left(\frac{x}{2}\right)}\right| b_1(p_1)\right\rangle e^{-i\frac{q_1+q_2}{2}x}, \tag{3,4}$$

где

$$j_{a_i}(x) = i\,\frac{\delta S}{\delta\varphi^+_{a_i}(x)}\,S^+.$$

В физической области каждый из интегралов (3,3) и (3,4) следует понимать как предел, когда вектор $q_1 + q_2$ имеет стремящуюся к нулю мнимую добавку, принадлежащую будущему световому конусу. Поэтому, когда векторы p_i и q_i находятся в физической области какого-либо из процессов (I) и (II), выражения (3,3) и (3,4) эрмитово сопряжены друг с другом, т. е.

$$T^{\text{II}}(p_1,\ q_1;\ p_2,\ q_2) = T^{\text{I}'}(p_2,\ -q_1;\ p_1,\ -q_2)^*, \tag{3,5}$$

где (I′) — процесс, обратный к (I):

$$a_2 + b_2 \to a_1 + b_1.$$

Процессы (I) и (I′) связаны между собой посредством пространственно-временного отражения: если

$$T^{\mathrm{I}}(p_1, q_1;\ p_2, q_2) = \bar{u}(p_2)\, M^{\mathrm{I}}(p_1, q_1;\ p_2, q_2)\, u(p_1), \tag{3,6}$$

то

$$T^{\mathrm{I}'}(p_2, q_2;\ p_1, q_1) = \eta \bar{u}(p_2)\, [B M^{\mathrm{I}}(p_1, q_1;\ p_2, q_2)\, B^{-1}]^T u(p_1), \tag{3,7}$$

где матрица B имеет свойства

$$B\gamma_\mu B^{-1} = \gamma_\mu^T, \qquad B^T = -B, \tag{3,8}$$

верхний индекс T означает транспонирование матрицы, а η — фазовый множитель, $|\eta| = 1$. В случае упругого рассеяния $\eta = 1$. Из (3,5) и (3,7) получаем

$$M^{\mathrm{II}}(p_1, q_1;\ p_2, q_2) = \eta\gamma_4 [B M^{\mathrm{I}}(p_1, -q_2;\ p_2, -q_1)\, B^{-1}]^* \gamma_4. \tag{3,9}$$

Соотношение (3,9) может быть записано в более привычной форме, если выразить B посредством матрицы зарядового сопряжения C:

$$B = C^{-1}\gamma_5, \qquad C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T, \qquad C^T = -C. \tag{3,10}$$

В силу релятивистской инвариантности имеем

$$\gamma_5 M^{\mathrm{I}}(p_1, -q_2;\ p_2, -q_1)\, \gamma_5 = M^{\mathrm{I}}(-p_1, q_2;\ -p_2, q_1). \tag{3,11}$$

Из (3,9)—(3,11) следует соотношение перекрестной симметрии для полной амплитуды

$$M^{\mathrm{II}}(p_1, q_1;\ p_2, q_2) = \eta\gamma_4 [C^{-1} M^{\mathrm{I}}(-p_1, q_2;\ -p_2, q_1)\, C]^* \gamma_4. \tag{3,12}$$

Отсюда нетрудно получить перекрестные соотношения между инвариантными амплитудами $F_i^J(s, t)$ процессов (I) и (II). В зависимости от того, совпадают или противоположны по знаку относительные четности частиц в начальном и конечном состояниях, находим

$$\begin{aligned} F_i^{\mathrm{I}}(u, t) &= (-1)^{i+1} F_i^{\mathrm{II}}(s, t)^*, \quad \text{если } I_i = I_f, \\ F_i^{\mathrm{I}}(u, t) &= (-1)^{i} F_i^{\mathrm{II}}(s, t)^*, \quad \text{если } I_i = -I_f. \end{aligned} \tag{3,13}$$

В дальнейшем мы будем считать $\eta = 1$, что не приведет к изменению окончательных результатов, так как в выражения для дифференциальных сечений и поляризаций всегда входит произведение $\eta\eta^*$.

Наряду с процессами (I) и (II), в случае, когда b_i — частицы со спином, мы будем рассматривать еще процесс

$$a_1 + \bar{b}_2 \to a_2 + \bar{b}_1. \tag{III}$$

Амплитуду этого процесса запишем в таком виде:

$$T^{\mathrm{III}}(p_1, q_1;\ p_2, q_2) = \bar{u}(p_2)\, M^{\mathrm{III}}(p_1, q_1;\ p_2, q_2)\, u(p_1). \tag{3,14}$$

Аналогично предыдущему, можно получить следующее соотношение перекрестной симметрии между амплитудами M^{I} и M^{III}:

$$M^{\mathrm{III}}(p_1, q_1;\ p_2, q_2) = \gamma_4 M^{\mathrm{I}}(p_2, -q_1;\ p_1, -q_2)^+ \gamma_4, \tag{3,15}$$

или, в терминах инвариантных амплитуд,

$$\begin{aligned} F_i^{\mathrm{I}}(u, t) &= (-1)^{i+1} F_i^{\mathrm{III}}(s, t)^*, \quad \text{если } I_i = I_f, \\ F_i^{\mathrm{I}}(u, t) &= -F_i^{\mathrm{III}}(s, t)^*, \quad \text{если } I_i = -I_f. \end{aligned} \tag{3,16}$$

2. Асимптотические равенства между дифференциальными сечениями

Дифференциальное сечение процесса (I) равно

$$\frac{d\sigma^{\mathrm{I}}(s,t)}{dt}=\frac{1}{64\pi s k_{\mathrm{I}}^2}G^{\mathrm{I}}(s,t), \tag{3,17}$$

где

$$G^{\mathrm{I}}(s,t)=[(M_2\pm M_1)^2-t]\,|F_1^{\mathrm{I}}(s,t)|^2+$$
$$+\frac{1}{4}\{(s-u)^2-(m_1^2-m_2^2)-[t-2(m_1^2+m_2^2)][t-(M_2\pm M_1)^2]\}\,|F_2^{\mathrm{I}}(s,t)^2+$$
$$+[(M_2\pm M_1)(u-s)+(M_2\pm M_1)(m_1^2-m_2^2)]\,\mathrm{Re}\,F_1^{\mathrm{I}}(s,t)\,F_2^{\mathrm{I}}(s,t)^*, \tag{3,18}$$

причем верхний знак соответствует случаю одинаковых относительных четностей, $I_i=I_f$, а нижний — случаю противоположных четностей, $I_i=-I_f$.

При фиксированном t и $s\to\infty$ (3,18) принимает следующий вид:

$$G^{\mathrm{I}}(s,t)\sim|(M_2\pm M_1)F_1^{\mathrm{I}}(s,t)-sF_2^{\mathrm{I}}(s,t)|^2-t\,|F_1^{\mathrm{I}}(s,t)|^2. \tag{3,19}$$

Дифференциальное сечение процесса (II) получается из (3,17) и (3,18), если заменить $F_1^{\mathrm{I}}(s,t)$ и $F_2^{\mathrm{I}}(s,t)$ на $F_1^{\mathrm{II}}(s,t)$ и $F_2^{\mathrm{II}}(s,t)$ и поменять местами m_1 и m_2, а дифференциальное сечение процесса (III) получим заменой $F_1^{\mathrm{I}}(s,t)$ и $F_2^{\mathrm{I}}(s,t)$ на $F_1^{\mathrm{III}}(s,t)$ и $F_2^{\mathrm{III}}(s,t)$ и переменой мест M_1 и M_2.

Докажем асимптотическое равенство сечений процессов (I), (II) и (III) при фиксированном t и $s\to\infty$. Если среди двух амплитуд $F_1^J(s,t)$ и $F_2^J(s,t)$ только одна дает главный вклад в асимптотику сечений, то достаточно рассматривать эту амплитуду, а асимптотическое равенство сечений непосредственно следует из теоремы I. Поэтому нам необходимо рассмотреть общий случай, когда обе амплитуды $F_1^J(s,t)$ и $F_2^J(s,t)$ дают вклады одинакового порядка в асимптотику сечений. В этом случае при некотором выборе допустимой функции $\varphi(s,t)$ существуют конечные пределы

$$U_1^{\pm}(t)=\lim_{s\to\pm\infty}\frac{F_1^{\mathrm{I}}(s,t)}{\varphi(s,t)},\qquad U_2^{\pm}(t)=\lim_{s\to\pm\infty}\frac{sF_2^{\mathrm{I}}(s,t)}{\varphi(s,t)}. \tag{3,20}$$

В силу теоремы II предельные значения (3,20) равны друг другу:

$$U_i^{+}(t)=U_i^{-}(t), \tag{3,21}$$

и, следовательно, учитывая соотношения перекрестной симметрии (3,13) и (3,16),

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty}\frac{F_1^{\mathrm{I}}(s,t)}{F_1^{\mathrm{II}}(s,t)^*}&=\lim\frac{F_2^{\mathrm{I}}(s,t)}{F_2^{\mathrm{II}}(s,t)^*}=\pm e^{-i\pi\alpha(t)},\\ \lim_{s\to\infty}\frac{F_1^{\mathrm{I}}(s,t)}{F_1^{\mathrm{III}}(s,t)^*}&=\pm\lim\frac{F_2^{\mathrm{I}}(s,t)}{F_2^{\mathrm{III}}(s,t)^*}=\pm e^{-i\pi\alpha(t)},\end{aligned} \tag{3,22}$$

где снова верхний знак соответствует $I_i=I_f$, а нижний $I_i=-I_f$.

Из этих асимптотических соотношений между амплитудами процессов (I), (II) и (III) следует асимптотическое равенство сечений этих процессов при фиксированном t и $s\to\infty$. Например, отсюда следуют

асимптотические равенства между дифференциальными сечениями процессов

$$\left.\begin{array}{lll} \pi^+ + p \to \pi^- + p & \text{и} & \pi^- + p \to \pi^- + p, \\ K^+ + p \to K^+ + p & \text{и} & K^- + p \to K^- + p, \\ \pi^+ + p \to K^+ + \Sigma^+ & \text{и} & K^- + p \to \pi^- + \Sigma^+, \\ \pi^- + p \to K^0 + \lambda & \text{и} & \bar{K}^0 + p \to \pi^+ + \lambda, \\ \Sigma^+ + \mathrm{He} \to p + \mathrm{He}_\lambda & \text{и} & \bar{p} + \mathrm{He} \to \bar{\Sigma}^+ + \mathrm{He}_\lambda. \end{array}\right\} \tag{3,23}$$

3. Асимптотические соотношения между поляризациями фермионов в конечном состоянии

Предположим, что фермионы в начальном состоянии не поляризованы. Обозначим через n_μ единичный пространственноподобный 4-вектор, пропорциональный $i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\, p_{1\alpha}\, q_{1\beta}\, p_{2\gamma}$, где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}$ — полностью антисимметричный тензор. В системе центра масс $n_4 = 0$, $\mathbf{n} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]/|[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]|$. Поляризационное состояние фермионов в конечном состоянии характеризуется 4-вектором поляризации ξ^J_μ, пропорциональным единичному вектору:

$$\xi^J_\mu = P^J(s, t)\, n_\mu. \tag{3,24}$$

Вычисляя $P^J(s, t)$, мы получим

$$P^J(s, t) = 2s\sqrt{-t}\, C^J(s, t) \cdot \frac{\operatorname{Im} F^J_1(s, t)\, F^J_2(s, t)}{G^J(s, t)}, \tag{3,25}$$

причем функция $C^J(s, t)$ стремится к единице при фиксированном t и $s \to \infty$ (см. [22] и ниже, формулу (2,35)). Для процесса (I) функция G^{I} определяется формулой (3,18), в асимптотике — формулой (3,19), а для процессов (II) и (III) функции G^J получаются из (3,18) способом, указанным после формулы (3,19).

Как было показано, при фиксированном t и $s \to \infty$ функции $G^J(s, t)$ для всех процессов (I), (II) и (III) равны между собой. Поэтому при изучении поляризации достаточно рассматривать величину $\operatorname{Im} F^J_1(s, t)\, F^J_2(s, t)^*$. Из асимптотических соотношений (3,22) следует, что

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\operatorname{Im} F^{\mathrm{I}}_1(s, t)\, F^{\mathrm{I}}_2(s, t)^*}{\operatorname{Im} F^{\mathrm{II}}_1(s, t)\, F^{\mathrm{II}}_2(s, t)^*} = \pm \lim_{s\to\infty} \frac{\operatorname{Im} F^{\mathrm{I}}_1(s, t)\, F^{\mathrm{I}}_2(s, t)^*}{\operatorname{Im} F^{\mathrm{III}}_1(s, t)\, F^{\mathrm{III}}_2(s, t)^*} = -1, \tag{3,26}$$

где, как и в (3,22), знак плюс соответствует случаю $I_i = I_f$, а знак минус — случаю $I_i = -I_f$.

Таким образом, при фиксированном t и $s \to \infty$ поляризации фермионов в конечных состояниях процессов (I), (II) и (III) связаны между собой асимптотическими соотношениями:

$$P^{\mathrm{I}}(s, t) \sim -P^{\mathrm{II}}(s, t) \quad \text{для обоих случаев} \tag{3,27}$$

и

$$\begin{array}{lll} P^{\mathrm{I}}(s, t) \sim -P^{\mathrm{III}}(s, t), & \text{если} & I_i = I_f, \\ P^{\mathrm{I}}(s, t) \sim P^{\mathrm{III}}(s, t), & \text{если} & I_i = I_f. \end{array} \tag{3,28}$$

Полученные результаты, в частности, применимы к процессам (3,22) и (3,23). Например, поляризации протонов отдачи в процессах

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p \quad \text{и} \quad \pi^- + p \to \pi^- + p,$$

$$K^+ + p \to K^+ + p \quad \text{и} \quad K^- + p \to K^- + p$$

при одинаковых значениях энергии s и передачи импульса равны по величине и противоположны по знаку*). Для поляризаций Σ^+-гиперонов в процессах

$$\pi^- + p \to K^+ + \Sigma^+ \quad \text{и} \quad K^- + p \to \pi^- + \Sigma^+$$

также имеется аналогичное асимптотическое соотношение независимо от относительных четностей частиц. Однако асимптотическое соотношение между поляризациями нуклона и антигиперона в последней паре процессов (3,23) зависит от относительной четности $I_{\Sigma\lambda}$: поляризации p и $\overline{\Sigma}^+$ равны по величине и противоположны по знаку, если эта четность равна $+1$, и равны как по величине, так и по знаку, если четность $I_{\Sigma\lambda}$ равна -1.

Мы рассмотрели общий случай, когда обе инвариантные амплитуды дают вклады в асимптотику сечений. Как нетрудно видеть из формулы (3,25), в этом случае поляризации P стремятся к пределам, отличным от нуля при $t \neq 0$. Если среди этих двух амплитуд только одна дает вклад в асимптотику сечений, то поляризации P^J стремятся к нулю.

Покажем теперь, что существует ряд процессов, в которых поляризации фермионов в конечных состояниях стремятся к нулю при $s \to \infty$ и фиксированном, отличном от нуля t, независимо от относительного поведения инвариантных амплитуд. Это — процессы, переходящие в себя при перекрестном преобразовании, т. е. процессы, для которых $a_2 = a_1$. В этом случае процессы (I) и (II) совпадают, т. е. $P^{\mathrm{I}}(s, t) = P^{\mathrm{II}}(s, t)$. С другой стороны, согласно (3,27) $P^{\mathrm{I}}(s, t) \sim -P^{\mathrm{II}}(s, t)$, независимо от относительных четностей частиц. Следовательно, в этом случае $P^{\mathrm{I}} \sim \sim P^{\mathrm{II}} \sim 0$.

Таким образом, например, поляризации фермионов в конечных состояниях процессов

$$K_2^0 + p \to K_2^0 + p \tag{3,29}$$

и

$$K^- + p \to K^+ + \Xi^- \tag{3,30}$$

(если спин Ξ-гиперона равен 1/2) стремятся к нулю при $s \to \infty$ и фиксированном t, независимо от относительных четностей частиц, даже в том случае, когда обе инвариантные амплитуды дают вклады в асимптотику сечений. Если выполняется изотопическая инвариантность, то стремится к нулю и поляризация нейтрона отдачи в процессе перезарядки

$$\pi^- + p \to \pi^0 + n. \tag{3,31}$$

Действительно, мы видели, что поляризации нейтронов отдачи в этом процессе и в процессе

$$\pi^0 + p \to \pi^+ + n \tag{3,32}$$

при $s \to \infty$ противоположны. Однако из изотопической инвариантности следует, что матричные элементы этих процессов совпадают (с точностью до знака) и поэтому поляризации нейтронов в обоих процессах должны быть равны между собой. Отсюда следует, что при $s \to \infty$ поляризации нейтронов отдачи рассматриваемых процессов стремятся к нулю.

Для опытной проверки полученных асимптотических соотношений между поляризациями, вероятно, проще пользоваться поляризованной

*) Асимптотическая связь между поляризациями протонов в этих процессах была получена впервые в работе [39] в предположении, что F_1^J и sF_2^J ведут себя при $s \to \infty$ как s при $t \leqslant 0$.

нуклонной мишенью и измерять параметр лево-правой асимметрии для различных процессов, поскольку в случае одинаковой четности $I_i = I_f$ параметр асимметрии равен поляризации, а в случае различных четностей $I_i = -I_f$ параметр асимметрии отличается от поляризации только знаком [39].

4. Полный опыт в случае упругого рассеяния мезона на нуклоне

В рассматриваемом случае рассеяния мезона (со спином нуль) на нуклоне (со спином 1/2) полный опыт должен давать три вещественные величины (при каждом значении переменных s и t) *). В качестве таких величин можно выбрать дифференциальное сечение (3,17) — (3,18), поляризацию $P^J(s, t)$ фермиона в конечном состоянии при рассеянии на неполяризованной мишени (3,25) и поляризацию при рассеянии на поляризованной мишени с вектором поляризации ζ.

Трехмерный вектор поляризации нуклона в конечном состоянии при упругом рассеянии мезона на поляризованной нуклонной мишени в системе центра масс равен

$$\xi^J = P^J(s, t)\,\mathbf{n} + \zeta + Q^J(s, t)\,[(\zeta\mathbf{n})\,\mathbf{n} - \zeta], \tag{3,33}$$

где $P^J(s, t)$ задано формулой (3,25), а

$$Q^J(s, t) = -32t\,[C(s, t)]^2 \frac{s^2}{(\sqrt{s}+M)^2 - m^2} \frac{|F_1^J(s, t) + (\sqrt{s}+M)\,F_2^J(s, t)|^2}{G^J(s, t)}; \tag{3,34}$$

$G^J(s, t)$ для $J = I$ задается формулой (3,18). (Для других значений J величина $G^J(s, t)$ получается по способу, указанному после формулы (3,19)),

$$[C(s, t)]^2 = -\frac{su - (M^2 - m^2)^2}{s^2} \to 1. \tag{3,35}$$

В качестве третьей измеряемой величины (наряду с $d\sigma^J/dt$ и $P^J(s, t)$) в силу (3,33) можно взять величину $Q^J(s, t)$. Легко видеть, что при сделанных нами предположениях асимптотические значения при $s \to \infty$ величин $Q^J(s, t)$ для процессов (I) и (II) должны совпадать.

В рассматриваемом случае упругого рассеяния мезона на нуклоне полученные результаты могут быть выведены при более слабых предположениях: вместо существования двух комплексных (т. е. четырех вещественных) пределов (3,20) достаточно предположить существование пределов у трех выше указанных измеряемых на опыте величин, или, что то же самое, существование пределов (при $s \to \infty$) у величин

$$\left|\frac{H^J(s, t)}{\varphi(s, t)}\right|, \quad \left|\frac{F_1^J(s, t)}{\varphi(s, t)}\right| \quad \text{и} \quad \arg\left[\frac{F_1^J(s, t)}{\varphi(s, t)}\right],$$

где

$$H^J(s, t) = 2MF_1^J(s, t) - (s - M^2 - m^2)\,F_2^J(s, t), \tag{3,36}$$

при условии, что $\operatorname{Im}\left[\frac{H^J(s, t)}{\varphi(s, t)}\right] \geqslant 0$ при $s \to \infty$. Это последнее предположение является естественным, так как

$$H^J(s, t) = \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)\,f_l^{(+)} + l f_l^{(-)}]\,P_l(z) - \frac{t}{2k^2} \sum_{l=1}^{\infty} (f_l^{(+)} - f_l^{(-)})\,P_l'(z), \tag{3,37}$$

*) В работе[40] полный опыт ограничивается определением двух величин, поскольку при энергии, меньшей порога неупругих процессов, остальные величины можно определить из условия двухчастичной унитарности.

причем в силу условия унитарности

$$\operatorname{Im} f_l^{(\pm)} \geqslant 0. \tag{3,38}$$

При этих предположениях остаются в силе заключения об асимптотическом равенстве дифференциальных сечений, о противоположности поляризаций (3,27) и о равенстве величин (3,34) для процессов (I) и (II). Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству подобного утверждения для случая скалярных частиц (§ 2).

§ 4. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД БАРИОН-БАРИОННОГО РАССЕЯНИЯ

1. Свойства симметрии амплитуд

Перейдем теперь к изучению процессов (I) и (II) в случае, когда все частицы a_i и b_i имеют спин 1/2. Матричные элементы этих процессов имеют вид

$$T^J(p_1, q_1;\ p_2, q_2) = \sum \bar{u}_a(q_2)\,\Gamma_i^{(a)}(p)\,u_a(q_1)\,\bar{u}_b(p_2)\,\Gamma_i^{(b)}(q)\,u_b(p_1)\,F_i^J(s, t),$$

$$q = \frac{q_1+q_2}{2}, \qquad p = \frac{p_1+p_2}{2}, \tag{4,1}$$

где $\Gamma_i^{(a)}(p)$ можно выбрать независимо от относительных четностей частиц:

$$\Gamma_i^{(a)}(p) = \{1,\ 1,\ i\hat{p},\ i\hat{p},\ \gamma_5,\ \gamma_5,\ i\hat{p}\gamma_5,\ i\hat{p}\gamma_5\}, \tag{4,2}$$

а $\Gamma_i^{(b)}(p)$ зависят от четностей:

$$\Gamma_i^{(b)}(q) = \{1,\ i\hat{q},\ i\hat{q},\ 1,\ \gamma_5,\ i\hat{q}\gamma_5,\ \gamma_5,\ i\hat{q}\gamma_5\}, \qquad I_i = I_f, \tag{4,3}$$

$$\Gamma_i^{(b)}(q) = \{\gamma_5,\ i\hat{q}\gamma_5,\ i\hat{q}\gamma_5,\ \gamma_5,\ 1,\ i\hat{q},\ 1,\ i\hat{q}\}, \qquad I_i = -I_f. \tag{4,4}$$

Инвариантные амплитуды $F_i^J(s, t)$ удовлетворяют соотношениям перекрестной симметрии

$$F_i^{\mathrm{I}}(u, t) = \pm(-1)^{i+1} F_i^{\mathrm{II}}(s, t)^*. \tag{4,5}$$

2. Асимптотические равенства дифференциальных сечений

Дифференциальные сечения рассматриваемых процессов можно выразить через инвариантные амплитуды $F_i^J(s, t)$. Из этих выражений и соотношений перекрестной симметрии (4,5) можно доказать асимптотическое равенство этих дифференциальных сечений. Для этого достаточно применить теорему Фрагмена — Линделёфа и повторить все рассуждения, приведенные в предыдущем параграфе. В частности, при фиксированном t и $s \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство дифференциальных сечений процессов

$$p + p \to p + p \quad \text{и} \quad \bar{p} + p \to \bar{p} + p, \tag{4,6}$$

$$\Sigma^+ + p \to \Sigma^+ + p \quad \text{и} \quad \bar{\Sigma}^+ + p \to \bar{\Sigma}^+ + p, \tag{4,7}$$

$$\Sigma^- + p \to \lambda + n \quad \text{и} \quad \bar{\lambda} + p \to \bar{\Sigma}^- + n, \tag{4,8}$$

$$\Sigma^+ + p \to p + \Sigma^+ \quad \text{и} \quad \bar{p} + p \to \bar{\Sigma}^+ + \Sigma^+, \tag{4,9}$$

$$\Sigma^- + p \to n + \lambda \quad \text{и} \quad \bar{n} + p \to \bar{\Sigma}^- + \lambda. \tag{4,10}$$

Отметим, что в двух последних процессах (4,9) и (4,10) передача импульса t измеряется между начальным протоном и конечным гипероном. Эта

передача обычно обозначается через u. Поэтому в этих случаях мы имеем на самом деле равенство между дифференциальным сечением упругого или неупругого рассеяния гиперона на протоне назад и дифференциальным сечением аннигиляции пары протон — антипротон на пару гиперон — антигиперон.

3. Асимптотические свойства поляризационных эффектов

Обозначим через P^{Ja} или P^{Jb} поляризации частиц a_2, $\bar{a}_1$ или b_2 соответственно в конечных состояниях процессов $J = \mathrm{I}, \mathrm{II}$ с неполяризованными начальными частицами, а через η^{Ja} или η^{Jb}—параметры лево-правой асимметрии в процессах с поляризованными частицами a_1, $\bar{a}_2$ или b_1 соответственно. Тогда, выражая $P^{Ja}(s, t)$, $P^{Jb}(s, t)$ и $\eta^{Ja}(s, t)$, $\eta^{Jb}(s, t)$ через инвариантные амплитуды и используя соотношения перекрестной симметрии (4,5), можно доказать следующие асимптотические соотношения:

$$P^{\mathrm{I}a}(s, t) \sim -\eta^{\mathrm{II}a}(s, t), \qquad P^{\mathrm{II}a}(s, t) \sim -\eta^{\mathrm{I}a}(s, t), \tag{4,11}$$

$$P^{\mathrm{I}b}(s, t) \sim -P^{\mathrm{II}b}(s, t), \qquad \eta^{\mathrm{I}b}(s, t) \sim -\eta^{\mathrm{II}b}(s, t). \tag{4,12}$$

Если (I) и (II) являются процессами упругого рассеяния, то из T-инвариантности следует, что

$$P^{Ja}(s, t) = \eta^{Ja}(s, t), \qquad P^{Jb}(s, t) = \eta^{Jb}(s, t).$$

В этом случае $P^{Jb}(s, t)$ и $\eta^{Jb}(s, t)$ также удовлетворяют асимптотическим соотношениям (4,11), а $P^{Ja}(s, t)$ и $\eta^{Ja}(s, t)$ — соотношениям (4,12).

Приведем некоторые примеры. При фиксированном t и $s \to \infty$ поляризации протонов отдачи в процессах (4,6) и (4,7), а также нейтронов отдачи в (4,8) имеют одинаковые величины и разные знаки. Противоположны также поляризации гиперонов в конечных состояниях процессов (4,9) и (4,10), протона и антипротона в (4,6), гиперона и антигиперона в (4,7). В заключение этого параграфа отметим, что в то время как дисперсионные соотношения для рассеяния π-мезона на нуклоне доказаны на основе общих принципов локальной теории[8], требуемые для применения теоремы II аналитические свойства амплитуды рассеяния нуклона на нуклоне доказаны лишь в любом порядке теории возмущений [41, 42]. Что же касается рассеяния гиперона на нуклоне, то, как показано в [43], обычные дисперсионные соотношения несправедливы в низших порядках теории возмущений даже в случае рассеяния вперед. Оказывается, однако, что в физической области амплитуды рассматриваемых процессов при $s \to \infty$ стремятся к асимптотическим амплитудам, которые являются аналитическими функциями переменной s, и к этим функциям применима теорема Фрагмена — Линделёфа. Поэтому полученные асимптотические соотношения можно считать доказанными (подробно см. § 8).

§ 5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД ФОТОРОЖДЕНИЯ И КОМПТОН-ЭФФЕКТА

1. Фоторождение мезона на барионе

Рассмотрим перекрестные процессы фоторождения мезона на барионе:

$$\gamma + b_1 \to a + b_2, \tag{I}$$

$$\gamma + b_2 \to \bar{a} + b_1, \tag{II}$$

где b_1 и b_2—барионы, а a и $\bar{a}$—мезон и его античастица. Обозначим

через M_i массу бариона b_i, через m массу мезона a, через k и p_1 — 4-импульсы частиц γ (фотона) и бариона, а через q и p_2 — 4-импульсы конечных мезона и бариона. Матричные элементы имеют вид

$$T^J(k, p_1; q_1, p_2) = \sum_{i=1}^{4} \bar{u}_b(p_2)\Gamma_i u_b(p_1) F_i^J(s, t), \tag{5,1}$$

где независимые ковариантные матрицы Γ_i равны

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &= i\gamma_5 \hat{\varepsilon}\hat{k}, \\ \Gamma_2 &= 2i\gamma_5 [(P\varepsilon)\, qk) - (Pk)\,(q\varepsilon)], \\ \Gamma_3 &= \gamma_5 [\hat{\varepsilon}\,(qk) - \hat{k}\,(q\varepsilon)], \\ \Gamma_4 &= 2\gamma_5 [\hat{\varepsilon}\,(Pk) - \hat{k}\,(P\varepsilon)], \end{aligned}\right\} \tag{5,2}$$

$P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, ε_μ — 4-вектор поляризации фотона.

Инвариантные амплитуды $F_i^J(s, t)$ процессов фоторождения (I) и (II) удовлетворяют соотношениям перекрестной симметрии

$$\begin{aligned} F_i^{\mathrm{I}}(u, t) &= F_i^{\mathrm{II}}(s, t)^*, \qquad i = 1, 2, 4, \\ F_i^{\mathrm{I}}(u, t) &= -F_i^{\mathrm{II}}(s, t)^*, \quad i = 3. \end{aligned} \tag{5,3}$$

Дифференциальные сечения процессов (I) и (II) можно выразить через инвариантные амплитуды $F_i^J(s, t)$. Из этих выражений и соотношений перекрестной симметрии (5,3) можно доказать с помощью теоремы Фрагмена — Линделёфа асимптотическое равенство сечений процессов (I) и (II) при фиксированном t и $s \to \infty$. Так, например, имеет место асимптотическое равенство сечений процессов

$$\gamma + p \to \pi^+ + n, \tag{5,4}$$

$$\gamma + n \to \pi^- + p. \tag{5,5}$$

Отметим, что это равенство было получено без использования изотопической инвариантности сильных взаимодействий.

Обозначим через $P^J(s, t)$ поляризации барионов в конечных состояниях процессов с неполяризованными начальными частицами, а через $\eta^J(s, t)$ — параметры лево-правой асимметрии в процессах с неполяризованным фотоном и начальным поляризованным барионом. Из выражений $P^J(s, t)$ и $\eta^J(s, t)$ и соотношений (5,3) можно доказать следующее асимптотическое соотношение между поляризацией $P^J(s, t)$ в одном процессе и параметром асимметрии $\eta^J(s, t)$ в другом:

$$P^{\mathrm{I}}(s, t) \sim -\eta^{\mathrm{II}}(s, t), \qquad P^{\mathrm{II}}(s, t) \sim -\eta^{\mathrm{I}}(s, t). \tag{5,6}$$

Для процессов фоторождения, переходящих в себя в перекрестном преобразовании ($b_1 = b_2$, $\bar{a} = a$), мы имеем вместо (5,6)

$$P(s, t) \sim -\eta(s, t). \tag{5,7}$$

Примерами таких процессов являются

$$\gamma + p \to \pi^0 + p,$$

$$\gamma + n \to \pi^0 + n.$$

2. Комптон-эффект

Рассмотрим теперь процесс упругого рассеяния фотона на нуклоне. Этот процесс переходит в себя при перекрестном преобразовании. При изучении процессов рассеяния скалярных частиц на спинорных частицах мы показали, что в процессах этого типа поляризация фермионов отдачи стремится к нулю при $s \to \infty$ и фиксированном t. Докажем, что в данном случае это также имеет место.

Амплитуду рассматриваемого процесса можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &T(k_1, p_1; k_2, p_2) = \sum_{i=1}^{6} \bar{u}(p_2)\,\Gamma_i\, u(p_1)\, F_i(s, t), \\ &\Gamma_1 = \frac{(\varepsilon_1 P')(\varepsilon_2 P')}{P'^2}, \quad \Gamma_2 = \frac{(\varepsilon_1 P')(\varepsilon_2 P')}{P'^2}\, i\hat{k}, \quad \Gamma_3 = \frac{(\varepsilon_1 N)(\varepsilon_2 N)}{N^2}, \\ &\Gamma_4 = \frac{(\varepsilon_1 N)(\varepsilon_2 N)}{N^2}\, i\hat{k}, \quad \Gamma_5 = \frac{(\varepsilon_1 N)(\varepsilon_2 P') - (\varepsilon_1 P')(\varepsilon_2 N)}{\sqrt{2P'^2 N^2}}\, i\gamma_5, \\ &\Gamma_6 = \frac{(\varepsilon_1 N)(\varepsilon_2 P') + (\varepsilon_1 P')(\varepsilon_2 N)}{\sqrt{2P'^2 N^2}}\, i\gamma_5 \hat{k}, \end{aligned}\right\} \tag{5,8}$$

где p_1 и p_2 — 4-импульсы нуклонов в начальном и конечном состояниях соответственно, k_1 и ε_1 — 4-импульс и 4-вектор поляризации фотона для рассеяния, а k_2 и ε_2 — те же величины после рассеяния:

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad p = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad P'_\mu = P_\mu - \frac{(Pk)}{k^2} k_\mu,$$

$$N_\alpha = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} P'_\beta k_\gamma (k_1 - k_2)_\delta.$$

Амплитуды F_i имеют следующие свойства перекрестной симметрии:

$$F_i(u, t) = (-1)^{i+1} F_i(s, t)^*. \tag{5,9}$$

Используя выражения для поляризации нуклона отдачи соотношения (5,9) и применяя теорему Фрагмена — Линделёфа, нетрудно видеть, что поляризация нуклона отдачи стремится к нулю при $s \to \infty$ и фиксированном t даже в общем случае, когда все независимые инвариантные амплитуды дают вклад в асимптотику сечения.

§ 6. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ АМПЛИТУДАМИ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД

Мы видели на примере процессов между скалярными частицами (§ 2), что в случае упругого рассеяния вперед при дополнительном предположении $\alpha(0) = 1$ можно получить равенство полных сечений, а также некоторые другие асимптотические соотношения типа (2,19). Покажем, что и при упругом рассеянии частиц со спином под нулевым углом можно (предполагая $\alpha(0) = 1$) получить некоторые новые соотношения (кроме равенств между дифференциальными сечениями). Число проверяемых опытом соотношений увеличивается, если учесть изотопическую инвариантность сильных взаимодействий.

Начнем с рассмотрения упругого рассеяния π-мезона на нуклоне. Амплитуды $F_1(s, t)$ и $F_2(s, t)$ этого процесса (3,1) и (3,2) имеют следующую изотопическую структуру:

$$F_i^{\beta\alpha}(s, t) = F_i^{(+)}(s, t)\,\delta_{\beta\alpha} + F_i^{(-)}(s, t)\,\frac{1}{2}[\tau_\beta, \tau_\alpha]. \tag{6,1}$$

Амплитуды физических процессов

$$\left.\begin{array}{ll} \text{а}_{\text{I}})\ \pi^+ + p \to \pi^+ + p, & \text{а}_{\text{II}})\ \pi^- + p \to \pi^- + p, \\ \text{б}_{\text{I}})\ \pi^- + p \to \pi^0 + n, & \text{б}_{\text{II}})\ \pi^0 + p \to \pi^+ + n, \\ & \text{в})\ \pi^0 + p \to \pi^0 + n \end{array}\right\} \tag{6,2}$$

и процессов, полученных из (6,2) заменой $p \leftrightarrow n$, $\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$, связаны с амплитудами (6,1) соотношениями

$$\left.\begin{array}{ll} F_i^{\text{а}_{\text{I}}}(s, t) = F_i^{(+)}(s, t) - F_i^{(-)}(s, t), & F_i^{\text{а}_{\text{II}}}(s, t) = F_i^{(+)}(s, t) + F_i^{(-)}(s, t), \\ F_i^{\text{б}_{\text{I}}}(s, t) = -F_i^{\text{б}_{\text{II}}}(s, t) = -\sqrt{2} F_i^{(-)}(s, t), & F_i^{\text{в}}(s, t) = F_i^{(+)}(s, t). \end{array}\right\} \tag{6,3}$$

Заметим, что в случае рассеяния вперед дифференциальное и полное сечения выражаются через одну и ту же функцию:

$$\begin{array}{ll} \left.\dfrac{d\sigma^i(s, t)}{dt}\right|_{t=0} = \dfrac{1}{64\pi s k^2} |H^i(s)|^2, & i = \text{а}_{\text{I}}, \text{а}_{\text{II}}, \text{б}_{\text{I}}, \text{б}_{\text{II}}, \text{в}, \\ \sigma_{\text{tot}}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2ks}} \operatorname{Im} H^i(s), & i = \text{а}_{\text{I}}, \text{а}_{\text{II}}, \text{в}, \end{array} \tag{6,4}$$

где $H^i(s)$ задается формулой (3,36) при $t = 0$:

$$H^i(s) = 2MF_1^i(s, 0) - (s - M^2 - m^2) F_2^i(s, 0). \tag{6,5}$$

К функциям $H^i(s)$ можно применить теорему I, что с учетом $\alpha(0) = 1$ приводит к асимптотическим соотношениям

$$H^{\text{а}_{\text{I}}}(s) \sim -H^{\text{а}_{\text{II}}}(s)^*, \quad H^{\text{б}_{\text{I}}}(s) \sim -H^{\text{б}_{\text{II}}}(s)^*, \quad H^{\text{в}}(s) \sim -H^{\text{в}}(s)^*. \tag{6,6}$$

Из (6,3) и (6,6) следует, что

$$\operatorname{Im} H^{(-)}(s) = 0, \qquad \operatorname{Re} H^{(+)}(s) = 0, \tag{6,7}$$

и, значит,

$$\begin{array}{l} \operatorname{Im} H^{\text{а}_{\text{I}}} \sim \operatorname{Im} H^{\text{а}_{\text{II}}} \sim \operatorname{Im} H^{\text{в}}, \qquad \operatorname{Im} H^{\text{б}_{\text{I}}} \sim \operatorname{Im} H^{\text{б}_{\text{II}}} \sim 0, \\ \operatorname{Re} H^{\text{а}_{\text{I}}} \sim -\operatorname{Re} H^{\text{а}_{\text{II}}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} H^{\text{б}_{\text{I}}} \sim -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} H^{\text{б}_{\text{II}}}, \qquad \operatorname{Re} H^{\text{в}} \sim 0. \end{array} \tag{6,8}$$

Все соотношения (6,8) доступны экспериментальной проверке. Действительно, равенство мнимых частей для процессов а_{I}, а_{II} и в приводит к асимптотическому равенству полных сечений

$$\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ p) \sim \sigma_{\text{tot}}(\pi^- p) \sim \sigma_{\text{tot}}(\pi^0 p). \tag{6,9}$$

Первое из этих равенств представляет собой теорему И. Я. Померанчука, а второе было предложено в [1] на основе анализа экспериментальных данных. Далее, замечая, что амплитуды рассеяния с перезарядкой $H^{\text{б}_{\text{I}}}$ и $H^{\text{б}_{\text{II}}}$ при больших s вещественны, и пользуясь равенствами (6,8), получаем следующее интересное соотношение между дифференциальными и полными сечениями:

$$\left[\frac{d\sigma^{\text{а}_{\text{I}}}(s, t)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d\sigma^{\text{б}_{\text{I}}}(s, t)}{dt}\right]_{t=0} \sim \frac{1}{16\pi} [\sigma_{\text{tot}}^{\text{а}_{\text{I}}}(s)]^2. \tag{6,10}$$

Соотношение (6,10) представляет собой обобщение равенства (2,19) на случай рассеяния заряженных π-мезонов. Из (6,8) видно, что равенство (2,19) остается в силе без изменений для сечений рассеяния π^0-мезона на протоне (процесс в); см. (6,2). Таким же образом можно

показать справедливость соотношения (2,19) и для сечений рассеяния K_1^0- и K_2^0-мезонов на нуклоне (если пренебречь слабыми взаимодействиями, то амплитуды этих двух процессов равны между собой). Отметим, что если $\alpha(0)=1$, то амплитуда процесса $K_2^0+p\to K_1^0+p$ при $t=0$ и $s\to\infty$ также чисто мнимая.

Несколько сложнее ситуация в случае упругого рассеяния частиц со спином 1/2, когда мы имеем дело с шестью независимыми инвариантными функциями (или с пятью функциями в случае рассеяния нуклона на нуклоне). В этом случае удобнее вместо того, чтобы пользоваться формулами (4,1)—(4,4) с $F_6^J(s,t)=F_7^J(s,t)=0$, записать амплитуды процессов (I) и (II) в виде

$$T^J(p_1,q_1;p_2,q_2)=\sum_{i=1}^{6}\bar{u}_b(p_2)\Gamma_i^{(b)}(q)u_b(p_1)\bar{u}_a(q_2)\Gamma_i^{(a)}(p)u_a(q_1)F_i^{(J)}(s,t), \qquad (6,11)$$

где

$$\Gamma_i^{(a)}=\{1,\gamma_\alpha,\gamma_5,1,i\hat{p},i\hat{p}\hat{}\}, \qquad (6,12)$$

$$\Gamma_i^{(b)}=\{1,\gamma_\alpha,\gamma_5,i\hat{q},i\hat{q},1\}. \qquad (6,13)$$

В случае рассеяния нуклона на нуклоне $F_4^J=F_6^J$. При этом соотношение перекрестной симметрии сохраняет свой вид (в данном случае $I_i=I_f$) и, кроме того, эрмитова и антиэрмитова части амплитуды задаются равенствами

$$\begin{aligned}D^J(p_1,q_1;p_2,q_2)&=\sum_{i=1}^{6}\bar{u}_b(p_2)\Gamma_i^{(b)}(q)u_b(p_1)\bar{u}_a(q_2)\Gamma_i^{(a)}(p)u_a(q_1)\operatorname{Re}F_i^J(s,t),\\ A^J(p_1,q_1;p_2,q_2)&=\sum_{i=1}^{6}\bar{u}_b(p_2)\Gamma_i^{(b)}(q)u_b(p_1)\bar{u}_a(q_2)\Gamma_i^{(a)}(p)u_a(q_1)\operatorname{Im}F_i^J(s,t).\end{aligned} \qquad (6,14)$$

Выбор матриц (6,13) удобен, в частности, тем, что при нем выделяется амплитуда F_2^J с той же матричной структурой, что и кулоновская. В случае рассеяния вперед (при предположении $\alpha(0)=1$) теорема II позволяет доказать следующие асимптотические соотношения:

$$\begin{aligned}D^{\mathrm{I}}(p_1,q_1;p_1,q_1)&\sim -D^{\mathrm{II}}(p_1,q_1;p_1,q_1),\\ A^{\mathrm{I}}(p_1,q_1;p_1,q_1)&\sim -A^{\mathrm{II}}(p_1,q_1;p_1,q_1).\end{aligned} \qquad (6,15)$$

Второе равенство приводит к утверждению об асимптотическом равенстве полных сечений

$$\sigma_{\mathrm{tot}}(pp)\sim\sigma_{\mathrm{tot}}(\bar{p}p),\qquad \sigma_{\mathrm{tot}}(\Sigma p)\sim\sigma_{\mathrm{tot}}(\bar{\Sigma}p)\ \text{и т. д.} \qquad (6,16)$$

§ 7. ВЫСШИЕ СИММЕТРИИ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ АМПЛИТУДАМИ МЕЗОН-БАРИОННОГО РАССЕЯНИЯ И ФОТОРОЖДЕНИЯ

1. Мезон-барионное рассеяние и фоторождение в схемах с высшими симметриями

После создания схемы классификации элементарных частиц Гелл-Манна и Нишиджимы, в которой имеет место изотопическая инвариантность, были попытки построить схемы сильных взаимодействий с высшими симметриями. В настоящее время большое внимание уделяется унитарной симметрии и симметрии группы G_2 (см. [3]). В ряде работ уже обсуждались возможности экспериментальной проверки этих симметрий. В частности, для этих моделей были получены некоторые соотношения между сечениями процессов мезон-барионного и барион-барионного рассеяний [44–47], а также между амплитудами фоторождения мезона на нуклоне [44, 48].

В обсуждаемых схемах сильных взаимодействий с высшими симметриями все мезоны и их античастицы принадлежат к одному и тому же мультиплету. Если полные сечения мезон-барионного взаимодействия *частиц и античастиц стремятся к постоянным пределам при* $s \to \infty$, то согласно теореме Померанчука эти пределы равны между собой. Это обстоятельство уменьшает число независимых амплитуд рассеяния в моделях с высшими симметриями [49, 50].

Как было показано в предыдущих параграфах, дифференциальные сечения перекрестных процессов при фиксированной передаче импульса и больших энергиях асимптотически равны и между их амплитудами *имеются некоторые асимптотические соотношения*. Поскольку в моделях с высшими симметриями мезоны и их античастицы принадлежат одному и тому же мультиплету и среди процессов мезон-барионного рассеяния имеются перекрестные процессы, асимптотические соотношения между амплитудами перекрестных процессов вместе со свойствами симметрии взаимодействий приводят к дополнительным асимптотическим равенствам между сечениями рассматриваемых процессов.

В настоящем параграфе мы установим некоторые асимптотические соотношения между сечениями процессов мезон-барионного рассеяния в триплетной и октетной моделях унитарной симметрии и модели с группой симметрии G_2, а также асимптотические соотношения для поляризационных эффектов в процессах мезон-барионного рассеяния и фоторождения мезона на нуклоне. При малых энергиях обсуждаемые высшие симметрии нарушаются. Однако во всех работах по высшим симметриям сильных взаимодействий высказывается надежда, что эти симметрии восстанавливаются при больших энергиях и передачах импульса или, по крайней мере, когда одна из этих величин велика. Полученные соотношения между сечениями и поляризациями есть следствия высших симметрий при больших энергиях. Сравнение этих соотношений с экспериментальными данными может пролить свет на обсуждаемые свойства симметрии сильных взаимодействий при высоких энергиях.

Мы будем рассматривать следующие процессы мезон-барионного рассеяния:

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p \quad (7,1а), \qquad \pi^- + p \to \pi^- + p \quad (7,1б),$$
$$\pi^0 + p \to \pi^+ + n \quad (7,2а), \qquad \pi^- + p \to \pi^0 + n \quad (7,2б),$$
$$K^+ + p \to K^+ + p \quad (7,3а), \qquad K^- + p \to K^- + p \quad (7,3б),$$
$$K^0 + p \to K^0 + p \quad (7,4а), \qquad \bar{K}^0 + p \to \bar{K}^0 + p \quad (7,4б),$$
$$K^0 + p \to K^+ + n \quad (7,5а), \qquad K^- + p \to \bar{K}^0 + n \quad (7,5б),$$
$$\pi^+ + p \to K^+ + \Sigma^+ \quad (7,6а), \qquad K^- + p \to \pi^- + \Sigma^+ \quad (7,6б),$$
$$\pi^- + p \to K^+ + \Sigma^- \quad (7,7а), \qquad K^- + p \to \pi^+ + \Sigma^- \quad (7,7б),$$
$$\pi^- + p \to K^0 + \Sigma^0 \quad (7,8а), \qquad \bar{K}^0 + p \to \pi^+ + \Sigma^0 \quad (7,8б),$$
$$\pi^- + p \to K^0 + \lambda \quad (7,9а), \qquad \bar{K}^0 + p \to \pi^+ + \lambda \quad (7,9б),$$
$$\pi^0 + p \to K^+ + \Sigma^0 \quad (7,10а), \qquad K^- + p \to \pi^0 + \Sigma^0 \quad (7,10б),$$
$$\pi^0 + p \to K^+ + \lambda \quad (7,11а), \qquad K^- + p \to \pi^0 + \lambda \quad (7,11б),$$
$$\pi^0 + p \to K^0 + \Sigma^+ \quad (7,12а), \qquad \bar{K}^0 + p \to \pi^0 + \Sigma^+ \quad (7,12б),$$
$$\bar{K}^0 + p \to K^+ + \Xi^0 \quad (7,13а), \qquad K^- + p \to K^0 + \Xi^0 \quad (7,13б),$$
$$K^- + p \to K^+ + \Xi^- \quad (7,14),$$

а также следующие процессы фоторождения мезона на нуклоне:

$$\gamma + p \to K^+ + \lambda, \qquad (7,15)$$
$$\gamma + n \to K^0 + \lambda, \qquad (7,16)$$
$$\gamma + p \to K^0 + \Sigma^+. \qquad (7,17)$$

Отметим, что в перекрестном преобразовании процессы (7, *j*а) переходят в процессы (7, *j*б), а процесс (7,14) переходит в себя. Для удобства мы также рассматриваем некоторые нефизические процессы с π^0-мезонами в начальных состояниях.

Кроме процессов (7,1а,б) — (7,14) существуют процессы, полученные заменой $n \leftrightarrow p$, $\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$, $K^+ \leftrightarrow K^0$, $\Sigma^+ \leftrightarrow \Sigma^-$ и $\Xi^- \leftrightarrow \Xi^0$, амплитуды которых совпадают с амплитудами соответствующих процессов в (7,1а,б) — (7,14) с точностью до знака. Для этих процессов также справедливы все полученные ниже соотношения. Исключительным случаем являются процессы с нейтральными K-мезонами в начальных состояниях, например, процессы (7,4а) и (7,4в) (см. далее). Вместо этих процессов мы будем рассматривать соответствующие зеркальные процессы:

$$K^+ + n \to K^+ + n, \tag{7,4а'}$$

$$K^- + n \to K^- + n, \tag{7,4б'}$$

амплитуды которых равны амплитудам процессов (5,4а) и (5,4б) соответственно, и физические процессы

$$K_2^0 + p \to K_2^0 + p, \tag{7,4в}$$

$$K_2^0 + p \to K_1^0 + p. \tag{7,4г}$$

Если обозначить инвариантные амплитуды процессов (7,4а), ..., (7,4г) через $F_i^{4а}(s, t)$, ..., $F_i^{4г}(s, t)$ соответственно, $i = 1, 2$, и пренебречь слабыми взаимодействиями, то

$$F_i^{4в}(s, t) = \frac{1}{2}[F_i^{4а}(s, t) + F_i^{4б}(s, t)], \tag{7,18}$$

$$F_i^{4г}(s, t) = \frac{1}{2i}[F_i^{4а}(s, t) - F_i^{4б}(s, t)]. \tag{7,19}$$

Вместо процессов (7,5а), (7,8б), (7,9б), (7,12в) и (7,13а) на опыте наблюдаются только соответствующие физические процессы с K_2^0-мезонами в начальных состояниях:

$$K_2^0 + p \to K^+ + n, \tag{7,5в}$$

$$K_2^0 + p \to \pi^+ + \Sigma^0, \tag{7,8в}$$

$$K_2^0 + p \to \pi^+ + \lambda, \tag{7,9в}$$

$$K_2^0 + p \to \pi^0 + \Sigma^+, \tag{7,12в}$$

$$K_2^0 + p \to K^+ + \Xi^0, \tag{7,13в}$$

сечения которых равны сечениям соответствующих процессов с нейтральными K^0- или $\bar{K}^0$-мезонами в начальных состояниях, умноженным на 1/2. Отметим, что все обсуждаемые симметрии включают в себя изотопическую инвариантность, из которой вытекают следующие соотношения между амплитудами рассматриваемых процессов:

$$F_i^{1а}(s, t) - F_i^{1б}(s, t) = -\sqrt{2}\, F_i^{2а}(s, t) = \sqrt{2}\, F_i^{2б}(s, t), \tag{7,20}$$

$$F_i^{4а, б}(s, t) + F_i^{5а, б}(s, t) = F_i^{3а, б}(s, t), \tag{7,21}$$

$$F_i^{6а, б}(s, t) - F_i^{7а, б}(s, t) = \sqrt{2}\, F_i^{8а, б}(s, t) = -\sqrt{2}\, F_i^{12а, б}(s, t), \tag{7,22}$$

$$F_i^{6а, б}(s, t) + F_i^{7а, б}(s, t) = 2F_i^{10а, б}(s, t), \tag{7,23}$$

$$F_i^{9а, б}(s, t) = \sqrt{2}\, F_i^{11а, б}(s, t), \tag{7,24}$$

$$F_i^{13а}(s, t) + F_i^{13б}(s, t) = -F_i^{14}(s, t). \tag{7,25}$$

Эти соотношения имеют место во всех рассматриваемых моделях.

2. Высшие симметрии и соотношения между амплитудами

Теперь перейдем к установлению соотношений между амплитудами процессов (7,1а,б) — (7,14). Рассмотрим сначала октетную модель. В этой модели волновые функции начальных и конечных состояний в процессах (7,1а, б) — (7,14) являются произведениями двух представлений $D^8(1, 1)$. Эти произведения разлагаются на неприводимые представления следующим образом:

$$D^8(1, 1) \times D^8(1, 1) = D^1(0, 0) + D^8(1, 1)_s + \\ + D^8(1, 1)_a + D^{10}(3, 0) + D^{10+}(0, 3) + D^{27}(2, 2).$$

В рассматриваемом произведении имеются два представления $D^8(1, 1)$. Для дальнейшего удобно выбрать эти представления таким образом, чтобы волновые функции одного из них были четными относительно R-отражения, а волновые функции другого — нечетными. Эти представления обозначим через $D^8(1, 1)_s$ и $D^8(1, 1)_a$. Инвариантность взаимодействий относительно унитарных преобразований требует, чтобы матричные элементы между состояниями, принадлежащими неэквивалентным неприводимым представлениям, были равны нулю. Так как R-отражение не входит в группу, матричные элементы между состояниями, одно из которых принадлежит $D^8(1, 1)_s$, а другое — $D^8(1, 1)_a$, не равны нулю. Более того, из инвариантности относительно отражения времени следует, что матричный элемент с начальным состоянием $D^8(1, 1)_a$ и конечным состоянием $D^8(1, 1)_s$ равен матричному элементу с начальным состоянием $D^8(1, 1)_s$ и конечным состоянием $D^8(1, 1)_a$. Таким образом, матричные элементы рассматриваемых процессов выражаются через семь независимых амплитуд

$$F_i^{(0, 0)}, \quad F_i^{(2, 2)}, \quad F_i^{(1, 1)s}, \quad F_i^{(1, 1)a}, \quad F_i^{(1, 1)as}, \quad F_i^{(3, 0)} \text{ и } F_i^{(0, 3)}.$$

Коэффициенты при этих независимых амплитудах могут быть вычислены с помощью коэффициентов Клебша—Гордана группы SU_3. Оттуда можно получить следующие соотношения между амплитудами процессов (7,1а, б)—(7,14) [45–47]:

$$F_i^{1а,б}(s, t) + F_i^{6а,б}(s, t) = F_i^{3а,б}(s, t), \tag{7,26}$$

$$\sqrt{6}\, F_i^{9а,б}(s,t) - \sqrt{2}\, F_i^{8а,б}(s, t) = 2\,[F_i^{7а,б}(s, t) - F_i^{5а,б}(s, t)], \tag{7,27}$$

$$\sqrt{3}\, F_i^{11а,б}(s, t) + \sqrt{2}\, F_i^{2а,б}(s, t) = F_i^{10а,б}(s, t) - F_i^{5а,б}(s, t), \tag{7,28}$$

$$F_i^{13а,б}(s, t) = F_i^{7а,б}(s, t). \tag{7,29}$$

Если имеет место R-инвариантность, то

$$F_i^{(1, 1)as} = 0, \qquad F_i^{(3, 0)} = F_i^{(0, 3)},$$

и мы получим еще следующие соотношения:

$$F_i^{1а,б}(s, t) = F_i^{4а,б}(s, t), \tag{7,30}$$

$$F_i^{5а,б}(s, t) = F_i^{6а,б}(s, t), \tag{7,31}$$

$$F_i^{8а}(s, t) - F_i^{8б}(s, t) = F_i^{2б}(s, t), \tag{7,32}$$

$$F_i^{9а}(s, t) - F_i^{9б}(s, t) = \sqrt{3}\, F_i^{2б}(s, t), \tag{7,33}$$

$$F_i^{9а}(s, t) - F_i^{9б}(s, t) = \sqrt{3}\,[F_i^{8а}(s, t) - F_i^{8б}(s, t)], \tag{7,34}$$

$$F_i^{9а}(s, t) + F_i^{9б}(s, t) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,[F_i^{8а}(s, t) + F_i^{8б}(s, t)]. \tag{7,35}$$

Соотношения между амплитудами процессов с участием нуклонов и λ-гиперона в триплетной модели Сакаты с унитарной симметрией также можно получить аналогично. Для этих процессов волновые функции начальных и конечных состояний являются произведениями неприводимых представлений $D^3(1, 0)$ и $D^8(1, 1)$. Эти произведения разлагаются на неприводимые представления следующим образом:

$$D^3(1, 0) \times D^8(1, 1) = D^3(1, 0) + D^6(0, 2) + D^{15}. \qquad (2,1)$$

Поэтому матричные элементы процессов мезон-барионного рассеяния с участием нуклонов и λ-гиперонов в триплетной модели Сакаты с унитарной симметрией выражаются через независимые амплитуды

$$F_i^{(1, 0)}, \quad F_i^{(0, 2)} \text{ и } F_i^{(2, 1)}.$$

Коэффициенты при этих независимых амплитудах также можно вычислить с помощью коэффициентов Клебша — Гордана.

В результате мы получим следующие соотношения между амплитудами рассматриваемых процессов [44, 47]:

$$F_i^{1а, б}(s, t) = F_i^{3а, б}(s, t), \qquad (7,36)$$

$$F_i^{4а}(s, t) = F_i^{4б}(s, t), \qquad (7,37)$$

$$F_i^{5а, б}(s, t) = F_i^{9а, б}(s, t). \qquad (7,38)$$

Теперь установим соотношения между амплитудами рассматриваемых процессов при наличии симметрии группы G_2. Поскольку λ-гиперон в этой модели является синглетом, то волновые функции конечных состояний в рассматриваемых процессах с участием λ-гиперона (7,9а,в) и (7,11б) принадлежат представлению $D^7(1, 0)$. Волновые функции других состояний являются произведениями двух представлений $D^7(1, 0)$. Эти произведения разлагаются на неприводимые представления следующим образом:

$$D^7(1, 0) \times D^7(1, 0) = D^1(0, 0) + D^7(1, 0) + D^{14}(0, 1) + D^{27}(2, 0).$$

Поэтому матричные элементы процессов с участием λ-гиперона выражаются через одну и ту же амплитуду $F_i^{(1, 0)}$. Они пропорциональны друг другу:

$$F_i^{9а}(s, t) = -F_i^{9б}(s, t), \qquad (7,39)$$

$$F_i^{11а}(s, t) = -F_i^{11б}(s, t). \qquad (7,40)$$

Напомним, что между этими амплитудами имеет место изотопическое соотношение (7,24). Что касается амплитуд остальных рассматриваемых процессов, то они выражаются через четыре независимые амплитуды

$$F_i^{(0, 0)}, \quad F_i^{(1; 0)}, \quad F_i^{(0, 1)} \text{ и } F_i^{(2, 0)}.$$

Коэффициенты при этих независимых амплитудах можно вычислить с помощью коэффициентов Клебша — Гордана группы G_2 [46]. В результате мы получим

$$F_i^{1а, б}(s, t) = F_i^{4а, б}(s, t), \qquad (7,41)$$

$$F_i^{5а, б}(s, t) = -F_i^{6а, б}(s, t), \qquad (7,42)$$

$$F_i^{8а, б}(s, t) = -F_i^{2а, б}(s, t), \qquad (7,43)$$

$$F_i^{7а, б}(s, t) = F_i^{13а, б}(s, t), \qquad (7,44)$$

$$F_i^{1а, б}(s, t) - F_i^{7б, а}(s, t) = F_i^{3б, а}(s, t). \qquad (7,45)$$

Соотношения	Модель и метод	Литература
$\sigma(\pi^{\pm}p \to \pi^{\pm}p) - \frac{1}{2}\sigma(\pi^{-}p \to \pi^{0}n) \geqslant 0$	I, Ф.—Л.	27
$\sigma(\pi^{\pm}p \to \pi^{\pm}p) - \frac{1}{2}\sigma(\pi^{-}p \to \pi^{0}n) = \frac{1}{16\pi}[\sigma_{tot}(\pi^{\pm}p)]^2,\ t=0$	I, Ф.—Л.	21, 27
$\sigma(K^{-}p \to K^{0}\Xi^{0}) - \frac{1}{4}\sigma(K^{-}p \to K^{+}\Xi^{-}) > 0$	I, Ф.—Л.	27
$P(\pi^{-}p \to \pi^{0}n) = \eta(\pi^{-}p \to \pi^{0}n) = 0$	I, Ф.—Л.	27
$\sigma(K^{-}p \to \overline{K}^{0}n) = \sigma(K^{-}p \to \pi^{-}\Sigma^{+})$	O, G_2	44–48
$\sigma(K^{0}p \to K^{+}n) = \sigma(\pi^{+}p \to K^{+}\Sigma^{+})$	O, G_2	44–48
$\sigma(\overline{K}^{0}p \to K^{+}\Xi^{0}) = \sigma(\pi^{-}p \to K^{+}\Sigma^{-})$	O, G_2	44–48
$\sigma(K^{-}p \to K^{0}\Xi^{0}) = \sigma(K^{-}p \to \pi^{+}\Sigma^{-})$	O, G_2	44–48
$\sigma(\pi^{\pm}p \to \pi^{\pm}p) = \sigma(K^{\pm}n \to K^{\pm}n)$	O, G_2	44–48
$\sigma_{tot}(\pi^{\pm}p) = \sigma_{tot}(K^{\pm}n)$	O, G_2	44–48
$\sigma(K_2^0 p \to K_1^0 p) = \frac{1}{2}\sigma(\pi^{-}p \to \pi^{0}n)$	O, G_2, Ф.—Л.	27
$\sigma(\pi^{\pm}p \to \pi^{\pm}p) = \sigma(K_2^0 p \to K_2^0 p) + \sigma(K_2^0 p \to K_1^0 p)$	O, G_2, Ф—Л.	27
$\sigma(\pi^{-}p \to K^{0}\Sigma^{0}) - \frac{1}{4}\sigma(\pi^{-}p \to \pi^{0}n) \geqslant 0$	O, Ф.—Л.	27
$\sigma(\pi^{-}p \to K^{0}\lambda) - \frac{3}{4}\sigma(\pi^{-}p \to \pi^{0}n) \geqslant 0$	O, Ф.—Л.	27
$\sigma(\pi^{\pm}p \to \pi^{\pm}p) = \sigma(K^{\pm}p \to K^{\pm}p)$	T	44–48
$\sigma_{tot}(\pi^{\pm}p) = \sigma(K^{\pm}p)$	T	44–48
$\sigma(K^{-}p \to \overline{K}^{0}n) = \sigma(\pi^{-}p \to K^{0}\lambda)$	T	44–48
$\sigma(K^{0}p \to K^{+}n) = \sigma(\overline{K}^{0}p \to \pi^{+}\lambda)$	T	44–48
$\sigma(K^{+}n \to K^{+}n) = \sigma(K^{-}n \to K^{-}n)$	T	44–48
$\sigma_{tot}(K^{+}n) = \sigma_{tot}(K^{-}n)$	T	44–48
$\sigma(K_{2p}^0 \to K_{2p}^0) = \sigma(K^{\pm}n \to K^{\pm}n)$	T	27
$\sigma_{tot}(K_{2p}^0) = \sigma_{tot}(K^{\pm}n)$	T	27
$\sigma_{tot}(K_2^0 p \to K_1^0 p) = 0$	T	27
$P(K^{\pm}n \to K^{\pm}n) = \eta(K^{\pm}n \to K^{\pm}n) = 0$	T, Ф.—Л.	27
$\sigma(\pi^{-}p \to K^{0}\Sigma^{0}) = \sigma(\pi^{-}p \to \pi^{0}n)$	G_2	27
$\sigma(\gamma p \to \pi^{+}n) = \sigma(\gamma p \to K^{+}\lambda)$	T	44
$P(\gamma n \to K^{0}\lambda) = -\eta(\gamma n \to K^{0}\lambda)$	T, Ф.—Л.	23
$P(\gamma p \to K^{0}\Sigma^{+}) = -\eta(\gamma p \to K^{0}\Sigma^{+})$	O, Ф.—Л.	23

3. Асимптотические соотношения для сечений и поляризаций

На основе соотношений между амплитудами мезон-барионного рассеяния, вытекающих из свойств симметрии взаимодействий, и асимптотических соотношений между амплитудами перекрестных процессов можно получить ряд простых асимптотических равенств для дифференциальных сечений, поляризаций, параметров асимметрии рассматриваемых процессов. Для сравнения мы выписали в виде таблицы все соотношения, полученные в [27] и в других работах. Через $\sigma(\pi^+p \to K^+\Sigma^+)$ обозначено дифференциальное сечение процесса $\pi^+ + p \to K^+ + \Sigma^+$ при некотором t, через $P(\pi^+p \to K^+\Sigma^+)$ — поляризация Σ^+-гиперона в этом процессе с неполяризованным протоном, через $P(\gamma p \to \pi^+n)$ — поляризация нейтрона в процессе фоторождения $\gamma + p \to \pi^+ + n$ с неполяризованными начальными частицами и через $\eta(\gamma p \to \pi^+n)$ — параметр асимметрии в этом процессе с поляризованным протоном. В таблице также указано, в какой модели имеет место данное соотношение и применяется ли при доказательстве этого соотношения теорема Фрагмена — Линделёфа (или теорема Померанчука) или нет. Мы используем следующие обозначения для названия моделей: I — изотопическая инвариантность, О — октетная модель с R-инвариантностью, Т — триплетная модель, G_2 — модель с группой симметрии G_2, Ф.— Л.— теорема Фрагмена — Линделёфа.

§ 8. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ АМПЛИТУДАМИ ПРОЦЕССОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ

1. Кинематика

Выше были получены асимптотические соотношения между амплитудами бинарных перекрестных процессов (рассеяния и фоторождения). На основе этих соотношений были установлены асимптотические соотношения для дифференциальных сечений и поляризаций. В настоящем параграфе мы установим асимптотические соотношения между амплитудами процессов с переменным числом частиц и, в частности, получим асимптотические равенства дифференциальных сечений для этих процессов.

Для простоты рассмотрим процессы рождения π-мезонов в мезон-нуклонных столкновениях:

$$\pi + N \to \pi' + \pi'' + N', \tag{I}$$

$$\bar{\pi} + N' \to \bar{\pi}' + \bar{\pi}'' + N, \tag{II}$$

где через π, π' или π'' обозначен один из π-мезонов, а через N или N' обозначен p или n. Рассуждения, приведенные ниже, с небольшими изменениями кинематического характера могут быть применены к любым другим процессам вида

$$a + b \to c + d + e, \tag{I'}$$

$$\bar{a} + e \to \bar{c} + \bar{d} + b. \tag{II'}$$

Процессы (I) и (II) или (I′) и (II′) в дальнейшем мы будем называть перекрестными. Аналогичное определение перекрестных процессов фоторождения было дано в § 5.

Рассмотрим, например, процесс (I). Обозначим 4-импульсы нуклонов в начальном и конечном состояниях через p и p' соответственно,

а 4-импульсы мезонов через q, q' и q'':

$$p+q=p'+q'+q'', \tag{8,1}$$

$$p^2=p'^2=-M^2, \qquad q^2=q'^2=q''^2=-m^2, \tag{8,2}$$

где M и m — массы нуклона и мезона. Введем для удобства следующие более симметричные обозначения для импульсов и их квадратов:

$$p_1=p, \quad p_2=q, \quad p_3=-p', \quad p_4=-q', \quad p_5=-q'', \quad p_j^2=-m_j^2. \tag{8,3}$$

Кинематика процесса с участием пяти частиц характеризуется пятью инвариантами, которые можно выбрать из следующих десяти переменных:

$$s_{ij}=-(p_i+p_j)^2, \qquad i, j=1, 2, 3, 4, 5; \tag{8,4}$$

между величинами s_{ij} и m_j^2 существуют пять линейных соотношений

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{5} s_{ij}=m_i^2+\sum_{j=1}^{5} m_j^2, \qquad i=1, 2, 3, 4, 5, \tag{8,5}$$

или

$$s_{ij}+s_{jk}+s_{ki}-s_{ln}=m_i^2+m_j^2+m_k^2, \tag{8,6}$$

где i, j, k, l, n — любая перестановка чисел 1, 2, 3, 4, 5 (среди 120 равенств (8,6) имеются только пять независимых; они эквивалентны равенствам (8,5)).

Следуя работам [51,52], мы выберем следующие независимые переменные:

$$\begin{aligned} &t\equiv s_{13}=-(p-p')^2, \qquad t''\equiv s_{25}=-(q-q'')^2,\\ &w^2\equiv s_{45}=-(q'+q'')^2, \qquad e^{2\xi}=\frac{q'(p+p')}{q''(p+p')}, \qquad \omega=\frac{q(p+p')}{4\operatorname{ch}\xi\sqrt{M^2-\frac{t}{4}}}. \end{aligned} \tag{8,7}$$

Такой выбор переменных удобен тем, что, фиксируя переменные $t\leqslant 0$, $t''\leqslant 0$, $w^2\geqslant 4m^2\operatorname{ch}\xi$, ξ, можно устремить энергетическую переменную ω к бесконечности, оставаясь в физической области. Три первые переменные, t, t'' и w^2, имеют ясный физический смысл. Энергетическая переменная ω связана с полной энергией реакции в системе центра масс:

$$s\equiv s_{12}=4\omega\operatorname{ch}\xi\sqrt{M^2-\frac{t}{4}}+M^2+\frac{m^2+w^2-t}{2}. \tag{8,8}$$

Что касается переменных ξ, то при больших ω она определяет отношение энергии системы нуклона и одного из мезонов в конечном состоянии, например $\sqrt{s_{34}}$, к полной энергии процесса ($\sqrt{s}$). Действительно, нетрудно проверить, что

$$\left.\begin{aligned} u&\equiv s_{23}=-(q-p')^2=-4\omega\operatorname{ch}\xi\sqrt{M^2-\frac{t}{4}}+M^2+\frac{m^2+w^2-t}{2},\\ s'&\equiv s_{34}=-(q'+p')^2=2\omega e^{\xi}\sqrt{M^2-\frac{t}{4}}+M^2+\frac{m^2+t''-t}{2},\\ u'&\equiv s_{14}=-(q'-p)^2=-2\omega e^{\xi}\sqrt{M^2-\frac{t}{4}}+M^2+\frac{m^2+t''-t}{2},\\ s''&\equiv s_{35}=-(q''+p')^2=2\omega e^{-\xi}\sqrt{M^2-\frac{t}{4}}+M^2+2m^2-\frac{w^2+t''}{2},\\ u''&\equiv s_{15}=-(q''-p)^2=-2\omega e^{-\xi}\sqrt{M^2-\frac{t}{4}}+M^2+2m^2-\frac{w^2+t''}{2},\\ t'&\equiv s_{24}=-(q-q')^2=3m^2+t-t''+w^2, \end{aligned}\right\} \tag{8,9}$$

и

$$e^{2\xi}=\frac{s'-u'}{s''-u''}\xrightarrow[s\to\infty]{}\frac{s'}{s-s'}. \tag{8,10}$$

Вместо векторов q' и q'' удобно ввести ортогональные между собой векторы Q и Δ по формулам

$$\begin{aligned}\Delta&=\frac{1}{2}(e^{-\xi}q'-e^{\xi}q''),\\ Q&=\frac{1}{2}(e^{-\xi}q'+e^{\xi}q'')+\frac{m^2}{2\Delta^2}\operatorname{sh}2\xi\Delta.\end{aligned} \tag{8,11}$$

Мы будем рассматривать процессы (I) и (II) в системе Брайта для нуклона

$$\mathbf{p}+\mathbf{p}'=0. \tag{8,12}$$

Тогда среди векторов p, p', Q и Δ, через которые можно выразить (линейно) любой 4-вектор, только вектор Q зависит от ω.

Отметим также, что при выбранных переменных дифференциальное сечение будет

$$\frac{d^4\sigma^J(s,\ t,\ t'',\ w^2,\ \xi)}{dt\,dt''\,dw^2\,d\xi}.$$

2. Свойства асимптотической амплитуды

Запаздывающая амплитуда процесса (I) может быть записана в виде [51–53]

$$T^{\mathrm{I}}(p,\ q;\ p',\ q',\ q'')=\int d^4x'\,d^4x''e^{-i(q'x'+q''x'')}\left\langle p'\left|\frac{\delta^2 j_\pi(0)}{\delta\varphi_{\pi'}(x')\,\delta\varphi_{\pi''}(x'')}\right|p\right\rangle=$$

$$=T^{\mathrm{ret}}(\omega)=\int d^4x\,d^4y e^{i(Qx+\Delta y)}F^{\mathrm{ret}}(x,\ y), \tag{8,13}$$

где

$$j_\pi(x)=i\frac{\delta S}{\delta\varphi_\pi^+(x)}S^+. \tag{8,14}$$

В силу условия микропричинности

$$F^{\mathrm{ret}}(x,\ y)\neq 0$$

лишь в области

$$x>0,\quad -\left(1-\frac{m^2}{2\Delta^2}\operatorname{sh}2\xi\right)x<y<\left(1+\frac{m^2}{2\Delta^2}\operatorname{sh}2\xi\right)x. \tag{8,15}$$

Вводя обозначение

$$G^{\mathrm{ret}}(x_0,\ x_1)=\int dx_2\,dx_3\,d^4y e^{i(\Delta y-Q_2x_2-Q_3x_3)}F^{\mathrm{ret}}(x,\ y), \tag{8,16}$$

мы можем написать $T^{\mathrm{ret}}(\omega)$ в виде

$$T^{\mathrm{ret}}(\omega)=\int dx_0\,dx_1\,e^{i\left\{\omega x_0-\sqrt{\omega^2-\omega_0^2x_1}\right\}}G^{\mathrm{ret}}(x_0,\ x_1), \tag{8,17}$$

где ω_0 определяется формулой (8,18)

$$4\operatorname{ch}^2\xi\omega_0^2=w^2+\frac{w^4}{4\Delta^2}\frac{\operatorname{sh}^2\xi}{\sin^2\alpha}-\frac{(w^2+t-m^2)^2}{4t\sin^2\alpha}+\frac{w^2(w^2+t-m^2)}{4|\Delta||\mathbf{p}_1|}-\frac{\operatorname{sh}\xi\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{8,18}$$

$$\cos\alpha=\frac{(w^2-m^2)e^{\xi}-te^{-\xi}-2(m^2-t'')\operatorname{ch}\xi}{8|\Delta||\mathbf{p}|}. \tag{8,19}$$

Так как амплитуду $T^{\text{ret}}(\omega)$ мы рассматриваем как функцию от ω при фиксированных остальных переменных, то в (8,17) ω_0 является постоянной.

Далее, следуя работе [54], мы заменим амплитуду (8,17) следующей асимптотической амплитудой:

$$T_{\infty}^{\text{ret}}(\omega) = \int dx_0\, dx_1\, e^{i\omega(x_0-x)}\, G^{\text{ret}}(x_0, x_1). \tag{8,20}$$

Дончевым установлены общие условия, при которых $T^{\text{ret}}(\omega)$ и $T_{\infty}^{\text{ret}}(\omega)$ асимптотически совпадают, т. е.

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{T^{\text{ret}}(\omega)}{T_{\infty}^{\text{ret}}(\omega)} = 1.$$

Это равенство заведомо выполняется, если амплитуда не осциллирует слишком быстро, и при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно больших ω ограничена неравенством

$$B_{\varepsilon} e^{-\varepsilon|\omega|} < |T^{\text{ret}}(\omega)| \leqslant A_{\varepsilon} e^{\varepsilon|\omega|}. \tag{8,21}$$

В силу условия микропричинности $G^{\text{ret}}(x_0, x_1) \neq 0$ только при $x_0 > |x_1|$. Поэтому функция $T_{\infty}^{\text{ret}}(\omega)$ аналитична в верхней полуплоскости ω (т. е. при $\operatorname{Im}\omega > 0$) и к ней можно применить теорему Фрагмена—Линделёфа.

Теперь установим соотношения перекрестной симметрии между амплитудами процессов (I) и (II). Обозначим через p и p' 4-импульсы нуклонов в начальном и конечном состояниях процесса (II), а 4-импульсы мезонов — через q, q' и q'' соответственно. Амплитуда этого процесса имеет вид

$$T^{\text{II}}(p, q; p', q', q'') = \int d^4x'\, d^4x''\, e^{-i(q'x'+q''x'')} \left\langle p' \left| \frac{\delta^2 j_{\pi}^{+}(0)}{\delta\varphi_{\pi'}^{+}(x')\, \delta\varphi_{\pi''}^{+}(x'')} \right| p \right\rangle. \tag{8,22}$$

Рассмотрим амплитуду (8,22) в нефизической области $T^{\text{II}}(p_1', -q;\ p, -q', -q'')$. Для этих значений импульсов мы имеем также закон сохранения (8,1). Тогда

$$T^{\text{II}}(p', -q;\ p, -q', -q'') = \left[\int d^4x'\, d^4x''\, e^{-i(q'x'+q''x'')} \left\langle p' \left| \frac{\delta^2 j_{\pi}(0)}{\delta\varphi_{\pi'}(x')\, \delta\varphi_{\pi''}(x'')} \right| p \right\rangle \right]^*, \tag{8,23}$$

т. е. мы получаем соотношение перекрестной симметрии между амплитудами процессов (I) и (II)

$$T^{\text{I}}(p, q;\ p', q', q'') = T^{\text{II}}(p', -q;\ p, -q', -q'')^*. \tag{8,24}$$

3. Асимптотическое равенство дифференциальных сечений

Из соображений инвариантности следует, что амплитуды $T^J(p, q;\ p', q', q'')$ имеют вид

$$T^J(p, q;\ p', q', q'') = \sum_{i=1}^{4} \bar{u}(p')\, \Gamma_i u(p)\, F_i^J(\omega, t, t'', w^2, \xi), \tag{8,25}$$

где

$$M_1 = \gamma_5,\ M_2 = i(\hat{q}_1 + \hat{q}_2)\gamma_5,\ M_3 = i(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)\gamma_5,\ M_4 = (\hat{q}_1 + \hat{q}_2)(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)\gamma_5. \tag{8,26}$$

Подставляя (8,25) и (8,26) в (8,24), мы получим соотношения перекрестной симметрии между инвариантными амплитудами

$$\left.\begin{aligned} &F_i^{\mathrm{I}}(-\omega, t, t'', w^2, \xi) = -F_i^{\mathrm{II}}(\omega, t, t'', w^2, \xi)^*, && i=1, 2, 3, \\ &F_i^{\mathrm{I}}(-\omega, t, t'', w^2, \xi) = F_i^{\mathrm{II}}(\omega, t, t'', w^2, \xi)^*, && i=4. \end{aligned}\right\} \tag{8,27}$$

Дифференциальные сечения процессов (I) и (II)

$$\frac{d^4\sigma^J(s, t, t'', w^2, \xi)}{dt\, dt''\, dw^2\, d\xi}$$

пропорциональны величинам

$$H^J = \sum_{i=1}^{4} A_i |F_i^J|^2 + \sum_{i<j} A_{ij} \operatorname{Re} F_i^J F_j^{J*}, \tag{8,28}$$

где в асимптотике (s, $\omega \to \infty$)

$$\left.\begin{aligned} &A_1 = -2t, \quad A_2 = 2(s'+s'')^2, \quad A_3 = 2(s'-s'')^2, \\ &A_4 = 2(s'+s'')^2(w^2-4m^2) + 2(s'-s'')^2 w^2, \\ &A_{12} = 4M(t'+t''-2t), \quad A_{13} = 4M(t''-t'), \\ &A_{14} = -4[(t+m^2)(s'-s'') - t's' + t''s''], \\ &A_{23} = 4(s'^2-s''^2), \quad A_{24} = 8M(s'-s'')w^2, \\ &A_{34} = 8M(s'+s'')(w^2-4m^2). \end{aligned}\right\} \tag{8,29}$$

Пользуясь выражениями (8,28) и (8,29) для сечений и соотношением перекрестной симметрии (8,27), с помощью развитого выше метода можно доказать асимптотическое равенство дифференциальных сечений процессов (I) и (II). В частности, имеет место асимптотическое равенство дифференциальных сечений процессов

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + \pi^0 + p \quad \text{и} \quad \pi^- + p \to \pi^- + \pi^0 + p \tag{8,30}$$

при $s \to \infty$ и фиксированных t, t'', w^2 и ξ.

В случае образования систем двух π-мезонов в резонансном состоянии с $J = 1$, $I = 1$ (ϱ-мезон) имеем равенство дифференциальных сечений для процессов

$$\pi^+ + p \to \varrho^+ + p \quad \text{и} \quad \pi^- + p \to \varrho^- + p. \tag{8,31}$$

Обсудим возможные обобщения полученных результатов. Выше мы рассмотрели случай, когда полная энергия системы двух π-мезонов (в системе центра масс этих двух частиц) w фиксирована, а полная энергия системы нуклона и одного из мезонов (в с. ц. м. этих частиц) $w_{\pi N}$ стремится к бесконечности вместе с полной энергией реакции $\sqrt{s}$ (ξ фиксировано). Аналогичным образом можно также рассмотреть случай, когда энергия w фиксирована, а энергия $w_{\pi N}$ стремится к бесконечности вместе с $\sqrt{s}$, и доказать равенство дифференциальных сечений. В случае образования систем нуклон — мезон в резонансном состоянии мы имеем равенство дифференциальных сечений процессов, например:

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + \Delta^+ \quad \text{и} \quad \pi^- + p \to \pi^- + \Delta^+, \tag{8,32}$$
$$\qquad\qquad \hookrightarrow p + \pi^0 \qquad\qquad\qquad\qquad \hookrightarrow p + \pi^0$$

$$\pi^+ + n \to \pi^+ + \Delta^0 \quad \text{и} \quad \pi^- + p \to \pi^- + \Delta^0. \tag{8,33}$$
$$\qquad\qquad \hookrightarrow p + \pi^- \qquad\qquad\qquad\qquad \hookrightarrow p + \pi^-$$

Далее можно рассмотреть также случай мезонов с различными массами и, в частности, получить асимптотические равенства дифференциальных сечений для процессов

$$K^+ + p \to K^+ + \pi^0 + p \quad \text{и} \quad K^- + p \to K^- + \pi^0 + p, \tag{8,34}$$

$$K^+ + p \to K^0 + \pi^+ + p \quad \text{и} \quad K^- + p \to \overline{K^0} + \pi^- + p, \tag{8,35}$$

$$\pi^- + p \to K^+ + K^- + n \quad \text{и} \quad \pi^+ + n \to K^- + K^+ + p. \tag{8,36}$$

В случае образования систем двух мезонов или систем мезон—нуклон в резонансном состоянии, мы имеем соответственно равенства дифференциальных сечений для процессов

$$K^+ + p \to K^{++} + p \quad \text{и} \quad K^- + p \to K^{+-} + p, \tag{8,37}$$

$$\pi^- + p \to \varphi + n \quad \text{и} \quad \pi^+ + n \to \varphi + p \tag{8,38}$$

или

$$K^+ + p \to K^+ + \Delta^+ \quad \text{и} \quad K^- + p \to K^- + \Delta^+ \quad . \tag{8,39}$$
$$\qquad\qquad \hookrightarrow p + \pi^0 \qquad\qquad\qquad\qquad \hookrightarrow p + \pi_0$$

Аналогично можно рассмотреть также процессы фоторождения двух мезонов и процессы рождения мезонов в нуклон-нуклонных столкновениях, например:

$$\gamma + p \to \pi^+ + \pi^0 + n \quad \text{и} \quad \gamma + n \to \pi^- + \pi^0 + p, \tag{8,40}$$

$$p + p \to n + \pi^+ + p \quad \text{и} \quad \bar{n} + p \to \bar{p} + \pi^+ + p, \tag{8,41}$$

$$p + p \to p + \pi^0 + p \quad \text{и} \quad \bar{p} + p \to \bar{p} + \pi^0 + p, \tag{8,42}$$

а в частном случае

$$\gamma + p \to \varrho^+ + n \quad \text{и} \quad \gamma + n \to \bar{\varrho} + p, \tag{8,43}$$

$$p + p \to n + \Delta^{++} \quad \text{и} \quad \bar{n} + p \to \bar{p} + \Delta^{++} \quad , \tag{8,44}$$
$$\qquad\qquad \hookrightarrow p + \pi^+ \qquad\qquad\qquad\qquad \hookrightarrow p + \pi^+$$

$$p + p \to p + \Delta^+ \quad \text{и} \quad \bar{p} + p \to \bar{p} + \Delta^+ \quad . \tag{8,45}$$
$$\qquad\qquad \hookrightarrow p + \pi^0 \qquad\qquad\qquad\qquad \hookrightarrow p + \pi^0$$

§ 9. АСИМПТОТИКА ФОРМ-ФАКТОРОВ

Для электромагнитного и слабого взаимодействий можно применить теорию возмущений и ограничиться низшим порядком, поскольку в этих случаях константы взаимодействия малы и высшие приближения несущественны (по крайней мере в области энергий, достигнутых в настоящее время). Учет вклада сильных взаимодействий приводит к появлению форм-факторов. Аналитические свойства форм-факторов и теорема Фрагмена — Линделёфа также позволяют сделать некоторые заключения относительно асимптотики этих форм-факторов.

Рассмотрим сначала электромагнитное рассеяние электрона на протоне

$$e^- + p \to e^- + p$$

и процесс аннигиляции пары протон — антипротон в пару электрон — позитрон

$$\bar{p} + p \to e^+ + e^-.$$

В e^2-приближении оба эти процесса описываются двумя форм-факторами $F_1(t)$ и $F_2(t)$. Вместо форм-факторов $F_1(t)$ и $F_2(t)$ удобно воспользоваться форм-факторами

$$G_E(t) = F_1(t) + \frac{t}{4M^2}\mu F_2(t),$$

$$G_\mu(t) = F_1(t) + \mu F_2(t),$$

причем для первого процесса $t = -(p_1 - p_2)^2$ — передачи импульса, а для второго $t = -(p_1 + p_2)^2$ — квадрат энергии. Дифференциальные сечения рассматриваемых процессов выражаются через квадраты модулей форм-факторов G_E и G_μ.

Аналогичная ситуация имеет место в теории слабых взаимодействий. Например, в низшем порядке теории возмущений по слабым взаимодействиям матричные элементы двух процессов

$$\bar{\nu} + p \to e^+ + n,$$

$$\bar{n} + p \to e^+ + \nu$$

также выражаются через одни и те же форм-факторы $H_i(t)$.

Дисперсионные соотношения для электромагнитных форм-факторов и форм-факторов слабых взаимодействий были установлены в ряде работ. Эти дисперсионные соотношения не доказаны из общих принципов локальной квантовой теории поля. Однако на основании теории возмущений можно утверждать, что рассматриваемые форм-факторы $F_i(t)$, $H_i(t)$ являются аналитическими функциями в плоскости комплексных t с разрезом вдоль положительной вещественной оси [55]. В локальной квантовой теории поля форм-факторы возрастают не быстрее полинома в комплексной плоскости t. Предположим, что при $t \to \pm\infty$ форм-факторы имеют определенный рост, а не осциллируют. При этом из теоремы Фрагмена — Линделёфа следует, что модуль отношения форм-факторов $G_i(t)/G_i(-t)$, $i = \mu$, E, или $E_i(t)/H_i(-t)$ стремится к единице при $t \to \infty$. Это позволяет связать сечения процессов рассеяния и аннигиляции, если низший порядок теории возмущений по электромагнитному или слабому взаимодействиям хорошо описывает рассматриваемые процессы.

В связи с асимптотическим равенством модулей форм-факторов при $t \to \pm\infty$ представляет особый интерес случай, когда форм-факторы стремятся к постоянным при $t \to \pm\infty$. Предположим, что это имеет место с некоторым форм-фактором $F_i(t)$. Из теоремы II следует, что предельные значения этого форм-фактора при $t \to \pm\infty$ должны совпадать, т. е.

$$\lim_{t\to+\infty} F_i(t) = \lim_{t\to-\infty} F_i(t). \tag{9,1}$$

Но на отрицательной вещественной оси форм-фактор не имеет мнимой части. Поэтому при $t \to +\infty$ мнимая часть $F_i(t)$ стремится к нулю и сходится интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F_i(t')}{t'-t}\,dt'. \tag{9,2}$$

Интеграл по большому кругу радиуса R равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_R} \frac{F_i(e^{i\varphi}R)}{(e^{i\varphi}R - t)}\,\mathrm{R}e^{i\varphi}\,d\varphi. \tag{9,3}$$

Согласно теореме II $F_i(e^{i\varphi}R)$ стремится равномерно к $F_i(\infty)$ при $R \to \infty$, поэтому интеграл по большому кругу стремится к конечному пределу $F_i(\infty)$ и дисперсионные соотношения имеют вид

$$F_i(t) = F_i(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F_i(t')}{t'-t} dt', \qquad \operatorname{Im} F_i(\infty) = 0. \tag{9,4}$$

§ 10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теперь мы резюмируем полученные результаты. Основываясь на главных принципах локальной квантовой теории поля и на некотором общем предположении о поведении амплитуд рассеяния при $s \to \infty$ и фиксированном t, мы получили асимптотические соотношения между амплитудами перекрестных процессов. Из этих соотношений для амплитуд можно установить ряд асимптотических соотношений между дифференциальными и полными сечениями, а также между поляризациями, параметрами асимметрии и т. д.

Метод доказательства подробно изложен в § 2, где были рассмотрены перекрестные процессы рассеяния скалярных частиц (I) и (II). Эти процессы характеризуются инвариантными амплитудами $T^{\mathrm{I}}(s, t)$ и $T^{\mathrm{II}}(s, t)$, связанными между собой соотношением перекрестной симметрии. Если при фиксированном t и $s \to \infty$ эти амплитуды не осциллируют, а имеют определенный (степенной или логарифмический) рост, то из теоремы Фрагмена — Линделёфа и соотношения перекрестной симметрии следует асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями рассматриваемых процессов (I) и (II).

В случае упругого рассеяния это асимптотическое равенство можно получить из более слабых предположений. В этом случае имеется основание предполагать, что при $s \to \infty$ и фиксированном t, принадлежащем некоторому интервалу, мнимые части $\operatorname{Im} T^J(s, t)$ неотрицательны. При этом предположении доказано, что если дифференциальные сечения процессов (I) и (II) не осциллируют, а имеют определенный рост при $s \to \infty$ и фиксированном t, эти дифференциальные сечения асимптотически равны друг другу.

Кроме асимптотического равенства дифференциальных сечений для амплитуд упругого рассеяния вперед имеется ряд других асимптотических соотношений. Например, если при $s \to \infty$ дифференциальные сечения упругого рассеяния вперед ($t = 0$) и полные сечения взаимодействия стремятся к постоянным значениям, эти полные сечения взаимодействия для частицы и античастицы равны между собой. Это — известная теорема И. Я. Померанчука. Более того, в этом случае амплитуды упругого рассеяния вперед для процессов, переходящих в себя в перекрестном преобразовании (т. е. амплитуды упругого рассеяния вперед истинно нейтральных частиц), чисто мнимы, и между дифференциальным сечением рассеяния вперед и полным сечением имеет место асимптотическое соотношение

$$\left.\frac{d\sigma(s, t)}{dt}\right|_{t=0} \sim \frac{1}{16\pi} [\sigma_{\mathrm{tot}}(s)]^2. \tag{10,1}$$

Теорема Фрагмена — Линделёфа также позволяет сделать некоторое заключение относительно поведения форм-факторов $F_i(t)$ при $t \to \pm\infty$. Если при $t \to \pm\infty$ они не осциллируют, то модули отношений $G_i(t)/G_i(-t)$ стремятся к единице. В частности, когда $G_i(t)$ стремятся к постоянным $G_i(\infty)$, на положительной оси мнимые части стремятся

к нулю и можно написать дисперсионные соотношения в виде

$$G_i(t) = G_i(\infty) + \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} G_i(t')}{t'-t}\,dt', \qquad \operatorname{Im} G_i(\infty) = 0. \tag{10,2}$$

Асимптотические соотношения между амплитудами перекрестных процессов мезон-барионного и барион-барионного рассеяний были рассмотрены в § 3 и 4. Из полученных асимптотических соотношений между инвариантными амплитудами перекрестных процессов были установлены асимптотические равенства между дифференциальными сечениями этих процессов при $s \to \infty$ и фиксированном t, между полными сечениями взаимодействия частицы и античастицы, а также некоторые асимптотические соотношения между поляризациями и параметрами асимметрии.

В частности, было показано, что при больших энергиях и фиксированной передаче импульса имеют место асимптотические равенства между дифференциальными сечениями процессов в каждой из следующих пар:

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p \quad \text{и} \quad \pi^- + p \to \pi^- + p, \tag{10,3}$$

$$K^+ + p \to K^+ + p \quad \text{и} \quad K^- + p \to K^- + p, \tag{10,4}$$

$$\pi^+ + p \to K^+ + \Sigma^+ \quad \text{и} \quad K^- + p \to \pi^- + \Sigma^+, \tag{10,5}$$

$$\pi^- + p \to K^0 + \lambda \quad \text{и} \quad \overline{K^0} + p \to \pi^+ + \lambda, \tag{10,6}$$

$$K^- + p \to K^0 + \Xi^0 \quad \text{и} \quad \overline{K^0} + p \to K^+ + \Xi^0, \tag{10,7}$$

$$\Sigma^+ + \mathrm{He} \to p + \mathrm{He}_\lambda \quad \text{и} \quad \bar{p} + \mathrm{He} \to \bar{\Sigma}^+ + \mathrm{He}_\lambda, \tag{10,8}$$

$$p + p \to p + p \quad \text{и} \quad \bar{p} + p \to \bar{p} + p, \tag{10,9}$$

$$\Sigma^+ + p \to \Sigma^+ + p \quad \text{и} \quad \bar{\Sigma}^+ + p \to \bar{\Sigma}^+ + p, \tag{10,10}$$

$$\Sigma^- + p \to \lambda + n \quad \text{и} \quad \bar{\lambda} + p \to \bar{\Sigma}^- + n, \tag{10,11}$$

$$\Sigma^+ + p \to p + \Sigma^+ \quad \text{и} \quad \bar{p} + p \to \bar{\Sigma}^+ + \Sigma^+, \tag{10,12}$$

$$\Sigma^- + p \to n + \lambda \quad \text{и} \quad \bar{n} + p \to \bar{\Sigma}^- + \lambda \tag{10,13}$$

и т. д.

Во всех этих процессах t определяется как переданный импульс между первой частицей в начальном состоянии и первой частицей в конечном состоянии. Для последних процессов (10,12) и (10,13) эта передача импульса часто обозначается через u. Здесь имеет место асимптотическое равенство между дифференциальным сечением рассеяния гиперона назад и дифференциальным сечением аннигиляции пары нуклон—антинуклон на пару гиперон—антигиперон.

Если полные сечения взаимодействия стремятся к постоянным при $s \to \infty$, а дифференциальные сечения упругого рассеяния вперед ограничены, то имеют место асимптотические равенства между полными сечениями взаимодействия частиц и античастиц:

$$\sigma_{\mathrm{tot}}(\pi^+ p) \sim \sigma_{\mathrm{tot}}(\pi^- p), \tag{10,14}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}}(K^+ p) \sim \sigma_{\mathrm{tot}}(K^- p), \tag{10,15}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}}(pp) \sim \sigma_{\mathrm{tot}}(\bar{p}p), \tag{10,16}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}}(\Sigma^+ p) \sim \sigma_{\mathrm{tot}}(\bar{\Sigma}^+ p). \tag{10,17}$$

В этом случае между дифференциальным сечением процесса

$$K_2^0 + p \to K_2^0 + p \tag{10,18}$$

и полным сечением взаимодействия K_2^0-мезона с протоном имеет место асимптотическое равенство

$$\left.\frac{d\sigma\,(K_{2p}^0 \to K_{2p}^0)}{dt}\right|_{t=0} \sim \frac{1}{16\pi}\,[\sigma_{\text{tot}}\,(K_{2p}^0)]^2. \qquad (10,19)$$

Если учитывать изотопическую инвариантность, то в случае πN-рассеяния имеет место также асимптотическое равенство

$$\left[\frac{d\sigma\,(\pi^{\pm}p \to \pi^{\pm}p)}{dt} - \frac{1}{2}\,\frac{d\sigma\,(\pi^{-}p \to \pi^{0}n)}{dt}\right]_{t=0} \sim \frac{1}{16\pi}\,[\sigma_{\text{tot}}\,(\pi^{\pm}p)]^2. \qquad (10,20)$$

Между поляризациями и параметрами асимметрии в рассматриваемых процессах также были получены некоторые асимптотические состояния. Если протоны в начальных состояниях не поляризованы, то поляризации барионов отдачи в процессах каждой из пар (10,3) —(10,7) равны по величине и противоположны по знаку, независимо от четностей частиц (для неупругих процессов). Параметры асимметрии в соответствующих процессах (10,3) — (10,7) с поляризованными протонами в начальном состоянии также равны по величине и противоположны по знаку. Отсюда, в частности, следует, что для процессов, переходящих в себя в перекрестном преобразовании, например (10,18), поляризации (при неполяризованных начальных частицах) и параметры асимметрии должны стремиться к нулю при $s \to \infty$ и фиксированном t, независимо от относительного поведения инвариантных амплитуд. Это заключение справедливо и для процесса

$$\pi^- + p \to \pi^0 + n, \qquad (10,21)$$

если имеет место зарядовая симметрия. Соотношение между поляризациями барионов в конечных состояниях процессов (10,8) с неполяризованными барионами в начальных состояниях зависит от относительной четности λ- и Σ-гиперонов; если эта четность положительна, то поляризации протона и гиперона противоположны по знаку и равны по величине, а если эта четность отрицательна, то поляризации равны как по величине, так и по знаку. Такое же заключение имеет место для параметров асимметрии в процессах (10,8) с поляризованными гипероном и антипротоном в начальных состояниях. Кроме того, для каждого процесса рассматриваемая поляризация и параметр асимметрии равны друг другу, если четность положительна, и противоположны по знаку, если четность отрицательна. Поэтому между поляризацией в одном процессе и параметром асимметрии в другом имеет место следующее асимптотическое соотношение независимо от относительной четности частиц: они равны по величине и противоположны по знаку.

Для процессов упругого рассеяния мезонов полученные асимптотические соотношения между наблюдаемым и физическими величинами можно установить на основе более слабых предположений. Действительно, для этого достаточно предполагать, что наблюдаемые физические величины, входящие в полный опыт (дифференциальное сечение, параметр асимметрии и корреляции между поляризациями), не осциллируют, и мнимые части амплитуд без поворота спина неотрицательны при $s \to \infty$ и некоторых значениях t.

Для поляризаций и параметров асимметрии в процессах барион-барионного рассеяния также могут быть получены некоторые соотношения. В частности, если протоны в начальных состояниях не поляризованы, то асимптотические поляризации протонов отдачи в процессах (10,9), а также (10,10), нейтронов отдачи в (10,11), Σ^+-гиперонов отдачи

в (10,12), λ-гиперонов отдачи в (10,12) и λ-гиперонов отдачи в (10,13) равны между собой соответственно по величине и противоположны по знаку. Такое же заключение имеет место и для параметров асимметрии в процессах (10,9) — (10,13) с поляризованной мишенью. Эти асимптотические соотношения имеют место независимо от четностей частиц (для неупругих процессов). В процессах упругого рассеяния (10,9) и (10,10) имеют место аналогичные асимптотические соотношения между поляризациями первого протона в первом процессе (10,9) и антипротона во втором (с неполяризованными частицами в начальных состояниях), Σ^+- и $\bar{\Sigma}^+$-гиперонов в (10,10), а также между параметрами асимметрии в этих процессах с поляризованными падающими частицами. Между поляризациями первых частиц в конечных состояниях неупругих процессов (10,11) — (10,13): λ- и $\bar{\Sigma}^-$-гиперонов в (10,11), протона и $\bar{\Sigma}^+$-гиперона в (10,12) и нейтрона и $\bar{\Sigma}^-$-гиперона в (10,13) (с неполяризованными начальными частицами) и соответствующими параметрами асимметрии — имеет место следующее асимптотическое соотношение: поляризация первой частицы в одном процессе и соответствующий параметр асимметрии в другом процессе равны между собой для каждой пары по величине и противоположны по знаку, независимо от четности частиц. Это соотношение, конечно, также имеет место и для упругих процессов (10,9) и (10,10). Отметим, что они имеют место и для процессов мезон-барионного рассеяния и фоторождения.

Асимптотические соотношения между амплитудами перекрестных процессов фоторождения мезона на барионе были рассмотрены в § 5. Из полученных соотношений для амплитуд были установлены равенства между дифференциальными сечениями процессов и соотношения для поляризационных эффектов: поляризация в одном процессе с неполяризованными начальными частицами и параметр асимметрии в другом процессе с поляризованным начальным барионом в асимптотике равны по величине и противоположны по знаку. Эти заключения, в частности, имеют место для процессов

$$\gamma + p \to \pi^+ + n \tag{10,22}$$

и

$$\gamma + n \to \pi^- + p. \tag{10,23}$$

Отметим, что здесь не предполагается изотопическая инвариантность. Для процессов фоторождения истинно нейтральных мезонов, т. е. процессов, переходящих в себя в перекрестном преобразовании, например:

$$\gamma + p \to \pi^0 + p \tag{10,24}$$

и

$$\gamma + n \to \pi^0 + n, \tag{10,25}$$

имеет место следующее асимптотическое соотношение: поляризация (при неполяризованных начальных частицах) и параметр асимметрии (при поляризованном начальном нуклоне) равны по величине и противоположны по знаку.

Полученные в § 3 соотношения можно применить к изучению возможностей экспериментальной проверки высших симметрий сильных взаимодействий. В моделях сильных взаимодействий с высшими симметриями существуют связи между различными амплитудами рассеяния. Однако эти связи вообще довольно сложны, и из них, вообще говоря, не удается получить достаточно много информации. В этих моделях все мезоны и их античастицы принадлежат одному и тому же мультиплету, поэтому среди процессов мезон-барионного рассеяния и фоторождения имеется ряд перекрестных процессов. С помощью полученных

в § 3 асимптотических соотношений между амплитудами перекрестных процессов можно упростить соотношения, которые следуют из высших симметрий, и отсюда получить некоторые дополнительные равенства между сечениями процессов мезон-барионного рассеяния, а также соотношения для поляризационных эффектов в этих процессах и процессах фоторождения.

В § 8 развит метод доказательства асимптотических равенств дифференциальных сечений процессов с переменным числом частиц. В качестве примера был рассмотрен случай рождения π-мезона в π-мезон-нуклонных столкновениях. В частности, было доказано асимптотическое равенство дифференциальных сечений процессов

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + \pi^0 + p \quad \text{и} \quad \pi^- + p \to \pi^- + \pi^0 + p. \tag{10,26}$$

В случае образования двух π-мезонов в резонансном состоянии с $J = 1$, $I = 1$ (ϱ-мезон) мы имеем равенство дифференциальных сечений для процессов

$$\pi^+ + p \to \varrho^+ + p \quad \text{и} \quad \pi^- + p \to \varrho^- + p, \tag{10,27}$$

а в случае образования систем нуклон—мезон в резонансном состоянии мы имеем равенство дифференциальных сечений процессов, например:

$$\begin{array}{lll} \pi^+ + p \to \pi^+ + \Delta^+ & \text{и} & \pi^- + p \to \pi^- + \Delta^+ \\ \qquad\qquad\quad \hookrightarrow p + \pi^0 & & \qquad\qquad\quad \hookrightarrow p + \pi^0 \end{array}, \tag{10,28}$$

а также

$$\begin{array}{lll} \pi^+ + n \to \pi^+ + \Delta^0 & \text{и} & \pi^- + n \to \pi^- + \Delta^0 \\ \qquad\qquad\quad \hookrightarrow p + \pi^- & & \qquad\qquad\quad \hookrightarrow p + \pi^- \end{array}. \tag{10,29}$$

Далее можно рассмотреть также случай мезонов с различными массами и, в частности, получить асимптотические равенства дифференциальных сечений для процессов

$$K^+ + p \to K^+ + \pi^0 + p \quad \text{и} \quad K^- + p \to K^- + \pi^0 + p, \tag{10,30}$$

$$K^+ + p \to K^0 + \pi^+ + p \quad \text{и} \quad K^- + p \to \bar{K}^0 + \pi^- + p, \tag{10,31}$$

$$\pi^- + p \to K^+ + K^- + n \quad \text{и} \quad \pi^+ + n \to K^- + K^+ + p. \tag{10,32}$$

В случае образования систем двух мезонов или систем нуклон—мезон в резонансном состоянии мы имеем соответственно равенства дифференциальных сечений для процессов

$$K^+ + p \to K^{++} + p \quad \text{и} \quad K^- + p \to K^{+-} + p, \tag{10,33}$$

$$\pi^- + p \to \varphi + n \quad \text{и} \quad \pi^+ + n \to \varphi + p, \tag{10,34}$$

$$\begin{array}{lll} K^+ + p \to K^+ + \Delta^+ & \text{и} & K^- + p \to K^- + \Delta^+ \\ \qquad\qquad\quad \hookrightarrow p + \pi^0 & & \qquad\qquad\quad \hookrightarrow p + \pi^0 \end{array}. \tag{10,35}$$

Аналогично можно рассмотреть также процессы фоторождения двух мезонов и процессы рождения мезонов в нуклон-нуклонных столкновениях, например:

$$\gamma + p \to \pi^+ + \pi^0 + n \quad \text{и} \quad \gamma + n \to \pi^- + \pi^0 + p, \tag{10,36}$$

$$p + p \to n + \pi^+ + p \quad \text{и} \quad \bar{n} + p \to \bar{p} + \pi^+ + p, \tag{10,37}$$

$$p + p \to p + \pi^0 + p \quad \text{и} \quad \bar{p} + p \to \bar{p} + \pi^0 + p, \tag{10,38}$$

а в частном случае

$$\gamma + p \to \varrho^+ + n \quad \text{и} \quad \gamma + n \to \varrho^- + p, \tag{10,39}$$

$$p + p \to n + \Delta^{++} \quad \text{и} \quad \bar{n} + p \to \bar{p} + \Delta^{++}, \tag{10,40}$$
$$\hookrightarrow p + \pi^+ \qquad\qquad \hookrightarrow p + \pi^+$$

$$p + p \to p + \Delta^0 \quad \text{и} \quad \bar{p} + p \to \bar{p} + \Delta^0 \tag{10,41}$$
$$\hookrightarrow p + \pi^0 \qquad\qquad \hookrightarrow p + \pi^0.$$

Естественно ожидать, что асимптотика наступает в области энергий, превышающих массы частиц и резонансов. Если в этой области энергий мы не будем иметь равенство сечений для частиц и античастиц, то это будет веским основанием считать, что принцип микропричинности на малых расстояниях нарушается. Поэтому нам представляется весьма важной экспериментальная проверка асимптотических соотношений с достаточно высокой точностью.

Институт физики высоких энергий
Объединенный институт ядерных исследований

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. Я. Померанчук, ЖЭТФ **30**, 423 (1956); Л. Б. Окунь, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ **30**, 424 (1956).
2. D. I. Blokhintsev, Nucl. Phys. **31**, 628 (1962).
3. M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125**, 1067 (1962); Y. Neeman, Nucl. Phys. **26**, 222 (1961); R. F. Behrends and A. Sirlin, Phys. Rev. **121**, 324 (1964); M. I. Keda, S. Oqawa and Y. Ohnuki, Supl. Prog. Theor. Phys. **19**, 44 (1961).
4. А. А. Логунов, В. А. Мещеряков, А. Н. Тавхелидзе, ДАН СССР **142**, 317 (1962).
5. G. Chew and S. C. Frautschi, Phys. Rev. **126**, 2204 (1962); Phys. Rev. Letts. **7**, 394 (1961).
6. В. Н. Грибов, ЖЭТФ **41**, 667, 1962 (1961); В. Н. Грибов, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ **43**, 308 (1962).
7. G. Domokos, Nuovo cimento **23**, 1175 (1962); **26**, 1301 (1962).
8. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М., Гостехиздат, 1957; Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., Физматгиз, 1958.
9. R. Haag and B. Schroer, J. Amer. Math. Phys. **3**, 248 (1962).
10. L. Schwartz, Theorie des distribution, t. 1—2, Paris, 1950.
11. В. С. Владимиров, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **60**, 101 (1961).
12. И. Я. Померанчук, ЖЭТФ **34**, 725 (1958).
13. D. Amati, M. Fierz and V. Glaser, Phys. Rev. Letts. **4**, 89 (1960).
14. H. Lehmann, Nucl. Phys. **29**, 300 (1962).
15. S. Weinberg, Phys. Rev. **124**, 2049 (1961).
16. M. Sugawara and A. Kanazawa, Phys. Rev. **123**, 1895 (1961).
17. Y. Nambu and M. Sugawara, Phys. Rev. **132**, 2724 (1963).
18. Н. Н. Мейман, ЖЭТФ **43**, 2277 (1962).
19. Е. Титчмарш, Теория функции, М., Гостехиздат, 1951; Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М., Гостехиздат, 1941.
20. A. A. Logunov, Nguyen van Hieu, I. T. Todorov, and O. A. Khrustalev, Phys. Letts. **7**, 69, 71 (1963).
21. А. А. Логунов, Нгуен Ван Хьеу, И. Т. Тодоров, О. А. Хрусталев, ЖЭТФ **46**, 1079 (1964).
22. С. М. Биленький, Нгуен Ван Хьеу, Р. М. Рындин, ЖЭТФ **46**, 1098 (1964).
23. Nguyen Van Hieu, Phys. Letts. **9**, 81, 83 (1964).
24. O. W. Greenberg and F. E. Low, Phys. Rev. **124**, 2047 (1961).
25. M. Froissart, Phys. Rev. **123**, 1053 (1961).

26. T. Kinoshita, J. J. Loeffel and A. Martin, Phys. Rev. Letts. **10**, 460 (1963).
27. A. A. Logunov, Nguyen Van Hieu and Hsien Ting-Chang, Phys. Letts. **10**, 130 (1964).
28. Jogunov, Nguyen Van Hieu, I. T, Todorov, Nucl. Phys. **67** (3), 666 (1965).
29. L. Van Hove, Phys. Letts. **5**, 252 (1963).
30. W. Guttinger, Nuovo cimento **10**, 1 (1958).
31. Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ. **19**, 237 (1955).
32. Н. Н. Мейман, в сб. «Вопросы физики элементарных частиц», Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1963.
33. R. Jost and H. Lehmann, Nuovo cimento **5**, 1598 (1957).
34. F. J. Dyson, Phys. Rev. **110**, 1460 (1958).
35. H. Lehmann, Nuovo cimento **10**, 579 (1958).
36. J. Bros, A. Messiah and R. Stora, J. Math. Phys. **2**, 639 (1961).
37. J. Bros, H. Epstein and V. Glaser, Nuovo cimento **31**, 1265 (1964).
38. Н. Н. Мейман, ЖЭТФ **46**, 1039 (1964).
39. И. И. Левинтов, ЖЭТФ **42**, 191 (1962).
40. Л. Пузиков, Р. Рындин и Я. Смородинский, ЖЭТФ **32**, 592 (1957).
41. А. А. Логунов, Лю И-чень, И. Т. Тодоров и Н. А. Черников, Укр. матем. ж. **15**, 250 (1963).
42. А. А. Логунов, И. Т. Тодоров и Н. А. Черников, ЖЭТФ **42**, 1285 (1962).
43. N. Nakanishi, Progr. Theor. Phys. **21**, 135 (1959).
44. C. A. Levinson, H. J. Lipkin and S. Meskov, Nuovo cimento **23**, 236 (1962).
45. C. A. Levinson, H. J. Lipkin and S. Meskov, Nuovo cimento **25**, 307 (1962).
46. P. G. O. Freund, H. Ruegg, O. Speiser and A. Morales, Nuovo cimento **25**, 307 (1962).
47. В. М. Шехтер, ЖЭТФ **43**, 205 (1962).
48. C. A. Levinson, H. J. Lipkin and S. Meskov, Phys. Letts. **7**, 81 (1963).
49. D. Amati, T. Prentki and A. Stanghellini, Nuovo cimento **26**, 1003 (1962).
50. C. N. Yang, J. Amer. Math. Phys. **4**, 52 (1963).
51. A. A. Logunov and I. T. Todorov, Nucl. Phys. **10**, 552 (1959).
52. И. Т. Тодоров, НДВШ (физ.-матем. науки), № 5, 131 (1958).
53. А. А. Логунов и А. Н. Тавхелидзе, ДАН СССР **120**, 501 (1958).
54. Н. Н. Мейман **46**, 1502 (1964).
55. Лю И-чень и И. Т. Тодоров, ДАН СССР **148**, 806 (1963).